

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

GABRIEL LOUREIRO DE LIMA

**A Disciplina de Cálculo I do Curso de Matemática da
Universidade de São Paulo: um estudo de seu
desenvolvimento, de 1934 a 1994**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2012

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

GABRIEL LOUREIRO DE LIMA

**A Disciplina de Cálculo I do Curso de Matemática da
Universidade de São Paulo: um estudo de seu
desenvolvimento, de 1934 a 1994**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial
para obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Benedito
Antonio da Silva**

**São Paulo
2012**

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

AGRADECIMENTOS

À Capes, pelo auxílio financeiro.

Ao Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva pela brilhante orientação, constante apoio, dedicação, incentivo e principalmente pelas inúmeras lições a respeito do que é ser verdadeiramente um educador matemático.

Aos professores Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica, Dr. Antonio Carlos Brolezzi, Dra. Maria Ângela Miorim e Dra. Sônia Pitta Coelho que compuseram a banca examinadora deste trabalho e muito contribuíram com valiosas críticas e sugestões. À Profa. Dra. Maria Ângela Miorim, agradeço ainda pelas idéias que acabaram motivando a realização desta investigação.

Aos professores entrevistados no decorrer da pesquisa. Sem a disponibilidade, dedicação, compreensão e empenho destas pessoas, a realização deste trabalho não teria sido viável. Agradeço também os professores Wagner Rodrigues Valente e Maria Célia Leme da Silva por viabilizarem a consulta feita ao arquivo Ubiratan D'Ambrosio, pertencente ao GHEMAT – Grupo de História da Educação Matemática no Brasil.

À todos os professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, que, ao longo destes últimos quatro anos, muito colaboraram para minha formação como professor e principalmente como pesquisador. Dentre estes, agradeço especialmente a Prof. Dra. Célia Maria Carolino Pires, que me apresentou ao Programa e me pôs em contato com aquele que, posteriormente, viria ser meu orientador neste trabalho.

Aos colegas do Departamento de Matemática da PUC-SP pelo apoio e incentivo.

Agradeço especialmente à meus pais Carlos Vicente Loureiro de Lima e Martha Janete Loureiro de Lima por todo o investimento dispensado em minha formação, pelo constante incentivo e pelo apoio incondicional em todos os momentos de minha trajetória como estudante, desde o meu primeiro contato com a escola em 1986.

À minha irmã Maria Carolina Loureiro de Lima, parceira de todas as horas, sempre presente com sua amizade, carinho, compreensão e incentivo.

À toda minha família, com quem sempre pude contar, tanto nos momentos de realizações como nos de maiores dificuldades.

À todos os colegas que ingressaram comigo no doutorado em Educação Matemática da PUC-SP, em especial à Márcia Maioli, Harryson Júnio e José Messildo pelos muitos dias de estudos, discussões, trocas de idéias e diversão.

Às minhas grandes amigas Wanessa Carla Gazzoni e Tatiana Lança que, mesmo que muitas vezes à distância, nunca deixaram de me apoiar, incentivar e torcer pelo meu sucesso.

À Patrícia Gasparin, que além da imensa amizade, torcida, apoio e incentivo em todos os momentos, preenche minhas horas vagas com arte e me faz cantar.

À todos aqueles que, de alguma forma, colaboraram para a realização desta pesquisa, meu muito obrigado!

O autor

RESUMO

O presente estudo tem como objetivo analisar o desenvolvimento da disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral do curso de graduação em Matemática da Universidade de São Paulo, desde 1934, ano em que tal instituição foi fundada e nela foi implantado o primeiro curso superior de Matemática do país, até 1994, momento em que a disciplina de Cálculo I do curso de Licenciatura passou a ser oficialmente diferente daquela oferecida no Bacharelado. Por meio de entrevistas, realizadas de acordo com a metodologia da História Oral Temática, com pessoas envolvidas, em diferentes épocas, no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo na USP, pela análise de livros didáticos deste conteúdo adotados em diferentes momentos e pelos dados obtidos em documentos oficiais ou em pesquisas realizadas por outros estudiosos, verifica-se que, inicialmente, não havia no currículo do curso de Matemática da instituição investigada uma disciplina chamada Cálculo Diferencial e Integral. Implantou-se na USP o modelo europeu, no qual os conceitos usualmente estudados nesta disciplina eram trabalhados, já totalmente sistematizados, de maneira bastante formal e com alto nível de rigor, no curso de Análise Matemática, introduzido pelo matemático italiano Luigi Fantappiè em 1934 e ministrado aos alunos desde o momento em que estes ingressavam no ensino superior, em uma abordagem que seguia na contramão da história da constituição do Cálculo e da Análise como campos de conhecimento. Com o passar do tempo, razões de caráter didático, levaram alguns professores, em especial Elza Furtado Gomide, Omar Catunda e Carlos Benjamin de Lyra, a defenderem que, antes de estudar Análise, os alunos deveriam passar por um curso inicial de Cálculo, no qual os conceitos fossem abordados com um nível menos elevado de rigor e de forma mais manipulativa, idéia que culminou na introdução no curso de Matemática da instituição, em 1964, de uma disciplina chamada Cálculo Diferencial e Integral – que, na prática, foi conduzida ainda durante anos com uma orientação essencialmente analítica. O processo de transição de uma disciplina inicialmente de Análise para outra efetivamente de Cálculo – vista com frequência como uma pré-Análise – foi lento, gradual e repleto de idas e vindas, e seu detalhamento é um dos pontos-chaves desta investigação, que foca sua atenção também nas preocupações didáticas e nos níveis de rigor presentes, em diferentes épocas, nos cursos de Cálculo I da Matemática e nos manuais utilizados como referência pelos docentes dos mesmos. Para as análises apresentadas, não se recorre a uma teoria geral que embasa o estudo; em cada capítulo buscam-se considerações teóricas específicas referentes ao tema nele abordado. Percebe-se que, inicialmente, os professores não concebiam a existência de diferentes níveis de rigor e, portanto, não consideravam necessário adequá-lo ao público-alvo da disciplina que estava sendo ministrada. Paulatinamente, no entanto, passou-se a defender a adequação da forma como os conceitos eram apresentados, levando em conta a maturidade matemática dos estudantes, o curso no qual a disciplina estava inserida e o perfil do profissional que se desejava formar. Observa-se que grande parte das preocupações manifestadas pelos autores de livros-didáticos e pelos docentes da disciplina analisada esteve estreitamente relacionada com a intenção destes professores e/ou autores em dar condições aos alunos para que estes pudessem, de fato, compreender uma abordagem do Cálculo feita com níveis elevados de rigor e de formalismo. Além disso, verifica-se que a distinção entre a disciplina de Cálculo I da Licenciatura e do Bacharelado também se deu por razões didáticas: buscou-se oferecer aos licenciandos um primeiro curso que os possibilitassem rever, com uma abordagem que fosse mais adequada aos objetivos do ensino superior, conceitos já trabalhados na Educação Básica e que estes usualmente não dominam ao ingressar na universidade, e, ao mesmo tempo, introduzir os conteúdos específicos do Cálculo de forma mais apropriada ao futuro professor.

Palavras-Chave: Ensino Superior, Curso de Cálculo na Matemática da USP, Transição da Análise Matemática para o Cálculo, Preocupações Didáticas e Rigor.

ABSTRACT

The present study aims to analyze the development of early discipline of Differential and Integral Calculus in Mathematics graduation course of Universidade de São Paulo (USP) since 1934, when this institution was founded and in which the first Mathematics graduation course was implemented, until 1994, when the subject Calculus I of Teaching Course became officially different from that offered in the Bachelor. Through interviews, conducted in accordance with the methodology of Thematic Oral History, with involved people, in different years, in the process of teaching and learning of Calculus at USP, by the analysis of the textbooks contents used at different times and by the obtained data in official documents or in the researches done by other scholars, it is noticed that initially there was not in the curriculum of Mathematics course of the investigated institution a discipline called Calculus. It was implanted at USP the European model, in which the studied concepts in this discipline had been worked which formal an high level of rigor in the course of Mathematical Analysis, introduced by Italian mathematician Luigi Fantappiè in 1934 and taught to the students since they attended the higher education, by mean that followed against the historic development of Calculus and Analysis as fields of knowledge. As time passing, by didactic reasons, some professors, especially Elza Furtado Gomide, Omar Catunda e Carlos Benjamin de Lyra, were led to defend that before studying Analysis, students should go attend on initial course of Calculus, in which the concepts would be discussed with a lower level of rigor and more manipulative way, an idea that culminated in the introduction to the discipline called Differential and Integral Calculus in the Mathematics course of the institution in 1964. This discipline had been conducted essentially with analytical orientation for many years. The process of transition from Analysis to Calculus – often seen as a pre-Analysis - was slow, gradual, full of comings and goings and its detail is one of the aim to this research, which focuses its attention also in the didactic concerns and levels of rigor present in different years in the discipline of Calculus I and in the textbooks used as reference by professors. For the presented analyzes it has not recourse to a general theory that establishes the study; in it chapter specific theoretical considerations referring to studied theme are searched. In the beginning, it is noticed that the professors did not accept the existence of different levels of rigor then they did not consider necessary to adequate to the target public of the discipline that was being taught. Gradually, however, the adaptation of the way how the concepts were presented became to be defended, considering the mathematic maturation of the students, the course in which the discipline was inserted and the professional profile that would like to be formed. It is noticed that the most part of manifested concern by the authors of textbooks and by the professors of analyzed discipline was strictly related with the intention of these professors and/or the authors in giving conditions to the students in order to get, in fact, comprehension of the Calculus study done in high levels of rigor and the formalism. Furthermore, it may observed that the distinction between the discipline of Calculus I for Teaching Course and Bachelor's Degree also was given by didactical reasons: it was searched to offer to the future teachers an initial course that would enable them to review, with a way that was more suitable to the goals of higher education, concepts even studied in the Basic Education that students do not usually dominate them when they enter the university, and at the same time, introducing the specific contends of Calculus in a appropriated way to the future teacher.

Keywords: Higher Education, Calculus in Mathematics Graduation Course at USP, Transition of Mathematical Analysis to Calculus, Didactical Concerns and Rigor.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	10
CAPÍTULO 1 - TEMA DE PESQUISA E BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
1.1 – As origens do interesse pelo tema estudado	14
1.2 – Delimitando o problema de pesquisa e os objetivos desse trabalho	16
1.3 – Justificativas	21
1.4 – Breve revisão bibliográfica	27
CAPÍTULO 2 – METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	40
2.1 – O Cálculo visto como uma disciplina acadêmica universitária e alguns procedimentos metodológicos da História das Disciplinas adotados na pesquisa	40
2.2 - Metodologia e procedimentos metodológicos	44
2.2.1 - História Oral	45
2.2.2 – Análise das Textualizações das Entrevistas e dos Livros-didáticos	64
CAPÍTULO 3 - O ENSINO DE CÁLCULO NO BRASIL ANTES DE 1934, A FUNDAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO E O CURSO DE MATEMÁTICA DESTA INSTITUIÇÃO	74
3.1 – O Ensino Superior de Matemática no Brasil Antes da Fundação da USP	74
3.2 – Algumas considerações a respeito do ensino do Cálculo nas Escolas Militares do Rio de Janeiro e na Escola Politécnica de São Paulo no século XIX e início do século XX	76
3.3 - A criação da Universidade de São Paulo e de sua Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras	82
3.4 – O curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um breve histórico	88
3.4.1 – O início do curso e suas primeiras reformulações até a Reforma Universitária	88
3.4.2 – A implantação da Reforma Universitária em 1970	93
3.4.3 - As diferenças, ao longo do tempo, entre os cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da USP	98
CAPÍTULO 4 – A IMPLANTAÇÃO DA DISCIPLINA ANÁLISE MATEMÁTICA NA USP E A TRANSIÇÃO GRADUAL PARA UMA DISCIPLINA EFETIVAMENTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	102
4.1 – A constituição do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Matemática como campos de conhecimento	102
4.2 - O Cálculo Diferencial e Integral e a Análise Matemática como disciplinas acadêmicas universitárias	111
4.3 – O curso de Análise Matemática implantado na FFCL por Luigi Fantappiè	122

4.4 – A atuação de Catunda e Gomide e o primeiro movimento explícito em direção a uma disciplina efetivamente de Cálculo Diferencial e Integral	132
4.5 – A disciplina de Cálculo do curso de Matemática da USP a partir de 1964.....	158
4.5.1 – Os cursos ministrados antes da Reforma Universitária	158
4.5.2 – Os cursos ministrados entre a Reforma Universitária e a separação das disciplinas iniciais de Cálculo do Bacharelado e da Licenciatura em 1994	176
4.5.3 – Os cursos ministrados após a separação das disciplinas iniciais de Cálculo do Bacharelado e da Licenciatura em 1994.....	202
CAPÍTULO 5 – OS NÍVEIS DE RIGOR E AS PREOCUPAÇÕES DIDÁTICAS PRESENTES NOS CURSOS INICIAIS DE CÁLCULO DA MATEMÁTICA DA USP E EM SEUS LIVROS DE REFERÊNCIA	212
5.1 – As diferentes concepções de rigor, suas relações com a intuição e o surgimento das preocupações didáticas na universidade, em especial no ensino da Matemática	213
5.1.1 – O rigor no ensino da Matemática e, em especial, do Cálculo: concepções e posicionamentos de diferentes autores.....	213
5.1.2 - O início das reflexões de caráter didático no Ensino Superior e as tendências atuais	225
5.1.3 - As preocupações didáticas no ensino de Cálculo e de Análise	235
5.2 – Os níveis de rigor e as preocupações didáticas observadas nos cursos analisados e nos livros adotados como referências nos mesmos.....	246
5.3 – As modificações estruturais ocorridas a partir da década de 1990, dentre as quais a separação das disciplinas de Cálculo I da Licenciatura e do Bacharelado.....	388
CONSIDERAÇÕES FINAIS	402
REFERÊNCIAS.....	424
ANEXOS	436
ANEXO 1 - Breve biografia de Luigi Fantappiè	436
ANEXO 2 – Breve biografia de Omar Catunda	438
ANEXO 3 - Breve biografia de Elza Furtado Gomide	440
ANEXO 4 - Breve biografia de Carlos Benjamin de Lyra	442
ANEXO 5 - Carta de Cessão de Direitos de Uso das Entrevistas	444

APRESENTAÇÃO

Neste trabalho nos propusemos a investigar como se deu a implantação e o desenvolvimento da disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral ministrada aos alunos do curso de graduação em Matemática da Universidade de São Paulo, desde a fundação desta instituição, em 1934, até 1994, momento em que a disciplina de Cálculo I oferecida aos estudantes da Licenciatura se tornou oficialmente diferente daquela oferecida aos bacharelados.

Optamos por organizar esta investigação em dois grandes-eixos de análise, a saber: (i) como se deu o processo de transição de uma disciplina que, quando implantada, era de Análise Matemática, para outra realmente de Cálculo Diferencial e Integral e (ii) os níveis de rigor e as preocupações didáticas presentes nos cursos analisados e nos manuais que lhes serviram de referência. No decorrer do trabalho, percebemos que não seria necessário recorrer a uma teoria que embasasse todo o estudo que estava sendo realizado; necessitaríamos de considerações teóricas específicas a respeito dos eixos de análise citados. É por este motivo que não será apresentado um capítulo intitulado fundamentação teórica; tudo aquilo que nos serviu para embasar as análises feitas será apresentado no início daqueles capítulos tratando dos temas (i) e (ii).

Do ponto de vista metodológico, optamos por realizar entrevistas com pessoas que em determinado momento, sejam como estudantes ou como professores, estiveram envolvidas no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo no curso e instituição de interesse nesta pesquisa. Estas foram planejadas e realizadas segundo os princípios da História Oral Temática. Optamos também por analisar alguns livros-texto de Cálculo que nossos depoentes disseram ter utilizado quando eram alunos ou professores de tal disciplina, além de documentos oficiais e pesquisas anteriores. As análises dos dados foram feitas de acordo com o que Bolívar (2002) denomina de Análise Paradigmática, que, segundo o autor, é bastante semelhante à Análise de Conteúdo.

Por meio dos dados coletados, percebemos que, as preocupações didáticas manifestadas pelos professores em diferentes épocas, bem como cuidados deste tipo presentes nos livros utilizados por eles como referência, estiveram, na maioria das vezes, intimamente relacionados ao desejo de se fornecer aos estudantes condições para que estes pudessem, de fato, compreender abordagens bastante rigorosas e formais do Cálculo. A própria introdução desta disciplina no currículo do curso de Matemática da USP se deu em razão desse tipo de

preocupação. Inicialmente, quando a Universidade de São Paulo foi criada e nela foi implantando o primeiro curso superior de Matemática do país, não havia no currículo de tal curso de graduação uma disciplina chamada Cálculo Diferencial e Integral. Implantou-se o modelo europeu, no qual o aluno, ao ingressar no ensino superior, estudava diretamente Análise Matemática, disciplina na qual os conceitos de função, limite, derivada e integral eram trabalhados diretamente de maneira sistematizada, com altos níveis de rigor e formalismo. O italiano Luigi Fantappiè, responsável pela introdução desta disciplina no ensino superior brasileiro, trouxe para o país um curso que, na época, era tido como modelo de rigor e como sendo o mais adequado para a formação de um futuro matemático. Neste os procedimentos algorítmicos do Cálculo praticamente não tinham espaço e a ênfase, desde o momento em que o estudante ingressava na universidade, estava nos fundamentos e não na manipulação dos conceitos. Com o passar do tempo, no entanto, alguns professores, observando as dificuldades enfrentadas pelos alunos na disciplina de Análise, passaram a defender que, inicialmente, os mesmos deveriam passar por um curso de Cálculo, no qual os conceitos fossem trabalhados de forma mais manipulativa – mas nem por isso voltada somente à algoritmos - e com níveis de rigor mais condizentes com a maturidade matemática daqueles que estavam ingressando no ensino superior. Primeiramente, na disciplina de Cálculo o conteúdo deveria ser apresentado e manipulado para, posteriormente, na disciplina de Análise, ser minuciosamente criticado. Teve início então um processo de transição - que foi lento, gradual e repleto de idas e vindas - de uma disciplina que, inicialmente, era de Análise para outra, efetivamente de Cálculo, do qual o primeiro fruto oficial foi a renomeação da cátedra de Análise Matemática para Cálculo Infinitesimal, ocorrida em 1964. Tal mudança, no entanto, a princípio, não se refletiu no programa e na forma como o conteúdo era abordado; durante muito tempo, mesmo já chamando Cálculo I, a disciplina ainda esteve muito mais próxima de cursos atuais de Análise.

Notamos que, ao longo de toda a trajetória de seu ensino no curso de graduação em Matemática da USP, o Cálculo foi sempre visto como uma pré-Análise, um passo necessário para que os estudantes pudessem, de fato, compreender aquilo que iriam estudar mais adiante. Não houve a preocupação em voltar o Cálculo para o si mesmo, seus objetivos e especificidades. Além disso, é preciso salientar que o que se passou na USP, instituição que, durante muito tempo, serviu de modelo para cursos de Matemática de outras universidades, vai na contramão da história da constituição do Cálculo e da Análise como áreas de conhecimento. Historicamente, visando dar embasamentos rigorosos para processos do que hoje chamamos de Cálculo Diferencial e Integral é que se constituiu a Análise Matemática,

movimento inverso ao ocorrido no curso e instituição de interesse nesta pesquisa, em que buscou-se, inicialmente, ensinar diretamente a Análise aos estudantes e, frente às dificuldades enfrentadas pelos mesmos, percebeu-se que, antes de se ocuparem dos fundamentos, precisavam, por meio de uma disciplina de Cálculo, conhecer, manipular e se apropriar dos conceitos daquela área.

A distinção entre as disciplinas de Cálculo I da Licenciatura e do Bacharelado, que se deu, oficialmente, em 1994, também foi motivada por reflexões didáticas. Percebeu-se que, da maneira como estava organizada, a disciplina – que até então era ministrada conjuntamente aos licenciandos e aos bacharelados – não estava se mostrando adequada para a formação dos primeiros, uma vez que estes, em geral, são estudantes que ingressam no ensino superior com maiores dificuldades em relação à alguns tópicos trabalhados na educação básica e que, em razão disto, muitas vezes acabam enfrentando problemas no estudo da Matemática de nível superior. Buscou-se então reformular o curso de Cálculo I destinado a eles, de forma que os mesmos pudessem rever determinados conteúdos de uma maneira mais indicada aos objetivos do ensino universitário e, ao mesmo tempo, abordar os tópicos fundamentais da disciplina de acordo com uma orientação que fosse mais apropriada à formação dos futuros professores.

Tendo sido feita esta breve síntese dos objetivos dessa investigação e de alguns dos resultados obtidos por meio dos dados coletados, salientamos que o relatório de pesquisa aqui apresentado foi organizado em cinco capítulos, sendo que:

No capítulo 1, apresentamos as origens de nosso interesse pelo tema investigado, a delimitação do problema de pesquisa e dos objetivos do trabalho, considerações a respeito da relevância do tema escolhido e uma breve revisão bibliográfica.

No capítulo 2, inicialmente são apresentadas considerações a respeito do Cálculo visto como uma disciplina acadêmica universitária e de alguns procedimentos metodológicos da História das Disciplinas adotados no trabalho para, em seguida, se tratar da metodologia e dos procedimentos de coleta de dados utilizados na investigação.

No capítulo 3, em primeiro lugar, procuramos dar alguns indícios a respeito de como era o ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Brasil antes da fundação da Universidade de São Paulo, tomando como exemplos os cursos ministrados nas Escolas Militares do Rio de Janeiro e na Escola Politécnica de São Paulo. Na segunda parte do capítulo, tratamos da criação da Universidade de São Paulo e de sua Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras para, em seguida, apresentarmos um breve histórico do curso de Matemática desta instituição.

No capítulo 4, tratamos da implantação da disciplina Análise Matemática na USP e do processo gradual de transição para uma disciplina efetivamente de Cálculo Diferencial e Integral, sendo que, antes de apresentarmos os dados coletados, fazemos uma discussão teórica a respeito da constituição do Cálculo e da Análise como campos de conhecimento e como disciplinas acadêmicas universitárias.

No capítulo 5, apresentamos dados a respeito dos níveis de rigor e das preocupações didáticas presentes nos cursos iniciais de Cálculo da USP e nos livros que lhes serviram de referência. Antes, no entanto, de tratarmos destas questões, fazemos discussões teóricas referentes às diferentes concepções de rigor, suas relações com a intuição e o surgimento de preocupações didáticas na universidade, em especial no ensino da Matemática e, especificamente, no trabalho com as disciplinas de Cálculo e de Análise.

Encerrando, trazemos as considerações finais que pudemos fazer a respeito do tema estudado e, nos anexos, as biografias de alguns professores que tiveram papel de destaque na trajetória da disciplina investigada e o modelo da carta de cessão dos direitos de uso das entrevistas que foi assinado por cada um dos depoentes ouvidos neste estudo. A versão impressa deste relatório de pesquisa traz ainda um encarte contendo um CD-ROM com as textualizações de todas as entrevistas realizadas.

CAPÍTULO 1 - TEMA DE PESQUISA E BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste primeiro capítulo trataremos, inicialmente, dos motivos que nos levaram a estudar o tema em questão. Em seguida, delimitaremos o problema de pesquisa, os objetivos do estudo e comentaremos a respeito da pertinência deste tipo de investigação para a Educação Matemática. Apresentaremos, ainda, a revisão de literatura que realizamos ao iniciarmos essa pesquisa, comentando brevemente sobre alguns trabalhos que nos serviram de referência.

1.1 – As origens do interesse pelo tema estudado

Em 1998, ao ingressarmos na graduação em Matemática da Universidade de Campinas (UNICAMP), fomos alunos da primeira turma de tal curso a participar de uma nova proposta para as disciplinas introdutórias de Cálculo, chamada *Cálculo com Aplicações*, que, desde 1990, havia sido introduzida nas turmas de Engenharia daquela universidade. Esta proposta adotava como metodologia o ensino por meio de projetos, aliado ao uso do computador e ao livro-texto. Na época, tínhamos consciência de que estávamos participando de algo novo porque a dinâmica da disciplina era totalmente diferente da observada nas demais.

Naquele momento, não tínhamos maturidade matemática e muito menos conhecimentos didáticos para avaliarmos as vantagens e desvantagens daquela experiência que estávamos vivenciando, mas percebíamos que tal maneira diferenciada de trabalhar com os conceitos do Cálculo não era algo unânime no Departamento de Matemática. Muitos professores viam-na com desconfiança e outros pregavam que aquela disciplina deveria voltar a ser ensinada da maneira como era feita quando eles eram estudantes, dando maior ênfase ao rigor, ao formalismo e aos resultados teóricos ao invés de enfatizar as técnicas, as aplicações e o uso das novas tecnologias. Segundo eles, era por meio da ‘forma tradicional’ que os alunos verdadeiramente aprendiam tal conteúdo. Passamos, então, a nos interessar por essa questão do ensino do Cálculo e percebemos, por meio de nossa própria experiência como alunos, pelo desempenho de nossos colegas de turma e, posteriormente, dando aulas particulares da disciplina, que seu ensino e aprendizagem não eram tarefas simples.

Paralelamente as disciplinas do currículo do Bacharelado em Matemática, resolvemos cursar também as disciplinas da Licenciatura e nas aulas na Faculdade de Educação

começamos a tomar conhecimento que muitas pesquisas referentes ao ensino de Cálculo estavam sendo feitas na área de Educação Matemática, que havia, há muito tempo e no mundo todo, grupos de pesquisadores buscando meios de amenizar os problemas observados no ensino e aprendizagem desta disciplina. Mas, então, por que nossos professores diziam que antigamente tudo ia bem nos cursos de Cálculo?

Permanecemos, durante toda nossa graduação, ouvindo alguns professores reclamarem de erros conceituais gravíssimos que muitos alunos cometiam nas provas do curso inicial de Cálculo e, invariavelmente, as conclusões eram: “os alunos não têm base” ou, o que nos deixava mais intrigados, “da maneira como este assunto era ensinado na época em que eu era estudante esses problemas não aconteciam” ou ainda “o livro que era adotado fazia com que aprendêssemos de verdade”. No fundo, estes comentários nos deixavam com a sensação de que nossos professores queriam dizer que, antigamente, se ensinava Cálculo e, por esta razão, o aluno aprendia e que, hoje em dia, como não se ensina tal disciplina, os alunos não a aprendem.

Passamos então a nos questionar: que Cálculo era esse ensinado antigamente e que hoje em dia não se ensina mais? No que a disciplina ensinada antigamente diferia da atual? No conteúdo? No nível de rigor e de formalização? Nos tipos de preocupações didáticas dos professores? Nos livros-textos adotados? Mas, se essa forma de trabalhar com tal conteúdo era eficiente, por que foi substituída? Por que os professores passaram a buscar maneiras diferenciadas de trabalhar com este assunto se a maneira como faziam antigamente funcionavam tão bem? A partir de que momento seu processo de ensino e aprendizagem se tornou tão complicado e por que razão isto ocorreu? Essas e outras questões passaram a nos inquietar, principalmente no final de nossa graduação.

Nosso interesse pela Educação Matemática aumentou e planejamos fazer pós-graduação nesta área. Porém, ao terminarmos o bacharelado, as coisas se encaminharam de outra forma e acabamos optando por fazer o mestrado na Matemática. No entanto, como nossa área de interesse não era apenas a Matemática pura e sim o ensino desta ciência, principalmente no nível superior, fomos buscar, para que nos orientassem, pessoas do Departamento de Matemática que também tivessem essa preocupação. Acabamos desenvolvendo um trabalho sob a orientação de nossas antigas professoras de Cálculo, as responsáveis pelo projeto Cálculo com Aplicações, Vera Lúcia Xavier de Figueiredo e Sandra Augusta Santos. Embora o assunto trabalhado em nossa dissertação não tenha sido o ensino de Cálculo – afinal era um trabalho de Matemática pura, ainda que com alguns elementos voltados para o ensino – pudemos perceber, convivendo com elas e conhecendo com maior

profundidade o trabalho que desenvolviam, que a questão do ensino e aprendizagem desta disciplina era ainda mais complicada do que imaginávamos. Nossas inquietações a esse respeito, embora estivessem em segundo plano nesse momento, só aumentavam.

Ao concluirmos o mestrado, percebemos que nossa vocação maior não era fazer pesquisas em Matemática; poderíamos contribuir mais consideravelmente no campo da Educação Matemática e, então, decidimos dar sequência aos nossos estudos nesta área. No momento de elaborarmos um projeto de pesquisa para o doutorado, tivemos a certeza, desde o início, que trabalharíamos com o ensino e a aprendizagem do Cálculo. Surgiu, então, a possibilidade de sermos orientados pelo professor Benedito Antonio da Silva, um dos integrantes do grupo de pesquisa “*O elementar e o superior em Matemática*” da PUC-SP e coordenador do projeto “*Componentes do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo: saber, aluno e professor*”, desenvolvido por este mesmo grupo, e que tem como proposta investigar as componentes envolvidas no ensino e aprendizagem do Cálculo, a saber: o aluno ingressante nos cursos de exatas, o professor da universidade, o professor da educação básica e as dificuldades inerentes aos conteúdos a serem estudados. Decidimos, então, propor um tema de estudo que se inserisse no projeto desse grupo de pesquisa.

Foi dessa forma que nasceu a pesquisa aqui apresentada; do nosso desejo de compreender que Cálculo era aquele ensinado antigamente, cuja retomada era defendida por muitos de nossos professores de graduação como solução para os problemas atuais no ensino e aprendizagem desta disciplina. Afinal, o que havia de tão diferente nos cursos mais antigos? Eram diferenças nos conteúdos trabalhados? No nível de rigor ou de formalização adotado? Ou será que o que diferia era a maneira como os conteúdos eram abordados e as preocupações didáticas dos docentes responsáveis por estes cursos? Ou ainda, será que as referências bibliográficas adotadas na época é que possibilitavam aos alunos um aprendizado efetivo dos conteúdos tratados? Sentíamos a necessidade de tentar compreender estes aspectos e perceber a partir de que momento o processo de ensino e aprendizagem do Cálculo passou a preocupar os professores das universidades brasileiras e a que se referiam essas preocupações.

1.2 – Delimitando o problema de pesquisa e os objetivos desse trabalho

Na tentativa de buscar respostas às dúvidas e inquietações citadas, resolvemos, então, investigar a trajetória da disciplina de Cálculo ministrada aos alunos do curso de Matemática da Universidade de São Paulo, esboçando um panorama de seu ensino entre 1934 e 1994.

Optamos por analisar a implantação e o desenvolvimento da disciplina especificamente no curso de Matemática porque este curso, de uma forma ou de outra, forma professores - sejam eles professores da educação básica (os licenciados) ou do ensino superior (os bacharéis que, na maioria das vezes, acabam atuando também como docentes) – e, portanto, a formação recebida pelos seus egressos acaba influenciando no processo de ensino e aprendizagem de Matemática em todos os níveis escolares. Afinal, conforme destaca Reis,

O professor de Matemática, tanto do ensino fundamental como do médio, é formado pela universidade no curso de Licenciatura em Matemática. Seus formadores também são professores de Matemática, só que do ensino superior, obviamente. Formados por quem? Por outros professores de Matemática do ensino superior. (REIS, 2001, p. 81).

Embora a influência exercida pela qualidade do ensino dispensado aos alunos do curso superior de Matemática em todos os outros níveis escolares pareça evidente, é interessante observar que, a maioria dos professores das universidades, ao serem questionados a respeito do baixo desempenho dos alunos na disciplina de Cálculo, afirma que:

As causas são muitas e já bem conhecidas, principalmente a má formação adquirida durante o 1º e 2º graus, de onde recebemos um grande contingente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com pouca capacidade crítica, sem hábitos de estudar e, conseqüentemente, bastante inseguros. (BARRETO, 1995, p.4).

Quando, no entanto, “os próprios professores universitários são responsáveis pela formação dos professores dos ensinos fundamental e médio que, por sua vez, são os responsáveis pela formação dos alunos que (mal preparados) ingressam na universidade” (REIS, 2001, p.22).

Portanto, como nosso objetivo nessa pesquisa era analisar as transformações ocorridas, ao longo do tempo, no ensino do Cálculo, realmente nos pareceu bastante apropriado, de acordo com o que apresentamos nos dois últimos parágrafos, optarmos por estudar sua trajetória no curso de Matemática, já que as pessoas nele envolvidas acabam tendo influência tanto no ensino superior (formando futuros professores para as universidades) quanto na educação básica (formando professores do ensino básico que darão aula para os futuros alunos de Cálculo das universidades). E certamente a qualidade da formação dos professores e a bagagem matemática dos ingressantes nas universidades influenciaram e continuam influenciando a forma como os cursos desta disciplina são conduzidos e as transformações neles observadas no decorrer dos anos.

Escolhemos analisar o caso da Universidade de São Paulo por nesta instituição ter sido implantado, logo na sua fundação em 1934, o primeiro curso superior de Matemática do

Brasil e também porque, durante muito tempo, esse curso serviu de modelo para os outros que funcionavam no país. Desta forma, é importante destacar que nosso objetivo principal não é analisar como era o Cálculo na USP entre 1934 e 1994 e sim perceber como era o Cálculo que se ensinava neste período. O curso da USP não é somente característico daquela instituição; é um curso de uma universidade que, em certa época, foi referência e parâmetro para outras. É claro que há algumas particularidades institucionais; isto é inevitável, mas, novamente frisamos que o objetivo central desse estudo é saber como era o Cálculo ensinado em um determinado período.

Tomamos o ano de 1934 como sendo o ponto de partida para essa pesquisa porque em tal data, como já dissemos, foi implantado, na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP, o primeiro curso superior de Matemática do país. Por outro lado, o ano de 1994 foi tomado como ponto final de nosso estudo por ter sido naquele momento que, oficialmente, a primeira disciplina de Cálculo (conhecida, normalmente, como Cálculo I) cursada pelos alunos da Licenciatura em Matemática se tornou diferenciada daquela oferecida aos alunos do Bacharelado, tornando explícita uma diferenciação entre o curso inicial de Cálculo que se julgava necessário para formar o professor daquele considerado adequado para formar o bacharel. Embora nosso trabalho, de acordo com o período de estudo considerado, diga respeito à época em que o Cálculo considerado ideal para a formação do professor ainda era o mesmo que o considerado ideal para a formação do bacharel, é claro que traremos também algumas análises, ainda que breves, a respeito de como ficou o ensino de tal disciplina após esta diferenciação ocorrida em 1994, destacando os motivos de tal separação, as principais modificações trazidas por ela aos programas dos cursos de Cálculo I tanto do Bacharelado quanto da Licenciatura e as mudanças percebidas desde então, até os dias atuais.

Conforme será explicado com maiores detalhes no decorrer desse trabalho, a disciplina atual de Cálculo Diferencial e Integral ministrada aos alunos da Matemática da USP teve origem naquela de Análise Matemática implantada nesta instituição, em 1934, pelo matemático italiano Luigi Fantappiè. Esta disciplina de Análise, extremamente abstrata, conduzida com altos níveis de rigor, enfatizando a formalização do conteúdo e sem muita preocupação explícita com a manipulação de técnicas de cálculo foi, pouco a pouco, se modificando, adotando um nível de rigor mais adequado à maturidade matemática dos ingressantes no ensino superior e dando maior ênfase, em um primeiro momento, à manipulação e aos significados dos conceitos trabalhados, os quais seriam reapresentados – e aí sim com um nível mais alto de rigor e de maneira ainda mais formal – em outro curso. A partir de 1964, a cátedra Análise Matemática passou a se chamar Cálculo Infinitesimal e esse

curso introdutório, no qual os conteúdos de função, limite, derivada e integral eram apresentados aos alunos que estavam ingressando na universidade, passou a ser chamado de Cálculo I; até 1964 não havia no currículo do curso de Matemática da USP uma disciplina chamada Cálculo; os alunos cursavam diretamente Análise Matemática. A partir desta data, ocorre uma inversão: durante algum tempo, passa a não haver mais no currículo uma disciplina chamada explicitamente Análise Matemática ¹; durante os três anos de graduação, os alunos fazem cursos de Cálculo. No curso do segundo ano, além de serem apresentados conteúdos ainda não estudados pelos alunos, aqueles apresentados no Cálculo I eram revistos com um nível mais alto de rigor e de formalização, colocando em prática uma idéia já presente entre alguns professores da USP, como veremos ao longo deste relatório de pesquisa, desde meados da década de 1950: primeiramente apresentar os conteúdos do Cálculo de maneira mais manipulativa, menos formal e com um nível mais moderado de rigor e, posteriormente, retomá-lo de forma mais rigorosa, mais crítica, mais analítica. Conforme discutiremos ao longo do texto, mesmo após esta troca de nomes, demorou até que a disciplina ministrada aos ingressantes na universidade tivesse, de fato, um caráter efetivamente de Cálculo e se assemelhasse aos cursos atuais; permaneceu, durante muito tempo, com características mais comuns aos cursos de Análise.

Esse processo de mudança de caráter da disciplina em que os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral eram vistos pela primeira vez pelos alunos ingressantes foi tomado como um dos focos de análise dessa pesquisa. Buscamos tentar compreender como se deu, historicamente, na USP, essa movimentação da Análise Matemática para o Cálculo. Além disso, procuramos analisar o nível de rigor dos cursos estudados, tentando compreender, por exemplo, de que forma ele se relacionou ou não com algumas inovações didáticas observadas e de que maneira este rigor modificou ou não a prática das aulas de Cálculo Diferencial e Integral. Um terceiro elemento tomado como central em nossas análises foi a questão das preocupações didáticas; procuramos perceber a partir de quando e por quais razões os professores de Cálculo começaram a manifestar, de maneira mais explícita em seus cursos, preocupações com o ensino e aprendizagem do conteúdo que estavam ministrando, com a forma como as aulas eram conduzidas, com o papel do aluno em seu próprio aprendizado, dentre outros aspectos.

Estabelecemos então a seguinte questão de estudo que dirigiu nossa investigação:

¹ No capítulo 4 daremos maiores detalhes a este respeito.

De que maneira a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral foi implantada no curso de Matemática da Universidade de São Paulo, de que forma se modificou, ao longo dos anos, em termos do nível de rigor e das preocupações didáticas e como se transformou, de uma disciplina inicialmente de Análise Matemática, em outra efetivamente de Cálculo Diferencial e Integral?

Nossos objetivos ao realizar esse estudo foram, dentre outros:

- Analisar as formas como os conteúdos de Cálculo eram apresentados aos alunos nas diferentes épocas e as modificações ocorridas ao longo dos anos;
- Verificar quais eram as preocupações didáticas dos professores que ministravam os cursos analisados, o enfoque dado aos conteúdos, o nível de rigor adotado nas diferentes épocas e o surgimento de propostas alternativas para o ensino do Cálculo;
- Analisar, quando possível, os materiais indicados como referência durante tais cursos;
- Verificar, na medida do possível, de que forma as idéias apresentadas nesses cursos foram difundidas e incorporadas nas práticas dos professores do Instituto de Matemática que os vivenciaram como alunos.

Para tentarmos atingir estes objetivos, optamos por duas formas de busca de dados (que serão detalhadas no Capítulo 2):

a) Entrevistamos, de acordo com os princípios da metodologia da História Oral Temática, professores e ex-professores da Universidade de São Paulo que, de alguma forma, participaram e/ou ainda participam do processo de ensino e aprendizagem das disciplinas de Cálculo no curso de Matemática daquela instituição. Podemos dividir nossos depoentes nas seguintes três categorias:

- Professores graduados pela USP que tiveram contato com as disciplinas de Cálculo apenas quando alunos de seus respectivos cursos de graduação (os professores Ubiratan D'Ambrosio, João Zanetic e Nina Sumiko Tomita Hirata);
- Professores graduados pela USP que, depois de formados, em algum momento de suas carreiras profissionais, ministraram disciplinas de Cálculo no curso de Matemática daquela mesma instituição; (os professores Elza Furtado Gomide, Ana Catarina Pontone Hellmeister, Maria Cristina Bonomi², Sônia Pitta Coelho, Vera Helena Giusti de Souza, Zara Issa Abud, Eduardo do Nascimento

² Esta professora assinava Maria Cristina Bonomi Barufi e atualmente assina apenas Maria Cristina Bonomi.

Marcos, Cláudia Cueva Cândido, Alegria Gladys Chalom, Cristina Cerri, Oswaldo Rio Branco Oliveira, Vitor de Oliveira Ferreira, Fernanda Pinto Cardona);

- Professores que não se graduaram pela USP, mas que, em algum momento, deram cursos de Cálculo na graduação em Matemática daquela instituição (o único representante desta categoria é a professora Iole de Freitas Druck).
- b) Analisamos, brevemente, alguns livros didáticos que nossos depoentes afirmaram ter utilizado quando alunos e/ou quando professores da disciplina inicial de Cálculo ministrada aos graduandos em Matemática pela Universidade de São Paulo. Optamos por realizar também esta breve análise de alguns manuais de ensino porque, de acordo com Reis (2001, p. 91), ao pensarmos nos currículos dos cursos de Cálculo, não podemos desprezar o papel fundamental dos livros didáticos no desenho destes currículos, já que estes e seus mais renomados autores exerceram grande influência no ensino dessa disciplina. Além disso, assim como Barufi (1999, p. 7-8), entendemos que o livro didático, adotado pelo professor como referência ou suporte para seu curso, nos dá fortes indícios da maneira como este será conduzido, do tratamento que será dado à disciplina. A eleição de seu livro predileto, dentre o grande número de manuais contemplando o Cálculo Diferencial e Integral, é importante e significativa, pois, por meio dela, o professor deixa transparecer algumas de suas preocupações, crenças e escolhas metodológicas; “revela sua concordância, em linhas gerais, com a maneira pela qual o Cálculo deverá ser trabalhado, a fim de obter os resultados esperados” (p. 51). A autora destaca ainda que, de acordo com os critérios do professor, a utilização do livro didático “poderá ser um instrumento mais ou menos facilitador do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo, no sentido de propiciar maior ou menor vivência dos significados que podem otimizar a construção do conhecimento” (p. 147).

Mas qual a importância, a pertinência, para o campo da Educação Matemática, de realizarmos uma pesquisa como essa aqui apresentada? É disso que trataremos em seguida.

1.3 – Justificativas

Durante muito tempo, acreditou-se que o aluno que ingressava na universidade, por ter optado por uma carreira que lhe agradava, inserida em uma área de estudos de seu interesse,

já estaria suficientemente motivado para aprender os conteúdos das disciplinas constituintes da grade curricular de seu curso de graduação e, portanto, bastava o professor ministrar suas aulas que o aluno aprenderia, não sendo necessárias grandes preocupações do ponto de vista didático. Essa idéia está presente de maneira bastante explícita na caracterização do ensino superior feita por André Chervel em seu texto referente à História das Disciplinas Escolares:

O que caracteriza o ensino de nível superior, é que ele transmite diretamente o saber. (...) O mestre ignora aqui a necessidade de adaptar a seu público os conteúdos de acesso difícil, e de modificar esses conteúdos em função das variáveis de seu público: nessa relação pedagógica, o conteúdo é uma invariante. Todos os seus problemas de ensino se remetem aos problemas de comunicação: eles são, quando muito, de ordem retórica. E tudo que se solicita do aluno é “estudar” esta matéria para dominá-la e assimilá-la. (...) Alcançada a idade adulta, ele [o estudante] não reivindica didática particular a sua idade. (CHERVEL, 1990, p. 185).

No entanto, o desempenho dos alunos nas disciplinas presentes nos currículos dos cursos superiores começou a dar indícios de que a questão do processo de ensino e aprendizagem no nível universitário não era tão simples quanto se pensava e o ensino superior também se tornou alvo de pesquisas na área de Educação ao redor do mundo todo.

De qualquer forma, o interesse por questões referentes ao ensino e aprendizagem de Matemática nos cursos superiores é mais recente que o interesse por discussões semelhantes em outros níveis de ensino. A este respeito, Niss (2000, p. 39) comenta que uma das características observadas no desenvolvimento da Educação Matemática como área de pesquisa é o aumento gradual de seu campo de visão, abarcando, cada vez mais, níveis diferentes de ensino. No início, os objetos e fenômenos estudados diziam respeito essencialmente à escola primária (ao longo de todo o século 20) e ao ensino secundário (desde os anos 1960), mas, aos poucos, questões referentes ao ensino e aprendizagem de Matemática em outros níveis também passaram a ser abordados. Nas décadas de 1970 e 1980 ganham impulso estudos tratando da formação de professores e da educação pré-escolar, enquanto que as pesquisas enfocando o ensino superior em geral começam a se destacar nas décadas de 1980 e 1990. Hoje, a Educação Matemática no nível superior é um item crescente nas pesquisas realizadas em todo o mundo.

No Brasil, um importante passo para a consolidação deste tipo de investigação, foi dado em novembro de 2000, com a criação do Grupo de Trabalho de Educação Matemática no Ensino Superior (G4), da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Tal grupo se reuniu, desde então, durante os encontros nacionais (ENEM) organizados pela SBEM, nos anos de 2001, 2004, 2007 e 2010, durante os seminários internacionais (SIPEM)

de 2003, 2006 e 2009 e durante a XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM) realizada em 2011. Dentre as principais questões discutidas por tal Grupo de Trabalho estão algumas referentes ao ensino da Matemática nos diversos cursos de graduação (Qual o papel da Matemática no Ensino Superior? Como o aluno se relaciona com a Matemática formal? Como abordar tal Matemática? Que estratégias o aluno utiliza para aprender Matemática?) e outras a respeito do papel do professor (Que professor deve ser formado e que reflexões esse professor tece a respeito de sua prática? Em que consiste a pesquisa sobre a própria prática e seu sentido no Ensino Superior? Que metodologias de ensino-aprendizagem se apresentam para o desenvolvimento da Matemática no Ensino Superior e como se inserem nesse contexto as Tecnologias de Informação e Comunicação?). As pesquisas apresentadas e discutidas no Grupo de Trabalho ao longo de seus vários encontros foram reunidas por Frota & Nasser (2009) em um livro que engloba trabalhos de pesquisadores de diversas instituições de ensino do país e busca contemplar um pouco das especificidades da Educação Matemática no Ensino Superior.

Apesar dos atuais avanços, ainda se percebe certa resistência por parte de alguns professores dos institutos de Matemática de determinadas universidades brasileiras com relação a questões referentes às aulas ministradas nos cursos de graduação, quando, de acordo com Iglioni (2009, p. 11), “o que as pesquisas têm revelado é que as dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática não dependem do nível de ensino e merecem a atenção de forma igual”. Por considerarmos de fundamental importância essa discussão a respeito do ensino nos cursos universitários, apontamos que uma primeira justificativa para a realização deste estudo seja trazer outros elementos para as reflexões referentes à Educação Matemática no ensino superior.

No foco deste estudo está a disciplina Cálculo Diferencial e Integral que, por ser um curso básico nas graduações em ciências exatas, envolve ano a ano milhares de alunos e dezenas de professores em cada instituição e representa a transição da Matemática da escola básica para a Matemática do ensino superior. Dependendo da maneira como é feita, esta passagem pode ser traumática para grande parte dos alunos, tanto que o curso de Cálculo é o responsável pela maior parte das reprovações e evasões escolares no início dos cursos superiores da área de Ciências Exatas. E este fato não agrada nem aos professores e nem aos alunos, tanto é que, atualmente, de acordo com Rezende (2003, p. 1), muito se tem falado, no meio acadêmico, a respeito do “fracasso no ensino do Cálculo” e, segundo Baldino (1995, p. 3), pesquisadores da Educação Matemática têm se preocupado cada vez mais com o cenário

dos cursos desta disciplina, preocupação esta também destacada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), por meio de seu boletim informativo número 6 do ano de 1995:

O ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes dos primeiros períodos, matriculados nesta disciplina. (p. 4).

De acordo com Rezende (2003), os problemas no ensino e aprendizagem desse ramo da Matemática não são recentes: “se investigarmos a origem histórica do tal fracasso verificaremos que este tem início desde o momento em que se começa a ensinar Cálculo” (p. 1). O mesmo autor destaca que a sensação de desconforto com a forma como a disciplina vem sendo ensinada e os resultados que este ensino tem produzido não são características exclusivas de determinados locais ou determinadas instituições e que, por esta razão, enganam-se aqueles que atribuem tal problema a realidade cultural ou sócio-econômica da sociedade brasileira, afinal, “a situação do ensino do Cálculo nos países “desenvolvidos” não é muito diferente, visto que trabalhos sobre este tema têm sido publicados e recebido merecido destaque por parte da literatura especializada internacional” (p. 3).

Um exemplo da inquietação internacional com relação ao ensino e a aprendizagem do Cálculo foi o movimento, iniciado na década de 1980, que ficou conhecido como *Calculus Reform* e que propunha, como o próprio nome já diz, uma reformulação na maneira como a disciplina vinha sendo ensinada. De acordo com Rezende:

Tal movimento teve como elemento deflagrador um polêmico documento do famoso matemático Peter Lax, que atacava os cursos de Cálculo da época. (...) O “Calculus Reform” tem como características básicas: o uso de tecnologia, isto é, software computacional e calculadoras gráficas, tanto para o aprendizado de conceitos e teoremas como para a resolução de problemas; o ensino via a “Regra dos Três”, isto é, todos os tópicos e todos os problemas devem ser abordados numérica, geométrica e analiticamente; grande preocupação, ou pretensão, em mostrar a aplicabilidade do Cálculo através de exemplos reais e com dados referenciados; tendência a exigir pouca competência algébrica por parte dos alunos, suprimindo essa falta com o treinamento no uso de Sistemas de Computação Algébrica. (REZENDE, 2003, p. 4).

Outras pesquisas internacionais englobando essa questão do ensino e aprendizagem do Cálculo vêm sendo feitas, desde meados da década de 1980, por um grupo de pesquisadores que têm como principal área de interesse o *Pensamento Matemático Avançado*. Tall, Dreyfus, Dubinsky, Sfard e Vinner estão entre os principais articuladores desse campo de investigação, cujas preocupações “giram em torno das dificuldades encontradas nas aprendizagens dos

conceitos básicos do Cálculo, tendo a psicologia cognitiva como pano de fundo para as suas análises epistemológicas” (Ibid, p. 3-4).

Além de questões relacionadas ao Pensamento Matemático Avançado, as pesquisas a respeito do processo de ensino do Cálculo têm se concentrado, de acordo com Rezende (2003), em torno das seguintes temáticas: o uso do computador como ferramenta didática; o estabelecimento de relações entre os problemas de aprendizagem do aluno e seus desejos; os papéis do professor e do aluno no processo de construção de significados para os conceitos tratados no curso de Cálculo; sugestões de mudanças – por razões históricas ou argumentos de natureza epistemológica - no conteúdo programático da disciplina; interpretação das dificuldades de aprendizagem do Cálculo em termos de obstáculos epistemológicos de certos conceitos desta disciplina (por exemplo, trabalhos de Anna Sierpinska e Bernard Cornu); etc.

No Brasil, especificamente, de acordo com Souza Junior (2000), a discussão sobre o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo também não é recente e os temas mais abordados têm sido: a motivação dos alunos, o desenvolvimento da criatividade, autonomia e raciocínio por parte do aluno e a utilização da História do Cálculo, da Modelagem Matemática, do trabalho com projetos e do computador como recursos didáticos.

Apesar desses esforços dos pesquisadores, os problemas no ensino da disciplina em questão neste trabalho persistem e “é comum em nossas universidades a reclamação, por parte de alunos ou por parte de professores de outras áreas, da inexistência de esforços para tornar o Cálculo interessante ou útil” (SOUZA JUNIOR, 2000, p. 19), quando, na verdade, os professores envolvidos em seu processo de ensino deveriam ter em mente que o curso introdutório de Cálculo deveria proporcionar aos alunos “uma primeira visão mais ampla e global de como o conhecimento matemático pode ser articulado, resolvendo um grande número de problemas reais” (BARUFI, 1999, p. 4). Conforme destaca Rezende:

Curioso é observar (...) que se, por um lado, no processo histórico de construção do conhecimento matemático, o Cálculo potencializa áreas fundamentais como a geometria e a aritmética, além de ser o principal responsável pelo desenvolvimento e organização do próprio conhecimento matemático, no campo pedagógico, resta-lhe apenas o papel de “grande vilão” no ensino superior. O Cálculo aparece aí como uma disciplina isolada, temida pelos alunos que sequer vêem uma relação do aprendizado de suas idéias básicas com sua formação ou mesmo com as demais disciplinas da grade curricular do seu curso. (REZENDE, 2003, p. 32).

Acreditamos, então, que uma segunda justificativa para a realização da pesquisa aqui apresentada seja acrescentar outros elementos a esta discussão do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo, discutir aspectos que porventura ainda não tenham sido trazidos à

tona em estudos anteriores e que, talvez, uma pesquisa como esta - de caráter histórico e que se baseia primordialmente em depoimentos de professores envolvidos no processo de ensino do Cálculo Diferencial e Integral em uma instituição que serviu de modelo para outras no período estudado - possam revelar; elementos que, talvez, possam auxiliar na compreensão da trajetória desta disciplina no ensino superior brasileiro.

Outro aspecto que poderia ser utilizado para justificar a realização desta pesquisa é que por meio da análise, ao longo do tempo, de diferentes cursos iniciais de Cálculo ministrados por diferentes professores, estaremos, mesmo que indiretamente, analisando a prática desses docentes que conduziram tais cursos e, segundo Souza Junior (2000, p.3), “a literatura atual (...) aponta para a necessidade de se realizar investigações sobre o que é produzido na prática cotidiana do professor”.

Além disso, ao elaborarmos uma coletânea histórica de possíveis propostas diferenciadas adotadas no ensino de Cálculo ao longo dos anos, promoveremos uma maior divulgação das mesmas entre docentes e alunos de várias universidades, possibilitando a abertura de um debate a respeito dessas experiências vivenciadas, e, segundo Vasconcelos,

Criar um espaço de debates, para avaliação e análise das experiências vivenciadas por seu corpo docente, é um primeiro e vigoroso passo para a efetivação não só da “troca” de experiências e da efetiva colaboração profissional entre professores, mas seguramente da sistematização das diversas práticas pedagógicas, muitas delas criativas e originais, postas em prática na Universidade em seus diversos cursos, com sucesso, porém restritas ao conhecimento de um contingente mínimo de pessoas (apenas o professor e suas turmas). (VASCONCELOS, 1996, p.52).

Veiga, Resende & Fonseca (1998, p.1) destacam que as propostas diferenciadas de ensino “mais que experimentos e tentativas individuais devem buscar a composição de um projeto coletivo”.

Optamos por adotar no trabalho esse viés histórico, porque assim como Miguel & Miorim (2004), acreditamos que só trilhando novamente, de maneira crítica, caminhos já trilhados, poderemos ir além do ponto aonde já chegamos até o presente momento. Estamos de acordo com D'Ambrosio (2004, p. 29), que afirma que: “sem essa análise crítica do processo histórico, a criação de novas teorias e práticas, respondendo à complexidade do mundo moderno, pode ser pouco eficiente e, sobretudo, conduzir à equívocos”. Compactuamos também com o raciocínio de Nóvoa (1992), segundo o qual toda história parte do presente; o historiador busca no passado vestígios que possam auxiliá-lo a responder questões do presente e, assim como Souza & Gatti Jr (2003, p. 94), defendemos que “a

apropriação histórica não serve para legitimar o que já foi, mais para preparar o que há de ser”.

Na seção seguinte, faremos um breve apanhado de pesquisas já realizadas por outros estudiosos e que nos auxiliaram na investigação que está sendo apresentada por meio deste relatório de pesquisa.

1.4 – Breve revisão bibliográfica

Nesta seção, apresentaremos um pequeno levantamento de investigações realizadas anteriormente por outros pesquisadores e que trouxeram contribuições para a condução da pesquisa de doutorado aqui relatada. Dividiremos este levantamento em quatro conjuntos temáticos de obras estudadas:

1. *Pesquisas sobre temáticas variadas;*
2. *Pesquisas tratando do processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral;*
3. *Pesquisas tratando direta ou indiretamente de aspectos históricos e estruturais da Universidade de São Paulo e de sua Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras;*
4. *Pesquisas tratando de alguns cursos de Cálculo Diferencial e Integral e/ou Análise Matemática ministrados em instituições brasileiras.*

Na sequência, caracterizaremos brevemente os trabalhos encontrados nesse levantamento e apontaremos, de maneira resumida, algumas das contribuições que a leitura de cada uma dessas pesquisas trouxe para nossa investigação.

1. Pesquisas sobre temáticas variadas

Nesse grupo de leituras realizadas estão os trabalhos de Vianna (2000), intitulado *Vidas e Circunstâncias na Educação Matemática*, e de Cavalari (2007), chamado *A Matemática é Feminina? Um Estudo Histórico da Presença da Mulher em Institutos de Pesquisa em Matemática do Estado de São Paulo*. Vianna busca, por meio de sua pesquisa, comprovar a tese de que os professores que atuam nos departamentos de Matemática das universidades e optam por exercer atividades predominantemente na área da Educação Matemática acabam enfrentando resistências por parte de seus colegas. Já Cavalari, como o próprio título de seu trabalho nos informa, faz um mapeamento da presença feminina nos cursos e departamentos de Matemática e Matemática Aplicada da USP (São Paulo e São Carlos), UNESP (Rio Claro e São José do Rio Preto), Faculdade de Filosofia, Ciências e

Letras de Araraquara e UNICAMP. A principal contribuição destes dois trabalhos para nossa investigação se deu pelo fato de ambos trazerem informações a respeito da professora Elza Furtado Gomide que, como ficará claro no decorrer desse relatório de pesquisa, foi uma das figuras centrais na trajetória da disciplina de Cálculo ministrada aos alunos do curso de Matemática da Universidade de São Paulo. Enquanto Cavalari traz uma biografia de Gomide, Vianna apresenta uma entrevista que realizou com a mesma professora.

Ainda nesta categoria de leituras realizadas, se encaixa o trabalho de Resende (2007), intitulado *Re-significando a Disciplina Teoria dos Números na Formação do Professor de Matemática na Licenciatura*, que, para nossa pesquisa, contribuiu com reflexões bastante pertinentes a respeito da diferenciação de três níveis de saberes: científicos, acadêmicos universitários e escolares e de três tipos de disciplinas: disciplina acadêmica de referência, disciplina acadêmica universitária e disciplina escolar. Essas discussões se mostraram de grande importância para a pesquisa aqui relatada, já que procuramos analisar, historicamente a trajetória da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral que, de acordo com a classificação apresentada pela autora, pode ser entendida como uma disciplina acadêmica universitária.

Também nesta categoria de pesquisas sobre temáticas variadas, acrescentamos leituras que nos deram elementos para fundamentar teoricamente as análises feitas ao longo do capítulo 4, tratando do processo de transição de uma disciplina inicialmente de Análise Matemática para outra, efetivamente, de Cálculo Diferencial e Integral, e do capítulo 5, que tem como objetivo discutir os níveis de rigor com que os cursos de Cálculo foram conduzidos em diferentes épocas e as preocupações didáticas observadas, nos mesmos e nos livros didáticos que lhes serviram de referência. Por termos realizado uma gama muito grande de leituras neste sentido, não citaremos aqui os autores das mesmas e também não daremos maiores informações a respeito da temática específica de cada pesquisa analisada. Informamos apenas que estas tratam de questões como a constituição do Cálculo e da Análise como campos de conhecimento, do Cálculo e da Análise como disciplinas acadêmicas universitárias, da necessária diferenciação entre as disciplinas de Cálculo e de Análise, das diferentes concepções de rigor no ensino da Matemática, da relação entre intuição e rigor no trabalho com os conceitos desta ciência, do início das reflexões de caráter didático no ensino superior, das preocupações atuais referentes a este nível de ensino e, especificamente, das preocupações a respeito do processo de ensino e aprendizagem de Cálculo e de Análise.

2. Pesquisas tratando do processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral

O trabalho de Ávila (2002), que tem como título *O Ensino do Cálculo e da Análise*, traz informações a respeito do processo de transição ocorrido no ensino superior brasileiro de uma disciplina inicialmente de Análise Matemática para outra efetivamente de Cálculo e, por esta razão, trouxe contribuições para as discussões referentes a este assunto presentes no quarto capítulo deste relatório de pesquisa. Ávila destaca que, aproximadamente, até a década de 1960 o ensino do Cálculo nas universidades e escolas superiores em geral seguia o modelo europeu, no qual se tratava, em uma mesma disciplina, geralmente denominada Análise Matemática, o que, atualmente, se distribui em disciplinas separadas de Cálculo e de Análise. Comenta que ele mesmo, na época em que era estudante do curso de Matemática da FFCL da USP, entre 1953 e 1956, vivenciou este modelo, no qual se aprendia o Cálculo juntamente com a Análise e não havia espaço para qualquer recordação de tópicos já trabalhados durante o ensino médio, algo que, atualmente, é bastante comum. Salienta também que, a partir de meados da década de 1960, o modelo de ensino de Cálculo adotado nos Estados Unidos começou a exercer grande influência nas universidades brasileiras, principalmente por meio de manuais norte-americanos e, desta forma, algo que naquele país já era usual, começou a ser feito também no Brasil: passou-se a ensinar inicialmente o Cálculo, deixando-se a Análise para um segundo momento. O autor argumenta que, em geral, as pessoas costumam se referir aos hábitos de seu tempo apresentando apenas as virtudes dos mesmos e, raramente, suas desvantagens. Este não é, no entanto, o seu caso: segundo ele, foram exatamente as dificuldades que enfrentou em sua época de estudante, no curso inicial de Análise Matemática, que o levaram a reconhecer o “erro pedagógico da orientação então usada e das virtudes das mudanças que vieram com a repartição entre o ensino do Cálculo e da Análise” (p. 85). Ávila afirma que, em sua opinião, somente após os estudantes terem compreendido o conceito de derivada e visto algumas aplicações do mesmo é que estarão preparados para prosseguir no estudo dos fundamentos e destaca que esta é a “ordem natural das coisas”, como o leitor poderá perceber por meio da breve retrospectiva histórica do Cálculo presente em seu artigo. Apresenta ainda considerações a respeito de como, para ele, deve ser um curso inicial de Cálculo e quais aqueles conteúdos que devem ser privilegiados.

Barufi (1999), em trabalho intitulado *A Construção/Negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral*, examina o conhecimento matemático que é trabalhado em sala de aula, especificamente no curso introdutório de

Cálculo, na Universidade de São Paulo. Analisa a maneira segundo a qual a disciplina é apresentada nos diferentes cursos, buscando descobrir a forma de organização por meio da qual o conhecimento é comunicado, revelado e aquela por meio da qual os significados são construídos. A autora busca atingir esses objetivos examinando, de acordo com suas palavras “um instrumento normalmente presente e que desempenha um importante papel nos diversos cursos: o livro didático, adotado ou sugerido pelo professor” (p. 48). Esse trabalho, além de nos trazer discussões importantes, do ponto de vista metodológico, a respeito da análise de livros didáticos e sua importância como auxiliar na compreensão da maneira segundo a qual determinado curso foi conduzido pelo professor, nos trouxe informações bastante relevantes a respeito do processo de construção de significados dos conceitos do Cálculo por parte dos alunos; informações estas que nos auxiliaram na análise dos dados obtidos nesta investigação que aqui se encontra relatada.

O trabalho de Reis (2001) – *A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos* – discute as diferenças de conteúdo, abordagens e objetivos que devem ou deveriam existir entre as disciplinas de Cálculo e Análise ministradas aos licenciandos em Matemática de algumas universidades brasileiras e quais os papéis desempenhados pela intuição e pelo rigor no ensino destas duas disciplinas. Dentre outros resultados, o autor conclui que é inadmissível separar intuição e rigor no ensino de qualquer conceito matemático e que entre tais elementos deve haver uma relação dialética e não dicotômica. Conclui ainda que, ao contrário do que pensam e fazem a maioria dos professores de Matemática das universidades, é inaceitável associar ao ensino de Cálculo uma abordagem essencialmente intuitiva e ao ensino de Análise uma abordagem essencialmente rigorosa. Este trabalho nos trouxe valiosas contribuições para as análises a respeito, principalmente, do nível de rigor observado nos cursos estudados e da transição de uma disciplina inicialmente de Análise Matemática para outra efetivamente de Cálculo Diferencial e Integral.

Rezende (2003), em pesquisa intitulada *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*, procura mostrar que parte dos problemas de aprendizagem observados atualmente no ensino da disciplina é de natureza epistemológica e está além dos métodos e das técnicas de ensino. O autor traz um mapeamento conceitual do Cálculo e de suas idéias para, em seguida, levantar e buscar entender as dificuldades de natureza epistemológica presentes no ensino desse conteúdo. A partir do entrelaçamento de fatos históricos e pedagógicos, explicita cinco macro-espacos, cinco eixos de dificuldades de aprendizagem – de natureza epistemológica – que estruturam o ensino da disciplina em

questão em seu trabalho: o eixo discreto/contínuo, o eixo variabilidade/permanência, o eixo finito/infinito, o eixo local/global e o eixo sistematização/construção e, por meio deste estudo, percebe que, em essência, há um único lugar-matriz dessas dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica no ensino do conteúdo por ele investigado: o da ‘omissão/evitação’ das idéias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no ensino da Matemática em sentido amplo. Este trabalho nos trouxe como contribuições discussões a respeito da origem dos problemas observados no ensino e aprendizagem da disciplina de nosso interesse e sobre como os professores de tal assunto e os educadores matemáticos têm tentado amenizar tais problemas. Além disso, a pesquisa de Rezende traz ainda discussões importantes a respeito do rigor e do formalismo normalmente adotados nos cursos de Cálculo e das diferenciações existentes entre esta disciplina e a de Análise Matemática, reflexões que nos auxiliaram nas análises realizadas.

Miranda (2004), em sua dissertação de mestrado intitulada *Silvanus Phillips Thompson e a Desmistificação do Cálculo: resgatando uma história esquecida* faz uma análise histórica do ensino do Cálculo e, mais especificamente, dos desdobramentos do livro *Calculus Made Easy*, publicado em 1910, no contexto da Educação Matemática. De acordo com o pesquisador, tal livro é bastante polêmico por trabalhar com os conceitos fundamentais do Cálculo de maneira intuitiva e com aplicações. Em razão da abordagem presente no livro analisado, o autor da dissertação apresenta uma discussão a respeito do rigor e da intuição no ensino da Matemática, discussão esta que contribuiu em algumas das nossas análises e reflexões que são apresentadas no quarto capítulo deste relatório de pesquisa.

3. Pesquisas tratando direta ou indiretamente de aspectos históricos e estruturais da Universidade de São Paulo e de sua Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras

D’Ambrosio (1999), em artigo intitulado “*História da Matemática no Brasil: uma visão panorâmica até 1950*” traz informações a respeito do processo de criação da Universidade de São Paulo em 1934 e da contratação dos professores estrangeiros que foram convidados para ministrar disciplinas no curso de Matemática da Faculdade de Filosofia. Um desses professores, o italiano Luigi Fantappiè, foi, como ficará claro ao longo desse trabalho, figura central na implantação dos cursos de Cálculo da USP. As modificações introduzidas por ele nos cursos ministrados no Brasil também são citadas nesse artigo, ainda que de forma breve.

O trabalho de Silva (2000), *A Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP e a Formação de Professores de Matemática*, discute a criação desta Faculdade e seu papel na

formação de professores de Matemática. Nele, obtivemos dados mais detalhados a respeito da chegada dos matemáticos estrangeiros à Faculdade de Filosofia e sobre a maneira como foram contratados. O artigo discute também como se deu o processo de ‘transmissão’ do conhecimento por parte dos cientistas estrangeiros no período em que estiveram no Brasil. Além disso, são detalhadas algumas das principais contribuições destes matemáticos para a ciência e para a educação brasileira e a autora apresenta ainda comentários breves a respeito do currículo proposto para o primeiro curso superior de Matemática do país, além de trazer alguns depoimentos dos primeiros catedráticos que nele atuaram.

Táboas (2005), no trabalho *Luigi Fantappiè: influências na Matemática Brasileira. Um Estudo de História como Contribuição para a Educação Matemática*, apresenta uma análise das influências deste professor na Matemática brasileira. O trabalho traz, inicialmente, informações referentes à sua contratação e, em seguida, passa a discutir as mudanças pelas quais passaram os cursos de Matemática ministrados na Universidade de São Paulo a partir da chegada deste docente. Apresenta também alguns depoimentos de ex-alunos do matemático italiano (que, posteriormente, se tornaram também professores da USP) que destacam alguns aspectos dos cursos ministrados por ele e, nas conclusões, destaca as principais alterações ocorridas na Matemática produzida e ensinada nas universidades brasileiras após a passagem de Fantappiè pelo país, como, por exemplo, o fato de o Brasil ter se tornado, após a década de 1930, também produtor de conhecimentos matemáticos no cenário mundial, além de simples consumidor como era até então.

Para essa pesquisa, os trabalhos de D’Ambrosio, de Silva e de Táboas trouxeram como contribuição principal algumas primeiras informações, de caráter histórico, que serviram de base para a busca por outros dados a respeito da fundação da Universidade de São Paulo, da criação do primeiro curso superior de Matemática do Brasil e da atuação do matemático Luigi Fantappiè durante os primeiros anos de funcionamento da FFCL da USP.

O trabalho de Gomide & Mousinho Leite Lopes (1997), intitulado *Memórias Vivas*, traz a textualização de uma Sessão Especial ocorrida durante o II Seminário Nacional de História da Matemática realizado na Universidade Estadual Paulista na cidade de Rio Claro-SP em 1997. Nesta sessão, o professor Ubiratan D’Ambrosio entrevistou as professoras Elza Furtado Gomide (de grande importância na trajetória da Matemática no estado de São Paulo) e Maria Laura Leite Lopes (figura importante na trajetória da Matemática no estado do Rio de Janeiro). Embora Lopes tenha papel de destaque no cenário da Matemática brasileira, nessa pesquisa, pela especificidade de nosso objetivo, nos restringiremos apenas às informações a respeito de Gomide presentes em tal texto. Na entrevista que se encontra textualizada em

Memórias Vivas, Gomide falou detalhadamente a respeito da trajetória do curso de Matemática da Universidade de São Paulo, desde sua criação em 1934. Comentou também a respeito da influência dos professores italianos (Luigi Fantappiè e Giacomino Albanese) e franceses (membros do grupo Bourbaki) na ‘transmissão’ e produção do conhecimento matemático naquela instituição em suas primeiras décadas de funcionamento, além de ter discutido a respeito do curso de Análise Matemática que ministrou no ano de 1951, como assistente do professor Omar Catunda. Para esta pesquisa, a leitura desse trabalho nos trouxe como contribuições principais as informações a respeito da influência dos professores estrangeiros no ensino da Matemática na USP e alguns dados a respeito do conteúdo trabalhado por Gomide nos cursos de Análise Matemática que ministrou na época em que era assistente de Catunda.

O trabalho *O Curso de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: uma história de sua construção/desenvolvimento/legitimação* de Ziccardi (2009), como o próprio título já diz é sobre o curso da PUC-SP e não sobre a USP, mas no decorrer de seu texto, a autora também apresenta muitas informações a respeito daquela instituição e de seu curso de Matemática. Por esta razão é que essa pesquisa foi incluída nessa categoria da revisão de literatura. Ziccardi se propõe a analisar a trajetória do curso de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sua organização e estrutura acadêmica, suas realizações, seus planos e projetos que envolveram seus dirigentes, professores e alunos. Busca mostrar as transformações que ocorreram em tal curso e no Departamento de Matemática de tal instituição; apresenta os primórdios desta ciência no Brasil até a criação das primeiras universidades e das primeiras faculdades de filosofia. Analisa ainda as relações entre o curso da PUC-SP e o da FFCL da USP, principalmente aquelas inerentes à criação do primeiro. As contribuições trazidas por esta pesquisa ao nosso trabalho foram: informações a respeito de como era a formação dos professores de Matemática no país antes da criação da Universidade de São Paulo, dados a respeito da criação da USP, de sua FFCL, do primeiro curso superior de Matemática do país, da chegada dos primeiros professores estrangeiros ao departamento de Matemática da Universidade de São Paulo e do processo de ‘transmissão’ do conhecimento matemático nesta instituição.

Pires (2006), em pesquisa intitulada *A presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo* retrata o grupo francês e o Departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP, investigando a que se deveu a presença intermitente, entre 1945 e 1966, de membros deste grupo neste Departamento e, de que maneira, a perspectiva estruturalista bourbakista da Matemática foi transmitida por eles e, por outro lado,

recebida, apropriada e re-significada pela comunidade acadêmico-institucional de professores do Departamento em questão, no âmbito da produção de pesquisa em Matemática e da formação de bacharéis e licenciados nesta ciência. A autora apresenta uma breve retrospectiva da criação da Universidade de São Paulo e de sua FFCL, traz muitos dados referentes ao estatuto e à estrutura dessa última, além de comentar sobre a contratação de professores estrangeiros e a respeito do momento em que esses estrangeiros deixaram a universidade e retornam a seus países de origem, possibilitando que vários matemáticos recém-formados pela instituição passassem a compor seu corpo docente. São apresentados dados estruturais obtidos em anuários da FFCL e também programas de vários anos das disciplinas de Análise Matemática e de Cálculo Diferencial e Integral, além de comentários a respeito de possíveis influências bourbakistas nestes programas. Para nosso estudo, esse trabalho de Pires trouxe como contribuição principal os programas de Análise Matemática e Cálculo Diferencial e Integral a ele anexados e, além disso, por meio dele, pudemos compreender melhor a estrutura de funcionamento da FFCL da USP e de seu curso de Matemática desde a sua fundação.

Celeste Filho (2006), em *A Reforma Universitária e a Universidade de São Paulo – década de 1960*, analisa a questão da Reforma Universitária ocorrida no final da década de 1960 que, entre outros aspectos, substituiu as cátedras pelo sistema departamental e as Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras por institutos de ciências básicas. Essa reformulação do ensino superior brasileiro foi oficializada por meio da lei 5.540, sancionada em 28 de novembro de 1968. O autor comenta as várias propostas de reforma que foram apresentadas entre o início dos anos de 1960 e 1968 e também as discussões a respeito das mesmas, presentes nos periódicos da época. O trabalho analisa, ainda, a implantação da Reforma Universitária na Universidade de São Paulo em 1968 e 1969. Este estudo nos deu condições de compreender os objetivos e as causas dessa Reforma e nos embasou no momento de apontarmos que mudanças ela trouxe para o curso de nosso interesse: o de Matemática.

O trabalho de Ferreira (2009), chamado *O Processo de Disciplinarização da Metodologia do Ensino de Matemática*, não diz respeito unicamente à Universidade de São Paulo, mas, por trazer também dados referentes à diferenciação, em várias épocas, dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática desta instituição, foi incluído nessa categoria temática de literatura revista. Neste trabalho, a autora se propõe a analisar, compreender e discutir o processo de disciplinarização da Metodologia do Ensino de Matemática nos cursos de Licenciatura em Matemática de instituições públicas do estado de São Paulo, identificando as origens dessa disciplina e seu processo histórico de institucionalização. Para nosso

trabalho, a pesquisa de Ferreira trouxe dados a respeito de como se pensava a formação do professor de Matemática em cada momento histórico e também a respeito do processo de criação e diferenciação dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da USP. Além disso, a autora discute aspectos relativos à História das Disciplinas, referencial teórico adotado em seu trabalho e do qual também adotamos alguns procedimentos nesta pesquisa aqui relatada.

4. Pesquisas tratando de alguns cursos de Cálculo Diferencial e Integral e/ou Análise Matemática ministrados em instituições brasileiras

Silva (1996), em trabalho intitulado “*O conceito de derivada no ensino da Matemática no Brasil do século XIX*”, comenta que o Cálculo Diferencial e Integral passou a ser ensinado no Brasil em 1810, como uma disciplina do Curso Matemático da Real Academia Militar do Rio de Janeiro. Este trabalho nos trouxe informações a respeito de como foi o ensino do Cálculo no Rio de Janeiro – Academia Militar e Escola Politécnica - durante todo o século XIX e início do século XX e a respeito do primeiro livro a ser utilizado para o ensino dessa disciplina no país: *Tratado Elementar de Cálculo Diferencial e Integral* – tradução feita pelo professor português Francisco Cordeiro da Silva Torres Alvim para a obra *Traité élémentaire de Calcul différentiel et du calcul intégral*, do francês Sylvestre Lacroix. Outras informações a respeito da obra de Lacroix foram obtidas no trabalho de Moreira (2005) que se propõe, como o próprio subtítulo explicita, a elaborar uma “*Leitura sociológica do prefácio do Traité du Calcul Différentiel et Du Calcul Intégral de S. F. Lacroix*”.

No trabalho de Oliveira (2004), intitulado *O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Escola Politécnica de São Paulo, ano de 1904: uma análise documental*, encontramos informações referentes ao curso da disciplina de nosso interesse ministrado na Escola Politécnica de São Paulo desde sua criação, em 1893 até 1934, momento em que ela foi agregada a então nascente Universidade de São Paulo. O autor, para realizar suas análises, toma por base o caderno de Cálculo de um aluno que cursou esta disciplina na escola em questão no ano de 1904.

Por meio dos dados obtidos nas pesquisas de Silva (1996), Moreira (2005) e Oliveira (2004), pudemos esboçar, de maneira sucinta, um panorama de como era o ensino de Cálculo no país desde a introdução desta disciplina no currículo brasileiro até a fundação da Universidade de São Paulo em 1934. O objetivo de termos realizado este esboço foi tornar mais evidente as mudanças ocorridas a partir da criação da Faculdade de Filosofia da USP e nela o primeiro curso superior de Matemática do Brasil.

O trabalho de Lima (2006), chamado *Dos Infinitésimos aos Limites: a contribuição de Omar Catunda para a Modernização da Análise Matemática no Brasil*, analisa o livro *Curso de Análise Matemática* de Omar Catunda visando compreender qual foi a contribuição deste docente no processo de institucionalização da Análise Matemática moderna no Brasil. Esse trabalho, além de trazer muitas informações a respeito do curso de Análise coordenado por Catunda na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo entre 1939 e 1962 e do livro ao qual deu origem, traz também dados a respeito do curso de Análise implantado em 1934 pelo matemático italiano Luigi Fantappiè, que, como será explicitado no decorrer do relatório de nossa pesquisa, deu origem à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral ministrada aos alunos da Matemática da USP. A pesquisadora apresenta, inclusive, uma comparação da obra de Omar Catunda com o *Curso de Análise Matemática* de Luigi Fantappiè, escrito com base nas aulas deste último, ministradas no país entre 1934 e 1939. Ainda nesse trabalho, há comentários a respeito do curso de Cálculo ministrado na Escola Politécnica de São Paulo antes da fundação da USP e sobre o que mudou no ensino dessa disciplina com a chegada de Luigi Fantappiè.

O trabalho *Prof. J. O. Monteiro de Camargo e o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise na Universidade de São Paulo*, de autoria de Silva (2006), se propõe a analisar a trajetória da carreira do professor José Octávio Monteiro de Camargo e a contribuição deste docente ao ensino e divulgação da Análise Matemática no Brasil. Apresenta dados referentes ao processo de criação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, da contratação do matemático Luigi Fantappiè e das transformações introduzidas por este último no ensino em vigor até então. A pesquisa traz também dados biográficos de Fantappiè obtidos no Anuário da Faculdade de Filosofia publicado em 1934, além de um breve histórico do curso de Matemática da USP, publicado em 1966 no Guia de Ciências Físicas e Matemáticas da FFCL. Além disso, traz informações referentes à criação, em 1960, do Instituto de Pesquisas Matemáticas, embrião do Instituto de Matemática e Estatística (IME), surgido em 1970 após a Reforma Universitária. Apresenta ainda um capítulo escrito com o intuito de traçar um panorama geral de alguns programas de Cálculo da Escola Politécnica entre 1894 e 1960 e de Análise Matemática e Cálculo da FFCL de 1934 a 1969, assim como programas dessas disciplinas que estavam em vigor em 1970, primeiro ano de funcionamento do Instituto de Matemática e Estatística da USP. O objetivo do autor é indicar o caminho percorrido pelo Cálculo e pela Análise da FFCL e da Escola Politécnica até a criação do IME.

Oliveira (2006), no trabalho *Assistindo ao curso de Análise Matemática com Ubiratan D'Ambrosio*, analisou fichas contendo notas das aulas assistidas por Ubiratan D'Ambrosio na época em que ele era aluno do curso de graduação em Matemática na USP. As fichas analisadas trazem anotações feitas por D'Ambrosio durante as aulas de Análise Matemática I ministradas pela professora Gomide em 1951. Em seu trabalho, a pesquisadora dá detalhes de como os conceitos de função, limite, derivada e integral eram trabalhados neste curso e compara essa forma de abordagem com a proposta no livro indicado aos alunos como referência para aquela disciplina.

Finalmente, já perto de concluirmos este relatório de pesquisa, tivemos acesso a dissertação de mestrado de Otero-Garcia (2011), intitulada *Uma Trajetória da Disciplina de Análise e um Estado do Conhecimento sobre seu Ensino*, na qual o autor se propõe a trazer à tona alguns resultados e questionamentos que, de acordo com ele, têm potencialidades de contribuir nas discussões referentes à importância da disciplina de Análise na formação de professores de Matemática. Otero-Garcia divide sua investigação em duas etapas: na primeira, do tipo estado do conhecimento, elabora um mapeamento das pesquisas brasileiras relativas ao ensino de Análise, fazendo uma busca por trabalhos com esta temática em dissertações, teses, periódicos e anais de eventos. Já na segunda, investiga como se estruturaram, ao longo do tempo, os programas, os conteúdos, objetivos e as bibliografias das disciplinas de Análise dos cursos de Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP) e da USP. Tal investigação foi realizada com base em grades curriculares e programas de disciplinas de Análise e de Cálculo ministradas nas universidades de interesse na pesquisa e um dos objetivos principais do pesquisador ao realizar este trabalho foi tentar compreender como a disciplina de Análise foi paulatinamente se constituindo nos cursos de Matemática de duas renomadas instituições de ensino superior brasileiras. Na busca por tal compreensão, Otero-Garcia fez também algumas reflexões referentes ao processo de transição de uma disciplina inicialmente de Análise Matemática para outra efetivamente de Cálculo e, simultaneamente, a constituição de uma nova disciplina de Análise no currículo do curso de graduação em Matemática tanto da USP quanto da UNESP. Para nossa pesquisa, este trabalho trouxe como contribuições, principalmente, essas discussões sobre o processo de transição de um curso inicial de Análise para outro, de fato, de Cálculo. Além disso, Otero-Garcia disponibiliza uma série de documentos, como programas de disciplinas e manuais de cursos, que podem complementar algumas das informações por nós apresentadas. É interessante destacar também que, embora no início de nossa investigação este trabalho de Otero-Garcia sequer tivesse sido iniciado, coincidentemente acabamos realizando uma pesquisa que parece ir ao

encontro de algumas das sugestões para investigações futuras deixadas pelo autor em seu texto. Dentre estas, destacamos que o autor afirma, por exemplo, que talvez fosse relevante realizar uma pesquisa que não se baseasse apenas em documentos, como foi o caso do trabalho desenvolvido por ele, e que considerasse também entrevistas com docentes envolvidos, em diferentes momentos, no ensino de Cálculo e de Análise nas instituições pesquisadas e com estudantes que cursaram tais disciplinas em diversas épocas, principalmente naquelas mais relevantes para a compreensão do processo de separação de tais conteúdos no ensino. Comenta que, desta forma, talvez fosse possível analisar as relações entre este processo de transição de uma disciplina inicial de Análise para outra com orientação voltada ao Cálculo e as dificuldades enfrentadas pelos estudantes na época em que cursavam diretamente Análise Matemática. Além disso, afirma que uma investigação nestes moldes talvez pudesse auxiliar na compreensão de como os professores efetivamente trabalharam em sala de aula com esta dualidade de abordagens: uma mais analítica e outra mais manipulativa, que Otero-Garcia chama de algorítmica. Ressalta também que outros materiais que poderiam ser analisados em pesquisas futuras são os livros-didáticos adotados em cada época.

Esses foram os trabalhos realizados anteriormente por outros pesquisadores e que nos serviram de base, nos forneceram dados mais gerais para a realização da investigação aqui apresentada. A maioria destes trabalhos, além de contribuir com reflexões importantes para nossas análises, foi de grande utilidade principalmente no início dessa pesquisa, quando precisamos obter algumas primeiras informações referentes ao tema de nosso interesse para, a partir delas, elaborar nosso plano de ação, nossa estratégia de investigação.

No próximo capítulo, apresentaremos a metodologia adotada na pesquisa e os procedimentos metodológicos utilizados durante a coleta e análise dos dados.

CAPÍTULO 2 – METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa focalizou sua atenção na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral – que conforme caracterização que será apresentada nesse capítulo pode ser vista como uma disciplina acadêmica universitária - ministrada aos alunos do curso de Matemática da Universidade de São Paulo – entre 1934 e 1994. Esta foi analisada sob três aspectos, a saber, a transição de uma disciplina inicialmente de Análise Matemática para outra efetivamente de Cálculo, os níveis de rigor com que foi ministrada ao longo dos anos e as preocupações didáticas manifestadas pelos docentes que as conduziram em diferentes épocas bem como aquelas presentes nos manuais adotados como referências em tais cursos. Durante o trabalho, percebemos que não precisaríamos de uma teoria que fundamentasse todo o estudo que estava sendo desenvolvido, mas, por outro lado, ao analisarmos cada um dos aspectos citados sentimos a necessidade de recorrermos a considerações teóricas específicas, que estivessem diretamente relacionadas a eles. Por esta razão, não apresentaremos um capítulo discutindo a fundamentação teórica do estudo; tudo aquilo que foi necessário para embasar as análises feitas será discutido no início de cada um dos capítulos que tratam do tema em questão nesta pesquisa (capítulo 4 e capítulo 5). No presente capítulo, inicialmente argumentaremos que, de fato, o Cálculo pode ser considerado como uma disciplina e, a partir desta discussão, salientaremos alguns procedimentos metodológicos tradicionalmente utilizados por aqueles que investigam a história das disciplinas e que também foram empregados no estudo aqui relatado. Em seguida, apresentaremos a metodologia e os procedimentos metodológicos adotados no trabalho.

2.1 – O Cálculo visto como uma disciplina acadêmica universitária e alguns procedimentos metodológicos da História das Disciplinas adotados na pesquisa

No campo de pesquisa denominado *História das Disciplinas*, do qual, neste estudo, emprestamos alguns procedimentos metodológicos, a própria palavra *disciplina* exige um pouco de reflexão. Segundo Chervel (1990), até o final do século XIX, o termo *disciplina* e a expressão *disciplina escolar* não denotavam nada além do que “a vigilância dos estabelecimentos, a repressão das condutas prejudiciais à sua boa ordem e aquela parte da educação dos alunos que contribui para isso” (p. 178). No sentido de “conteúdos de ensino”, o termo não aparece nos dicionários do século XIX; ganha essa nova concepção nos primeiros

decênios do século XX, como consequência de uma corrente de pensamento pedagógico que começou a se manifestar na segunda metade do século XIX, estreitamente ligada à idéia de renovação das finalidades dos ensinos primário e secundário. Aparece, primeiramente fazendo par com o verbo *disciplinar*, se propagando, a princípio, como um sinônimo de *ginástica intelectual*, no sentido do desenvolvimento da razão, da faculdade da combinação e da invenção. Esta idéia se originou em um repensar da natureza da formação dada ao aluno no ensino primário: até aquela época inculcava-se o aluno; desejava-se, a partir de então, discipliná-los. No ensino secundário, o termo disciplina demorou ainda mais para aparecer. De acordo com Chervel isto aconteceu porque

Até 1880, mesmo até 1902 (...) não há senão um modo de formar os espíritos, não mais do que uma “disciplina” no sentido forte do termo: as humanidades clássicas. Uma educação que fosse fundamentalmente matemática ou científica não deveria ser antes do começo do século XX plenamente reconhecida como uma verdadeira formação do espírito. É somente quando a educação da sociedade e dos espíritos permite contrapor a disciplina literária uma disciplina científica que se faz sentir a necessidade de um termo genérico. (CHERVEL, 1990, p. 179-180).

Somente após a 1ª Guerra Mundial é que o termo perde a força que o caracterizava até então e se “torna uma pura e simples rubrica que classifica as matérias de ensino, fora de qualquer referência às exigências da formação do espírito” (Ibid, p. 180).

Chervel, embora se posicione contrariamente à idéia de disciplina como sendo uma simples adaptação do saber de referência para o saber escolar, destaca que nos ensinos primário e secundário é necessário que haja algum tipo de adequação dos conteúdos a serem ensinados, levando em consideração suas dificuldades e a idade dos alunos; deve haver preocupações do ponto de vista didático, já que a função das disciplinas escolares é colocar um conteúdo de instrução a serviço de uma finalidade educativa. No ensino superior, no entanto, o autor afirma que o saber é “transmitido” diretamente, sem maiores adaptações, já que, ao alcançar a universidade – e, portanto, a idade adulta – o estudante não necessita mais de nenhuma preocupação didática particular à sua idade; basta que ele estude o conteúdo apresentado pelo professor para assimilá-lo e dominá-lo. Uma das causas desta diferença seria, para ele, a própria natureza dos alunos, que são “forçados” a frequentarem a escola no ensino primário e secundário e “livres” para seguirem suas preferências no ensino superior (p. 185). No caso específico da Matemática, por exemplo, Niss (1999, p. 2) comenta que, até uns quarenta anos atrás, os estudantes universitários eram considerados os únicos responsáveis por seus próprios estudos, sucessos e fracassos. Afinal, como haviam optado por ingressar em um curso superior daquela área, deveriam ter os pré-requisitos necessários para tal, dentre os

quais talento matemático. Sendo assim, os professores podiam se concentrar apenas em dar aulas, já que o aprendizado a respeito daquilo que estava sendo ensinado não dependia deles, mas inteiramente dos próprios estudantes.

Seguindo este raciocínio, Chervel não considera adequado se referir aos diferentes conteúdos ensinados na universidade como *disciplinas*. De acordo com ele, a trajetória de ensino das crianças e adolescentes, que a princípio está totalmente imersa nos procedimentos tipicamente *disciplinares* evolui, ao longo da trajetória escolar, gradualmente, em direção a ensinamentos cada vez menos disciplinares e cada vez mais *científicos*: “a existência de disciplinas foi que, historicamente, determinou o limite entre a educação básica e o ensino superior” (p. 186).

Atualmente, no entanto, conforme destaca Niss (1999), a visão que se tem é bastante diferente. Há, como discutiremos de maneira mais aprofundada no capítulo 5, uma grande quantidade de professores universitários preocupados com o processo de ensino de aprendizagem neste nível educacional; docentes que dividem com os alunos as responsabilidades por esse processo. Desta forma, começa a haver uma preocupação em perceber como contribuir para que estudantes das universidades realmente aprendam Matemática e, conseqüentemente, os ensinamentos desenvolvidos nestes locais vão se tornando também, pouco a pouco, disciplinares. É de se esperar, portanto, que alguns autores, conforme destaca Ferreira (2009), passem a utilizar a palavra *disciplina* em diferentes níveis de ensino, e não somente na educação básica com faz Chervel.

Neste trabalho, assim como fez Resende (2007), nos referiremos àqueles saberes veiculados nos cursos de graduação – como, por exemplo, o Cálculo Diferencial e Integral – por *disciplinas acadêmicas universitárias*, definidas como: “um conjunto de conteúdos e práticas, frutos de uma transposição didática, incluindo finalidades, elementos pedagógicos e outros do meio profissional de referência e da sociedade em geral, organizado de modo a manter uma unidade científica e didática” (p. 77). Esse tipo de disciplina, segundo a autora, inclui diversos elementos ligados às questões do processo de ensino e aprendizagem, tais como as finalidades do curso no qual a mesma está inserida, o perfil do profissional que se deseja formar, etc e, de acordo com Pessoa (2007), diferencia-se da noção de *disciplina escolar* por ter “como objetivo formar um profissional, seja ele, professor, cientista, administrador técnico, etc” (p. 29), e não “a formação de um indivíduo comum, que necessita de instrumentos intelectuais múltiplos para se estabelecer na sociedade e utilizar a capacidade de compreender o mundo em diversos aspectos físicos, econômicos, sociais e culturais” (idem).

Perrenoud (2000) destaca, no entanto, que esses dois tipos de disciplina não são tão distintos quanto poderíamos pensar; se diferem, na maioria das vezes, apenas pela forma de ensino, pela idade dos alunos e pela maneira de atuação dos professores no processo de construção dos novos saberes por parte dos alunos, já que, ao ingressar na universidade, frequentemente, o estudante se depara com uma estrutura de ensino bastante semelhante àquela que ele vivenciou nos últimos anos da educação básica: lições com a mesma estrutura, as mesmas atribuições, os mesmos tipos de avaliação e a mesma participação passiva em seu próprio processo de formação.

Outro ponto a ser destacado é que, de acordo com Iglioni (2009, p. 12), “apesar de polêmica, a questão da transposição didática está cada vez mais presente, nos dias atuais, nas investigações sobre o processo de aprendizagem no nível superior”. E a este respeito, assim como Resende (2007), pensamos que “o saber presente nas disciplinas, quer na escola, quer na universidade, não é mera adaptação do saber científico, mas uma criação didática, pois deve atender a objetivos de ensino” (p. 66).

Percebe-se, portanto, que, enquanto Chervel defende que são os saberes científicos que devem ser diretamente transmitidos aos alunos das universidades, já que, neste nível de ensino, não é necessário que haja nenhuma preocupação do professor em adaptar o conteúdo a ser ensinado para que ele seja mais facilmente aprendido pelo estudante, Resende defende exatamente o contrário e é esta postura que assumimos também. A nosso ver, os saberes que devem ser ensinados aos alunos no ensino superior são os acadêmicos universitários, frutos de uma transposição didática daqueles saberes científicos, levando em consideração as finalidades de ensinar aquele conteúdo, os elementos pedagógicos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, as exigências colocadas pelo meio profissional de referência a serviço do qual está sendo realizado aquele ensino e as exigências da sociedade em geral.

Na pesquisa aqui relatada, investigamos historicamente a disciplina acadêmica Cálculo Diferencial e Integral ministrada aos alunos do curso de Matemática da Universidade de São Paulo e, por esta razão, nos pareceu bastante adequado adotarmos alguns procedimentos tradicionalmente empregados pelo historiador das disciplinas, normalmente escolares, mas que, em nossa visão, também se adequam ao estudo da história das disciplinas acadêmicas universitárias.

Segundo Chervel (1990), a história dos conteúdos é o componente central da História das Disciplinas, mas seu papel é mais amplo: relaciona o que é ensinado com as finalidades desse ensino e os resultados concretos que ele produz. O historiador das disciplinas tem como tarefa essencial o estudo dos ensinamentos efetivamente realizados; deve descrever detalhadamente

cada uma das etapas do ensino, a evolução da didática, pesquisar quais as razões das mudanças observadas, perceber a coerência interna que rege o apelo a diferentes procedimentos de ensino e relacionar o ensino efetuado com as suas finalidades. Deve investigar também mudanças nos métodos de ensino, na organização e na estrutura do conteúdo apresentado, além de analisar a predominância de certos modelos de trabalho com uma dada disciplina durante um determinado período.

Chervel (1990, p. 208) destaca ainda que é preciso ter consciência de que “aquilo que o aluno aprende não tem grande coisa a ver com o que o professor ensina” e que a História das Disciplinas deve estudar a natureza exata dos conhecimentos adquiridos, reunindo e tratando testemunhos diretos e indiretos dando conta da eficácia ou não do ensino e das transformações efetivas dos alunos. Bittencourt (2003, p. 35-36) também demonstra preocupações neste sentido ao afirmar que “os conteúdos escolares (...) analisados pelos currículos formais, pelos textos normativos e livros didáticos expressam apenas parte do que se concebe por disciplina” e ao destacar que há estudos com objetivos também de perceber as práticas, as ações e criações de professores e alunos no cotidiano das salas de aula. É nesta perspectiva que surgem investigações como esta que desenvolvemos; estudos que, além da documentação escrita, utilizam também entrevistas com professores e alunos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de uma determinada disciplina.

A seguir, trataremos exatamente da metodologia que nos guiou no planejamento e na realização dessas entrevistas: a História Oral.

2.2 - Metodologia e procedimentos metodológicos

Para coletarmos os dados necessários para a realização dessa pesquisa utilizamos dois grupos de fontes escritas. Um destes grupos se constituiu por documentos oficiais da Universidade de São Paulo, programas de cursos de Cálculo, teses e dissertações tratando do tema de nosso interesse, livros didáticos, apostilas, notas de aula, etc; e o outro se constituiu pelas textualizações das entrevistas que realizamos com pessoas envolvidas no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo no curso e instituição de nosso interesse.

O primeiro grupo de fontes teve importância fundamental principalmente no início de nosso trabalho, quando precisamos obter as primeiras informações referentes ao ensino de Cálculo no curso de Matemática da Universidade de São Paulo, já que, conforme afirma May (1973, p. 1), “o investigador não começa em qualquer lugar. Ele vai para seu problema com alguma informação”.

Para a constituição das fontes do segundo grupo, optamos por nos basear na metodologia da História Oral, sobre a qual falaremos na sequência.

2.2.1 - História Oral

Breve nota histórica

Até meados do século XX as pesquisas históricas utilizavam como fonte principal os documentos escritos. Após a 1ª Guerra Mundial, sob a perspectiva da “História Nova” – movimento proposto pela Escola dos Annales que, de acordo com Reis (2004, p. 72) tinha como proposição central: “retirar a história de seu isolamento e aproximá-las das outras ciências sociais” – ocorre uma mudança de paradigma nos estudos históricos. Até então, na perspectiva dita positivista, considerava-se que não havia história se não houvesse documentos; já na conjuntura da “História Nova”, a existência desta estaria condicionada a existência de problemas (SILVA & SOUZA, 2007, p. 146). Ocorre então uma ampliação da noção de fontes históricas; não mais somente os documentos são considerados como tais. Ao mesmo tempo, de acordo com Gaertner & Baraldi (2008), os historiadores começaram a perceber que os documentos nem sempre traduziam a maneira como realmente os fatos haviam ocorrido; afinal, a documentação escrita é passível de adulteração. Concomitantemente a essa percepção, o surgimento de equipamentos especializados em registrar imagens e sons provocou profundas mudanças nas produções historiográficas e a idéia de que o documento escrito possuía valor hierárquico superior a outros tipos de fontes começa, finalmente, a ser superada. É nesse contexto que o discurso narrativo passa a ser valorizado pela ciência: “a oralidade, que sempre serviu de recurso e inspiração aos historiadores, surge realçada, subsidiando uma das principais tendências historiográficas. Despontam o que chamamos de História Oral” (GARNICA, 2004b, p. 83). A oralidade vem para revelar facetas e realidades que, normalmente, os documentos não expressariam.

Segundo Meihy (1996), a moderna História Oral nasceu em 1947, na Universidade de Columbia – Nova Iorque, quando Allan Nevins organizou um arquivo com gravações de personalidades americanas e oficializou o termo História Oral. No entanto, Nevins nega essa paternidade a ele atribuída afirmando que: “a história oral nasce da invenção e das tecnologias modernas. (...) A História Oral fundou-se. Ela tornou-se uma necessidade patente, e teria sido trazida à vida em vários lugares, teria desabrochado sob várias e distintas circunstâncias, de qualquer modo”. (DUNAWAY & BAUM apud GARNICA, 2007, p. 19).

Gaertner & Baraldi (2008, p. 49) destacam três momentos no desenvolvimento da História Oral: num primeiro, ela surge apenas como forma de narrar os fatos de “homens nobres”; num segundo momento passa a ser vista como uma maneira de dar voz aos “excluídos” pela ótica tradicional da historiografia; já num terceiro, nas décadas de 1960 e 1970, começa a favorecer reflexões metodológicas, à medida que passa a abordar os acontecimentos históricos não mais a partir das memórias dos “nobres” e dos “excluídos”, não mais através das exceções, e sim a partir dos segmentos médios, buscando com isso evidenciar as tensões entre as histórias particulares e a cultura que as contextualizam. Para Garnica (2003), é nesse terceiro momento que surge a História Oral, propriamente dita, já que, a partir daí, é que se inicia, verdadeiramente, uma reflexão metodológica.

No Brasil, Meihy (1996) e Gaertner & Baraldi (2008) destacam que a História Oral demorou a se desenvolver e apontam como causas para isso: i) a falta de hábito das instituições em registrarem histórias locais e culturas populares, ii) a falta de estabelecimento de vínculos entre as universidades, os regionalismos e as culturas populares e iii) a vigilância opressora à divulgação oral durante a ditadura militar. A partir de meados da década de 1970, com a progressiva abertura política, é que começa a surgir um desejo de recuperar a história reprimida e aparecem então alguns grupos isolados com a preocupação de entender e promover debates em torno da História Oral. Em 1975 é fundada a Associação Brasileira de História Oral e, a partir da década de 1980, começa-se a perceber a aplicação desse recurso pelas universidades (GARNICA, 2007, p. 21).

Segundo Gaertner & Baraldi (2008), os primeiros programas de História Oral no Brasil privilegiaram o estudo da política regional e das elites políticas. Com o passar dos anos, houve um aumento do número de pesquisadores utilizando a História Oral e a ela foram incorporados novos objetos e novos temas de pesquisa. Na década de 1990, passa a ser vista, no cenário brasileiro, tanto como disciplina quanto como metodologia de pesquisa. As mesmas autoras comentam que “em Educação Matemática, até o início dos anos 2000, eram poucos os trabalhos que utilizavam a metodologia da História Oral como parte de seus fundantes” (GAERTNER & BARALDI, 2008, p. 51). Em 2002, é constituído o GH OEM (Grupo História Oral e Educação Matemática), reunindo pesquisadores de várias instituições e, a partir de então, os trabalhos em Educação Matemática utilizando a História Oral ganham maior consistência e visibilidade. Segundo Silva & Souza (2007):

A visão acerca da História defendida nos trabalhos de história oral em Educação Matemática (...) aproxima-se daquela que desponta junto ao movimento dos *Annales* (...) interessados, entre outros fatores, na história dos homens (todo e qualquer) no

A História Oral nesta pesquisa

Para esta pesquisa, escolhemos a História Oral como uma das metodologias porque, conforme afirma Thompson (1998, p. 25-26), ela permite recriar, com maior amplitude do que a maioria das fontes, a multiplicidade original dos pontos de vista face à realidade complexa e multifacetada. A narração permite que as experiências se manifestem de maneira mais nítida. Garnica (2007, p. 40) afirma que o pesquisador que acredita no enriquecimento que a multiplicidade de pontos de vista recolhida a partir de depoimentos pode trazer para a trama narrativa já tem estabelecida uma razão forte o bastante para optar pela História Oral como metodologia para dirigir sua investigação. Além disso, como estávamos interessados em perceber quais as mudanças ocorridas no ensino do Cálculo para os alunos do curso de Matemática da Universidade de São Paulo durante o período considerado, o uso de entrevistas segundo a perspectiva da História Oral, nos pareceu adequado. Assim como Silva & Souza (2007, p. 151), entendemos que “a narrativa – constituída a partir de situações de entrevista – coloca-se como um importante “meio” de conhecer as histórias de professores e alunos que vivenciaram mudanças e propostas, talvez, “inovadoras” de certa época”. A História Oral aplicada à educação pode “iluminar os lugares ocultos da vida escolar”, o professor ganha relevo (GUSMÃO, 2004, p. 31). Segundo Bolívar (2002, p. 46), é dentro da narração que se pode apreciar o sentido do trabalho do professor.

Para Silva e Souza (2007) “uma das finalidades da História Oral na Educação Matemática tem sido “descentrar” (HALL, 2000) abordagens freqüentemente utilizadas na História da Educação e da Educação Matemática” (p. 151) e que mais comumente estão voltadas para instituições formadoras e documentos oficiais. E essa mudança de foco não significa, necessariamente, o abandono daquilo que comumente é considerado central. É somente uma possibilidade de obter novos conhecimentos, novos olhares sobre aspectos já conhecidos e, acima de tudo, de conhecer elementos novos, até então ignorados ou subestimados, e as potencialidades geradas por esses novos fatores. Essa idéia é fortalecida quando são trazidos à tona, através das narrativas, vestígios de práticas de professores de Matemática diferentes dos até então discutidos.

Segundo Meihy (1996), os trabalhos em História Oral geralmente se agrupam nos seguintes ramos:

- *História Oral de Vida*: são trabalhos que narram o conjunto da experiência de vida de uma pessoa; o pesquisador está interessado no que o narrador tem a contar de sua vida como uma totalidade, para compor uma trama de percepções e reconstruções do espaço e do tempo vividos (GARNICA, 2003). É mais subjetiva do que objetiva.
- *História Oral Temática*: os trabalhos desse ramo partem de um assunto específico e preestabelecido e tem como objetivo obter informações referentes a um assunto determinado ou explicitar a opinião do entrevistado a respeito de algum evento específico.
- *Tradição Oral*: os trabalhos neste ramo estudam a permanência de mitos e as visões de mundo de comunidades que têm valores filtrados por estruturas mentais asseguradas por referências de um passado remoto. Embora este tipo de História Oral também implique em entrevistas, ela trata, principalmente, de questões do passado longínquo, que se manifestam no presente por meio do folclore, da transmissão entre diversas gerações, de pais para filhos, de indivíduos para indivíduos.

A pesquisa aqui apresentada está inserida no campo da História Oral Temática, já que parte de um assunto específico e preestabelecido: o ensino de Cálculo no curso de Matemática da Universidade de São Paulo. A História Oral Temática utiliza, quase sempre, a documentação oral da mesma maneira que as fontes escritas: “valendo-se do produto da entrevista com mais outro documento, compatível com a necessidade de busca de esclarecimentos, o grau de atuação do pesquisador como condutor do trabalho fica muito mais explícito” (MEIHY, 1996, p. 41). É importante destacar que, de fato, os documentos produzidos segundo a metodologia da História Oral Temática foram utilizados da mesma maneira que as fontes escritas; na verdade, nem podemos afirmar que realizamos análises de fontes orais propriamente ditas; todo o material analisado se constituiu de textos escritos, sendo que, dentre estes, muitos foram produzidos por meio de textualizações das entrevistas realizadas de acordo com os preceitos da História Oral na ótica de Garnica e do GH OEM.

Da mesma forma que Garnica (2004a), estamos entendendo História Oral como:

A perspectiva de, face à impossibilidade de construir “a” história, (re)construir algumas de suas várias versões, aos olhos dos atores sociais que vivenciaram certos contextos e situações, considerando como elementos essenciais nesse processo as memórias desses atores – via de regra negligenciados pela abordagem sejam oficiais ou mais clássicas – sem desprestigiar, no entanto, os dados “oficiais”, sem negar a importância das fontes primárias, dos arquivos, (...) os quais consideramos uma outra versão, outra face dos fatos. (GARNICA, 2004a, p. 155).

Segundo Silva & Souza (2007, p. 154), na Educação Matemática a História Oral “não é vista apenas como um procedimento ou técnica metodológica, mas como uma metodologia de pesquisa qualitativa, o que implica, sim, um conjunto de procedimentos, mas, para, além disso, uma fundamentação consistente desses procedimentos”. Garnica (2003) afirma que optar pelo uso da História Oral, dentro da tendência chamada de História da Educação Matemática, significa optar por uma concepção de História e distinguir suas implicações. De acordo com Silva & Souza (2007, p. 152), “na tentativa de fundamentarmos a História Oral na Educação Matemática, aprendemos que sua história, formada a partir das histórias possíveis, resgatadas pela história oral, deve ser a “história das interpretações””. Garnica (2003) defende que a concepção de História que deve ser tomada como padrão é a História como versão; ou seja, não existe uma história real, uma história do que realmente aconteceu. Silva & Souza (2007) compactuam dessa idéia afirmando que:

A relativização do conceito de verdade, no sentido de reconhecer a inexistência de uma verdade singular e cristalizada, leva a uma busca por versões históricas, ou seja, por histórias (no plural) e não mais por uma história que representasse o “que realmente ocorreu” (SILVA & SOUZA, 2007, p. 156).

Ao optarmos por adotar a História Oral como uma metodologia de pesquisa qualitativa, precisamos também explicitar o que estamos entendendo como abordagem qualitativa de pesquisa e, para isso, recorremos a Garnica (2003) que, tomando como referência Bogdan & Biklen (1991), afirma que:

O que chamamos aqui de abordagens qualitativas de pesquisa, em termos gerais, configura-se como tendo características próprias (...). São elas: na investigação qualitativa a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; a investigação qualitativa é descritiva; os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; o significado atribuído é de importância vital nessa abordagem. (GARNICA, 2003, p. 19 – nota de rodapé).

Garnica (2007, p. 23-24) destaca que uma das características que, para ele, distingue a História Oral das outras abordagens qualitativas utilizadas em Educação Matemática é que o pesquisador que a faz intencionalmente cria fontes históricas explicitando-as como tal. Qualquer estudo elaborado e tornado público é de alguma forma uma fonte histórica, ainda que essa pretensão não esteja no horizonte do pesquisador. A grande diferença é que aquele que se vale da metodologia da História Oral é um criador intencional de fontes e, por esta razão, está envolto em todas as circunstâncias exigidas por essa criação: o reconhecimento da

inexistência de uma verdade sólida, inquebrantável, intransponível, definida e definitiva; o choque existente entre os diversos pontos de vista trazidos à tona por estas fontes; a responsabilidade ao costurá-las para sua pesquisa e a consciência de que elas lhe dão uma percepção parcial, mas nem por isso pouco nítida, da realidade estudada. O pesquisador precisa ter em mente que as fontes que constitui são lacunares e parciais.

O mesmo autor afirma ainda que a História Oral, pensada como metodologia de pesquisa, exige alguns momentos: a pré-seleção dos depoentes, a realização e gravação das entrevistas, a transformação do material gravado em um texto escrito, o momento de legitimação – quando o documento escrito retorna ao depoente para conferência e posterior cessão dos direitos de uso – e o momento de análise. É a respeito desses momentos que falaremos em seguida.

Procedimentos metodológicos nas pesquisas envolvendo História Oral

- **A questão geradora, a escolha dos depoentes e as entrevistas**

O primeiro passo para iniciarmos uma pesquisa utilizando a História Oral é, segundo Garnica (2003), termos uma questão geradora, isto é, a pergunta que dirige a procura. Este autor destaca a importância das questões geradoras:

O pesquisador deve tratar de explicitar essas suas questões geradoras do modo mais claro possível, pois elas próprias parecem ser um caminho para a sistematização de perplexidades que acabarão por constituir o campo do inquérito: de quem coletar depoimentos? De qual período tratar? Histórias de Vida ou História Oral Temática? Quais fontes documentais complementares? (GARNICA, 2003, p. 23).

No caso desta pesquisa, as questões geradoras disseram respeito a: como a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral foi implantada no curso de Matemática da USP, de que forma se transformou, pouco a pouco, de uma disciplina inicialmente de Análise Matemática para outra efetivamente de Cálculo e como se desenvolveu, ao longo dos anos, entre 1934 e 1994, em termos do nível de rigor e das preocupações didáticas dos docentes envolvidos em seu processo de ensino e aprendizagem. Esses temas dirigiram nossa pesquisa; todas as perguntas dos roteiros das entrevistas realizadas estavam vinculadas a eles ou, pelo menos, próximas dos mesmos. Convém destacar que, embora a resposta a estas questões geradoras tenham sido o objetivo principal da pesquisa, a cada entrevista tínhamos um objetivo específico, uma questão particular que procurávamos responder.

Fixada a questão geradora, passamos a buscar os depoentes. Essa busca foi feita de maneira cuidadosa, pois, conforme destaca Meihy (1996, p. 41), o pesquisador deve buscar que a História Oral Temática revele a verdade de quem presenciou um acontecimento ou que dele tenha alguma versão discutível ou contestatória. Garnica nos alerta que essa procura dos depoentes “frequentemente ocorre num processo de rede, pois dado que o tema faz parte de uma determinada comunidade, é usual que um depoente lembre-se de (e sugira) nomes de outros possíveis depoentes” (GARNICA, 2007, p. 40). Foi exatamente o que aconteceu no caso deste trabalho; não tínhamos como escolher, a priori, quem iríamos ouvir; os depoentes foram surgindo entrevista a entrevista, por indicação explícita dos próprios entrevistados ou por meio de alguma indicação dada por eles em seus depoimentos. Os depoentes escolhidos e os motivos dessas escolhas foram os seguintes³:

- *Elza Furtado Gomide*: ao iniciarmos nossos estudos referentes à fundação da Universidade de São Paulo e ao primeiro curso superior de Matemática do país, implantado na FFCL desta instituição, percebemos que a disciplina de Cálculo do curso e universidade em questão se originou com a disciplina de Análise Matemática, implantada na USP pelo matemático Luigi Fantappiè que, entre 1934 e 1939, ministrou tal conteúdo com o auxílio de Omar Catunda. Com o retorno do primeiro à Itália em 1939, seu então assistente assumiu o posto de catedrático. Como tínhamos a informação de que Gomide havia sido aluna de Catunda no curso de Análise, resolvemos entrevistá-la com o objetivo de obtermos maiores informações a respeito desta disciplina e sobre como ela era conduzida pelo professor, em termos do rigor, e das preocupações didáticas.
- *Ubiratan D'Ambrosio*: durante a entrevista que nos concedeu, Gomide comentou que havia sido assistente de Catunda e que o catedrático lhe atribuiu como tarefa ministrar as aulas teóricas do curso de Análise para os alunos do primeiro ano. De acordo com ela, logo que assumiu tais aulas, por acreditar que o mais indicado seria o aluno aprender primeiramente Cálculo Diferencial e Integral para posteriormente aprender Análise Matemática, já que esta última, em sua visão, é a crítica do primeiro,

³ Além destes depoentes citados, entramos em contato, via correio eletrônico, com outros atuais professores do IME que nos forneceram alguns dados relevantes como nomes de docentes que ministraram Cálculo I em determinados anos, livros-textos adotados em tais cursos, etc., mas que disseram não se lembrar de tantos detalhes a respeito da disciplina de Cálculo I que vivenciaram como alunos; que não conseguiriam nos conceder entrevistas que, de fato, pudessem contribuir significativamente com a pesquisa em questão. Entre estes professores que nos forneceram alguns dados, mas não foram entrevistados para nosso trabalho, destacamos: Alfredo Goldman Vel Lejbman, Carlos Henrique Barbosa Gonçalves, Elisabeti Kira, Lúcia Satie Ikemoto Murakami e Roberto Hirata Jr.

procurou, cada vez mais, aproximar o enfoque de suas aulas daquele que considerava mais adequado para um contato inicial dos estudantes com os conceitos do Cálculo. Entre seus alunos nessas primeiras turmas, estava o professor D'Ambrosio, que ingressou na graduação em Matemática em 1951. Assim, a razão principal que nos levou a entrevistá-lo foi exatamente tentar perceber as diferenças entre os enfoques dados à disciplina de Análise por Gomide e por Catunda.

- *João Zanetic*: além de Gomide, Catunda contava com a colaboração de outro professor na condução dos cursos de Análise: o auxiliar de ensino Carlos Benjamin de Lyra. Catunda se aposentou em 1962 e a partir de então não houve mais um professor catedrático a frente da cadeira de Análise; diversos professores passaram a ministrar a disciplina em diferentes anos. Em 1964 houve uma reforma curricular no curso de Matemática e a cadeira em questão foi dividida em duas: Cálculo Infinitesimal e Equações Diferenciais. A partir deste momento, os alunos ao ingressarem na universidade cursavam primeiramente Cálculo e depois, em outra disciplina (chamada Cálculo II) retomavam, de forma mais analítica e com um maior nível de rigor, aqueles conceitos trabalhados no Cálculo I. Em 1964, Lyra foi o responsável pelo curso inicial de Cálculo em uma turma que reunia os ingressantes nas graduações em Física e em Matemática. Tanto Gomide quando D'Ambrosio haviam comentado a respeito das qualidades didáticas deste docente e, por esta razão, decidimos entrevistar algum de seus ex-alunos. Não encontramos, no entanto, nenhum professor do IME que houvesse sido aluno de Lyra na disciplina inicial de Cálculo; optamos então por entrevistar o físico João Zanetic, que foi aluno de tal professor, na disciplina de nosso interesse, no ano de 1964.
- *Ana Catarina Pontome Hellmeister*: realizadas as entrevistas com Gomide e D'Ambrosio e de posse de dados obtidos em trabalhos feitos anteriormente por outros pesquisadores, já estávamos em condições de esboçar uma caracterização dos cursos de Análise Matemática das décadas de 1940 e 50. Com relação a década de 60, no entanto, tínhamos, por enquanto, somente o depoimento de Zanetic; iniciamos então uma busca por outras pessoas que tivessem cursado Cálculo I neste período. Foi desta forma que chegamos até Hellmeister que ingressou na graduação em Matemática da USP em 1967 e cursou a disciplina de nosso interesse com a professora Junia Borges Botelho.
- *Sônia Pitta Coelho*: na entrevista que nos concedeu, Hellmeister além de falar sobre a disciplina ministrada por Botelho, comentou também a respeito da reforma dos

currículos dos cursos de Matemática da USP no final da década de 1960 e da consequente criação, em 1968, de um curso de Bacharelado, com diversos conteúdos matemáticos distintos daqueles vistos na Licenciatura. Hellmeister foi aluna da primeira turma deste curso e para que pudéssemos obter maiores informações sobre ele, nos sugeriu que entrevistássemos sua colega, a também professora Sônia Pitta Coelho, que, além disso, conforme ficará claro ao longo do trabalho, também teve importante papel, no início da década de 1970, na introdução de uma metodologia de ensino de Cálculo até então inédita na USP.

- *Zara Issa Abud*: em sua entrevista, a professora Hellmeister nos disse que, no início da década de 1970, os cursos de Cálculo da Matemática continuavam a ser conduzidos de forma tradicional, por meio de aulas expositivas, por professores como Jacob Zimbarg Sobrinho que ministrou a disciplina em 1972. Abud foi uma das alunas de tal docente e, por esta razão, optamos por entrevistá-la.
- *Eduardo do Nascimento Marcos*: Hellmeister, no decorrer da entrevista concedida, nos disse que ela própria era uma das pessoas que, no início da década de 70, estava dando aulas de Cálculo na Matemática ainda de forma tradicional. Para obtermos mais informações a respeito dos cursos conduzidos por ela, optamos por entrevistar o professor Marcos que foi seu aluno em 1973.
- *Maria Cristina Bonomi*: durante seu depoimento, Hellmeister comentou também que, em meados dos anos 1970, enquanto ela continuava adotando o método tradicional de ensino, baseado em aulas expositivas, já havia um grupo de professores buscando formas diferenciadas de ensinar Cálculo e, dentre estes, estava Bonomi. Decidimos então entrevistá-la para que nos falasse a respeito dessas primeiras tentativas de inovação no processo de ensino e aprendizagem desta disciplina e também sobre o curso de Cálculo ministrado por Gomide e por Botelho que ela vivenciou como aluna em 1966.
- *Vera Helena Giusti de Souza*: durante sua entrevista, Bonomi nos disse que outra professora envolvida nessas primeiras inovações no ensino do Cálculo foi Souza. Coelho também comentou a respeito do envolvimento de Souza neste processo: disse que ela e a colega eram monitoras da professora Iracema Martin Bund que foi quem introduziu, primeiramente nas turmas da Física, um novo enfoque no ensino do Cálculo - baseado em trabalho em grupo e roteiros de estudo – que posteriormente foi levado para a Matemática por Bonomi. Nosso objetivo ao entrevistar Souza foi

exatamente perceber como e por que razão Martin Bund introduziu essa abordagem e como ela começou a ser implantada também nas turmas da Matemática.

- *Cláudia Cueva Cândido*: ao entrevistarmos Bonomi ela nos deu sua visão como professora a respeito da metodologia que havia introduzido nos cursos de Cálculo da Matemática em meados da década de 70. Precisávamos então saber como aquela experiência havia repercutido entre os alunos e ela então nos sugeriu que entrevistássemos Cândido, que foi sua aluna em 1976.
- *Iole de Freitas Druck*: em seu depoimento, a professora Cândido comentou que em 1976, ano em que ingressou na universidade e o curso inicial de Cálculo era baseado nos roteiros e trabalhos em grupo, havia três turmas da disciplina na Matemática; sendo uma delas coordenada por Bonomi, outra por Druck e uma terceira coordenada por Reinado Salvitti. Decidimos entrevistar Druck para tentarmos obter mais dados a respeito desses cursos alternativos de Cálculo e também porque vários de nossos entrevistados destacaram que seu depoimento seria importante para nossa pesquisa pelo fato dela possuir muitas informações referentes ao histórico dos cursos de Matemática da USP e às discussões pedagógicas pelas quais eles passaram.
- *Cristina Cerri*: por meio das entrevistas que já havíamos realizado, sabíamos que a experiência de trabalhar com roteiros e atividades em grupo na Matemática havia começado por volta de 1975, mas não sabíamos até quando isso tinha sido feito. Fomos, então, em busca de pessoas que tivessem cursado Cálculo I nos anos finais da década de 70. Chegamos à professora Cerri que ingressou na graduação em Matemática em 1977 e cursou a disciplina com a professora Carmen Cardassi que também adotava a metodologia dos roteiros. Optamos por entrevistar Cerri para percebermos se havia diferenças entre o trabalho desenvolvido por Cardassi e o feito por Bonomi e Druck em 1977. Além disso, vários de nossos entrevistados haviam recomendado que ouvíssemos Cerri por ela ter sido, durante bastante tempo, coordenadora do curso de Licenciatura em Matemática da USP e, conseqüentemente, possuir diversas informações a respeito da trajetória do mesmo.
- *Alegria Gladys Chalom*: ao buscarmos alunos que haviam cursado Cálculo I no final da década de 70, chegamos também até a professora Chalom que, assim como Cerri, foi aluna de Cardassi em 1977. Optamos por entrevistar Chalom por ela ter nos dito, em um contato preliminar, que teve dificuldades na disciplina e não a concluiu, fato que a obrigou a cursar Cálculo I também em 1978, sendo que, neste ano, o curso foi

ministrado pela professora Nair Fernandes que voltou a adotar o modelo tradicional, todo baseado em aulas expositivas. Obtivemos então a resposta para nossa dúvida a respeito de até quando havia durado esta experiência com a metodologia dos roteiros. Achamos pertinente ouvirmos Chalom porque, além de podermos obter maiores informações a respeito do curso de Cardassi, poderíamos tentar compreender o que para ela, talvez não tenha funcionado bem nessa metodologia dos roteiros e trabalhos em grupo. Além disso, o fato dela ter vivenciado dois cursos tão diferentes da mesma disciplina talvez pudesse trazer dados relevantes para nosso estudo, além de informações referentes às aulas de Fernandes que nos permitiriam complementar o esboço do panorama do ensino do Cálculo I na década de 70.

- *Oswaldo Rio Branco Oliveira*: após concluirmos um esboço do panorama dos cursos de Cálculo I na Matemática durante a década de 1970, passamos a buscar alunos que houvessem ingressado na USP nos anos de 1980 e, desta forma, chegamos à Oliveira, que foi aluno da disciplina de nosso interesse em 1980, em um curso ministrado pela professora Maria Stella Coutinho Castilla.
- *Fernanda Soares Pinto Cardona*: dando prosseguimento a busca por dados que nos permitissem compreender como havia sido a trajetória da disciplina Cálculo I ministrada aos alunos da Matemática da USP na década de 1980, chegamos à professora Cardona, que cursou Cálculo I com o professor Paulo Ferreira Leite em 1983. A entrevista que realizamos com a docente disse respeito a este curso.
- *Nina Sumiko Tomita Hirata*: esta professora, que atualmente é docente do departamento de Ciência da Computação do IME, ingressou como aluna no curso de Matemática da Universidade de São Paulo em 1986 e seu professor na disciplina de Cálculo I foi Seiji Hariki. Foi a respeito deste curso dado pelo professor Seiji que Hirata nos falou no decorrer de sua entrevista.
- *Vitor de Oliveira Ferreira*: ao entrevistarmos a professora Cristina Cerri, ela havia nos dito que, em meados da década de 1980, um grupo de professores, dentre os quais ela se incluía, começou a se preocupar com o fato do curso de Cálculo I da Matemática estar perdendo muito do rigor que o havia caracterizado até então. Ainda segundo Cerri, na tentativa de retomar tal rigor, esse grupo de professores optou por ministrar um curso de Cálculo I baseado no livro *Calculus* de Michael Spivak. Foi desta forma que a disciplina foi conduzida pelo professor Antonio Luiz Pereira no ano de 1989 e, dentre os alunos de Pereira estava o atual professor do IME Vitor de Oliveira Ferreira,

com o qual conversamos a respeito desse curso de Cálculo baseado no manual do Spivak que ele vivenciou como aluno.

Ao percebermos que determinado professor poderia colaborar com dados relevantes para nossa investigação, fazíamos um contato preliminar com este possível depoente, normalmente via email, para sabermos de sua disponibilidade em colaborar com a pesquisa. Caso o docente manifestasse interesse e possibilidade de nos conceder um depoimento, marcávamos o encontro, no qual a entrevista seria realizada e teria o áudio gravado e, ainda por email, solicitávamos alguns dados iniciais a respeito da formação do depoente (como, por exemplo, se o foco da entrevista fosse o curso de Cálculo que este havia vivenciado como aluno, pedíamos para que nos dissesse em que ano ingressou na universidade e cursou Cálculo I, nome de seu professor nessa disciplina, livro-texto adotado, etc.) para que pudéssemos elaborar, com algum conhecimento prévio, o roteiro da entrevista a ser realizada.

Optamos por realizar entrevistas parcialmente estruturadas, ou seja, preparamos antecipadamente perguntas abertas, estabelecendo os assuntos que desejávamos abordar, mas, no momento das entrevistas, nos mantivemos flexível quanto à retirada de algumas perguntas, à ordem em que elas foram apresentadas e ao acréscimo de outras questões que julgássemos necessárias. Seguimos Laville & Dionne (1999), para os quais “a flexibilidade (desse tipo de entrevistas) possibilita um contato mais íntimo entre entrevistador e entrevistado, favorecendo assim a exploração em profundidade de seus saberes, bem como de suas representações, de suas crenças e valores” (LAVILLE & DIONNE, 1999, p. 189). Garnica (2007, p. 44) também preconiza que “o roteiro não é um espartilho que deva impedir diálogos paralelos ou considerações não vinculadas ao tema”; o que deve ocorrer é o estabelecimento de um diálogo entre o entrevistador e o entrevistado. Isso é mais importante do que coletar informações secas e objetivas referentes ao tema de interesse do pesquisador. Essa idéia coaduna com Portelli (1997), para o qual:

A arte essencial do historiador oral é a arte de ouvir (...) E, se ouvirmos e mantivermos flexível nossa pauta de trabalho, a fim de incluir não só aquilo que acreditamos querer ouvir, mas também o que a outra pessoa considera importante dizer, nossas descobertas sempre vão superar nossas expectativas. (PORTELLI, 1997, p. 22).

Queiroz (1988) diferencia a História de Vida da História Oral Temática (que o autor chama de Depoimentos), segundo a perspectiva da coleta dos dados e nessa diferenciação, o papel do roteiro de entrevista ao optar-se pela História Oral Temática fica bastante claro:

A diferença (...) está na forma específica de agir do pesquisador ao utilizar cada uma dessas técnicas, durante o contato com o informante. Ao colher um depoimento, o colóquio é dirigido diretamente pelo pesquisador, pode fazê-lo com maior ou menor sutileza, mas na verdade tem nas mãos o fio da meada e conduz a entrevista. Da 'vida' de seu informante só lhe interessam acontecimentos que venham a se inserir diretamente no trabalho e a escolha é unicamente efetuada sob esse critério. Se o narrador se afasta em digressões, o pesquisador corta-as para trazê-lo de novo no seu assunto. Nas histórias de vida, embora o pesquisador (...) dirija o colóquio, quem decide o que vai relatar é o narrador, diante do qual o pesquisador deve se conservar tanto quanto possível silencioso. Nada do que relata pode ser considerado supérfluo, pois tudo se encadeia para compor e explicar sua existência. (QUEIROZ, 1988, p. 21).⁴

Dos entrevistados nesta pesquisa, apenas Druck não foi aluna da Universidade de São Paulo e então, todos os roteiros, exceto o dela, incluíam uma primeira parte contendo questões referentes à disciplina inicial de Cálculo ou de Análise (no caso de Gomide e D'Ambrosio, já que na época em que eram estudantes não havia uma disciplina de Cálculo no currículo do curso de Matemática) que os depoentes vivenciaram como alunos ao ingressarem no curso de graduação. De maneira geral, as questões contempladas na primeira parte dos roteiros de entrevistas foram:

- Em que ano o(a) senhor(a) cursou a primeira disciplina de Cálculo, qual era o nome desta disciplina na época e que professor a ministrou?
- O(a) senhor(a) cursou Bacharelado ou Licenciatura em Matemática? As aulas de Cálculo I eram comuns para os dois cursos?
- Comente a respeito de seu professor de Cálculo I, sobre o curso ministrado por ele. De que forma os conceitos eram apresentados? Era apresentada alguma situação motivando os alunos a aprenderem determinado conceito? Havia preocupações em relatar aos alunos aspectos da evolução histórica dos conceitos trabalhados? Nesta disciplina eram trabalhadas aplicações do Cálculo que não fossem intrínsecas à própria Matemática? Que aspectos da didática do professor mereceriam destaque? Havia algo nesta disciplina que lhe chamasse atenção na época ou mesmo algo que só veio perceber depois de formado(a), ao começar a atuar como professor(a)?
- Havia durante as aulas uma preocupação em dar condições para que o aluno enxergasse o papel, o significado dos elementos, dos símbolos envolvidos nas definições matemáticas (como, por exemplo, o papel dos epsilon e deltas na definição

⁴ No caso desta pesquisa, por exemplo, ao elaborarmos os roteiros das entrevistas, acrescentamos apenas questões relacionadas, de alguma forma, ao tema de nosso interesse: o ensino do Cálculo no curso de Matemática da USP entre 1934 e 1994. Aspectos da vida do depoente que não estivessem ligados a este tema não nos interessavam e, por esta razão, não figuraram nos roteiros questões cujas respostas não contribuiriam para acrescentar outros elementos à discussão do tema de investigação.

de limite)? De que forma isto era feito? O professor procurava, primeiramente, trabalhar com as noções intuitivas dos conceitos ou já apresentava diretamente as idéias de maneira formal?

- Qual era o nível de rigor deste curso de Cálculo I que vivenciou como aluno?
- Como eram os exemplos e exercícios trabalhados durante as aulas? Priorizavam a aplicação imediata de técnicas de cálculo ou eram exemplos e exercícios mais elaborados com ênfase nos conceitos? E nas listas de exercícios, se valorizava mais treino de técnicas, exercícios conceituais ou demonstrações?
- E como eram as avaliações? Que tipo de questões eram cobradas nestas avaliações?
- Como era a participação dos alunos durante as aulas? As aulas eram sempre expositivas ou havia outras atividades?
- O professor indicava algum livro de referência para o curso? Qual? O livro era utilizado em sala de aula ou somente nos momentos de estudo extraclasse, para revisar a teoria e resolver exercícios?
- Na origem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral ministrada aos alunos da Matemática da USP está a disciplina Análise Matemática implantada por Luigi Fantappiè em 1934. Pouco a pouco, essa disciplina foi adquirindo um caráter efetivamente de Cálculo, até chegar ao formato que conhecemos atualmente. O primeiro curso de Cálculo que o(a) senhor(a) fez quando era aluno(a) poderia, em sua opinião, ser caracterizado como uma disciplina efetivamente de Cálculo ou ainda estava mais próxima de uma disciplina atual de Análise?
- Percebia dificuldades suas ou de seus colegas na transição da educação básica para o ensino superior? A que o senhor(a) atribui a causa ou origem destas dificuldades?
- Há mais algum aspecto referente ao curso de Cálculo que vivenciou como aluno(a) e que gostaria de destacar?

Na segunda parte, os roteiros traziam questões a respeito das características gerais dos cursos de Cálculo que nossos entrevistados ministraram aos alunos da Matemática na USP depois de formados. Essas perguntas só não foram feitas a D'Ambrosio, a Zanetic, a Ferreira e a Hirata que nunca deram aulas de Cálculo no curso e instituição de nosso interesse. As questões contempladas na segunda parte dos roteiros foram:

- Fale um pouco a respeito do(a) senhor(a) como professor(a) de Cálculo. Quais as características que diferenciam os seus cursos de Cálculo de outros e, mais especificamente, daquele que vivenciou como aluno(a)?

- Comente a respeito de suas preocupações didáticas e seus cuidados ao ministrar um curso introdutório de Cálculo Diferencial e Integral (motivação dos alunos, história do desenvolvimento dos conceitos, formalismo, aplicações dos conceitos do Cálculo).
- Comente sobre o nível de rigor dos cursos de Cálculo que costuma ministrar.
- Como é a participação dos alunos nos cursos que o(a) senhor(a) ministra?
- Que tipo de exercícios e questões costuma trabalhar em seus cursos?
- E nas avaliações, que tipo de questões costuma cobrar?
- Indica algum livro como referência para a disciplina? Qual ou quais? Como é feito o uso deste livro? O aluno o utiliza em sala de aula?
- Quais as diferenças que, na opinião do(a) senhor(a), devem existir entre a disciplina de Cálculo I do bacharelado e a disciplina de Cálculo I da licenciatura em Matemática? Por que acredita que deva haver esta diferença? Fale um pouco de suas preocupações específicas ao ministrar uma disciplina de Cálculo I em cada um destes cursos.
- Há mais algum aspecto referente aos cursos de Cálculo que o(a) senhor(a) ministra e que gostaria de destacar?

Antes de realizarmos as entrevistas, procuramos obter o maior número de informações possível a respeito daquilo que iríamos perguntar, já que entrevistas são diálogos a respeito do objeto de pesquisa e, diálogo, exige interlocução entre entrevistador e entrevistado. De acordo com Garnica (2007), embora possam ocorrer entrevistas nas quais o depoente ensine ou explique algo que o entrevistador ignore totalmente, as situações mais ricas são aquelas nas quais acontece uma interação entre o depoente e o pesquisador, com esse último perguntando, complementando e valorizando - com conhecimento de causa, é claro – aquilo que lhe é relatado. O pesquisador não é, de forma nenhuma, neutro e nem deve assim se mostrar ao seu entrevistado. O entrevistador nunca deve manter uma postura de afastamento silencioso em relação ao seu depoente, pois “querendo manifestar neutralidade e imparcialidade (...) demonstra também desinteresse, implicando via-de-regra a perda, a quebra da interlocução” (p.41).

Todos os roteiros preparados para as entrevistas englobaram essas informações que havíamos obtido previamente: as questões eram elaboradas visando esclarecer algo que, durante as pesquisas pré-entrevistas, não havíamos compreendido bem ou que gostaríamos de maiores detalhes. Havia em cada um dos roteiros uma parte contendo questões que, por nossos estudos anteriores, sabíamos que se feitas para determinado entrevistado poderiam nos fornecer dados importantes e se fossem feitas a outros provavelmente não.

É preciso destacar que, além dos depoentes citados e daquelas pessoas com as quais nos contatamos de maneira bastante breve por meio de correio eletrônico, conversamos ainda com o professor Hamilton Luiz Guidorizzi, que foi aluno do curso de Matemática da USP entre 1958 e 1965 e, posteriormente, se tornou professor da instituição e autor de um dos manuais populares no ensino do Cálculo há, pelo menos, 25 anos. O contato com este docente também foi via email, mas não foi tão superficial quanto o estabelecido com aqueles que apenas nos deram informações pontuais por não considerarem que possuíam dados relevantes para nosso estudo. Guidorizzi, na época de nosso contato, por outros compromissos profissionais já assumidos, não teve disponibilidade para uma entrevista no mesmo molde daquelas realizadas com os outros depoentes, mas se prontificou a nos responder algumas questões via correio eletrônico. Elaboramos, então, um questionário contendo treze perguntas, de forma a englobar exatamente os mesmos assuntos discutidos com os outros entrevistados, enviamos a Guidorizzi e este, por sua vez, nos devolveu suas respostas. As informações obtidas foram, como era de se esperar, menos focadas do que as que, provavelmente, obteríamos em uma entrevista oral, feita de acordo com os mesmos padrões das demais realizadas neste estudo. Afinal, sendo tal entrevista, na realidade, um questionário respondido pelo professor eletronicamente, não pudemos fazer interferências visando aprofundar algum aspecto comentado que parecesse ser importante para o tema da investigação em questão e nem pudemos, quando talvez fosse necessário, conduzir o diálogo de forma a retomar a temática principal. Salientamos, então, que, embora as considerações de Guidorizzi tenham sido relevantes e apareçam em diversos momentos deste relatório de pesquisa, pelas mesmas terem sido obtidas por um procedimento metodológico diferente daquele adotado nos diálogos com os outros entrevistados neste estudo, optamos por não relacionar tal depoente no rol anterior de entrevistas realizadas; preferimos tratar o questionário contendo suas respostas como mais um texto a que tivemos acesso ao longo da investigação aqui relatada.

Outro aspecto importante de ser destacado é que, ao trabalharmos com História Oral, devemos também ter em mente que é o depoente quem fixa o tempo de duração da entrevista e que, esse tempo, pode variar significativamente de acordo com inúmeros fatores. O desejo do pesquisador de que todas as questões do roteiro sejam contempladas não deve ser imposto ao depoente. As entrevistas podem, inclusive, ser realizadas em mais de um momento. No caso desta pesquisa, em todas as entrevistas conseguimos contemplar todo o roteiro planejado, mas o tempo de duração de cada depoimento e a riqueza de detalhes das informações concedidas variou consideravelmente. Os questionários preparados englobavam, em média, 25 questões (aquelas explicitadas anteriormente ao comentarmos a respeito dos roteiros das

entrevistas e outras questões específicas, diferentes para cada depoente, que só faziam sentido constarem na entrevista daquele personagem em particular) e houve desde entrevistas de vinte e cinco minutos até outras durando uma hora e vinte minutos.

Mais um ponto que deve ser levado em consideração é a questão da memória dos depoentes, a primeira fonte para a História Oral. Como nos alertam Gaertner & Baraldi (2008, p. 53), devemos ter em mente que a memória é seletiva tanto naquilo que é lembrado quanto no que é esquecido ou silenciado. Além disso, os depoentes muitas vezes não têm uma visão estática ou cristalizada do passado; eles podem constituir múltiplas versões deste passado e transmiti-las oralmente de acordo com necessidades atuais. Segundo Thompson (1998), as lembranças são constituídas por meio de uma *composição*, à qual Gaertner & Baraldi (2008) explicam da seguinte forma:

Compomos os dados de nossa memória com signos e significados diferentes, mas que traduzem noções comuns ao grupo social ao qual pertencemos. Desse modo, selecionar ou esquecer, divulgar ou silenciar são manipulações conscientes ou inconscientes, decorrentes de fatos diversos que afetam a memória, fazendo com que esta costure os fatos. (GAERTNER & BARALDI, 2008, p. 53).

Portelli (1997) aponta outra limitação da memória que devemos considerar: em muitos casos, os depoentes podem agrupar acontecimentos que, embora para ele tenham significados parecidos, tenham ocorrido, do ponto de vista cronológico, em épocas distintas.

Gaertner & Baraldi (2008, p. 54), concluem que, como a constituição da memória é objeto de negociação continua, o pesquisador não deve julgar o que lhe foi narrado por seu depoente e sim ter a consciência de que os significados atribuídos às ações e às escolhas do passado são conseqüências do sentido dado a elas pelo depoente no momento em que este as está narrando. É importante, então, deixar claro que este relatório de pesquisa não tem a menor pretensão de ser visto como um trabalho que apresentará a história exata da disciplina inicial de Cálculo no curso de Matemática da USP. O que apresentamos é uma versão dos fatos construída, por um lado sob a ótica da memória de algumas pessoas que os vivenciaram, com todas as imprecisões a que este tipo de abordagem está sujeita, e por outro, embasada na análise de livros-didáticos utilizados e documentos que nos foram possíveis resgatar.

- **A transcrição e a textualização das entrevistas**

Após a realização das entrevistas, é necessário um tratamento; uma passagem da gravação oral para o escrito. Geralmente, esse processo é composto por duas fases: a transcrição e a textualização.

A transcrição (ou degervação, como também é chamada) é definida por Garnica (2007, p.55) como sendo a passagem do suporte da entrevista do magnético ou digital para o papel; a explicitação do diálogo através dos caracteres gráficos; é o registro escrito do momento da entrevista que, posteriormente, passará por outros tratamentos. Procuramos transcrever as entrevistas logo após gravá-las, para que todos os detalhes do encontro com o depoente ainda estivessem bastante vivos em nossa memória: as entonações, as emoções manifestadas ao relatar algum fato, a maneira de fazer determinado comentário... Enfim, para que pudéssemos reproduzir aquele momento da forma mais precisa possível. Mesmo tomando esse cuidado, temos consciência de que o “o registro do momento da entrevista é (...) sempre lacunar, por maiores que sejam os esforços para reter os instantes” (GARNICA, 2003, p. 29).

O momento seguinte à transcrição é a textualização. Nele, o pesquisador se lança sobre o depoimento, já no papel, de forma menos técnica do que na transcrição. De acordo com o autor citado, a textualização é uma ação de atribuição de significado e há níveis de textualização pelos quais o pesquisador pode optar. Algumas opções são:

1. O pesquisador pode optar apenas por excluir do texto transcrito anteriormente os “vícios de linguagem” e preencher algumas lacunas latentes, com o objetivo de tornar mais fluente a leitura do depoimento;
2. O pesquisador pode ainda optar por reordenar, temática ou cronologicamente, o fluxo discursivo do depoente. Ou então, ao invés de reordenar, pode inserir subtítulos para realçar os subtemas que aparecerem no depoimento na ordem em que surgem;
3. O pesquisador pode também optar por uma transcrição, ou seja, criar uma situação (que pode, inclusive, ser fictícia) a partir das informações disponíveis na transcrição.

Em nossa pesquisa, optamos pela primeira opção: apenas excluir do depoimento transcrito os “vícios de linguagem” e preencher algumas lacunas visando tornar a leitura do depoimento mais fluente. No entanto, no momento das análises, utilizamos também uma idéia presente no segundo nível de textualização: fizemos alguns recortes temáticos nos dados obtidos por meio dos depoimentos.

Garnica (2007) afirma que, embora a transcrição e a textualização sejam procedimentos, esses momentos não devem ser vistos apenas como uma técnica de melhorar o texto, algo em cuja essência reside apenas uma preocupação estilística:

Para além da mera técnica, os momentos de transcrição, textualização e transcrição são estratégias de ação metodológica, instancias de familiarização em relação ao que foi narrado pelo depoente. Muito do que ocorre no momento vivo da entrevista pode ter passado despercebido pelos atores que a vivenciaram e, assim, o trabalho posterior com o texto da oralidade, tornado mais facilmente manipulável (...) pela escrita, é um esforço de resgate para a atribuição de significados. (...) O modo de tratar os depoimentos é mais do que uma estratégia ou técnica, sendo, também, um modo de compreender o mundo e, portanto, um modo de conhecer, algo com um vínculo epistemológico. (GARNICA, 2007, p. 56).

O autor destaca também que esse movimento de passagem do oral para o escrito merece considerações, uma vez que, escrito o discurso, entra em jogo a questão da significação: a intenção do entrevistado e o significado do texto nem sempre coincidem: “o depoente pretende dizer e diz, mas a significação é um processo de negociação, e entre o dito e o compreendido vai uma grande distância” (GARNICA, 2003, p. 29). O autor da textualização deve também se certificar se o texto final está refletindo, de fato, o que ele pretendia dizer com aquela textualização, já que, a partir do momento, em que apresenta um texto escrito, “o que o texto significa interessa (...) mais do que o autor quis dizer quando o escreveu” (RICOEUR, 1976, p. 41).

Finalizada a textualização, o pesquisador deve submeter o seu texto aos depoentes para que estes façam correções e complementações. Essa fase é chamada de legitimação ou conferência. O pesquisador deve sempre levar em consideração que, algumas vezes, depoentes que possuem reconhecimento público podem temer “a possibilidade de verem desveladas suas concepções, suas informações, suas crenças, dados os compromissos sociais que sua posição firmou: a transparência, em muitos casos, (...) pode mostrar-se inconveniente” (GARNICA, 2003, p. 33).

No caso desta pesquisa, finalizadas as textualizações, enviamos os textos produzidos aos depoentes juntamente com a carta de cessão – cujo modelo se encontra nos anexos desse trabalho – a ser assinada por aqueles que se disponibilizassem a ceder o texto final da entrevista para que usássemos em nosso trabalho. Disponibilizamos um prazo de praticamente um mês para que cada entrevistado lesse a textualização correspondente ao seu depoimento, alterasse ou suprimisse aquilo que achasse necessário e decidisse se nos cederia ou não os direitos de uso de sua entrevista. Marcamos então uma data e retiramos pessoalmente as cartas assinadas que se encontram devidamente arquivadas em poder do pesquisador.

De posse das autorizações de uso das entrevistas, o pesquisador deve partir então para analisá-las; é a respeito deste momento de análise que trataremos na próxima seção. No entanto, convém destacar que nesta pesquisa os dois tipos principais de documentos analisados - textualizações das entrevistas e livros-didáticos - foram interrogados da mesma forma e, por esta razão, na seção seguinte, falaremos a respeito do momento de análise de uma forma geral, e não somente das entrevistas.

2.2.2 – Análise das Textualizações das Entrevistas e dos Livros-didáticos

Após a textualização, tem início o processo de análise das entrevistas, momento no qual, de acordo com Alberti (2004, p. 185), o pesquisador precisa saber “ouvir” aquilo que a entrevista tem a dizer, com relação às condições em que foi produzida e com relação à narrativa do entrevistado.

Nesse momento de análise, o pesquisador deve estar atento para não sobrepor suas vontades ao que foi dito pelo depoente; é o ponto de vista do entrevistado que deve ser registrado mesmo que, com isso, o pesquisador se sinta frustrado e perceba que a entrevista não aconteceu da forma planejada e/ou que não foi possível obter informações significativas para a pesquisa em questão (GAERTNER & BARALDI, 2008).

O momento de análise das entrevistas é definido por Garnica (2007) como sendo:

Um processo de atribuição de significado que permite com que eu, como ouvinte/leitor/apreciador do texto do outro, possa apropriar-me, de algum modo, desse texto, numa trama interpretativa, tecendo, a partir dele, significados que são meus – ainda que gerados de forma compartilhada – e que posso, incorporar esses significados numa trama narrativa própria, num processo contínuo de ouvir/ler/ver, atribuir significado, incorporar, gerar textos que são ouvidos/lidos/vistos pelo outro que a eles atribui significados, os incorpora, gerando seus textos que são ouvidos/lidos/vistos... (GARNICA, 2007, p. 58).

O mesmo autor alerta que a análise não é um julgamento de valor a respeito do outro partindo do que nos foi relatado e também não é a “fixação de uma versão definitiva do cenário que [a] pesquisa pretendeu traçar” (Ibid, p. 61). A idéia de verdade absoluta deve ser negada tanto para os documentos escritos quanto para as fontes orais. Analisar os depoimentos, à luz da História Oral “é retratar cenários, dar-lhes contorno à luz do presente, dialogar com dados, perceber tendências no que se altera e no que permanece” (GARNICA, 2003, p. 34). O pesquisador estará frente a frente com várias versões e deverá, em sua pesquisa, trabalhar com todas elas, não tentando fixar uma versão em detrimento da outra; deve identificar e se atentar para lacunas ou disparidade entre os relatos para perceber como

tal depoente se constitui, quais fatores realça e quais negligencia. Esse olhar atento para a pluralidade de pontos de vista acaba se constituindo também como uma estratégia para novas buscas, novas entrevistas e novas compreensões.

Outro alerta trazido por Garnica (2007, p. 46) e que o pesquisador deve levar em consideração durante suas análises é que tanto o entrevistador (que ouve e interpreta os depoimentos) quanto o depoente (que narra os acontecimentos) compreendem a trama de existências e experiências através de um filtro: o presente. O pesquisador deve em suas análises, tentar, nesse presente e munido dos referenciais de que dispõe recuperar ao máximo “as redes de poder, não como foram, mas como são possíveis... [a ele] compreendê-las, resgatá-las”.

Também durante as análises, o pesquisador não deve descartar a existência de documentos escritos que poderão lhe auxiliar no esclarecimento dos dados obtidos nos depoimentos. No entanto, deve-se ter em mente que, nem sempre, essa comparação entre as fontes orais e as fontes escritas, ocorre sem nenhum problema, já que, conforme alerta Vansina (1985), os interesses de quem escreve a respeito de um fato divergem muito daqueles que depõem a respeito do mesmo.

Como proceder, então, para analisar os depoimentos coletados numa pesquisa que utilize a História Oral como metodologia? Segundo Bolívar (2002), há duas possibilidades: uma *análise paradigmática* das narrativas ou uma *análise narrativa* das narrativas.

A *análise paradigmática* de dados narrativos é utilizada, de acordo com o autor, naqueles estudos baseados na História Oral em que as análises são feitas por tipologias paradigmáticas, taxonomias ou categorias, para obter determinadas generalizações a respeito do tema estudado; o pesquisador busca temas comuns ou agrupamentos conceituais no conjunto das narrativas obtidas durante a pesquisa. Segundo o autor, há dois tipos de análises paradigmáticas que podem ser feitas:

Os conceitos derivam de uma teoria prévia e são aplicados para determinar como cada uma das instâncias particulares se agrupam segundo o conjunto de categorias. [Ou] ao invés do investigador impor aos dados conceitos derivados teoricamente, as categorias derivam indutivamente dos dados. Esse tipo de análise tem sido o mais utilizado na chamada investigação qualitativa. (BOLÍVAR, 2002, p. 12 – tradução nossa).

Em ambos os casos, o objetivo é obter um conhecimento geral a partir de um conjunto de histórias particulares. Normalmente o pesquisador utiliza, com fins ilustrativos ao longo de

seu trabalho, alguns recortes selecionados das entrevistas, visando apoiar aquilo que a análise qualitativa determina previamente.

Já a *análise narrativa* de dados narrativos é, de acordo com o autor citado, utilizada em estudos que enfatizam casos particulares e cuja análise se apresenta como uma narração de uma trama ou argumento, mediante um relato narrativo que torne os dados significativos. O pesquisador não busca, nesse caso, elementos comuns, e sim elementos singulares que configuram a história. Ao contrário do que ocorre no modo paradigmático, o resultado da análise das narrativas é uma narração particular, sem aspirar por uma generalização. Nesse tipo de análise, o papel do pesquisador é configurar os elementos dos dados em uma história que unifique e dê significado a esses dados, com a finalidade de expressar, de modo autêntico, a vida individual do depoente, sem manipular sua voz. Essa análise exige do pesquisador habilidade para desenvolver uma trama ou argumento permitindo a união temporal ou temática dos dados recolhidos, de modo a responder de maneira compreensiva o porquê de ter acontecido determinado fato.

Apresentamos a seguir uma tabela mostrando as diferenças entre os dois tipos de análise de dados narrativos:

	Análise Paradigmática	Análise Narrativa
Modos de Análises	Tipologias, categorias, normalmente estabelecidas de modo indutivo.	Agrupar dados e vozes em uma história ou trama, configurando um novo relato narrativo.
Interesses	Temas comuns, agrupamentos conceituais, que facilitam a comparação entre casos. Generalização.	Elementos distintivos e específicos. Revelar o caráter único e próprio de cada caso. Singularidade.
Crítérios	Comunidade científica estabelecida: tratamento formal e categorial.	Autenticidade, coerência, compreensão, caráter único.
Resultados	Informe “objetivo”: análise comparativa. As vozes como ilustração.	Gerar uma nova história narrativa elaborada – a partir das vozes distintas – pelo investigador.
Exemplos	Análise de conteúdo convencional, “teoria fundamentada”.	Informes antropológicos, boas reportagens jornalísticas de revistas ou televisivas.

Tabela 2.1: comparação entre modo de análise paradigmático e modo narrativo – tradução nossa da tabela presente em Bolívar (2002, p. 13).

Em nossa pesquisa, optamos por adotar esse tipo de análise que Bolívar chama de análise paradigmática que, como o próprio autor deixa claro na última linha da tabela 2.1, é

bastante semelhante à Análise de Conteúdo convencional. E a adotamos não somente para as entrevistas; este tipo de análise, que produz uma categorização dos dados obtidos, foi utilizado no estudo de todas as nossas fontes, já que, conforme dissemos no início dessa seção, os principais documentos analisados nesta pesquisa, que foram as textualizações das entrevistas e os livros-didáticos de Cálculo, utilizados pelos nossos depoentes quando alunos ou quando professores, foram interrogados da mesma forma. O que fizemos foi, com base nas leituras dos textos finais das entrevistas e dos livros-didáticos, elaborar categorias de análise que nos permitissem perceber algumas características das abordagens dadas ao Cálculo no que diz respeito ao rigor, as preocupações didáticas manifestadas pelos professores e pelos autores dos livros adotados como referência e a transição de uma disciplina inicialmente de Análise Matemática para outra efetivamente de Cálculo. Convém destacarmos que as particularidades de cada período não foram ignoradas, mas nosso objetivo não era trabalhar, especificamente, com essas particularidades e sim perceber pontos comuns e estabelecer comparações entre os períodos, visando um panorama geral a respeito do ensino do Cálculo na instituição, curso e período estudados.

Optamos pelo primeiro tipo de análise paradigmática em que as categorias são decididas a priori, mas, no caso deste trabalho, elas não derivaram de uma teoria prévia; se originaram de nossa intenção de analisar alguns elementos específicos do ensino do Cálculo, estabelecidos antes da coleta dos depoimentos e da análise dos livros didáticos, a saber: se a orientação da disciplina estava mais próxima, de fato, do Cálculo Diferencial e Integral ou da Análise Matemática, qual o nível de rigor adotado nos diferentes cursos e quais as preocupações de caráter didático manifestadas, ao longo de diferentes épocas, pelos professores e autores de manuais empregados como referências nos cursos iniciais de Cálculo analisados nesta pesquisa. Os roteiros de entrevistas foram elaborados de maneira a possibilitarem a coleta de informações a respeito destes elementos, da mesma forma que os livros também foram analisados tendo tais aspectos em foco.

Convém, mais uma vez, destacarmos que optamos também por analisar brevemente alguns livros-didáticos por, assim como Barufi (1999), acreditarmos que o livro é um porto-seguro no qual o professor ancora seu curso, um referencial para ele e para os alunos que evita grandes desvios de rota. Além disso:

A escolha do livro revela uma primeira compatibilidade entre a proposta do autor e a proposta do professor que ministra o curso. Essa premissa nos parece razoável diante do grande número de livros-didáticos de Cálculo existentes e das escolhas normalmente realizadas. O professor não escolhe qualquer texto. A opção por um determinado livro, revela sua maior identificação com o trabalho nele desenvolvido,

em contraposição daquele realizado nos outros textos disponíveis. Essa identificação, evidentemente, é relativa, podendo sempre acontecer de o professor realizar complementos, textos ou coleções de exercícios, para ampliar ou modificar partes em que ele gostaria de fazer de outra maneira. (...) O curso não se desenvolve necessariamente de modo idêntico ao livro, mas, de modo geral, a organização do Cálculo, apresentada no texto, fornece fortes indícios das intenções do professor, de suas crenças em relação a como deverá ocorrer a construção do conhecimento por parte de seus alunos, no decorrer de seu curso. (...) O uso do livro depende muito do leitor, mas é claro que a proposta nele contida é fruto de um intenso trabalho e de profunda reflexão por parte do autor. Ainda que, nos diferentes textos, o assunto, basicamente, seja sempre o mesmo, em cada caso, o autor definiu objetivos principais, realizou escolhas metodológicas para viabilizar a consecução dos seus objetivos. Por exemplo, privilegiou determinada sequência na abordagem realizada, estabeleceu uma preponderância da lógica ou da retórica no desenvolvimento do texto, imprimiu um caráter mais algébrico ou geométrico, propôs questões mais ou menos criativas, além daquelas meramente “burocráticas”, que objetivam a aprendizagem técnica. (...) Nos textos selecionados, encontram-se indícios significativos de como são desenvolvidos os cursos de Cálculo. (BARUFI, 1999, p. 48-51).

Ao elaborarmos o roteiro base para as entrevistas e ao analisarmos os livros- didáticos utilizados pelos nossos entrevistados, achamos conveniente criarmos questões que nos possibilitassem obter dados suficientes para iniciarmos a caracterização das disciplinas introdutórias de Cálculo que nossos depoentes vivenciaram como alunos e como professores. Chegamos então às seguintes categorias de organização das análises:

1. *Características gerais do curso ministrado;*
2. *Choque na transição da educação básica para o ensino superior;*
3. *Participação dos alunos durante as aulas;*
4. *Livros-didáticos indicados e/ou adotados pelo professor;*
5. *Nível de rigor adotado;*
6. *Preocupação com conceitos teóricos versus manipulação de técnicas;*
7. *Preocupações didáticas:* nesta categoria, tanto nos livros-didáticos, quanto nas aulas de Cálculo vivenciadas por nossos depoentes como alunos ou como professores, observamos os seguintes aspectos:
 - *Contextualização* (observamos se os conceitos são apresentados por meio de textos contendo fragmentos da História da Matemática e se esses deixam ou não explícitas as idéias fundamentais que permitiram o desenvolvimento do Cálculo; e/ou se os conceitos são apresentados por meio de situações-problema dentro da própria matemática ou em outras áreas de conhecimento; e/ou ainda se são apresentados na sequência: definições, teoremas, exemplos e exercícios);

- *Introdução dos conceitos via noções intuitivas* (verificamos se antes de apresentar a definição formal dos entes matemáticos tratados é ou não dada uma noção intuitiva do conceito em questão);
- *Apelo à visualização geométrica* (procuramos observar se a visualização geométrica é ou não utilizada na tentativa de fazer com que o aluno perceba o significado de alguns elementos envolvidos nas definições e demonstrações apresentadas);
- *Preocupação com os significados das notações utilizadas;*

Alguns de nossos depoentes dissertaram também a respeito das transformações pelas quais passaram os cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da USP desde sua fundação, em 1934, até os dias de hoje e comentaram a respeito das alterações sofridas pela estrutura curricular, programas e ementas da disciplina inicial de Cálculo dos mesmos e estes dados também foram utilizados nas análises feitas no decorrer do texto.

Destacamos que as análises das entrevistas e dos livros-didáticos não serão apresentadas em um capítulo específico deste relatório de pesquisa; estarão incorporadas ao texto nos capítulos subsequentes.

Conforme já destacamos, a análise paradigmática de Bolívar contempla a Análise de Conteúdo e, a nosso ver, assim como tal metodologia, pode ser organizada em torno de três fases: a pré-análise; a exploração do material; o tratamento dos resultados, a inferência e a interpolação.

A fase da pré-análise é uma fase de organização. Nela, o pesquisador tem como objetivo sistematizar as idéias iniciais e torná-las operacionais, de forma a elaborar um planejamento para a análise que fará posteriormente. Geralmente, a pré-análise também pode ser dividida em três etapas: a escolha dos documentos a serem analisados; a formulação das hipóteses e dos objetivos; e a elaboração dos indicadores que irão fundamentar a análise propriamente dita.

Com relação à escolha dos documentos, o pesquisador pode determiná-los a priori ou primeiramente, estabelecer um objetivo para sua pesquisa e com base nesse objetivo, escolher o universo de documentos capaz de fornecer dados a respeito do tema levantado. No caso dessa pesquisa, decidimos investigar como foi o ensino de Cálculo no curso de Matemática da Universidade de São Paulo em um determinado período e, então, passamos a buscar materiais que pudessem nos auxiliar nessa investigação, ou seja, passamos a constituir um *corpus*, isto é, o conjunto dos documentos que seriam submetidos aos procedimentos analíticos.

Optamos por analisar entrevistas de pessoas envolvidas no processo de ensino e aprendizagem da disciplina Cálculo no curso de Matemática da USP e também por analisar

brevemente livros de Cálculo adotados como referência nos cursos que nossos entrevistados vivenciaram como alunos e como professores. Perguntamos a todos os nossos depoentes qual havia sido o texto de referência indicado durante o curso introdutório de Cálculo que eles fizeram ao ingressar na universidade e os que passaram a indicar, depois de formados, como professores de tal disciplina; de acordo com as respostas por eles fornecidas escolhemos os livros a serem analisados. Além disso, achamos conveniente buscarmos algum conhecimento a respeito de como era o ensino do Cálculo no Brasil antes da fundação da Universidade de São Paulo e para isso analisamos o primeiro livro-texto da disciplina adotado no Brasil. Finalizadas as escolhas, havíamos constituído o seguinte conjunto de documentos a serem analisados:

1. *Entrevistas* com professores envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral no curso de Matemática da Universidade de São Paulo;
2. *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Integral* de Sylvestre Lacroix: traduzido para o português, este livro foi o primeiro a ser utilizado nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral ministrados no Brasil;
3. *Curso de Análise Matemática de Luigi Fantappiè* de autoria de Omar Catunda: notas de aula da disciplina de Análise Matemática introduzida por Fantappiè na USP em 1934 e que foi a origem da disciplina atual de Cálculo ministrada no curso de nosso interesse na instituição;
4. *Curso de Análise Matemática - Partes I, II e III* de Omar Catunda: apostilas datilografadas contendo as notas de aula do curso de Análise Matemática ministrado a partir de 1939, ano em que Fantappiè retornou à Itália;
5. *Curso de Análise Matemática – Volume 1* de Omar Catunda: primeiro livro ‘moderno’ de Análise escrito no Brasil. Foi concebido com base nas notas de aula do curso dado na Universidade de São Paulo, divulgadas por meio das apostilas citadas no item anterior;
6. *A Course of Pure Mathematics* de Godfrey Harold Hardy: livro indicado pela professora Gomide em 1951;
7. *Calculus with Analytic Geometry – A First Course* de Murray H. Protter e Charles B. Morrey Jr: livro indicado pelos professores Lyra em 1964 e Botelho em 1967;
8. *Calcul Différentiel et Integral* de N. Piskunov: livro indicado para complementação de aula pelas professoras Elza Furtado Gomide e Junia Borges Botelho em 1966;
9. *Problems in Mathematical Analysis* de Demidovitch: livro indicado para exercícios pelas professoras Gomide e Botelho em 1966;

10. *Cálculo: um curso universitário* de Edwin Moise: livro indicado pela professora Hellmeister em 1973;
11. *Cálculo com Geometria Analítica vol. 1* de Louis Leithold: livro indicado pela professora Castilla em 1980;
12. *Apostilas de Cálculo do professor Hamilton Luiz Guidorizzi*, bastante utilizadas entre o final da década de 1970 e o início dos anos 1980;
13. *Um Curso de Cálculo vol. 1* de Hamilton Luiz Guidorizzi: manual que se tornou bastante popular nos cursos de Cálculo do IME a partir da década de 1980;
14. *Calculus* de Michael Spivak: livro indicado pelo professor Pereira em 1989.
15. *Caderno com as notas de aula produzidas por Ferreira durante o curso de Cálculo I ministrado pelo professor Pereira em 1989.*

Tendo constituído o corpus de documentos, a primeira atividade do pesquisador na pré-análise é realizar uma *leitura flutuante* dos mesmos, isto é, entrar em contato com os materiais a serem analisados, conhecer o texto deixando-se tomar por impressões e idéias. Pouco a pouco, hipóteses vão emergindo e a leitura vai se tornando mais precisa. Após essa leitura flutuante, a segunda tarefa é a *formulação de hipóteses e objetivos*. Nesta pesquisa, o objetivo foi estabelecido a priori: iríamos analisar os documentos visando compreender de que maneira o Cálculo foi ensinado na instituição, curso e período estudado. No entanto, não estabelecemos hipóteses para essa análise dos documentos. Privilegiamos os *procedimentos exploratórios* que, de acordo com Bardin (p. 125), “permitem, a partir dos próprios textos, apreender as ligações entre as diferentes variações, funcionam segundo o processo dedutivo e facilitam a construção de novas hipóteses”.

A terceira tarefa do pesquisador após a seleção dos documentos é a *escolha dos índices e a elaboração de indicadores*. Os textos contêm índices que a análise irá fazer falar, isto é, elementos que, talvez, não estejam explícitos no texto e, então, é necessário que o pesquisador escolha esses índices e os organize sistematicamente em indicadores. No caso deste trabalho, no entanto, os indicadores (ou categorias de análise) já haviam sido escolhidos a priori, conforme explicitado anteriormente.

A fase seguinte a da pré-análise é a exploração do material que consiste em operações de codificações, categorizações, entre outras, em função de regras previamente estabelecidas, que permitirão ao pesquisador perceber quais características do texto lhes poderão ser úteis no momento da análise. No caso de nossa pesquisa, no que diz respeito aos livros-didáticos transcrevemos, de cada obra, partes representativas da apresentação dos conceitos que desejávamos analisar (função, limite, derivada e integral) assim como noções ligadas a eles,

definições, teoremas, comentários, exemplos, etc. Essas transcrições nos deram subsídios para a realização da análise por meio dos indicadores escolhidos.

Terminada a exploração do material, o pesquisador deve partir para o tratamento dos resultados obtidos e a interpretação, etapa da Análise de Conteúdo na qual os “resultados ‘brutos’ devem ser tratados de maneira a serem significativos e válidos por meio de operações simples que permitem estabelecer quadros de resultados, padrões e modelos, os quais condensam e colocam em destaque as informações da análise” (CAMPOS, 2007, p. 84-85).

A intenção da Análise de Conteúdo é, basicamente, dar a um leitor crítico de um texto/documento/mensagem, informações suplementares a respeito desse texto; informações estas que lhe proporcionarão um distanciamento da leitura “aderente” (BARDIN, 2006, p. 163) para, assim, saber mais a respeito do que está lendo.

Estes foram os procedimentos metodológicos adotados nesta pesquisa. No próximo capítulo, inicialmente, esboçaremos para o leitor, de maneira breve, como era o ensino do Cálculo no Rio de Janeiro e em São Paulo antes da fundação da USP para, na sequência, tratarmos da fundação dessa universidade e da criação do primeiro curso superior de Matemática do país, no ano de 1934, fato que marca o início do período de interesse para esta investigação.

CAPÍTULO 3 - O ENSINO DE CÁLCULO NO BRASIL ANTES DE 1934, A FUNDAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO E O CURSO DE MATEMÁTICA DESTA INSTITUIÇÃO

Neste capítulo, inicialmente, descreveremos sucintamente como eram os ensinos de Matemática de nível superior e, especificamente, de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil antes da criação da Universidade de São Paulo em 1934. Analisaremos os cursos desta disciplina oferecidos pela Academia Real Militar do Rio de Janeiro e pela Escola Politécnica de São Paulo⁵ e estabeleceremos uma comparação entre as formas como alguns conceitos fundamentais deste ramo da Matemática eram tratados nos mesmos. Em seguida, trataremos da história da criação da Universidade de São Paulo, de sua Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras e do primeiro curso superior de Matemática do país, que passou a funcionar nessa instituição desde sua fundação.

3.1 – O Ensino Superior de Matemática no Brasil Antes da Fundação da USP

De acordo com Ziccardi (2009), o surgimento de instituições de ensino superior no Brasil foi ocasionado pela vinda da Família Real Portuguesa ao país em 1808, mas, mesmo assim, sem a criação de universidades. Inicialmente, foram implantados cursos superiores que visavam à formação de profissionais que pudessem contribuir com a melhoria das condições da Coroa Portuguesa que, durante 13 anos, sediou-se na cidade do Rio de Janeiro:

Necessitando de quem cuidasse da saúde dos membros da Corte, foram instituídas cadeiras de Medicina, tais como Anatomia, Técnica Operatória, Obstetrícia e Clínica Geral. No que se refere à parte administrativa foram criadas as cadeiras de Aula Pública e Ciência Econômica. Anteriormente, o ensino limitava-se à formação de clérigos, artilheiros e construtores de fortificações, com o objetivo de suprir as necessidades da época. (ZICCARDI, 2009, p. 37).

No que diz respeito à Matemática de nível superior, a mesma autora comenta que um ambiente mais favorável ao seu estudo começou a se formar quando, por meio da Carta de Lei de 04 de dezembro de 1810, o príncipe D. João VI criou a Academia Real Militar. Esta instituição, que formava Oficiais de Artilharia, Oficiais Engenheiros e Oficiais da Classe de

⁵ Escolhemos estas duas instituições por ter sido na Academia Real Militar que o Cálculo foi ensinado pela primeira vez no país e pelo fato da Escola Politécnica de São Paulo ter sido uma das instituições agregadas à Universidade de São Paulo quando esta foi criada.

Engenheiros Geógrafos e Topógrafos, foi a primeira do país a oferecer um curso completo de *Sciencias Mathematicas*.

Convém destacar que a maioria das instituições criadas por D. João VI, no âmbito do que poderíamos chamar de ensino superior, estavam diretamente relacionadas às preocupações com a defesa militar da Colônia que, na época, era sede do governo português. Além da Academia Real Militar, foram criadas as Escolas de Anatomia e Cirurgia do Rio de Janeiro e de Salvador, Escolas de Minas e Agricultura, Real Academia de Pintura e Escultura e as Escolas de Direito de São Paulo e de Olinda.

Com relação à Academia Real Militar, de acordo com Schwartzman (1979, p. 73), com o passar do tempo, a instituição passa por reformas de nome e regulamentos. Inicialmente, apenas militares podiam frequentá-la, até que, em 1833 foi concedida permissão para que paisanos também assistissem aos seus cursos juntamente com os militares. Em 1839 a Academia Real Militar passa a se chamar Escola Militar; em 1855 foi criada, no interior da Escola Militar, a Escola de Aplicação, mas o ensino básico de Matemática e Física continuou sob a responsabilidade da Escola Militar. No ano de 1858, uma nova alteração de nomes: a Escola Militar passa a se chamar Escola Central e a Escola de Aplicação passa a ser denominada Escola Militar e de Aplicação. Nesta época, a Escola Central, não tinha mais caráter de formação militar, tinha como disciplinas básicas Matemática e Física.

Segundo Ziccardi (2009, p. 39), em março de 1842, o *Curso Mathematico* da Escola Militar estava organizado nas seguintes cadeiras:

- 1º ano: Aritmética, Álgebra Elementar, Geometria e Trigonometria Plana e Desenho;
- 2º ano: Álgebra Superior, Geometria Analítica, Cálculo Infinitesimal e Desenho;
- 3º ano: Mecânica Racional Aplicada às Máquinas, Física Experimental e Desenho;
- 4º ano: Trigonometria Esférica, Astronomia e Geodésia.

Em 25 de abril de 1874, um decreto imperial transforma a Escola Central em Escola Politécnica e reformula o *Curso Mathematico*, o ampliando e o desdobrando em dois: o *Curso de Sciencias Physicas e Mathematicas* e o *Curso de Sciencias Physicas e Naturaes*. O *Curso de Sciencias Physicas e Mathematicas* ficou então com a seguinte organização:

- 1º ano: Álgebra, Trigonometria Plana, Geometria Analítica, Física Experimental, Meteorologia, Desenho Linear, Topográfico e de Paisagem;
- 2º ano: Geometria Descritiva, Cálculo Infinitesimal, Cálculo das Probabilidades, das Variações e Diferenças Finitas, Química, Desenho Descritivo e Topográfico;
- 3º ano: Mecânica Racional e Aplicada às Máquinas em Geral, Máquinas a Vapor e suas Aplicações, Mineralogia, Geologia e Desenho de Máquinas;

4º ano: Trigonometria Esférica, Ótica, Astronomia, Geodésia, Botânica, Zoologia e Desenho Geográfico.

Este curso oferecido pela Academia Real foi pioneiro no ensino de Matemática em nível superior do país e, de acordo com Schwartzman (1979), seus compêndios se baseavam em obras de grandes autores traduzidas para o português: Euler, Bezout, Monge, Legendre, Lacroix, Laplace, Francouer, Prony, Delambre, Lacaille, Hauy e Brisson.

Ziccardi (2009) destaca que, de 1810 a 1875, o ensino superior de Matemática no Brasil se limitou à cidade do Rio de Janeiro até que, em 1876, foi introduzido em Minas Gerais por meio da fundação da Escola de Minas de Ouro Preto e, em 1893, em São Paulo com a inauguração da Escola Politécnica. De qualquer maneira, é importante notar que:

Os matemáticos, os professores de Matemática, as pessoas que dominavam certo tipo de conhecimento matemático superior ou escolar geralmente eram engenheiros militares ou civis que se doutoravam nessa ciência, ao mesmo tempo em que se formavam engenheiros. Por conta disso, as escolas politécnicas e as academias militares normalmente são destacadas como um dos principais espaços institucionais onde se desenvolveu a Matemática acadêmica nesse período. (ZICCARDI, 2009, p. 48).

Silva (1999) também comenta a este respeito:

Durante um período de mais de cem anos (1810-1920), a Academia Militar do Rio de Janeiro (e todas as suas ramificações: Escola Central, Escola Militar, Escola Politécnica, Escolas preparatórias) foi praticamente a única instituição onde os brasileiros poderiam adquirir conhecimentos matemáticos sistemáticos de nível superior e obter um diploma de bacharel e doutorado em ciências físicas e Matemáticas (SILVA, 1999, p.13).

Na sequência, veremos, de maneira sucinta, como se dava o ensino do Cálculo Diferencial e Integral nas escolas militares do Rio de Janeiro e na Escola Politécnica de São Paulo.

3.2 – Algumas considerações a respeito do ensino do Cálculo nas Escolas Militares do Rio de Janeiro e na Escola Politécnica de São Paulo no século XIX e início do século XX

A disciplina Cálculo Diferencial e Integral começou a ser ensinada no Brasil em 1810, no *Curso Mathematico* da recém-criada Academia Real Militar do Rio de Janeiro. Seu ensino baseava-se em uma tradução para o português do livro *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral* do francês Sylvestre François Lacroix (1765-1843).

Lacroix era professor da Escola Politécnica de Paris ao lado de Legendre (1752-1833) e Lagrange (1736-1813) e se tornou o principal autor de livros-texto de sua época, tendo escrito compêndios de Matemática para todos os graus de ensino à exceção do elementar. Com relação ao Cálculo, Lacroix escreveu duas obras de repercussão mundial: *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* e o já mencionado *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, que pretendia ser uma versão simplificada da obra anterior. Essas obras ficaram conhecidas na denominação de Grattan-Guinness (especialista em história da Matemática) como *Grande Lacroix* e *Pequeno Lacroix*, respectivamente. De acordo com Dhombres (1985), o *Grande Lacroix* “é um sumário de todos os resultados no cálculo integral e diferencial do século XVIII com citações precisas de autores originais” (1985, p. 105). No entanto, como aponta Moreira (2005):

É o próprio Lacroix que afirma que não se trata unicamente de elaborar uma compilação, mas sobretudo de escolher, organizar, relacionar e uniformizar estes conteúdos matemáticos, de forma a apresentar um *corpus* unificado e ordenado, para que as diferenças individuais sejam apagadas e apareça em todas a “precisão e clareza” por igual. Portanto, o que procura Lacroix é uma nova organização, formatação e uniformidade de conteúdos, que, ao apagar as diferenças reduz e unifica os “métodos”, e portanto maximiza o ensino, no sentido em que encaminha os estudantes para os resultados verdadeiramente significativos e importantes que existem nesta matéria até então (MOREIRA, 2005, p.175).

O *Pequeno Lacroix* atingiu considerável popularidade, tendo sido traduzido para várias línguas ao longo do século XIX e constantemente reeditado. Em 1812, esta obra foi traduzida para o português por Francisco Cordeiro da Silva Torres Alvin (1775-1856), professor da Academia Militar do Rio de Janeiro, e se tornou, de acordo com Silva (1996), o primeiro livro-texto de Cálculo, em língua portuguesa, a ser adotado para o ensino da Matemática superior no Brasil, sendo durante décadas a principal referência teórica para o ensino desta disciplina no país. O texto traduzido por Alvin era fiel ao original e se dividia em duas partes independentes: a primeira sobre Cálculo Diferencial e a segunda sobre Cálculo Integral.

Analizamos de maneira bastante breve este manual e, no mesmo, não percebemos preocupação em apresentar, primeiramente, noções intuitivas dos conceitos e também não encontramos nenhum comentário especial com relação ao significado das notações empregadas. Com relação ao nível de rigor adotado, o manual foi considerado um dos mais completos e ambiciosos tratados do conteúdo em questão escritos até então, reunindo, de maneira precisa, todos os resultados do Cálculo Diferencial e Integral do século XVIII. As aplicações dos conceitos do Cálculo trabalhadas por Lacroix são todas intrínsecas à própria

Matemática, mas isto não deve ser visto como um aspecto negativo da obra, já que o manual foi redigido em uma época em que não era comum qualquer preocupação neste sentido. Convém destacar também que os livros escritos na época de Lacroix não apresentavam preocupações especiais do ponto de vista didático; eram livros-textos, produzidos com o objetivo de apresentar um sumário completo dos assuntos matemáticos tratados, e não propriamente livros como os atualmente denominados didáticos, escritos com o objetivo de contribuir para um melhor aprendizado, por parte dos alunos, do conteúdo apresentado.

Em 1842, José Saturnino da Costa Pereira (1771-1852) publicou a obra *Elementos do Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral Segundo o Sistema de Lacroix, Para Uso da Escola Militar*, possivelmente a primeira tentativa brasileira de redigir um livro-texto de Cálculo. Porém, de acordo com Silva (1996), o autor encontrava-se ainda muito apegado ao estilo de Lacroix e, por isso, a obra parece não representar qualquer alteração no modo como o Cálculo vinha sendo ensinado. Em 1874, Albino Carvalho escreveu “*Cálculo Diferencial e Integral*”, que, segundo a mesma autora, até o momento de sua pesquisa, ainda não havia sido localizado e analisado.

Em 1893, foi criada, nos moldes da Eidgenössische Technische Hochschule de Zurique, a Escola Politécnica de São Paulo foi criada em 1893, que, de acordo com Lima (2006), na prática seguia as concepções e técnicas estabelecidas pela École Polytechnique de Paris. Segundo Oliveira (2004) ⁶, o ensino do Cálculo nesta instituição tomava como referencia o livro *Premiers Éléments du Calcul Infinitesimal* de Hyppolite Sonnet, lançado em 1869, que trata o conteúdo em questão de acordo com a concepção de Leibniz (1646-1716) e Newton (1642-1727), dando ênfase aos infinitésimos e à noção intuitiva de limite. De acordo com Lima (2006, p.68), a cadeira de Cálculo Infinitesimal da Poli, no período de 1895 a 1932 esteve a cargo de dois professores: Urbano de Vasconcellos (1864-1901), que lecionou de 1895 a 1901, e Rodolfo Baptista de San Thiago (1870-1933), que ficou à frente desta disciplina de 1901 até 1932. Com sua aposentadoria, em maio de 1933 assume o seu lugar o professor José Octávio Monteiro de Camargo. A autora afirma ainda que, mesmo com a junção do Cálculo com a Geometria Analítica (entre 1901 e 1918) e da cronologia de tempos diferentes, a disciplina foi ministrada por Vasconcellos e San Thiago com programas semelhantes organizados, de acordo com Oliveira (2004, p.30), segundo a distribuição: 1) funções; 2) método da exaustão; 3) método de Leibniz; 4) método de Newton; 5) método de

⁶ Para esta pesquisa a respeito do ensino do Cálculo na Poli desde sua fundação até 1934, Oliveira tomou por base “uma interpretação das aulas expositivas, do ano de 1904, do professor San Thiago, (...) organizada por um seu aluno [Adriano] Goulin, na forma de um caderno” (OLIVEIRA, 2004, p. 31).

Lagrange; 6) Cálculo Diferencial (como consequência dos três métodos anteriores); 7) aplicações analíticas e geométricas do Cálculo Diferencial; 8) Cálculo Integral; 9) métodos de integração; 10) integrais definidas e 11) aplicações geométricas do Cálculo Integral.

Ainda de acordo com Oliveira (2004), o caderno que Goulin elaborou com base nas aulas de San Thiago:

Apresenta uma longa e interessante introdução com as noções de função e continuidade, acrescidas de explicações e orientações sobre os denominados métodos especiais da análise infinitesimal: o método de exaustão; empregado por Arquimedes, o método de Leibniz, dos infinitésimos; o de Newton, das primeiras e últimas razões, e o método de Lagrange, chamado das derivadas (OLIVEIRA, 2004, p.31).

Com base nos dados trazidos pelas pesquisas de Oliveira (2004) e Lima (2006), podemos dizer que, nestes cursos de Cálculo ministrados na Escola Politécnica de São Paulo até a criação da USP: em alguns casos, já havia a preocupação em utilizar rudimentos da História da Matemática para motivar a apresentação de novos conceitos; em muitos momentos, percebe-se a predominância da linguagem natural em relação à linguagem simbólica, o que nos dá a impressão de ilustrar uma preocupação do professor para que o aluno, antes do simbolismo e das definições formais, pudesse compreender as idéias envolvidas no conceito de forma mais intuitiva. No que diz respeito às notações empregadas, embora os comentários visando esclarecê-las não sejam muito freqüentes, eles já aparecem em alguns casos, como, por exemplo, ao explicar ao aluno, durante a apresentação da noção de integral, a diferença entre os símbolos $\sum$ e $\int$. Com relação ao nível de rigor adotado, podemos dizer que ele parece ser adequado para um curso ministrado, naquela época, em escolas politécnicas. No que diz respeito às aplicações dos conceitos do Cálculo trabalhadas durante as aulas, apesar de o curso visar à formação de engenheiros, profissionais que precisarão aplicar aqueles conceitos da Matemática em outras áreas, só eram trabalhadas situações inerentes a esta própria ciência. Destacamos também, por seu valor didático, a forma escolhida para se trabalhar com a derivada, apresentando-a ao aluno por três métodos diferentes: Newton, Leibniz e Lagrange ⁷.

Nos casos dos cursos de Cálculo da Academia Real Militar do Rio de Janeiro e da Escola Politécnica de São Paulo, as grades curriculares eram construídas com a finalidade de formar profissionais da área militar e engenheiros; pessoas que deveriam ser capazes de utilizar, em seu cotidiano profissional, as ferramentas fornecidas pela Matemática. No

⁷ Para maiores detalhes a respeito destes três métodos, veja o trabalho de Oliveira (2004).

entanto, aparentemente não eram apresentadas situações práticas envolvendo as aplicações dos conceitos do Cálculo; o conteúdo resumia-se basicamente a derivação e integração, sempre com ênfase nas regras destes processos, nos exercícios de cálculo. E os próprios livros-textos eram adotados levando em consideração este objetivo. Na Escola Politécnica de São Paulo, por exemplo, até 1934 escolheu-se trabalhar com a obra *Premiers Éléments du Calcul Infinitesimal* de Hyppolite Sonnet, que segundo Oliveira (2004, p.60) era direcionada prioritariamente a viabilizar a prática do futuro engenheiro, mostrando um Cálculo Diferencial e Integral elementar e prático, sem preocupações com as demonstrações das regras ou teorias trabalhadas.

Esse caráter prático, supervalorizando as regras foi, sem dúvida, umas das principais características do ensino da disciplina no Brasil durante todo o século XIX e início do século XX.

A Matemática, em particular o Cálculo Infinitesimal, exerceu o seu papel de disciplina de serviço na educação dos estudantes de engenharia. Tinha a finalidade de atender às necessidades dos estudantes em seu Curso, capacitando-os para o exercício de suas futuras funções. (OLIVEIRA, 2004, p.22)

Com base na breve análise que realizamos do manual de Lacroix e dos trabalhos de Oliveira (2004) e Lima (2006), pudemos estabelecer uma comparação entre as formas com as quais os conceitos fundamentais de uma disciplina inicial de Cálculo - função, limite, derivada e integral – eram trabalhados no livro-texto adotado na Academia Real Militar do Rio de Janeiro e nas aulas do professor San Thiago na Escola Politécnica de São Paulo. Fazemos então as seguintes considerações:

- *No que diz respeito ao conceito de função:*

A obra de Lacroix não apresenta uma definição para este ente matemático; diz que seu uso esclarecerá seu significado. Isso é perfeitamente compreensível já que, somente em meados do século XIX é que Lejeune Dirichlet (1805-1859) estabeleceu uma definição mais ampla para o termo e o manual de Lacroix foi escrito no século XVIII. De acordo com Eves (2004),

A palavra função, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva. [...] Por volta de 1718, Johann Bernoulli havia chegado a considerar uma função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes; pouco tempo depois Euler considerou uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes. [...] O conceito de Euler se manteve inalterado até que Joseph Fourier (1768-1830) foi levado a considerar, em suas pesquisas sobre a propagação do calor, as chamadas séries trigonométricas.

Essas séries envolvem uma forma de relação mais geral entre as variáveis que as que já haviam sido estudadas anteriormente. Numa tentativa de dar uma definição de função ampla o suficiente a ponto de englobar essa forma de relação, Lejeune Dirichlet (1805-1859) chegou a formulação que conhecemos hoje (EVES, 2004, p. 661).

No curso da Escola Politécnica encontramos uma definição um pouco mais detalhada: a função vista como uma expressão analítica. No entanto, como salienta Oliveira (2004), essa idéia é ainda somente uma fase da evolução deste conceito. Convém destacar ainda que San Thiago buscava, por meio de exemplos, esclarecer o que estava entendendo por função, enquanto que, em Lacroix, nenhum exemplo de tal ente matemático era apresentado e outro conceito dependente dessa idéia (a derivada) era imediatamente apresentado.

- *No que diz respeito ao conceito de limite:*

Na obra de Lacroix, não encontramos uma definição desse conteúdo. A palavra limite é apenas citada durante a abordagem da derivada. No curso de San Thiago, na Politécnica de São Paulo, nota-se uma diferença na forma como este conceito é abordado. Apesar de trazer somente a definição retórica, tal conteúdo ao menos era trabalhado e não apenas citado. Além disso, novamente havia a preocupação em exemplificar o que estava sendo apresentado.

- *No que diz respeito ao conceito de derivada:*

Enquanto a abordagem de Lacroix fornece, basicamente, uma “receita” para calcular a derivada de uma função dada, por meio das idéias de diferença e de diferencial, na abordagem presente no curso de San Thiago já se observa uma maior preocupação com relação aos conceitos teóricos envolvidos na idéia em questão e isto se torna evidente no momento em que o professor opta por trabalhar esse ente matemático por três métodos diferentes (métodos de Leibniz, Newton e Lagrange). Como afirma Oliveira (2004, p. 39), “aparecem três direções para o seu desenvolvimento, o que enriquece as possibilidades de tratamento dos assuntos e facilita as deduções e as manipulações das fórmulas”.

- *No que diz respeito ao conceito de integral:*

A abordagem deste tema no livro de Lacroix, assim como o trabalho com a noção de derivada, enfatiza as técnicas. Durante toda a apresentação de tal conteúdo trabalha-se somente com a idéia de que a integração é a operação inversa da diferenciação e, em grande parte, o trabalho é baseado nas integrais indefinidas. O Teorema Fundamental do Cálculo não é citado, mas trabalhado de uma forma implícita. Já o curso de San Thiago, apesar de também frisar a idéia de integração como operação inversa da diferenciação, abordava esse tema de maneira totalmente diferente da de Lacroix. O conceito era introduzido por meio da noção geométrica de área da região plana sob o gráfico de uma função $y = f(x)$, entre os valores a e

$\underline{b}$ da variável x . O Teorema Fundamental do Cálculo não era trabalhado e a fórmula que permite o cálculo das integrais definidas era justificada mediante a idéia de diferença de áreas. A abordagem de integral apresentada por Lacroix era mais completa que a de San Thiago. Enquanto o curso de Cálculo Integral de San Thiago apresentava 46 páginas, a parte do livro de Lacroix, dedicada às integrais contemplava mais de 600 páginas. Oliveira (2004) afirma que:

O Cálculo Integral das notas de aula de Goulin contém um mínimo de teoria, (...). Sua prática na integração das funções e nas aplicações da integral é também limitada pela falta de exemplos e de exercícios. (OLIVEIRA, 2004, p.49).

Possivelmente essa grande diferença em relação ao detalhamento dos temas tratados nestas duas obras possa ser explicada pelo fato de o livro de Lacroix ter sido escrito na época da Enciclopédia, na qual se valorizava a totalidade do saber, e pelo fato de não ser destinado a um curso superior específico como era o caso do curso de San Thiago, direcionado para engenheiros. Talvez, não fizesse sentido aprofundar tanto o estudo da integração em um curso de engenharia e San Thiago tenha optado por ensinar aquilo que julgava fundamental para que aqueles estudantes pudessem exercer suas futuras profissões.

De maneira geral, podemos dizer que tanto na obra de Lacroix quanto no curso de San Thiago não notamos a presença de muitos exemplos e de problemas motivadores para chegar à construção dos conceitos, o que é perfeitamente esperado para a época. Oliveira (2004, p.32) argumenta que, no entanto, San Thiago enriquecia a introdução dos conceitos através de dados históricos. Salientamos também que, durante essas disciplinas de Cálculo do século XIX e início do século XX só eram apresentadas as definições e deduções de resultados essenciais ao desenvolvimento do curso.

A partir da próxima seção, passaremos a tratar da fundação da Universidade de São Paulo e da criação do primeiro curso superior de Matemática do país, que passou a funcionar nesta instituição desde a sua criação em 1934.

3.3 - A criação da Universidade de São Paulo e de sua Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras

Conforme o que foi apresentado na primeira seção desse capítulo, desde a chegada da Família Real Portuguesa ao Brasil, em 1808, diversas instituições de ensino superior passaram a funcionar no país; no entanto, nenhuma delas possuía ainda uma estrutura de universidade. De acordo com Ziccardi (2009, p. 41), durante muito tempo a teoria que norteou o ensino

superior brasileiro foi a pombalina, caracterizada por uma formação “técnica, prática, formando profissionais competentes para a administração do Estado”. A autora destaca também que, com o passar do tempo, começa a haver uma expansão no número de instituições de ensino superior no país; entre 1889 e 1918, por exemplo, cinquenta e seis escolas foram criadas, sendo a maioria delas privada, de iniciativa católica confessional ou não, ou fruto das iniciativas de elites locais, que, com apoio dos governos, procuravam suprir suas regiões de instituições destinadas à educação superior. Apesar desta expansão, o ensino superior brasileiro permanecia não universitário, ou seja, “era constituído por um conjunto de escolas isoladas ou faculdades autônomas, basicamente organizado em torno do ensino e voltado para a formação de profissionais liberais” (p. 44).

A partir da década de 1910, começa-se a perceber um trabalho em prol de elevar o nível da cultura científica brasileira; em 1916 foi fundada, no Rio de Janeiro, a *Sociedade Brasileira de Sciencias* (que, a partir de 1921, passou a ser chamada de *Academia Brasileira de Ciências*) e em 1924 foi criada a Associação Brasileira de Educação. Essas duas associações deram início a um movimento defendendo a modernização do sistema educacional brasileiro, inclusive no nível superior e, desde então, iniciou-se uma luta com o objetivo de se criar verdadeiras universidades no país, isto é, instituições de ensino e pesquisa que substituiriam as escolas isoladas já existentes; desejava-se não mais somente transmitir saberes já constituídos, mas sim possibilitar a construção de novos saberes. De acordo com Ziccardi:

Os altos índices de analfabetismo, a má formação dos professores secundários, a necessidade de ampliação de quadros técnicos para a indústria e a ausência de instituições de ensino das ciências puras de nível superior passaram a ser grandes incômodos e colocaram em discussão a situação do sistema educacional. (ZICCARDI, 2009, p. 49).

Entre 1910 e 1930 um grupo de intelectuais brasileiros, dentre os quais estavam, Júlio de Mesquita Filho, Paulo Duarte, Armando de Salles Oliveira e Fernando de Azevedo, lançou um movimento chamado *Campanha pela Universidade*. Este grupo acreditava que o Estado é quem deveria promover a educação no país e defendia a criação de uma universidade que tivesse por objetivo a cultura – tanto filosófica quanto científica. Em 1931, o então ministro da Educação Francisco Campos, sancionou um projeto de reforma do ensino superior que ficou conhecido como *Reforma Francisco Campos*. Neste decreto, estabeleceu-se que o modelo universitário de ensino superior deveria ser preferencial ao modelo de um conjunto de escolas superiores isoladas e, de acordo com Ziccardi (2009, p. 49), para o ministro Campos,

a universidade deveria ter duplo objetivo: “equiparar tecnicamente as elites profissionais do País e (...) proporcionar ambiente propício às vocações especulativas e desinteressadas, cujo destino, imprescindível à formação da cultura nacional, é o da investigação e da ciência pura”. Além disso, “caberia à Faculdade de Educação, Ciências e Letras, prevista no projeto de 1931, imprimir à Universidade seu caráter propriamente universitário”.

Embora em 1912 tivesse sido criada a Universidade do Paraná e em 1920 a Universidade do Rio de Janeiro (que posteriormente passou a se chamar Universidade do Brasil), de acordo com Ziccardi (2009), “nos dois casos, tratava-se simplesmente de uma reunião formal de escolas tradicionais já existentes (...), de uma reunião, por meio de decreto, de escolas isoladas já em funcionamento, porém de caráter eminentemente profissionalizante” (p. 45), enquanto que as universidades, de fato, deveriam ser estruturadas de maneira que:

Se integrassem num sistema único, mas sob direção autônoma, as Faculdades Profissionais (Medicina, Engenharia, Direito), Institutos Técnicos Especializados (Farmácia, Odontologia) e Institutos de Altos Estudos (Faculdades de Filosofia e Letras, de Ciências Matemáticas, Físicas e Naturais, de Ciências Econômicas e Sociais, de Educação, etc.). E, ainda, sem perder seu caráter de universalidade, como uma instituição orgânica e viva, posta pelo seu espírito científico, pelo nível dos estudos e pela natureza e eficácia de sua ação, a serviço da formação e desenvolvimento da cultura nacional. (Ibid., p. 46).

Em razão destes aspectos é que podemos afirmar que, embora tenha havido tentativas anteriores, a USP, foi a primeira instituição desse porte no Brasil; a primeira a ser fundada no país com a estrutura, de fato, de uma universidade.

A Universidade de São Paulo (USP) foi criada em 1934, por meio do decreto 6283, de 25 de janeiro, assinado pelo então Interventor Federal do Estado de São Paulo, Armando de Salles Oliveira, e reuniu escolas de nível universitário ou de formação profissional já existentes, como a Faculdade de Direito (1827), a Escola Politécnica (1893), a Escola de Farmácia e Odontologia (1899), a Escola Superior de Agronomia Luiz de Queiroz (1901), a Faculdade de Medicina (1914), entre outras, alguns institutos de pesquisa (Instituto Butantã, Instituto Biológico, etc) e abrangeu ainda uma nova escola: a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, inspirada na École Normale Supérieure de Paris e criada para ser, de acordo com D'Ambrosio (1999), a célula mater da Universidade.

De acordo com Pires (2006, p. 161), “a emenda Roquette Pinto (...) exigia para as Universidades, pelo menos, três escolas superiores, sendo uma, obrigatoriamente, a de Filosofia, Ciências e Letras”. Ainda segundo ela, a FFCL foi criada com as seguintes finalidades:

- Preparar trabalhadores intelectuais para o exercício de altas atividades culturais de ordem desinteressada ou técnica;
- Preparar candidatos ao magistério do ensino secundário, normal e superior;
- Realizar pesquisa nos vários domínios da cultura que constituíam seu objeto de ensino. (PIRES, 2006, p. 163).

É importante destacar que, até então, não havia, no Brasil, nenhuma escola que possibilitasse a formação de docentes para o ensino no nível secundário. Apenas a formação de professores para o primário já havia sido alvo de algum tipo de preocupação, o que pode ser ilustrado pela criação das Escolas Normais, como a de Niterói em 1835, a da Bahia em 1842 e a de São Paulo em 1846. Os professores de Matemática que atuavam no ensino secundário, de acordo com Ziccardi (2009, p. 43), “obtiveram sua formação nas escolas politécnicas, escolas militares ou similares ou eram simplesmente leigos” já que “não foi oferecida nenhuma possibilidade de preparação de professores de Matemática no Brasil, nessa época”.

Conforme salienta Pires (2006), o corpo docente da FFCL precisaria ser composto por pesquisadores, na verdadeira acepção do conceito, já que um de seus objetivos era também preparar futuros profissionais na área de pesquisa científica. A estruturação deste corpo docente tornou-se então um grande desafio e, como não havia no Brasil um número suficiente de pessoas qualificadas para preencher todos os quadros da recém-criada faculdade, a solução encontrada foi buscar pesquisadores no exterior. Sendo assim, o interventor Armando de Salles Oliveira incumbiu Theodoro Augusto Ramos, professor da Escola Politécnica e primeiro diretor da USP, de procurar e contratar professores europeus que estivessem aptos para assumir o magistério nas diversas cadeiras da FFCL. De acordo com Pires (2006, p. 165), Theodoro Ramos possuía um currículo que o referendava para tal incumbência: havia participado de uma comissão que, em 1931, discutiu uma reforma nos cursos de engenharia do país, também nesse ano havia dirigido, durante alguns meses, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, além de ter, durante vários anos, destacada atuação no Conselho Federal de Educação.

Segundo Pereira (1998), Theodoro Ramos, neste processo de busca por professores estrangeiros, levou em consideração as preocupações do grupo que havia encabeçado a *Campanha pela Universidade*. Os integrantes deste grupo haviam articulado

As linhas estruturais da nova Faculdade, preocupados também com seus aspectos ideológicos. Tiveram cuidado de recusar nomes de professores italianos ou alemães, de tendências possivelmente fascistas, para as cadeiras das ciências humanas; reservaram-nas aos professores de Universidades francesas, de espírito mais liberal.

Das Universidades alemãs e inglesas foram convidados professores para as áreas biológicas e, das italianas para as exatas. (PEREIRA, 1998, p. 30-31).

A respeito desta divisão das cadeiras da FFCL entre os professores de diversas nacionalidades, Júlio de Mesquita Filho, um dos membros de tal grupo, comenta que:

Essa nossa posição nos obrigava a evitar que as cátedras da Faculdade de Filosofia pudessem cair nas mãos de adeptos do credo italiano, sobretudo aquelas que mais aptas se mostravam a influir na formação moral de nossa juventude. Concorria para complicar o fato de contar São Paulo com um número elevado de filhos da Península, a maioria dos quais não escondia as suas propensões para aceitar as diretrizes da Roma fascista.[...] Pretendiam impor a vinda de numerosos membros das universidades fascistas para integrar a nova congregação. Contornamos a dificuldade oferecendo à Itália algumas das cadeiras de ciência pura – Análise Matemática, Geometria, Estatística, Geologia, Mineralogia e Língua e Literatura Italianas. (MESQUITA FILHO, 1969, p. 192).

De acordo com Pires (2006, p. 181-182), em 13 de março de 1934, Theodoro Ramos chegou a Roma e foi à Academia Italiana de Ciências em busca de um matemático e de um físico para a FFCL da USP. Lá Francesco Cerelli e Enrico Fermi – membros da referida Academia – lhe indicaram os nomes de Luigi Fantappiè para a Matemática e de Gleb Wataghin para a Física. Com o respaldo tanto do governo italiano quanto do governo brasileiro, ambos foram contratados como docentes da Universidade de São Paulo.

No decorrer deste trabalho, falaremos mais detalhadamente sobre a atuação de Fantappiè na USP, mas podemos dizer que, no que diz respeito a nossa área de interesse, a Matemática, a vinda desses docentes e pesquisadores estrangeiros, principalmente a de Fantappiè, teve papel fundamental no estabelecimento de uma comunidade brasileira de Matemática e na mudança da posição ocupada pelo Brasil na comunidade científica. Segundo Táboas (2005) “antes da década de 1930 a Matemática brasileira era apenas consumidora, seus desenvolvimentos eram realizados em função apenas de necessidades das ciências aplicadas, mais especificamente das engenharias” (p. 37). Segundo o autor, com a criação da Universidade de São Paulo, de sua Faculdade de Filosofia e com a atuação de Fantappiè nessa faculdade, a Matemática brasileira, após a década de 1930, transformou-se, no cenário global, de simples consumidora a também produtora de conhecimento. De acordo com Silva (2000),

No caso da Matemática, pode-se afirmar que a grande influência que os docentes estrangeiros exerceram nos alunos brasileiros foi decisiva na sua formação e foi o contato direto com o professor-pesquisador que possibilitou aos jovens alunos perceberem que o conhecimento produzido não é algo estático e sem vida, não é apenas uma decorrência da capacidade individual, mas um processo social de interação onde o diálogo e a crítica são fundamentais. (SILVA, 2000).

Ainda segundo ela, os docentes estrangeiros indicaram caminhos aos estudantes brasileiros e estimularam suas pesquisas, fazendo com que muitos deles se tornassem seguidores de suas idéias.

A FFCL foi organizada em três seções: Filosofia, Ciências e Letras, divididas em subseções e estas últimas subdivididas em cadeiras. A subseção de Ciências Matemáticas englobava três cadeiras: 1ª: Geometria (Analítica e Projetiva) e História das Matemáticas; 2ª: Análise Matemática e 3ª: Mecânica Racional (precedida de Cálculo Vetorial).

Com a criação da Universidade de São Paulo, o Instituto de Educação, criado em 1933 e que, de acordo com Ferreira (2009), foi a primeira experiência brasileira com relação à formação de professores em nível superior, foi incorporado a ela. Assim, até o primeiro semestre de 1938, o aluno da FFCL que quisesse obter licença para atuar no magistério secundário deveria, simultaneamente ao terceiro ano, cursar a formação pedagógica no Instituto de Educação. Segundo a mesma autora, o curso de Formação Pedagógica do Professor Secundário teve início em 1936, já que a primeira turma de alunos da FFCL iniciou suas atividades em 1934 e a formação no Instituto de Educação só era oferecido aos alunos que já tivessem completado, pelo menos, dois anos de sua graduação. A autora comenta ainda, apoiando-se em dados obtidos em uma pesquisa realizada por Evangelista (2002), que entre 1936 e 1938 apenas três alunos da Matemática buscaram a Formação Pedagógica.

Em junho de 1938, o Governo do Estado, por considerar que a preparação de professores para o ensino secundário deveria ser um dos objetivos da FFCL extingue o Instituto de Educação e transfere para a Faculdade de Filosofia a atribuição da formação pedagógica em nível universitário, criando para tal a Secção de Educação da faculdade. Em 1939, o presidente Getúlio Vargas juntamente com seu ministro da Educação e Saúde, Gustavo Capanema, estabeleceram um modelo de formação de professores que deveria ser adotado por todas as universidades brasileiras. De acordo com Ferreira (2009), este modelo foi apresentado por meio do decreto-lei número 1190 de 04 de abril de 1939 que criou a Faculdade Nacional de Filosofia (FNFfi). Segundo a pesquisadora:

Todos os cursos [das Faculdades de Filosofia] (...) receberam um currículo com uma seriação de três anos. A conclusão dos três anos conferia ao candidato o grau de bacharel. Portanto, para atuar no magistério do ensino secundário, era necessário que o bacharel realizasse o curso de Didática (com duração de um ano) oferecido pela Seção de Didática (...). Essa estrutura de curso ficou conhecida como “esquema 3+1”, bacharelado e licenciatura em quatro anos de duração, dando a licença ao professor para lecionar em escolas secundárias e também no curso normal. (FERREIRA, 2009, p. 33).

O decreto que criou a FNFi também estabeleceu, pela primeira vez, uma diferenciação explícita entre bacharéis e licenciados. Isto foi feito por meio do artigo 49 de tal decreto:

Art. 49 – Ao bacharel, diplomado nos termos do artigo anterior, que concluir regularmente o curso de didática referido no art. 20 desta lei será conferido o diploma de licenciado no grupo de disciplinas que formarem o seu curso de bacharelado. (BRASIL, S. d., p. 562-570).

De acordo com Ferreira (2009, p. 33), foi aí que “surgiu o conceito de *licenciado*, como aquele que cursava o grupo das seis disciplinas oferecidas no curso de Didática, saindo diplomado pelas Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras”. A distinção entre bacharel e licenciado é ainda melhor explicitada no decreto-lei nº 9092 de 26 de março de 1946 sobre o qual falaremos mais detalhadamente, especificamente no curso de Matemática, tratado na seção seguinte.

3.4 – O curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um breve histórico

O primeiro curso superior destinado à formação de matemáticos e de professores de Matemática no Brasil surgiu na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP, em São Paulo, em 1934. Como até então não havia no país nenhuma instituição destinada especificamente ao ensino de Matemática Superior, esta função, ao menos em parte, coube às escolas do Exército, da Marinha e às Escolas de Engenharia, que foram, de acordo com Ziccardi (2009), os principais núcleos difusores de tal conteúdo. Segundo esta pesquisadora, “antes da criação das Faculdades de Filosofia, o que se fez, no terreno da pesquisa matemática, foi resultado do esforço autodidata dos engenheiros com inclinação matemática” (p. 48). Até então, os professores dessa disciplina que atuavam na educação básica ou nas instituições de ensino superior, ministrando Álgebra Superior, Cálculo, Geometria Analítica, etc. eram engenheiros ou alunos dos últimos anos das escolas de engenharia e oficiais do Exército ou da Marinha. Nesta seção, traremos alguns detalhes a respeito da criação deste curso de Matemática da USP e apresentaremos um pequeno panorama de sua história, desde sua implantação até os dias de hoje.

3.4.1 – O início do curso e suas primeiras reformulações até a Reforma Universitária

Embora a FFCL tenha sido fundada juntamente com a Universidade de São Paulo em 1934, a Seção de Matemática de tal faculdade só entrou em atividade, de fato, em 1935 e, por

esta razão, ao chegar ao Brasil em 1934, Fantappiè ministrou, inicialmente, um curso de Cálculo Infinitesimal para os alunos da Escola Politécnica. Encerrado o primeiro ano letivo da Universidade, o Bacharelado em Matemática estava finalmente estruturado e começaria a cumprir seu papel de formar matemáticos a partir do início do ano seguinte. Para o ingresso neste curso exigiu-se então que, mesmo aqueles que já faziam graduação em engenharia, prestassem um exame aplicado por Fantappiè, no qual seria cobrada toda a matéria ministrada por ele no curso de Cálculo Infinitesimal da Escola Politécnica, além de alguns tópicos de Geometria Projetiva. A tal exame, realizado em março de 1935, submeteram-se cerca de dez alunos da Poli, entre os quais estavam Cândido Lima da Silva Dias, Fernando Furquim de Almeida e Mário Schenberg (PEREIRA, 1998). Segundo o professor Cândido Lima da Silva Dias, em entrevista concedida ao grupo Figueira da Glete (criado por geólogos formados na USP), é a partir desse exame (que, de acordo com Dias, foi realizado no dia 11 de março) que se pode falar do curso de Matemática da FFCL da USP.

As cadeiras e a seriação do curso de Matemática da FFCL foram oficializadas por meio do decreto 7069/35 que estabelecia o seguinte:

I- Ciencias Mathematicas [cadeiras integrantes do curso]:
1a) – Geometria (projectiva e analytica), Historia das Mathematicas;
2a) – Analyse Mathematica
3a) Mecanica Racional precedida de Calculo Vectorial.
Art. 9o – Será a seguinte a seriação do curso de Ciencias Mathematicas:
1o anno – Geometria (analytica e projectiva).
Analyse Mathematica (1a parte).
Physica Geral e Experimental (1a parte).
Calculo Vectorial.
2o anno – Analyse Mathematica (2a parte).
Mecânica Racional.
Physica Geral e Experimental (2a parte)
3o anno – Analyse Mathematica (3a parte).
Geometria.
Historia das Mathematicas.
(PIRES, 2006, p. 213).

Os primeiros alunos do curso de Ciências Matemáticas (cinco no total) se formaram, de acordo com o Anuário da FFCL (1939-1949, p. 13), em 1936 e, segundo Pires (2006, p. 219), alguns foram sendo incorporados ao corpo docente do Departamento de Matemática. Dentre os ex-alunos que se tornaram professores podemos citar: Cândido Lima da Silva Dias, Fernando Furquim de Almeida, Benedito Castrucci e Elza Furtado Gomide. A contratação de ex-alunos se tornou ainda mais frequente no final da década de 1930 e início da década de 1940, já que, com a Segunda Guerra Mundial que eclodiu em 1939, a FFCL perdeu muitos de seus professores estrangeiros; o Departamento de Matemática foi o mais prejudicado, já que

contava apenas com dois professores italianos. Fantappiè foi o primeiro a deixar do Departamento, retornando à Itália em 1939 e então, “a única saída tal como já era prevista desde a criação da Universidade de São Paulo, era absorver no corpo docente, seus ex-alunos, a pretensa nova elite” (PIRES, 2006, p. 219). Apesar disso de acordo com a autora, a Ata da reunião da Congregação de 05 de junho de 1942 “mostra que as negociações para o contrato de professores estrangeiros para os Departamentos continuavam, inclusive para o de Matemática” (p. 228).

Em depoimento concedido em 1994, o professor Cândido Lima da Silva Dias, comentou a respeito desse início do curso de Matemática:

As aulas de Fantappiè sempre foram ministradas na Escola Politécnica e lá o curso permaneceu até setembro de 1938, numa dependência da Eletrotécnica. Daí passamos para o prédio da Escola Normal (o atual colégio Caetano de Campos), na Praça da República. Todo o terceiro andar, que fora reformado, foi cedido à Faculdade de Filosofia. A Matemática da FFCL nunca esteve no casarão da Alameda Glete. Saindo do prédio da praça da República fomos para outro, no bairro do Paraíso, à rua Alfredo Élis, no dia 20 de junho de 1942. A etapa seguinte, em agosto de 1949, foi a transferência para a famosa sede da Faculdade, na Rua Maria Antônia. (...) Na década de 30 as turmas possuíam 10 ou 15 alunos. No início, o curso não era muito procurado, mas nele se matriculavam pessoas com vocação para o estudo da Matemática. Não mantínhamos contato estreito com a Química ou com a História Natural (Biologia), mas havia uma relação razoável da Matemática com a Física. (DIAS, 1994, p. 99).

O Guia para a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do ano de 1966 traz, da página 73 a 75, um pequeno histórico do curso de Matemática da FFCL. Destacaremos então, na sequência, algumas informações obtidas por meio deste Guia.

O primeiro docente contratado para lecionar no curso de Matemática da FFCL da USP foi Fantappiè que nos anos de 1934 e 1935 esteve à frente das cadeiras de Análise Matemática e de Geometria. Juntamente com Fantappiè, foi contratado outro italiano, Gleb Wataghin que ficou responsável pela cátedra de Física, que também era uma disciplina pertencente ao currículo do curso de Matemática. Em 1936, o geômetra italiano Giacomino Albanese, na época responsável pela cátedra de Geometria Analítica, Projetiva e Descritiva da Real Academia de Pisa, chega à FFCL e assume a cadeira de Geometria para que Fantappiè pudesse se dedicar exclusivamente ao cargo de catedrático em Análise Matemática.

Conforme já comentamos, devido à eclosão da 2ª Guerra Mundial, a permanência dos professores estrangeiros no Brasil é mais curta do que se esperava. No segundo semestre de 1939, Fantappiè retornou à Itália e foi substituído na cadeira de Análise por seu assistente Omar Catunda. Em abril de 1942, com a volta de Albanese para a Itália, a cadeira de

Geometria foi desdobrada em duas outras: a cadeira Geometria Analítica, Descritiva e Projetiva, que ficou sob a responsabilidade do professor Benedito Castrucci e a cadeira Complementos de Geometria e Geometria Superior, entregue à regência do professor Cândido Lima da Silva Dias. Ainda em 1942, a cadeira Crítica dos Princípios e Complementos de Matemática passou a ser regida pelo professor Fernando Furquim de Almeida.

Em 1944, por meio de um concurso, Catunda – que até então continuava como substituto de Fantappiè – é empossado catedrático na cadeira de Análise Matemática. É interessante destacar que, de acordo com a Guia (1966), durante os anos de 1942 e 1944 as disciplinas do curso de Matemática ficaram a cargo exclusivamente de professores brasileiros.

No ano de 1945, o departamento de Matemática contrata um dos membros fundadores do grupo Bourbaki, o matemático francês André Weil que passou a reger a disciplina de Análise Superior. Ainda em 1945, o professor Oscar Zariski, conhecido mundialmente por seus trabalhos em Geometria Algébrica Moderna ministrou, na USP, cursos de extensão de Álgebra Moderna e Introdução à Geometria Algébrica. Em 1946, outro membro do grupo Bourbaki chega à FFCL: Jean Dieudonné, que foi contratado para dar um curso de Álgebra Moderna e Grupo de Galois. Weil e Dieudonné deixam o país em 1947. Entre o final da década de 1940 e início da década de 1950, mais um membro do grupo Bourbaki esteve na USP: o professor Jean Delsarte que, entre 1948 e 1951, desenvolveu cursos de pós-graduação na FFCL e orientou trabalhos de pesquisa na área de Análise Funcional.

Em 1948, o professor Edson Farah foi contratado para reger a disciplina Análise Superior. No final de 1951 ocorreram concursos para as cátedras de Geometria Analítica, Projetiva e Descritiva, Complementos de Geometria e Geometria Superior e Crítica dos Princípios e Complementos de Matemática e, então, os professores que, naquele momento, estavam nas cadeiras como substitutos acabaram assumindo-as como catedráticos. Pires (2006) teve acesso aos programas das disciplinas referentes aos anos de 1953, 1959, 1960, 1962, 1964, 1965, 1966, 1967 e 1968 e a respeito deles apresenta, entre outros, os seguintes comentários:

- As cadeiras Crítica dos Princípios e Complementos de Matemática; Análise Matemática; Geometria Analítica, Projetiva e Descritiva; Complementos de Geometria e Geometria Superior e Análise Superior são mantidas entre 1953 e 1964.
- No final de 1962, o professor Catunda se aposenta e no final de 1963 a cadeira de Análise Matemática é dividida em duas: Cálculo Infinitesimal e Equações Diferenciais. Segundo Silva (2006, p. 86), “esta divisão já anunciava o fim das cátedras e a criação dos Institutos na USP”.

- Após 1964, os programas das disciplinas não indicam mais o nome do catedrático responsável pela cadeira e nem os nomes dos assistentes.
- O curso de Análise Matemática era ministrado em quatro disciplinas anuais. Nos dois primeiros anos via-se um conteúdo semelhante ao trabalhado no dias de hoje em um curso de Cálculo Diferencial e Integral para funções de variáveis reais. No terceiro ano, estudava-se Teoria das funções analíticas; no quarto Complementos de Geometria Elementar (como, por exemplo, comprimento de uma circunferência, teorema de Euler, poliedros equivalentes, etc.)
- No programa de 1965, percebe-se aquela mudança já citada: a cadeira Análise Matemática aparece como Cálculo Infinitesimal. No entanto, o programa dessa disciplina continua contemplando exatamente aquilo que já contemplava.
- Em 1966 é feita uma reformulação no conteúdo programático de Cálculo infinitesimal. Os dois primeiros cursos dessa disciplina recebem os subtítulos Cálculo I e Cálculo II. O Cálculo I englobava os mesmos conteúdos vistos até então: Números reais e funções; Cálculo diferencial; Cálculo Integral; Aplicações geométricas do Cálculo; Funções de mais de uma variável; Integrais de funções de mais de uma variável; Equações diferenciais. A mudança acontece no Cálculo II, que passa a apresentar: Topologia do $\mathbb{R}^n$, teoremas fundamentais; Estrutura euclidiana do $\mathbb{R}^n$; Compacidade, Teorema dos intervalos encaixados, conexidade, etc.
- Em 1968, fez-se uma nova distribuição das disciplinas nos quatro anos do curso. Além disso, foram introduzidas as disciplinas Cálculo Avançado, Álgebra I e Álgebra Linear. Aparentemente, as disciplinas passam a ser semestrais e não mais anuais⁸. Essas disciplinas ficaram distribuídas da seguinte forma ao longo do curso: Cálculo Infinitesimal (Cálculo Diferencial e Integral) para o 1º, 2º e 3º semestres; Álgebra I (sem especificar quantos e quais semestres), Álgebra Linear (sem especificar quantos e quais semestres); Cálculo Avançado, para o 1º, 2º e 3º semestres, englobando um semestre de Equações Diferenciais (com a ressalva que o programa para o Bacharelado constava do programa para licenciados, mais tópicos suplementares) e um semestre de Funções Analíticas (com a ressalva que o programa para o Bacharelado consta do programa para licenciados, mais tópicos suplementares); Complementos de Geometria e Geometria Superior para o 2º, 3º e 4º anos; Crítica dos

⁸ É importante destacar que estas alterações observadas em 1968 ainda não são consequências da Reforma Universitária, que só foi implantada na Universidade no início de 1970. São mudanças provenientes da implantação dos novos currículos desenvolvidos para os cursos de bacharelado e licenciatura em Matemática da USP.

Princípios e Complementos de Matemática, no 3º ano, apresentando Teoria dos números; Geometria Analítica, Projetiva e Descritiva (não especificando semestres). Análise Superior.

- O programa de Cálculo Infinitesimal de 1968 volta a ser como era antes de 1966 sem apresentar, no entanto, as Funções Analíticas.

No dia 14 de setembro de 1960, pelo decreto 37235 foi criado o Instituto de Pesquisas Matemáticas que reunia professores de Matemática de vários departamentos da Universidade, em especial da FFCL e da Poli e que se originou da preocupação de José Octávio Monteiro de Camargo, professor de Cálculo da Poli, que, de acordo com Silva (2006), “sentiu a necessidade de algo efetivo que congregasse os esforços de quantos trabalhavam em matemática, dentro da Universidade” (p. 33-34). Segundo Pereira (1998), esse Instituto foi o embrião daquilo que, após a reforma de 1968, viria se configurar como Instituto de Matemática e Estatística (IME); foi no Instituto de Pesquisas Matemáticas que despontou a maior parte dos pesquisadores matemáticos do período, professores que, posteriormente, organizariam o IME.

Em seguida, faremos algumas considerações a respeito das mudanças introduzidas na Universidade de São Paulo e no curso de Matemática pela Reforma Universitária colocada em prática entre o final da década de 1960 e início da década de 1970.

3.4.2 – A implantação da Reforma Universitária em 1970

A Reforma Universitária que ocorreu no final da década de 1960 foi, de acordo com Celeste Filho (2006, p.3), “resultado de um acúmulo de críticas à universidade do período e também de soluções destinadas ao que se criticava”. O autor afirma ainda que, durante a década de 60, tornou-se consenso entre os intelectuais brasileiros a necessidade de substituir o regime de cátedras das universidades por departamentos e de transformar as Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras em Institutos especializados em ciências básicas. Pretendiam que houvesse uma mudança de paradigma (de acordo com a concepção de Thomas Kuhn): a universidade brasileira, que até então tinha como preocupação maior a formação profissional, deveria transformar-se em produtora de ciência. No entanto, Celeste Filho (p. 5), afirma que, paradoxalmente, um dos resultados da Reforma Universitária foi a criação da chamada “universidade funcional”, preocupada, principalmente, com a formação em nível superior de profissionais para o mercado de trabalho.

Com relação ao sistema de cátedras, o problema percebido pelos que o criticavam é que ele acabava adiando a criação de uma carreira para os docentes auxiliares do ensino superior. No entanto, no caso específico da FFCL da USP, Celeste Filho (2006) destaca que essa rigidez do sistema de cátedras acabou amenizada, em seus primeiros anos de funcionamento, pela contratação, em caráter temporário, dos professores estrangeiros:

Nesses primeiros tempos, o rígido regime de cátedras foi, em grande parte, colocado de lado com a efetivação do sistema de contrato de mestres estrangeiros. Ao contrário do que ocorria com as demais escolas, que possuíam professores catedráticos – vitalícios e inamovíveis – a nova Faculdade pode dispor, durante muito tempo, de um corpo de professores, relativamente jovens, sem intenções de perpetuação nas funções para as quais haviam sido contratados, porém com profundas ambições de natureza intelectual. Isto redundou, sem dúvida, num arejamento do sistema e, ao mesmo tempo que levantou críticas e objeções, trouxe à Universidade um novo espírito, marcado por um certo “cosmopolitismo”, bem como por um intenso dinamismo e pela produtividade intelectual. Na verdade, a intenção dos fundadores da USP era a de fazer com que a influência da missão estrangeira ultrapassasse os limites da própria Faculdade de Filosofia, desbordando para as outras escolas, contribuindo assim para reformar a Universidade como um todo. (Ibid, p. 8-9).

O autor destaca que quando as Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras foram criadas, a intenção era que elas fossem unidades centrais, de caráter não profissional, e que reunissem todas as cátedras de ensino de tópicos gerais como, por exemplo, Matemática, Física, Química, até então dispersas pelas diversas faculdades profissionais. Na USP, no entanto, isso nunca se concretizou e o argumento frequentemente utilizado para justificar tal fato era que a formação de um cientista deveria ser diferenciada da formação de um profissional; o profissional deveria desenvolver um saber técnico, enquanto que o cientista não necessariamente precisaria se preocupar com aplicações práticas.

A partir da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) da Educação Nacional – lei 4.024/61 - o regime de cátedras passou a ser opcional e sua discussão, atrelada à elaboração de um plano de carreira do magistério superior, se tornou cada vez mais intensa. Além dos problemas ocasionados pelo sistema de cátedras havia, de acordo com Celeste Filho (2006, p. 14), a convicção por parte dos intelectuais da época, que “o que inviabilizava o ensino superior brasileiro era a ausência de um núcleo que possibilitasse a coesão da universidade”. As FFCL foram criadas com o objetivo de cumprir esse papel integrador, mas como isso não aconteceu, foi apresentado um sucessor nessa idéia de coesão universitária: o Instituto Central, que deveria retomar a proposta original das Faculdades de Filosofia. A UnB – Universidade de

Brasília - foi o primeiro local em que ocorreu a efetiva substituição das cátedras pelos departamentos e da FFCL pelos Institutos Centrais; isto se deu em 1962.

Em fevereiro de 1963, a Diretoria do Ensino Superior do Ministério da Educação e Cultura organizou, em Brasília, um Simpósio sobre a Estrutura das Faculdades de Filosofia. De acordo com Celeste Filho (2006), neste simpósio encontra-se a configuração inicial da Reforma Universitária: “esboça-se como tendência a criação de institutos centrais, segundo o modelo de Brasília, ou um desmembramento daquela faculdade [Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras] em diversos estabelecimentos autônomos” (p. 31).

Em agosto de 1967 o Conselho Federal de Educação (CFE) criou uma comissão para discutir a Reforma Universitária. Aproximadamente um ano depois, em 2 de julho de 1968, o Executivo criou o Grupo de Trabalho da Reforma Universitária e, nesse momento, de acordo com Celeste Filho (2006), “as idéias consensuais sobre a reformulação do ensino superior estavam claras para os principais membros do CFE” (p. 93). Segundo o autor, a redação da proposta da lei da Reforma foi extremamente rápida e sua discussão e votação no Congresso Nacional ocorreu entre outubro e novembro de 68. No dia 28 de novembro deste mesmo ano, o Executivo sancionou a lei da Reforma Universitária. No dia 11 de fevereiro de 1969, o Executivo editou o Decreto-Lei 464/69 estabelecendo normas complementares à Lei 5.540/68. Segundo Celeste Filho (2006, p. 101), por meio deste decreto estabeleceu-se a presença de um ciclo básico comum aos alunos de uma mesma área e concedeu-se “aos ex-catedráticos a equivalência ao nível final da carreira docente”. No entanto, além dessas alterações, o decreto não traz grandes alterações à lei aprovada no ano anterior. Convém destacar que o estabelecimento, por lei, de um ciclo básico comum aos estudantes de uma mesma área acabou retardando a diferenciação entre as disciplinas introdutórias de Cálculo ministradas aos alunos do Bacharelado e da Licenciatura.

Na Universidade de São Paulo, o processo de reformulação teve início, de fato, no dia 20 de setembro de 1968, quando foi votada e aprovada a substituição do sistema de cátedras pelo regime departamental. No mesmo dia, aprovou-se também a transformação de todas as unidades da USP em Institutos. Conforme comenta Celeste Filho (2006, p. 25), com a mudança para o regime departamental, todas as funções antes exercidas pelos catedráticos foram transferidas para o departamento. Dessa forma, os professores deveriam, além de ensinar, dedicar-se à pesquisa e desincumbir-se, ainda, de outras tarefas atribuídas ao departamento.

Algumas pessoas envolvidas no processo de reforma da USP desejavam aprimorar o modelo adotado em 1962 na Universidade de Brasília. Havia a intenção de transformar todas

as unidades da universidade em institutos de importância equivalente, possibilitando, desta forma, que o aluno, durante sua formação acadêmica, percorresse vários deles, integrando definitivamente a instituição. De acordo com Celeste Filho (2006, p. 169), ao contrário do que ocorria na UnB, onde a pesquisa se concentrava nos Institutos Centrais e o ensino nas Faculdades voltadas a formação profissional, desejava-se que na USP a equiparação de suas unidades - na forma de Institutos - não diferenciasse as atividades de ensino e pesquisa. No entanto, isso não ocorreu; a reforma na USP acabou se resumindo à substituição das cátedras pelos departamentos e ao desmembramento da FFCL em Institutos Básicos. No final de 1969, a FFCL é extinta e os departamentos são criados: a Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, a Faculdade de Educação e os institutos de Biociências, de Física, de Geociências e Astronomia, de Matemática e Estatística, de Psicologia e o de Química.

De acordo com seu site oficial, o Instituto de Matemática e Estatística (IME) foi criado no dia 15 de janeiro de 1970 e reuniu todos os docentes de Matemática, Estatística e Ciências da Computação dos vários estabelecimentos existentes na USP até então, em particular, os da Poli, da FFCL, da Faculdade de Ciências Econômicas e Administrativas, da Faculdade de Higiene e Saúde Pública e do Instituto de Pesquisas Matemáticas.

A professora Elza Furtado Gomide, em entrevista concedida a Vianna (2000), comentou a respeito das conseqüências trazidas pela Reforma Universitária à pesquisa em Matemática realizada na Universidade de São Paulo:

A reforma universitária teve um reflexo positivo na formação de matemáticos. Antes de 1970, havia departamentos de matemática na Faculdade de Filosofia, na Escola Politécnica, na Faculdade de Arquitetura, na Faculdade de Economia... todos dispersos. Com isso não se criava uma massa crítica para realmente fazer matemática. Quando juntou tudo no Instituto de Matemática, se criou condições muito melhores para fazer pesquisa em matemática. Não há como comparar o Instituto de Matemática de agora com os diferentes departamentos daquele tempo; a diferença é enorme na qualidade de ciência que se faz. (VIANNA, 2000, p.33).

A reforma proibiu a duplicação de disciplinas dentro do campus universitário e, por isso, transferiu para os departamentos a congregação e administração de cursos afins, mesmo que de diferentes unidades da universidade. Por exemplo, todas as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral da universidade ficaram sob a responsabilidade do Departamento de Matemática mesmo que o público fosse de engenheiros, físicos, químicos, etc. Além disso, implantou-se a semestralidade: as disciplinas passaram a ser semestrais e não mais anuais como eram até então.

Devido ao fato de todas as disciplinas de Matemática da USP passarem a ser ministradas por professores do recém-criado Instituto de Matemática e Estatística, começou a haver uma grande demanda por novos professores para atuarem na Universidade. Conseqüentemente, alunos recém-formados no curso de Matemática começaram a ser contratados como professores do IME. Esse fato acaba proporcionando uma renovação do corpo docente e, por meio dela, a incorporação de novas idéias no ensino de disciplinas como o Cálculo, por exemplo.

No caso específico dos cursos de Cálculo Diferencial e Integral ministrados na Universidade de São Paulo, Gomide também comentou, na mesma entrevista a Vianna o que mudou com a Reforma:

A gente olhou modelos de outros países, sobretudo o modelo dos Estados Unidos, que pareceu muito lógico. Era o seguinte: quase todo mundo precisa de matemática hoje em dia, então você define níveis diferentes: o nível mais alto para quem vai ser matemático e outros níveis, com menos exigência, para quem vai usar aquilo só como instrumento. A partir daí você reúne os alunos de acordo com o nível do curso que eles têm que tomar e não de acordo com a escola a que se destina. Nem preciso dizer que isso provocou resistências das escolas tradicionais, e os alunos continuaram divididos por escolas. Porém, a idéia de definir os cursos gerais para todo mundo em primeiro nível, segundo nível, terceiro nível... pareceu muito razoável e foi o que se tentou adotar. A primeira dificuldade foi a seguinte: todo mundo achava que devia ter um nível mais alto: “Imagine se eu vou ter um curso mais fraco que os outros”. Não prevaleceu a lógica. Os diferentes institutos queriam que seus alunos – por uma questão de amor próprio (...) – tivessem o curso mais difícil possível, e somente algumas unidades isoladas é que procuraram realmente uma adaptação. De qualquer forma, começou-se com essa idéia de cursos básicos para todo mundo, mas isso funcionou muito mal. (...) Então os primeiros anos foram muito ruins... Até que a gente acabasse com essa idéia e fizesse cursos diferenciados. Hoje a gente tem cursos de cálculo diferenciados desde o primeiro ano. (Ibid., p.41).

Por este comentário de Gomide, nota-se que ela acreditava que os alunos da Matemática deveriam passar por disciplinas de Cálculo mais exigentes do que os alunos de outros cursos; no entanto, não se percebe uma preocupação explícita em diferenciar as disciplinas de Cálculo da Licenciatura e do Bacharelado. A impressão que nos fica é a de que os professores do IME, nesta época, achavam que estas duas modalidades de graduação em Matemática deveriam passar pelos mesmos cursos de Cálculo e é exatamente isto que é feito na prática até a diferenciação das disciplinas de Cálculo I do Bacharelado e da Licenciatura que, oficialmente, só ocorre em 1994.

Na sequência, comentaremos a respeito das diferenças observadas, ao longo da história do curso de Matemática da USP, entre as duas modalidades de graduação oferecidas: Licenciatura e Bacharelado.

3.4.3 - As diferenças, ao longo do tempo, entre os cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da USP

Conforme já comentamos, a princípio, o curso de Matemática oferecido pela FFCL tinha duração de três anos e o formando recebia o diploma de bacharel em Matemática. Quem quisesse atuar como professor do ensino secundário deveria cursar mais um ano de Formação Pedagógica no Instituto de Educação (Escola Normal da Praça da República) para receber o título de licenciado. Em 1938, este Instituto foi agregado à Universidade de São Paulo dando origem a Seção de Educação da FFCL e, com isso, essas disciplinas pedagógicas passaram a ser ministradas pela própria Faculdade de Filosofia, mas ainda nesse esquema de um ano a mais de curso para os bacharéis que quisessem também o certificado de licenciados. Em 1946, o decreto lei 9092, estabeleceu uma nova estrutura para os cursos da FFCL, deixando, como já dissemos na seção anterior, mais explícita a diferenciação entre licenciado e bacharel. No caso da Matemática, de acordo com Pires (2006, p.225), a situação ficou a seguinte: estabeleceu-se que seriam três anos de curso, com disciplinas obrigatórias e a estes foi acrescido mais um ano, em que o aluno fazia a opção por matérias pedagógicas ou por disciplinas de Matemática, o que lhe conferia respectivamente o grau de licenciado ou bacharel.

Durante muitos anos, discutiu-se a necessidade e a importância de a Licenciatura e o Bacharelado terem estruturas curriculares distintas e adequadas aos seus objetivos e, então, em meados da década de 1960, foram criadas duas comissões com a função de organizar novos currículos para essas duas modalidades. Na comissão do Bacharelado estavam, entre outros, os professores Elza Furtado Gomide e Carlos Benjamin de Lyra e na da Licenciatura estava o professor Jacy Monteiro. Como consequência das discussões promovidas por estas comissões, no ano de 1968 estas duas modalidades de cursos foram separadas e o esquema de funcionamento da graduação em Matemática passou a ser o seguinte: os alunos ingressavam, faziam um ano básico de disciplinas comuns e ao final deste optavam pela Licenciatura ou pelo Bacharelado. Além das disciplinas pedagógicas que só eram cursadas pelos que optassem pela Licenciatura, todas as disciplinas específicas de Matemática destes dois cursos, a partir do segundo ano, eram totalmente independentes, havendo, inclusive, algumas exclusivas do Bacharelado (como por exemplo, Topologia, Teoria de Galois) e outras da Licenciatura (História da Matemática, por exemplo).

No final de 1967, os alunos que haviam ingressado no curso de Matemática naquele ano foram informados que a partir de início de 1968 as reformulações citadas entrariam em

vigor e que eles precisariam optar se cursariam Licenciatura ou Bacharelado (havendo também a possibilidade de fazer as duas graduações paralelamente). Dentre todos esses alunos, cerca de seis deles se interessaram pelo Bacharelado, entre os quais estavam as professoras Ana Catarina Hellmeister e Sônia Pitta Coelho, entrevistadas nesse trabalho.

Coelho comentou em seu depoimento que, provavelmente, o curso de Bacharelado foi reformulado porque os professores da FFCL daquela época faziam parte, em sua maioria, de uma geração formada pelos docentes estrangeiros para serem matemáticos: “todos eram matemáticos, mesmo que não tenham feito pesquisa a vida inteira. Então acho que tinham essa idéia de que também precisavam formar matemáticos e não apenas professores de Matemática. (...) Era necessário ‘transmitir’ uma Matemática diferenciada e foi o que eles fizeram”⁹. Este novo curso de Bacharelado era totalmente voltado à formação de pesquisadores: “eles construíram um modelo novo. Eu imagino que havia algumas coisas que eram, mais ou menos, as mesmas na Licenciatura e no Bacharelado, mas a visão geral não era a mesma, tanto é que não tínhamos aula junto [exceto durante o primeiro ano, no qual os alunos das duas modalidades cursavam juntos as disciplinas básicas]; era tudo separado”¹⁰.

Hellmeister, ao comentar que o bacharelado não tinha licença para atuar na educação básica, acabou também destacando as diferenças existentes entre essas duas modalidades de graduação após a reformulação de 1968, afirmando que aqueles que quisessem obter tal licença “precisariam fazer uma complementação; não seriam somente as disciplinas pedagógicas porque nós deixamos de fazer várias disciplinas do curso de Licenciatura; passamos por um curso especial mesmo”¹¹.

Outro aspecto destacado por Coelho diz respeito ao empenho dos alunos presentes nesta primeira turma do curso do bacharelado reformulado:

Essa primeira turma era composta por pessoas muito motivadas para estudar Matemática, tanto é que, a turma que se interessou por cursá-lo era uma turminha que, no primeiro ano, havia tomado a iniciativa de fazer um grupo de estudos. Nós fomos procurar o professor Antonio Gilioli para que ele nos indicasse um texto de Cálculo que fizesse uma abordagem um pouco mais avançada, mais formal, para que pudéssemos estudar. E realmente fizemos este grupinho e estudamos. E foram, mais ou menos, essas pessoas as que acabaram indo para o Bacharelado: alunos que já tinham o hábito de se dedicarem muito e então nossa turma respondia bem ao nível de exigência que nos foi colocado. (COELHO, entrevista, 2009).

⁹ COELHO (2009).

¹⁰ COELHO (2009).

¹¹ HELLMEISTER (2009).

Ainda de acordo com ela, praticamente todos os alunos dessa primeira turma do Bacharelado, ao concluírem a graduação, iniciaram imediatamente o mestrado.

A criação do Instituto de Matemática e Estatística em 1970 trouxe mudanças na estrutura dos cursos de Matemática e nele também foram introduzidas disciplinas das áreas de Estatística e de Computação. Além disso, desde essa época, foram sendo criadas novas disciplinas especificamente para o curso de Licenciatura.

Dentre os cursos de Matemática oferecidos pela Universidade de São Paulo, o de Licenciatura foi o que mais passou por reformulações. E essas modificações não foram somente as já citadas. Em 1990, a USP sediou o Fórum das Licenciaturas e surgiu então a proposta de elaborar um novo currículo para o curso de Licenciatura em Matemática. Esse novo currículo, proposto entre outros por Elza Furtado Gomide e Iole de Freitas Druck, foi implementado em 1994 e trouxe mudanças ao projeto pedagógico do curso. De acordo com o site do Departamento de Matemática, foram criadas outras disciplinas específicas para a Licenciatura, a grade curricular foi alterada e, além disso, foram introduzidas diversas disciplinas optativas. Com essas alterações, o curso adquiriu um perfil próprio, mais adequado ao objetivo de formação de professores para a segunda fase do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

No ano de 2000, a Licenciatura passou por uma nova reformulação, embasada em discussões das quais participaram professores e alunos. Ocorreram alterações na seriação recomendada e reformulações nas ementas das disciplinas obrigatórias. Mais recentemente, o currículo de tal modalidade de graduação foi novamente repensado, visando adaptá-lo ao Programa de Formação de Professores da USP (PFPUSP), e esse novo currículo passou a vigorar em 2006. Duas disciplinas foram criadas: “Matemática na Educação Básica” e “Projetos de Estágio”, além de terem sido acrescidos créditos-trabalho a sete disciplinas e ter se tornado obrigatório o aluno cursar oito créditos-aula em disciplinas eletivas voltadas à prática docente.

Convém destacar que, com relação à disciplina de Cálculo I, foco dessa pesquisa, a única dentre todas estas reestruturações pelas quais passaram os cursos de Bacharelado e da Licenciatura que nele teve influência foi a de 1994. Foi nesta reforma curricular que a disciplina introdutória de Cálculo da Licenciatura passou a ser, oficialmente, diferente da do Bacharelado. Embora, em algumas ocasiões, tais disciplinas já fossem ministradas separadamente a estas duas modalidades, como, por exemplo, no período noturno, em que só há o curso de Licenciatura, foi apenas em 1994 que tal separação se deu de maneira oficial. É por esta razão que este foi tomado ponto final do período de interesse desta pesquisa. Nosso

objetivo é compreender como era o ensino do Cálculo durante o período em que ele era um só, ou seja, quando se acreditava que o Cálculo necessário para formar um professor de Matemática era o mesmo que o necessário para formar um matemático; é desta época que trata o estudo aqui relatado, ainda que, no decorrer do mesmo façamos também considerações a respeito de como ficou o ensino de tal disciplina após esta separação e quais as razões que levaram a ela.

Neste capítulo, nosso objetivo inicial foi dar ao leitor um pequeno panorama do ensino superior no Brasil antes da fundação da USP e, mais especificamente, do ensino do Cálculo nesta época. Em seguida, procuramos analisar como se deu o processo de criação da Universidade de São Paulo e, em sua Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, a implantação e o desenvolvimento do primeiro curso superior de Matemática do país.

A seguir, trataremos da implantação da disciplina Análise Matemática por Fantappiè, em 1935, e analisaremos como esta foi se modificando, pouco a pouco, ao longo dos anos e se transformando em outra, efetivamente, de Cálculo Diferencial e Integral mais próxima daquela que conhecemos atualmente.

CAPÍTULO 4 – A IMPLANTAÇÃO DA DISCIPLINA ANÁLISE MATEMÁTICA NA USP E A TRANSIÇÃO GRADUAL PARA UMA DISCIPLINA EFETIVAMENTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Neste capítulo trataremos da implantação da disciplina de Análise Matemática na graduação em Matemática da FFCL da USP, em 1935, e analisaremos de que maneira esta foi sendo modificada, redirecionada e renomeada até se tornar, pouco a pouco, uma disciplina efetivamente de Cálculo Diferencial e Integral mais semelhante àquela que encontramos atualmente nas universidades brasileiras. Veremos que este processo foi lento e gradual e que, mesmo a disciplina, a partir de 1964, já se chamando Cálculo, sua abordagem ainda esteve, por diversas vezes, mais próxima daquela adotada, atualmente, no curso introdutório de Análise Matemática. Inicialmente, no entanto, trataremos da constituição do Cálculo e da Análise como campos de conhecimento científicos e das semelhanças, diferenças e especificidades do Cálculo e da Análise como disciplinas acadêmicas universitárias.

4.1 – A constituição do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Matemática como campos de conhecimento

Como disciplinas do ensino superior, o Cálculo Diferencial e Integral e a Análise Matemática tratam, fundamentalmente, dos mesmos tópicos, porém com abordagens e enfoques diferentes. Como campos de conhecimento, também não podem ser vistos como áreas completamente distintas e separáveis da Matemática. Do ponto de vista histórico, no entanto, há algumas diferenças entre tais campos. Podemos dizer que, historicamente, o que houve foi um processo de transição das idéias fundamentais daquilo que atualmente chamamos Cálculo, abordadas, inicialmente, de maneira mais intuitiva e mais natural, para uma abordagem mais rigorosa e formal das mesmas, dando origem àquilo que hoje chamamos de Análise Matemática.

Para compreendermos este processo, precisamos fazer um breve retrospecto, desde a gênese das primeiras idéias do Cálculo, ainda na Grécia Antiga, até o movimento de Aritmetização da Análise, processo ocorrido no século XIX – que é chamado pelos historiadores da Matemática de *século do rigor* - como consequência da busca pelos matemáticos da época por uma fundamentação rigorosa dos elementos do Cálculo.

Ao buscarmos as origens das primeiras idéias do Cálculo somos levados a Zenão (aproximadamente 450 a. C.) e seus paradoxos, que trazem em seu bojo noções relacionadas aos infinitésimos e infinitos, a Eudoxo (408 – 355 a. C.) com seu Método da Exaustão, que envolve processos somatórios, e a Arquimedes (287 – 212 a. C.) que, por meio dos problemas de quadraturas e do problema de traçar uma reta tangente à espiral, desencadeou a busca por métodos gerais de obtenção de áreas e de traçados de tangentes a curvas. Como o objetivo desta pesquisa não é apresentar uma história do desenvolvimento do Cálculo, nos permitiremos fazer apenas algumas citações pontuais a este respeito, que nos auxiliarão no esboço desse processo histórico de estabelecimento do Cálculo e da Análise como campos de conhecimento. É por esta razão que, da Grécia Antiga, damos um grande salto e chegamos ao século XVII, no qual Fermat (1601 – 1665) e Barrow (1630 – 1677) são alguns nomes de destaque ao lado daqueles considerados pela maioria dos historiadores como os principais responsáveis pelo desenvolvimento do Cálculo: Newton (1642 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716), que, de acordo com Palaro (2006, p. 84), fundamentada em Boyer (1992, p. 17):

Unificaram os procedimentos de resolução apresentados por seus predecessores; reconheceram a natureza inversa da diferenciação e da integração; estabeleceram fórmulas, regras e algoritmos possíveis de serem aplicados a uma ampla classe de curvas, possibilitando a resolução de muitos problemas com um mínimo de esforço. (PALARO, 2006, p. 84).

Newton, em 1669, reuniu os resultados que havia obtido em seus estudos realizados entre 1665 e 1666, na obra *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (Sobre análises para equações com infinitos termos), a primeira a apresentar suas idéias para o ramo que, posteriormente, seria chamado de Cálculo. Nesta obra, Newton destaca, de acordo com Palaro (2006, p. 88), que “as operações realizadas com as séries infinitas são muito semelhantes às feitas com as expressões polinomiais finitas, pois estão sujeitas às mesmas leis gerais”. Desta forma, as séries infinitas deixaram de ser vistas como formas de aproximação para serem concebidas, de acordo com Boyer (1974, p. 289), como outras formas das funções que representavam. Com isso, algumas quadraturas que não haviam sido determinadas até então, puderam ser obtidas. Newton, neste trabalho, obtém áreas por meio do processo inverso da diferenciação, idéia que já era conhecida por outros matemáticos da época; a grande novidade de sua abordagem, de acordo com Bourbaki (1960), era a seguinte:

Newton primeiro concebe a idéia de substituir todas as operações, de caráter geométrico, da análise infinitesimal contemporânea, por uma operação analítica única, a diferenciação, e pela resolução do problema inverso; operação que,

evidentemente, o método das séries de potência lhe permite executar com extrema facilidade. (BOURBAKI, 1960, p. 210).

Em 1671 escreveu o *Tractatus de methodis serierum et fluxionum* (Tratado sobre os métodos das séries e fluxões), com base na idéia de que uma curva é gerada pelo movimento contínuo de um ponto e inspirado em um modelo da Mecânica que o levou a introduzir o tempo - de acordo com Palaro (2006, p. 92), “no sentido de fluxo uniforme” – como sendo a variável universal de qualquer correspondência funcional. De acordo com Eves (2004, p. 439), ao considerar, por exemplo, uma curva do tipo $f(x, y) = 0$, Newton chama a abscissa e a ordenada (x e y , respectivamente) de “fluentes” por serem quantidades que variam (fluem) com o tempo. A velocidade ou taxa de variação do fluente é chamada de “fluxo” e denotada por $\dot{x}$ e $\dot{y}$ (que, em notação moderna, com t sendo o tempo, seriam indicadas por $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$). Outro conceito introduzido pelo cientista nesta obra foi o de “momento” de um fluente, definido como sendo “um incremento infinitamente pequeno sofrido por um fluente como x , por exemplo, num intervalo de tempo infinitamente pequeno o ” (Ibid.). O momento do fluente x é então dado por $\dot{x}o$. Partindo dessas idéias, dois tipos de problemas foram levados em consideração por Newton: no primeiro deles, era dada uma relação entre alguns fluentes e pretendia-se encontrar uma relação envolvendo esses fluentes e seus fluxos, o que equivale à diferenciação; no segundo, considerando conhecida uma relação entre alguns fluentes e seus fluxos, desejava-se encontrar uma relação envolvendo apenas os fluentes. Esse problema é inverso aquele do primeiro tipo e equivale a resolver uma equação diferencial.

Este trabalho, de acordo com Palaro (2006, p. 94), que se fundamenta em Davis & Hersh (1985, p. 277-278), “apresentava falhas na forma de expressar sua idéia, já que não deixava muito claro o que vinha a ser o símbolo o e a razão pela qual desprezava os termos em que o aparecia com expoente maior que 1”. Devido às críticas sofridas em razão destas falhas, Newton, em 1676, ao escrever *De quadratura curvarum* (A quadratura das curvas), procurou, de acordo com os mesmos autores, evitar as quantidades infinitamente pequenas e as quantidades que fluem, explicando seu método anterior, o dos fluxões, por meio do conceito das primeiras e últimas razões. Em um trecho do *De quadratura*, diz o seguinte: “não considerarei aqui as quantidades matemáticas como sendo compostas de partes extremamente pequenas, mas como sendo geradas por um movimento contínuo” (NEWTON apud BARON & BOS, 1985, v. 3, p. 31 – grifos do autor). Segundo Boyer (1992, p. 21), foi com o método das primeiras e últimas razões que Newton chegou mais próximo de uma fundamentação lógica consistente para seu Cálculo.

Apesar destas obras de Newton apresentarem algumas falhas de fundamentação, elas foram de grande importância no desenvolvimento do Cálculo. De acordo com Katz (1998, p. 514), no *Tractatus de methodis* (Tratado sobre o método) de 1671, já se encontram enunciados, de forma bastante clara, os problemas fundamentais do Cálculo. Segundo este autor, além de Newton ter descoberto o Teorema Fundamental do Cálculo, ele o utilizou para resolver diversos problemas de cálculos de áreas; percebeu que encontrar a distância percorrida por um ponto em um dado intervalo de tempo, conhecendo sua velocidade, é o mesmo que encontrar a área sob a curva da função que descreve essa velocidade. Palaro (2006) resume da seguinte forma as contribuições do cientista:

Newton apresentou os fundamentos de seu Cálculo em três momentos diferentes, de forma tal que evidencia sua constante busca por uma fundamentação cada vez mais sólida e aprimorada, com a qual seus métodos analíticos pudessem ser justificados. Conseguiu mostrar que seus métodos eram aplicáveis a um grande número de problemas (...). Mas, apesar de toda sua dedicação, as bases lógicas sobre as quais seu cálculo estava calcado, não foram convincentes e ainda causaram preocupação e controvérsia que perduraram por mais de um século após sua morte. (PALARO, 2006, p. 98).

Leibniz, assim como Newton, também iniciou suas descobertas na área do Cálculo com trabalhos a respeito de séries infinitas. De acordo com Katz (1998, p. 522), ele estudou a relação inversa entre somas e diferenças de sequências numéricas e, segundo Dahan-Dalmedico & Peiffer (1986, p. 195), para relacionar os resultados obtidos em tais estudos com o Cálculo Infinitesimal, interpretou uma sequência de números como sendo uma sequência de valores de uma função e a diferença entre dois números como a diferença entre dois valores vizinhos da função. Representou tal diferença por dy e as somas destas por $\int dy = y$. Percebeu que a quadratura de uma curva podia ser aproximada pela adição de uma sequência de ordenadas equidistantes, que as diferenças entre ordenadas consecutivas dão uma aproximação para a inclinação da reta tangente e que, quanto mais próximas estiverem as ordenadas escolhidas, mais próximos dos valores exatos estarão as aproximações da quadratura e da inclinação da reta tangente. Conforme destacam Baron & Bos (1985, v. 3, p. 46), Leibniz percebeu que se a unidade escolhida fosse infinitamente pequena, os resultados obtidos seriam exatos. Além disso, notou que, como a soma das sequências fornece a quadratura e as diferenças fornecem as tangentes e como diferença é o inverso de soma, então os problemas de determinação de áreas (quadraturas) e de tangentes correspondem a operações inversas.

Em 1675, em busca de um tratamento analítico para o Cálculo Infinitesimal, Leibniz introduziu notações que perduram até hoje: criou o símbolo $\int$ para indicar somas e o símbolo d para indicar diferenças e, de acordo com Baron & Bos (1985, v. 3, p. 57), com o objetivo de estabelecer uma simbologia que traduzisse fielmente os argumentos do Cálculo, passou a buscar regras operacionais para $\int$ e d .

Um dos conceitos básicos presentes nos trabalhos de Leibniz era o de *diferencial*, entendido, de acordo com Baron & Bos (1985, v. 3, p. 58), como sendo a diferença infinitamente pequena entre dois valores consecutivos de uma mesma variável, como por exemplo dx , que é a diferença entre duas abscissas consecutivas e muito próximas. Segundo Palaro (2006, p. 105), Leibniz não definiu rigorosamente diferencial, mas apresentou a seguinte explicação para o uso que fazia de tal idéia:

É importante considerar quantidades infinitamente pequenas tais que, quando se procura sua razão, elas possam ser consideradas não nulas, mas que sejam desprezíveis sempre que aparecem com quantidades incomparavelmente maiores. Assim, quando temos $x + dx$, dx é desprezada. Mas é diferente se procuramos a diferença entre $x + dx$ e x , pois então as quantidades finitas desaparecem. Do mesmo modo não podemos ter $x dx$ e $dx dx$ mantidas juntas. Daí, se precisamos diferenciar xy , escrevemos $(x + dx) \cdot (y + dy) - xy = x dy + y dx + dx dy$. Mas nessa altura $dx dy$ deve ser rejeitada por ser incomparavelmente menor que $x dy + y dx$. Assim em qualquer caso particular o erro é menor que qualquer quantidade finita. (LEIBNIZ apud BOYER, 1992, p. 50).

Em 1684, Leibniz publicou suas descobertas sobre o Cálculo Diferencial na revista *Acta Eruditorum*, em um trabalho intitulado *Nova methodus pro maximis et minimis, item que tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur*. Dois anos mais tarde, publicou um artigo, chamado, *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* com seus resultados sobre o Cálculo Integral, enfatizando a relação inversa entre diferenciação e integração (BOYER, 1974, p. 296).

Segundo Palaro (2006, p. 107) e Boyer (1992, p. 22), da mesma forma que o Cálculo de Newton, o de Leibniz também apresenta algumas incoerências, provenientes, sobretudo, da inexistência de uma definição rigorosa para as tais “quantidades infinitamente pequenas” e da ausência de uma prova da validade de se desprezar essas quantidades no decorrer de alguns cálculos feitos:

A verdade é que as quantidades infinitamente pequenas, tão usadas, ainda não tinham sido definidas, o que colocava em cheque toda uma teoria, já que certos procedimentos eram simplesmente aceitos como verdadeiros, embora não possuíssem justificativas plausíveis. Como explicar, por exemplo, que em algumas questões, no decorrer de seu desenvolvimento, inicialmente, considera-se que

quantidades infinitamente pequenas são diferentes de zero e logo, em seguida, são iguais a zero? (BARON & BOS, 1985, v. 4, p. 22).

Percebe-se, portanto, que, apesar de Newton e Leibniz terem trazido grandes avanços à Matemática, receberam, após a publicação de seus trabalhos, diversas críticas, ocasionadas, principalmente, pelas operações que ambos faziam com as quantidades infinitamente pequenas, também chamadas de infinitésimos, idéia que, apesar de fundamental nos resultados que estabeleceram, não foi formulada de maneira rigorosa.

Os infinitésimos ganharam grande destaque na Matemática por meio dos trabalhos de Newton e Leibniz, mas, de acordo com Carvalho & D'Ottaviano (2006, p. 4), tal noção remonta à Grécia Antiga e está diretamente relacionada às propriedades do contínuo; já aparecia na Matemática e na Filosofia da escola pitagórica, de Anaxágoras de Clazomene, do filósofo atomista Demócrito e de Aristóteles. No entanto, são nos trabalhos de Eudoxo e de Arquimedes que a noção de infinitésimo aparece de maneira mais explícita e relacionada com algumas idéias que, posteriormente, seriam aprofundadas pelo Cálculo. Em *O Método*, por exemplo, Arquimedes, ao utilizá-la, antecipa elementos fundamentais da teoria de limites, diferenciação e integração. Nos séculos XVI e XVII, os infinitésimos são reintegrados à Matemática de forma mais efetiva por meio dos trabalhos de Kepler, Galilei e Torricelli que, com relativo sucesso e rigor, aplicaram o método infinitesimal à Matemática e à Física. Tão antigas quanto à própria idéia de infinitésimo são as críticas a esta noção; Zenão, por exemplo, por meio de seus paradoxos, tornou-se autor de um dos primeiros ataques sofridos pelos infinitésimos ao longo de toda sua história. Segundo Carvalho & D'Ottaviano (2006), “Assim como no caso de Zenão, os autores das inúmeras investidas registradas contra os infinitésimos buscavam, invariavelmente, com base em suas aparentemente incontornáveis inconsistências, reduzi-los a ficção ou mesmo delírios matemático-filosóficos” (p. 3).

Ainda de acordo com estes autores (p. 11), entre 1700 e 1706 ocorreu um longo ciclo de discussões na Academia Real de Ciências de Paris a respeito dos infinitésimos serem ou não adequados ao embasamento do Cálculo Diferencial e Integral. Dentre os simpatizantes das teorias propostas por Newton e Leibniz estavam Pierre Varignon (1654-1722) e Joseph Saurin (1659-1737) e dentre os opositores, o principal deles era Michel Rolle (1652-1719). Rolle e Saurin foram, de acordo com os autores citados, os que mais se envolveram nos debates, que terminaram somente com a ação conciliatória de uma comissão criada pela Academia especialmente para esse fim. Rolle e os demais críticos dos infinitésimos saíram com a sensação de vitória, já que não foi apresentada por Saurin ou qualquer outro dos defensores dessa idéia uma justificativa rigorosa para a existência de tais elementos. Outras

críticas bastante citadas ao Cálculo Infinitesimal de Newton e de Leibniz são as do bispo anglicano George Berkeley (1685-1753), presentes em sua obra *The Analyst* de 1734. Berkeley reconheceu o valor dos trabalhos de Newton, principalmente, a precisão de suas fórmulas e a exatidão das suas aplicações na Física e na Astronomia, mas criticou duramente as quantidades infinitamente pequenas.

Perante este incômodo causado pelos infinitésimos, no final do século XVIII, houve uma série de tentativas de apresentar uma abordagem rigorosa para o Cálculo que, de acordo com Reis (2001, p. 57), podem ser qualificadas como os primeiros passos em direção à fundamentação da Análise. Segundo Eves (2004) a situação nesta época era a seguinte:

Tangidos pela aplicabilidade imensa do assunto e carecendo de um entendimento real dos seus fundamentos, os matemáticos manipulavam os processos analíticos de uma maneira quase cega, muitas vezes guiados apenas pela intuição. O resultado só poderia ser uma acumulação de absurdos, até que, como reação natural ao emprego desordenado do intuicionismo e do formalismo¹², alguns matemáticos conscientes se sentiram na obrigação de tentar a difícil tarefa de estabelecer uma fundamentação rigorosa para a Análise. (EVES, 2004, p. 609 – 610).

Este problema de fundamentação vivenciado pelo Cálculo estava diretamente relacionado ao fato de tal área estar totalmente baseada na Geometria:

A transição do Cálculo para a Análise no século XVIII não foi somente uma questão de crescimento e divisão em subcampos; envolveu também uma transformação fundamental em sua natureza. O Cálculo, por volta de 1700, era ainda essencialmente orientado para a geometria. Tratava de problemas sobre curvas, empregava símbolos algébricos, mas as quantidades de que se utilizava eram principalmente interpretadas como ordenadas e abscissas de curvas, ou como outros elementos de figuras geométricas. Durante a primeira metade do século diminuiu o interesse pela origem geométrica dos problemas e os matemáticos passaram a se interessar mais pelos símbolos e fórmulas do que pelas figuras. A Análise tornou-se o estudo e manipulação de fórmulas. (BARON & BOS, 1985, p. 43).

Perceberam-se diversas falhas nos fundamentos geométricos do Cálculo e, conseqüentemente passou-se a buscar uma fundamentação analítica, baseada em números.

De acordo com Eves (2004), o primeiro matemático a conseguir, de fato, alguns refinamentos nos fundamentos do Cálculo foi Euler (1707 – 1783). Tais refinamentos se encontram na obra *Introduction in Analysin Infinitorium* de 1748, considerada pedra fundamental da Análise Matemática. De acordo com Boyer (1974), “Euler tomou o cálculo diferencial e o método dos fluxos e tornou-os parte de um ramo mais geral da matemática que

¹² O termo formalismo neste trecho citado é utilizado no sentido do que o autor denomina de “formalismo do século XVIII”, que consiste na manipulação, sem os cuidados devidos, da convergência e da existência matemática em questões envolvendo processos infinitos.

a partir daí é chamado “análise – o estudo de processos infinitos” (p. 326). Em 1754, D’Alembert (1717 – 1783) também deu sua contribuição em direção a uma solução geral para o problema de fundamentos vivenciado pela Análise ao observar que, para estabelecer tal campo de maneira rigorosa, era necessário que se desenvolvesse uma teoria dos limites. Tal teoria, no entanto, até 1821 ainda não havia sido formulada de maneira sólida. Outro matemático a buscar, nesta mesma época, uma abordagem rigorosa para o Cálculo foi Lagrange (1736 – 1813) que procurou, em seu trabalho *Théorie des Fonctions Analytiques* de 1797, representar uma função por uma expansão em série de Taylor. Tal tentativa não foi bem sucedida porque ignorou questões fundamentais sobre convergência e divergência, mas foi importante por ter sido um dos pontos de partida de uma “longa e difícil tarefa de banir o intuicionismo e o formalismo¹³ da análise” (EVES, 2004, p. 610). Outros nomes a se destacar neste processo inicial são Bolzano (1781 – 1848), que, por volta de 1817, também percebeu que, de fato, o rigor era fundamental no estabelecimento dos fundamentos da Análise e, por esta razão foi saudado por Felix Klein (1849 – 1925) como o “pai da Aritmetização”, e Gauss (1777 – 1855) que, em 1812, em seu tratamento para as séries hipergeométricas apresentou, de acordo com Eves (2004, p. 610), “a primeira consideração efetivamente adequada a respeito da questão da convergência de uma série infinita”.

Ao longo do século XIX, a Análise, e conseqüentemente o Cálculo, passam a se estabelecer sobre alicerces cada vez mais sólidos, tanto que tal século ficou conhecido na história da Matemática como o *século do rigor*. O primeiro grande progresso se deu, verdadeiramente, em 1821, quando Cauchy (1789 – 1857) colocou em prática a sugestão de D’Alembert e desenvolveu uma teoria de limites aceitável para, tomando por base este conceito, definir continuidade, diferenciabilidade e integral definida. Segundo Eves (2004, p. 610), “são essas definições, em essência, embora formuladas mais cuidadosamente, que encontramos hoje nos textos elementares de cálculo. Certamente, o conceito de limite é essencial e indispensável para o desenvolvimento da análise”.

Cauchy, que desde 1816 era professor da Escola Politécnica de Paris, utilizou esta sua teoria de limites para embasar uma nova disciplina, chamada *Análise Matemática*, organizada de maneira rigorosa e desenvolvida, segundo Reis (2001, p. 59), por meio “de um conjunto consistente de definições e teoremas apresentados formal e logicamente, com uma notação una e coerente ao longo de todo o texto de seu *Cours d’analyse* (1821)”. Foi exatamente neste momento que surgiu, no currículo do curso superior de Matemática, a disciplina chamada

¹³ Veja nota de rodapé número 1.

Análise. Seu nascimento está ligado também, diretamente, ao processo de desenvolvimento do conceito de função. Rezende (2003) destaca que “paralelamente à evolução do Cálculo, o conceito de função foi se desenvolvendo e a passagem do Cálculo em variáveis para o Cálculo de funções foi se efetivando gradativamente, até que (...) todas as disciplinas da Matemática que tratavam de processos infinitos (limites, séries, diferenciação e integração) foram reunidas sob o nome de Análise” (p. 239 – grifos do autor).

No decorrer desta busca pelos fundamentos da Análise, os matemáticos começaram a se deparar com situações que “pareciam contrariar a intuição humana e tornavam cada vez mais evidente que Cauchy não tinha atingido o verdadeiro âmago das dificuldades” (EVES, 2004, p. 610) em sua busca pelo estabelecimento rigoroso desse novo campo da Matemática. Na procura de uma fundamentação sólida para a Análise, Weierstrass (1815 – 1897), por exemplo, obteve uma função contínua não derivável e Riemann (1826 – 1866) criou uma função que é contínua nos irracionais, mas descontínua nos racionais. A grande questão repousava no fato de Cauchy ter construído sua teoria de limites sobre uma noção intuitiva do sistema dos números reais; conforme destaca Eves (2004, p. 610), “o sistema dos números reais tinha sido (...) admitido sem maiores cuidados, como ainda se faz na maioria dos textos elementares de cálculo. E (...) a teoria de limites, continuidade e diferenciabilidade dependem mais de propriedades (...) dos números do que se supunha”.

Foi por esta razão que Weierstrass defendeu que a primeira providência a ser tomada deveria ser tornar o sistema dos números reais rigoroso, para que, desta forma, todos os elementos da Análise que dele decorressem pudessem ser estabelecidos com segurança. Isto se concretizou, no final do século XIX, por meio dos trabalhos de Dedekind (1831 – 1916) e Cantor (1845 – 1918) que demonstraram como construir o sistema dos números reais. Dedekind, por meio de sua noção de “corte”, permitiu que os teoremas fundamentais a respeito de limites fossem demonstrados sem o auxílio de recursos geométricos e Cantor efetuou o completamento do conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, utilizando sequências de Cauchy.

Com o sistema dos números reais estabelecido de maneira rigorosa, os conceitos da Análise passaram a se fundamentar em números e não mais em grandezas geométricas como acontecia até então. De acordo com Barker (1976), “esta conquista foi denominada Aritmetização da Análise, pois trata de revelar de que modo as partes da Matemática reunidas sob o título de Análise podem ser reduzidas à parte elementar da Aritmética (ou Teoria Elementar dos Números, como também é chamada)” (p. 79).

Reis (2001), tomando como referência Boyer (1974), divide o movimento de Aritmetização da Análise em três fases distintas:

- 1º Programa: compreende os trabalhos de rigorização da Análise realizados, com pouco ou muito sucesso, pelos matemáticos pré-weierstrassianos, destacadamente Cauchy;
- 2º Programa: compreende a “Idade do Rigor” que havia chegado com Weierstrass ao substituir os antigos conceitos intuitivos por precisão lógica-crítica;
- 3º Programa: compreende os trabalhos de refinamento dos weierstrassianos, destacadamente Riemann (...) e Cantor (...) que tentaram dar à Análise um estado de perfeição rigorosa, através de suas contribuições fundamentais das aplicações de Topologia à Análise. (REIS, 2001, p. 61).

O mesmo autor afirma que, no século XX merecem destaque os trabalhos de Lebesgue (1875 – 1941) a respeito da Teoria da Medida e Integração e H. J. Keisler, que introduziu um curso de Cálculo utilizando infinitésimos, com base na Análise Não-Standard de Abraham Robinson ¹⁴.

O processo de Aritmetização da Análise exerceu e continua exercendo grande influência no desenvolvimento da Matemática como ciência. O rigor, a partir de então, passou a ser valorizado e perseguido em todas as áreas constituintes da Matemática Pura. De acordo com Eves (2004), “a par dessa rigorização da matemática, verificou-se uma tendência no sentido de generalização abstrata, um processo que se tornou muito pronunciado nos dias de hoje” (p. 613). Mas quais foram as consequências deste processo de rigorização do Cálculo e de aritmetização da Análise para o ensino das idéias fundamentais destes campos de conhecimento e, mais especificamente, para o curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral ministrado na graduação em Matemática? É exatamente a respeito do Cálculo e da Análise como disciplinas acadêmicas universitárias que trataremos na próxima seção.

4.2 - O Cálculo Diferencial e Integral e a Análise Matemática como disciplinas acadêmicas universitárias

De acordo com Reis (2001, p. 68), “o desenvolvimento histórico do ensino das disciplinas Cálculo e Análise sempre esteve atrelado/determinado pelo desenvolvimento histórico do Cálculo e da Análise, enquanto campos de conhecimento matemático”. Até o início do século XIX, o Cálculo era abordado, dependendo da orientação do professor, sob duas tradições distintas: a dos limites e a dos infinitésimos. A partir do começo do século XIX

¹⁴ Enquanto a Análise Standard de Cauchy se baseia na noção de limite, a Análise Não-Standard de Abraham Robinson baseia-se na noção de infinitésimo. Podemos dizer então que a Análise Standard está para o Cálculo Diferencial e Integral assim como a Análise Não-Standard está para o Cálculo Infinitesimal.

começa a haver, por influência do que havia sido desenvolvido por Cauchy, um período de “primazia dos limites”. Deste período em diante, as noções fundamentais do Cálculo passaram a ser desenvolvidas por meio do conceito de limite e, segundo Reis, “[esta] é, indiscutivelmente, a tendência predominante no ensino atual de Cálculo” (p. 62). O autor destaca que tal afirmação pode ser embasada nas seguintes constatações:

- 1) Influenciados pelo modelo cauchyano, tradicionalmente, iniciamos o estudo do Cálculo pela noção de limite de uma função e, em seguida, destacamos que: a continuidade depende de um limite (existir e ser igual ao valor da imagem da função no ponto); a derivada é um limite (do quociente incremental); a integral é um limite (das somas de Riemann);
- 2) A partir do refinamento weierstrassiano das definições, verificamos na maioria dos livros didáticos atuais, o desenvolvimento da teoria de derivadas e integrais posterior à apresentação dos limites. Estes, em geral, são definidos a partir do par $\varepsilon - \delta$ e, em seguida, são destacadas as principais propriedades e alguns teoremas mais importantes relacionados aos limites. (Ibid., p. 62-63).

Como já destacamos, há muitas intersecções tanto entre os campos de conhecimento Cálculo e Análise quanto entre as duas disciplinas acadêmicas universitárias desenvolvidas com o objetivo de ensinar aos alunos dos cursos superiores de Matemática os conceitos e idéias básicas de ambos. Desta forma é bastante natural, e até mesmo esperado, que se estabeleçam algumas confusões: entre o Cálculo como conhecimento científico e a disciplina de Cálculo, entre a Análise como conhecimento científico e a disciplina de Análise e, principalmente, entre os cursos de Cálculo e os de Análise. O que é específico de um e do outro? No que diferem e no que se assemelham?

De acordo com Reis (2001, p. 161), a grande confusão entre estas duas disciplinas se torna evidente principalmente naqueles cursos de Cálculo ministrados com uma abordagem que valoriza o rigor lógico de apresentação e justificação dos conceitos, estruturados por meio de definições, propriedades, teoremas e suas demonstrações, baseada na concepção formalista que supervaloriza a linguagem simbólica, considerada a única capaz de garantir a validade dos resultados. O autor destaca que é preciso que todos os professores tenham consciência das diferenças existentes entre as disciplinas de Cálculo e de Análise e do papel desempenhado por cada uma delas nos currículos dos cursos superiores de Matemática; sem tal consciência, provavelmente, na prática, o Cálculo será transformado em Análise.

Rezende (2003) afirma que é inevitável confrontar os domínios do Cálculo e da Análise quando buscamos discutir os elementos pedagógicos e os conteúdos essenciais de qualquer uma destas disciplinas e destaca que, da maneira como está estruturada na maioria dos cursos superiores de Matemática, a disciplina inicial de Cálculo se encontra,

semanticamente, muito mais próxima da Análise do que, de fato, do Cálculo, tanto que um grande número de professores considera tal disciplina como uma pré-Análise, uma abordagem “mais intuitiva” de tal campo de conhecimento, já que a ênfase está nas técnicas de como calcular limites, derivadas e integrais. O autor então questiona: qual seria o divisor de águas do Cálculo para a Análise? O que é próprio do Cálculo? O que é próprio da Análise?

Segundo Reis (2001), muitos professores universitários argumentam que na disciplina inicial de Cálculo deve ser feito um estudo “intuitivo” dos conceitos de função, limite, continuidade, derivada e integral e que, na disciplina de Análise, estes mesmos tópicos devem ser reestudados de maneira rigorosa. Para o autor, esta concepção traz em seu bojo uma visão dicotômica entre rigor e intuição, quando, na verdade, entre esses dois elementos deveria existir uma reação dialética; ambos exercem papéis igualmente importantes e complementares no ensino de qualquer conteúdo matemático e não podem ser separados. Portanto é inaceitável associar ao ensino do Cálculo uma abordagem intuitiva e ao ensino de Análise uma abordagem rigorosa e, conseqüentemente, é completamente equivocada a idéia de que o papel do Cálculo é fazer com que o aluno adquira a técnica e o da Análise é fazer com que o mesmo aprenda os conceitos.

Para o professor Geraldo Ávila¹⁵, a separação entre as disciplinas de Cálculo e de Análise é, na verdade, uma questão muito mais didática, de organização do ensino, do que de conteúdo. Afinal Cálculo é Análise Matemática! Por essa razão, Ávila diz também não ser favorável a associação do pensamento rigoroso com o analítico: “Rigor é outra coisa (...). Eu chamo isso aqui de Cálculo e (...) aquilo ali de Análise só por uma conveniência didática. Podia chamar tudo de Análise” (ÁVILA apud REIS, 2001, p. 263). Para Elon Lages Lima, há três componentes fundamentais no ensino da Matemática: a conceitualização, a manipulação e as aplicações e, no Cálculo a ênfase deve ser nas aplicações e nas manipulações, enquanto que na Análise, deve-se enfatizar a conceitualização e o método dedutivo.

De acordo com Rezende (2003), se perguntássemos o que é Cálculo aos professores ou alunos da disciplina, a maioria daria sua resposta em termos dos conteúdos normalmente trabalhados em tal curso: limite, derivada e algumas de suas aplicações. Para o autor, isto é consequência imediata “da influência de uma vivência didática, nem sempre crítica, de um curso (...) de Cálculo” (p. 305). Argumenta ainda que responder tal questão inspira grandes dificuldades; primeiramente, porque é muito difícil tentar isolar determinada área do

¹⁵ Nesta seção, a não ser que citemos alguma obra específica de Geraldo Ávila, Elon Lages Lima e Roberto Baldino, ao nos referirmos a estes docentes, estaremos nos referindo às entrevistas concedidas pelos mesmos a Reis (2001).

conhecimento e, depois, porque uma pergunta da natureza “o que é...?” tem caráter bastante capcioso. No entanto, “fazer esse tipo de questão é necessário para que se faça, durante a impossível tarefa de respondê-la, uma reflexão profunda sobre aquilo de que se quer apreender o significado” (p. 66). Segundo o autor, as diversas possibilidades de tentativas de respostas a tal questionamento estão intimamente relacionadas com aquilo que se pensa sobre o Cálculo e com o que se pretende com seu ensino.

Ao tentar responder tal questão somos levados a outro questionamento: quais são os conceitos fundamentais do Cálculo? De acordo com Rezende (2003, p. 79), ao refletirmos a esse respeito, precisamos levar em conta outra questão: “fundamentais para quê”? Se estivermos interessados em saber quais são os conceitos indispensáveis para a “significação lógica” do Cálculo, para seus aspectos formais, então o conceito fundamental é limite. Por outro lado, se nosso interesse estiver na “construção semântica” do Cálculo, em suas redes de significações, então os conceitos fundamentais serão a diferenciação, a integração e a relação estabelecida entre essas duas operações por meio do Teorema Fundamental do Cálculo. A derivada e a integral sempre foram os dois grandes eixos temáticos do Cálculo, suas idéias realmente fundamentais, desde sua origem. Com relação aos conceitos fundamentais da Análise, podemos dizer que estes são número real e infinito, tendo como operação principal a idéia de limite da forma definida por Weierstrass.

Ao se deparar com a afirmação de que a noção de infinito é um dos pilares básicos da Análise, o leitor poderia se perguntar: mas tal conceito também não é fundamental no Cálculo? E a este respeito, estamos de acordo com Rezende (2003), que afirma que: embora a noção de infinito seja fundamental na construção dos procedimentos do Cálculo, sua assimilação total não se esgota nesse campo de conhecimento: “a relação do Cálculo com o conceito de infinito se estabelece no nível de sua “utilização”: o Cálculo não teve, não tem e nem deveria ter compromisso direto com a “fundamentação” desse conceito. Questões dessa natureza são objetos de outro domínio (...): a Análise” (p. 78).

Outros questionamentos necessários ao refletirmos a respeito das diferenciações entre as disciplinas de Cálculo e Análise dizem respeito à quais conteúdos devem ser abordados em um curso inicial de Cálculo e de que forma deve ser essa abordagem. De acordo com as considerações apresentadas em Rezende (2003), as respostas a estes questionamentos estão relacionadas a outros, tais como: Qual o curso de Cálculo que se quer? Aquele em que prevalece a técnica ou aquele em que se busca a construção dos significados? Qual a atitude que queremos do estudante para o qual ensinamos? Qual deve ser o elemento motivador no processo de ensino: o problema que é a fonte do resultado que se quer intuir ou o resultado, já

finalizado e enunciado em forma de teorema? O que deve ser priorizado? O processo intuitivo da criação ou o processo educativo da vigilância do rigor?

Com relação aos conteúdos que devem ser trabalhados em um curso inicial da disciplina, Rezende (2003) destaca que os conhecimentos específicos do ramo da Matemática que se convencionou chamar de Cálculo, situam-se, historicamente, desde o século XVIII, a partir das criações de Newton e Leibniz, até o século XIX, quando Cauchy estruturou tal ramo em termos da noção intuitiva de limite. A formalização de tal conceito já é objetivo da Análise.

E como tais conceitos devem ser abordados no Cálculo? Na maior parte dos livros didáticos, a tendência principal é formalizá-los por meio das noções de limite e de número real, predominando a sequência de Cauchy-Weierstrass para organização didática dos conteúdos, isto é, formaliza-se a noção de limite e, então, com base nesta noção, define-se continuidade, derivação e integração. De acordo com Barufi (1999), essas propostas trazidas pelos livros são mais adequadas para cursos de Análise Real do que para uma disciplina inicial de Cálculo.

Novamente a questão que se coloca é o que se pretende com o ensino de tal conteúdo. De acordo com Rezende (2003, p.305-306), se o Cálculo for visto como uma espécie de pré-Análise e a preocupação maior for com o treinamento algébrico e sintático de seus resultados, subordinando, desta forma, os objetivos de seu ensino aos da disciplina Análise Real, então, talvez, a sequência de Cauchy-Weierstrass seja a mais adequada para a organização e apresentação do conteúdo. Por outro lado, se a ênfase do ensino estiver no sentido dos resultados do Cálculo e não em sua sintaxe lógica, se o objetivo do professor for proporcionar ao aluno um aprendizado das idéias básicas do Cálculo, de suas redes de significados¹⁶ e de suas relações com outros domínios da Matemática e com o conhecimento científico, então, com certeza, a sequência de Cauchy-Weierstrass não é a mais adequada.

¹⁶ Segundo Bonomi (1999, p. 12-14), de acordo com a concepção de conhecimento como rede de significações, o conhecimento não é algo que se acumula; ele se constrói continuamente, dando origem a uma grande rede de relações, constituída por diversos nós e relações interligando-os. Cada nó é concebido como um feixe de relações e não é possível isolar um nó ou mesmo uma relação, já que apenas o conjunto todo é que faz sentido; não há partes que possam ser consideradas isoladamente. A rede está em constante transformação; os feixes de relações vão sendo constantemente enriquecidos da mesma forma que novas relações vão sendo estabelecidas entre os nós. Cada um dos novos conhecimentos significativos para o indivíduo vão sendo assimilados à rede como um novo nó ou por meio de uma ou mais articulações estabelecidas na configuração anterior, provocando, dessa forma, uma reconfiguração de toda a rede. De acordo com a noção de rede, o conhecimento não é fruto de um simples ato de transmissão de informação em que quem sabe expõe para quem não sabe que, naturalmente, aprende. A aprendizagem só ocorre quando o aprendiz consegue estabelecer significados para o objeto de conhecimento em questão (que é o nó da rede) e, dessa forma, é capaz de estabelecer novas relações (que são os feixes da rede) em sua própria rede, articulando o novo nó com aqueles já existentes.

De maneira geral, o que acontece, segundo Rezende (2003, p. 306), é que muitos professores, ignorando as raízes de suas posições epistemológicas frente ao ensino do Cálculo, adotam/assumem tal sequência para a apresentação dos conteúdos e insistem no fato de que a diferença entre o Cálculo e a Análise está “apenas” no modo de apresentação dos conteúdos e na dosagem do rigor empregado em cada uma destas disciplinas. Em um curso de Análise os resultados são demonstrados, enquanto que no de Cálculo fazem-se apenas “contas”, cálculos e aplicam-se os resultados. Mas quais resultados? Quem determina tais resultados? O Cálculo ou a Análise? Da maneira como tais disciplinas estão estruturadas no ensino superior, é a Análise quem traça as diretrizes para o ensino do Cálculo, ocorrendo, então, uma contradição em relação à origem histórica da própria Análise. E nesta situação o ensino do Cálculo é o grande prejudicado, já que não consegue ter outro ponto de referência que não seja esta visão pré-analítica do próprio Cálculo.

Outro questionamento necessário ao refletirmos sobre os cursos iniciais de Cálculo, de acordo com Rezende (2003, p. 10-11), diz respeito a real necessidade das demonstrações nestas ocasiões. No que elas contribuem para a compreensão e para o desenvolvimento dos resultados teóricos da disciplina? É claro que a demonstração é importante para a construção do conhecimento matemático, mas será que se utilizada exclusivamente fornece condições para que se atinja a compreensão ou a essência de um resultado matemático? É preciso ter a consciência de que a demonstração é apenas uma justificativa lógica da validade do resultado; não carrega em si, na maioria das vezes, a idéia que permitiu intuí-lo; ocorre então uma dicotomia: o significado lógico de um resultado matemático versus o sentido de tal resultado. O que se percebe, de acordo com o autor, é que, no ensino usual do Cálculo o que acaba prevalecendo é o significado lógico e não os sentidos dos resultados. Ávila defende que os conceitos devem ser descobertos, inicialmente, de forma intuitiva e visual; depois é que o aluno deve verificar se consegue ou não demonstrar aquele resultado que ele já sabe que é verdadeiro.

Rezende (2003, p. 434-435) defende que os grandes núcleos semânticos do ensino em um curso inicial de Cálculo devem ser os processos de diferenciação e integração, interligados pelo Teorema Fundamental; essas, que sempre foram as linhas mestras do desenvolvimento Cálculo, devem guiar também o trabalho do professor em sala de aula. Além disso, destaca que, os conceitos de limite e de infinitésimo, embora fundamentais no processo de construção das idéias básicas do Cálculo, não devem ser objetos de estudo e aprofundamento em um curso da disciplina. Tais conceitos, neste momento, devem participar apenas no nível intuitivo e não no nível formal. A definição formal de limite, de Weierstrass, em termos de $\varepsilon - \delta$

e $\delta - s$, e a fundamentação rigorosa do infinitésimo, proposta por Robinson em sua Análise Não-Standard, não são (e nem deveriam ser) efetivamente elementos construtores dos conceitos e resultados do Cálculo num curso inicial da disciplina. A noção intuitiva de limite proposta por Cauchy e as idéias básicas de infinitésimos concebidas por Leibniz e Euler servem com maior presteza aos reais objetivos de um curso inicial de Cálculo no ensino superior.

Roberto Baldino também é contrário a apresentação da teoria de Weierstrass para os limites em um curso inicial de Cálculo:

Não tem sentido algum você fazer num curso de Cálculo um capítulo sobre Teoria de Weierstrass, sobre épsilons e deltas (...). Aquilo ali, primeiro tem que acontecer pra depois se justificar, pra depois, numa outra instância, esse aluno retomar aquilo (...) verificar até que ponto aquela ferramenta que ele tá usando vale. (BALDINO apud REIS, 2001, p. 179).

Rezende (2003) destaca que há diversos estudos e experiências didáticas visando mapear as dificuldades dos alunos na disciplina de Cálculo que se baseiam no modelo usual de ensino dos conceitos da disciplina em termos dos limites. De acordo com ele,

O papel reservado para a operação de limite nesse modelo de ensino está completamente equivocado: apesar de comprometer quase a terça parte do tempo didático da disciplina (...), a operação de limite é muito mais uma (...) técnica algébrica do que propriamente aquela “idéia metafísica” – como diria Newton – que mais tarde foi interpretada por D’Alembert e Cauchy como a “verdadeira metafísica” do Cálculo. (REZENDE, 2003, p. 436).

De acordo com Rezende (2003, p. 307), não existe no meio acadêmico uma opinião conceitual a respeito do que deveria ser uma disciplina inicial de Cálculo. Reis (2001) preconiza que, para a solução dos problemas no ensino do Cálculo, deve-se trabalhar a disciplina de maneira problematizadora, explorando os múltiplos significados e representações de suas idéias. Ávila afirma que o principal objetivo de qualquer curso, e, em particular, do que de Cálculo, deve ser a ‘transmissão’ de idéias. Rezende (2003) também é favorável que o professor de tal disciplina procure, a todo o momento, transmitir idéias e construir significados. O professor Lages Lima afirma que o curso inicial de Cálculo não deve enfatizar de forma exagerada os aspectos teóricos de tal ramo da Matemática. Devem ser priorizadas situações científicas mais gerais, exemplos explicando os fenômenos da natureza e as aplicações.

Como já destacamos, Lages Lima defende que, no Cálculo, a ênfase deve ser nas aplicações e nas manipulações e não na conceitualização, que nessa disciplina não deve

exagerada. Rezende (2003) comenta que, de fato, se por conceitualização se estiver entendendo a justificação lógica dos resultados matemáticos, esse aspecto não deve ser priorizado. No entanto, se tomarmos uma dimensão mais ampla de conceitualização, em que conceituar se torna estabelecer relação entre significados e na qual a justificação lógica (demonstração) se torne apenas uma das possibilidades, então um exagero de conceitualização seria muito bem vindo: “se conceituar significar construir significados, estabelecer relações entre os significados envolvidos no processo de ensino, um exagero dessas atitudes no ensino do Cálculo até que seria bem vindo, uma vez que tal ensino tem sofrido ultimamente uma quase total abstinência de significações”.

Embora já tenhamos afirmado que não existe um consenso a respeito do que deveria ser a disciplina inicial de Cálculo no curso de Matemática, muitos são contrários a um primeiro curso com nível muito elevado de rigor, com uma abordagem mais próxima daquela adotada, usualmente, na disciplina de Análise. Ávila (2002, p. 85) destaca que, em sua opinião, uma abordagem muito rigorosa do Cálculo, desde o início, não é muito indicada e, por esta razão, é preciso que os envolvidos no processo de ensino desta disciplina tenham consciência das virtudes trazidas pela separação dos ensinamentos do Cálculo e da Análise. Deve-se levar em consideração que o intelecto humano não se constitui apenas de lógica, não é somente racional; há outros aspectos que auxiliam no aprendizado, como, por exemplo, a intuição e a visualização geométrica. Para esse professor, o excesso de rigor pode encobrir as idéias, dificultar a apreensão destas ao invés de ajudar: “o rigor é importante numa fase (...) de maior amadurecimento do aluno, quando ele já tem um espírito crítico, uma capacidade de questionar. Aí é (...) a hora do rigor e da organização lógica da matemática” (ÁVILA apud REIS, 2001, p. 178). No início é preciso levar o aluno a um aprendizado progressivo, continuado, até que atinja o grau de amadurecimento necessário para a rigorização da disciplina. Argumenta que “é somente depois de terem entendido bem o conceito de derivada e visto algumas de suas aplicações, é que [os estudantes] estarão devidamente preparados para prosseguir no estudo dos fundamentos” (ÁVILA, 2002, p. 85). Para esse matemático e professor, esta é a “ordem natural das coisas”, comprovada, inclusive, pela história da constituição do Cálculo e da Análise como campos de conhecimento. Destaca que, na opinião dele:

Um primeiro curso de Cálculo deve levar o aluno a se familiarizar logo com as idéias e técnicas da derivada e da integral, incluindo problemas de máximos e mínimos, integração por substituição e por partes, regras de l'Hôpital, comportamento das funções elementares, logaritmo e exponencial, suas aplicações e, exemplos simples de integrais impróprias. (...) Após um tal curso os alunos deverão

estar preparados para fazer com proveito um primeiro curso de Análise. (ÁVILA, 2002, p. 93).

Ávila se utiliza da seguinte metáfora para ilustrar o processo de aprendizado do aluno de certos conteúdos da Matemática de nível superior, introduzidos no curso de Cálculo e refinados no curso de Análise: é preciso que o professor tenha consciência de que o aluno irá começar engatinhando, e não correndo como ele quer. O professor precisa lhe fornecer, no curso de Cálculo, todos os recursos de aprendizagem para que ele, depois de engatinhar, aprenda a andar e, posteriormente, consiga correr, ou seja, fazer com maior proveito um curso de Análise. Não adianta fazer o aluno correr desde o início.

Lages Lima também defende que “o Cálculo deve preceder a Análise por motivos de maturidade intelectual”. Morris Kline, no prefácio de seu texto *Cálculo: uma aproximação intuitiva e física* também faz críticas incisivas a uma apresentação muito rigorosa em um curso inicial de Cálculo. Para Kline, além de tal abordagem ser muito difícil para um estudante que está tendo o primeiro contato com tal conteúdo, ela esconde o verdadeiro espírito do processo de criação em Matemática: a abordagem formal deixa ao aluno a falsa impressão de que o matemático realiza seus trabalhos de forma dedutiva. O autor comenta que “um primeiro curso rigoroso em Cálculo lembra algumas das palavras de Samuel Johnson; “Eu encontrei um argumento pra você, mas eu não sou obrigado a encontrar para você o entendimento”” (KLINE, 1998, prefácio).

Barufi (1999, p. 149-150) também se posiciona contra uma abordagem muito formal em uma disciplina inicial de Cálculo. Segundo ela, para os alunos de um curso deste nível, essa perspectiva não faz sentido, já que o enfoque é todo centrado em um universo rigoroso e distante no qual eles não conseguem exercer qualquer tipo de crítica. As idéias deixam de ter o destaque merecido e não fica, de modo algum, claro para eles o porquê da importância de determinadas afirmações ou da necessidade ou não de serem demonstradas. Esses cursos possuem grande coerência sintática, mas pouca preocupação semântica.

É uma triste ilusão imaginar que os alunos ingressantes estão aptos a trabalhar num curso inicial de Cálculo estruturado como uma série de definições, propriedades, teoremas, e pretender que isso seja significativo¹⁷. Nesse caso, lamentavelmente, muitos deles são apenas receptáculos de uma série de resultados nos quais acreditam porque alguém, detentor do conhecimento, afirmou. O máximo que poderão fazer é repetir conceitos que guardaram na memória episódica, procurando reproduzi-los da mesma maneira que lhes foram transmitidos, ou resolver problemas semelhantes aos

¹⁷ Neste capítulo, aprendizado significativo estará sempre relacionado à concepção de conhecimento como rede de significações, explicada na nota de rodapé número 5.

que viram serem resolvidos, aplicando técnicas que, de tanto repetir, conseguiram razoavelmente memorizar. (BARUFI, 1999, p. 153).

A mesma autora comenta que, muitas vezes, com o objetivo de minimizar o insucesso na construção significativa do conhecimento, a saída acaba sendo reduzir os conceitos e idéias do Cálculo ao algoritmo, apresentando aos alunos um grande número de exercícios repetitivos cujos processos de solução serão, de alguma forma, memorizados. É claro que isto é tão inadequado quanto apresentar, em um curso inicial, uma abordagem extremamente formal do conteúdo. De acordo com ela, é necessário que o professor reflita se pretende que seus alunos entendam o Cálculo a partir de sua lógica interna ou a partir de suas potencialidades como ferramenta na resolução de problemas.

De acordo com Rezende (2003, p. 392), devemos “construir os campos de significações dos resultados e idéias básicas do Cálculo para, posteriormente, buscarmos a sistematização dos mesmos”. O autor traz ainda alguns indicadores do que, em sua opinião, deveria ser um curso inicial de Cálculo:

- O conteúdo do Cálculo não se resume na sequência limite-continuidade-derivada-integral; ao contrário, podemos situar este conteúdo dentro do intervalo histórico que vai de Leibniz à primeira fase de Cauchy; definição formal de limite e os resultados frutos do processo de aritmetização desenvolvido por Weierstrass é Análise, Análise Real;
- Os conceitos básicos do Cálculo são as operações de diferenciação, de integração e o Teorema Fundamental do Cálculo, sejam estes conceitos e resultados desenvolvidos a partir da noção de limite ou de infinitesimal. A fundamentação da operação de limite é do âmbito da Análise Real e a noção de infinitesimal, da Análise Não-Standard. Cálculo é Cálculo! E não, Análise.
- (...) O significado, o sentido dos resultados deve prevalecer sobre a sua justificação lógica. A discussão das idéias vale muito mais que a apresentação/reprodução da demonstração de um resultado matemático (...);
- A relação do Cálculo com outras áreas do conhecimento não deve ser realizada apenas em termos de aplicações e no final do processo de construção de seus conceitos básicos; tal relação deve ser antecipada, ser o carro-chefe das idéias geradoras dos conceitos básicos do Cálculo. A noção de velocidade, por exemplo, não é meramente uma aplicação do conceito de derivada; velocidade é, isto sim, um dos principais elementos do núcleo semântico do conceito de derivada. (REZENDE, 2003, p. 321-322).

Destaca ainda que existe uma crise de identidade evidente no ensino superior de Cálculo:

Caracterizada basicamente pela subordinação do ensino desta disciplina a uma espécie de preparação para a Análise e pela excessiva caracterização algébrica de suas idéias fundamentais. A primeira é a principal responsável pelo uso de demonstrações evasivas e desnecessárias, que monopolizam os processos de significação das idéias e resultados do ensino de Cálculo. A última, por outro lado,

constitui-se pelo exagero da técnica que desvirtua, sem dúvida, os significados das idéias básicas do Cálculo. (Ibid., p. 440-441).

De acordo com o autor, atualmente, a disciplina inicial de Cálculo “por um lado dá-se ênfase à organização e à justificação lógica dos resultados (...) e, por outro, realiza um treinamento exacerbado nas técnicas de integração, no cálculo de derivadas e de limites” (p. 430). Em sua opinião, esta sua organização analítica e algébrica é uma das principais fontes da crise de identidade enfrentada, atualmente, por tal disciplina.

Diante de tal crise, conclui que para superá-la, será necessário rediscutir o papel da disciplina inicial de Cálculo no ensino superior. Será preciso redimensionar o paradigma vigente no ensino de tal conteúdo: nem a preparação para um curso posterior de Análise e nem o treinamento exagerado de técnicas devem ser metas suas metas. É preciso voltar o ensino do Cálculo para o próprio Cálculo, seus significados, seus problemas construtores e suas potencialidades (p. 431-432) e romper com esta idéia de pensar nesta disciplina apenas como sendo uma preparação para a Análise ou para quaisquer outros cursos que necessitem de seus resultados fundamentais, idéia bastante arraigada até mesmo dentre aqueles professores que sempre manifestaram preocupações didáticas com relação ao ensino deste conteúdo. É comum, por exemplo, professores afirmarem que organizam suas aulas de forma a preparar seus alunos para que eles possam acompanhar com facilidade as disciplinas que dependem do Cálculo. O professor deve ter consciência de que de nada adianta o aluno saber as regras de derivação e as técnicas de integração se não conhecer também seus significados, suas múltiplas interpretações, sua utilidade em outros campos da matemática e em outras áreas de conhecimento. Da mesma forma, nada adianta ele ser capaz de apresentar uma justificação lógica dos resultados se não souber manipular tais conceitos, fazer cálculos com eles e, da mesma forma já dita anteriormente, conhecer seus significados, suas múltiplas interpretações, sua utilidade em outros campos da Matemática e em outras áreas de conhecimento. É preciso um equilíbrio entre intuição, manipulação, justificação lógica e significação. É necessário, portanto, recalibrar o ensino do Cálculo no que diz respeito aos pares técnica/significado e sistematização/construção. Em vez de se construir os resultados e conceitos como conhecimentos já sistematizados, o mais indicado é ter como objetivo a construção das redes de significados das idéias básicas da disciplina para, posteriormente, buscar a sistematização dos elementos de tal rede.

O professor precisará enfrentar a polarização usualmente feita no meio acadêmico entre os ensinamentos de Cálculo e de Análise, cortar o cordão umbilical que submete o

ensino de Cálculo ao ensino de Análise, e procurar no próprio Cálculo as metas de seu ensino e o nível de rigor possível e desejado. (Ibid., p. 433).

A partir da próxima seção, veremos como a Análise foi implantada no curso de Matemática da USP, de que forma a disciplina deste conteúdo ministrada no primeiro ano se transformou, pouco a pouco, em outra de Cálculo Diferencial e Integral e como essas disciplinas, a partir do momento em que ambas passaram a existir no currículo do curso de nosso interesse, mas em momentos diferentes da formação do aluno, se relacionaram ao longo do período de estudo desta pesquisa. Afinal de contas, ao longo de sua história, o curso de Cálculo da Matemática da USP esteve mais voltado para ele mesmo ou para a disciplina de Análise? Privilegiou a técnica, a construção de significados ou houve um equilíbrio entre esses elementos? Houve um predomínio da exposição dos conhecimentos já sistematizados ou houve a preocupação também com a construção de tais conhecimentos? Ao final deste capítulo tentaremos, com base no que apresentaremos a partir da próxima seção, responder a essas e outras questões.

4.3 – O curso de Análise Matemática implantado na FFCL por Luigi Fantappiè

O matemático italiano Luigi Fantappiè, sobre o qual já demos algumas informações no capítulo anterior e cuja biografia encontra-se nos anexos presentes no final deste trabalho, logo ao chegar ao Brasil teve como missão, de acordo com D'Ambrosio (1999), implantar a disciplina de Análise no curso de Matemática que começaria a ser oferecido pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo a partir de sua fundação. O professor Cândido Lima da Silva Dias (1913-1998) enfatiza que foi Fantappiè quem verdadeiramente introduziu no Brasil cursos tratando da Matemática de nível superior:

Anteriormente, nas escolas politécnicas ou de engenharia, somente se ministrava a parte fundamental do Cálculo Infinitesimal. Fantappiè desenvolveu cursos inteiramente diferentes: teoria dos grupos, grupos contínuos, teoria dos números, formas diferenciais aplicadas à análise, análise tensorial (que se denominava, então, de cálculo absoluto, como ele dizia). (DIAS, 1994)

Segundo a professora Elza Furtado Gomide, Fantappiè “era um grande matemático e instituiu a disciplina Análise muito bem. (...) Fundou uma escola sólida, séria e com um bom material. (...) o setor de Análise fundado por ele foi sempre sólido na universidade”¹⁸.

¹⁸ GOMIDE (2008).

Na disciplina de Análise, introduzida já no primeiro ano de funcionamento da Seção de Matemática da FFCL, tratava-se dos mesmos assuntos abordados no curso de Cálculo Infinitesimal da Poli, além de conteúdos matemáticos mais modernos. No entanto, enquanto nas escolas politécnicas e militares estudava-se apenas derivação e integração com ênfase nas regras destes processos e visando uma aplicabilidade do conteúdo, no curso da FFCL, de acordo com Lima (2006), além de o “Cálculo ser visto na perspectiva de Cauchy e seus contemporâneos, o seu ensino não visava à mera aplicabilidade dos seus conteúdos, mas principalmente à conceitualização e fundamentação das teorias expostas” (LIMA, 2006, p. 81).

Durante o tempo em que Fantappiè ficou no Brasil, seu curso de Análise foi ministrado nos três anos da graduação em Matemática da FFCL. Neste trabalho, no entanto, iremos nos restringir a disciplina do 1º ano, momento em que os elementos fundamentais do Cálculo (os conceitos de função, limite, derivada e integral) são apresentados aos alunos.

O curso de Fantappiè era redigido, na forma de apostilas, por seu assistente Omar Catunda e na biblioteca do campus Marquês de Paranaguá da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo tivemos acesso a um exemplar encadernado reunindo todas as notas de aula do curso do primeiro ano datilografadas por Catunda. Sabemos que tais notas não refletem de maneira exata a forma como as aulas eram conduzidos por Fantappiè; livros-didáticos, apostilas, notas de aula nunca nos dizem exatamente como um professor conduzia seu trabalho em sala de aula; dão-nos apenas indicações. No caso deste material referente ao curso de Fantappiè, há ainda outro agravante: ele não foi redigido pelo docente, mas por seu assistente e, portanto, trata-se de uma apropriação de Catunda para aquele conteúdo efetivamente trabalhado por Fantappiè durante suas aulas. Apesar de termos consciência destas limitações, este foi o único material de que dispusemos para analisar a disciplina de Análise implantada na FFCL da USP quando o curso de Matemática de tal instituição entrou em funcionamento. Optamos então por analisá-lo, mas com o cuidado de destacar ao leitor que o que apresentaremos pode não corresponder a forma exata como o curso foi conduzido; daremos os indícios que nos são possíveis de apresentar, e não certezas. Novamente entra em jogo a concepção de História como versão e não uma história do que realmente aconteceu (GARNICA, 2003).

Tomando por base estas notas de aula, o conteúdo trabalhado por Fantappiè entre 1935 e 1939 se distribuía da seguinte forma:

- Capítulo 1: *Cálculo Combinatório. Determinantes. Equações Lineares:* arranjos simples, permutações simples, combinações simples, triângulo de

Pascal, arranjos, permutações e combinações com repetição, classes de uma permutação, noções sobre as substituições, binômio de Newton, matrizes, determinantes e suas propriedades, sistemas de n equações e n incógnitas e a regra de Cramer, formas lineares dependentes e independentes, características de uma matriz, sistema de m equações e n incógnitas e o teorema de Roché-Capelli, equações homogêneas e aplicações à teoria dos determinantes e substituições lineares.

- Capítulo 2: *Teoria dos Números Reais*: números reais e racionais; campos numéricos naturais ou inteiros absolutos; inteiros relativos; racionais absolutos e racionais relativos; operações diretas e inversas nestes campos numéricos; abordagem geométrica dos incomensuráveis; tratamento de Dedekind para os números irracionais; construção dos números reais via noção de cortes; conjuntos ordenados densos e contínuos; reta real; intervalos e entornos.
- Capítulo 3: *Potências e Logaritmos dos Números Reais. Números Complexos*: potências com expoente inteiro e positivo, potência com expoente nulo ou negativo, propriedade das potências em relação às desigualdades, raízes e propriedades dos radicais, potências com expoentes fracionários, potências com expoente real, logaritmo e suas propriedades, números complexos, complexos conjugados, norma e módulo, forma trigonométrica dos números complexos e fórmula de Moivre, representação geométrica dos números complexos e vetores no plano, raiz de um número complexo e raízes da unidade.
- Capítulo 4: *Conjuntos Lineares. Funções e Limites no Campo Real*: conjunto linear, extremos, ponto de acumulação, teorema de Bolzano, conjuntos derivados, teorema de Borel-Lebesgue, função e limite.
- Capítulo 5: *Derivadas e Diferencial das Funções de uma Variável*: derivada, interpretação geométrica da derivada, interpretação mecânica da derivada primeira e da derivada segunda, infinitésimos, infinitos, diferencial e significado geométrico da diferencial.
- Capítulo 6: *Integrais das Funções de uma Variável*: soma inferior, soma superior, integral de uma função, propriedades das somas superiores e inferiores, áreas de figuras planas, teorema de Darboux, condição de integrabilidade de Riemann, teoremas gerais sobre as integrais, propriedade

aditiva da integral, integrabilidade de funções contínuas e monótonas, Primeiro Teorema da Média, a integral considerada como função do seu extremo superior, teorema de Barrow, integral indefinida, primitivas imediatas, processos imediatos de integração (decomposição, integração por partes, integração por substituição), integrais impróprias, integração das funções racionais, integrais abelianas, integrais binomiais, integração das funções trigonométricas, fórmula de Wallis, integração das funções que envolvem exponenciais e funções hiperbólicas (em um apêndice).

O matemático trouxe aos cursos de Cálculo, ministrados em São Paulo, o que estava em voga na escola matemática italiana, considerada na época avançada e bem conceituada. De acordo com Táboas (2005, p. 54), foi Fantappiè quem “apresentou a Análise Matemática aos jovens universitários de São Paulo”. Enquanto nos cursos de Cálculo oferecidos pelas escolas politécnicas e militares antes da fundação da USP, a ênfase estava nas regras, a principal preocupação destes cursos de Análise da FFCL era a conceitualização e fundamentação teórica e formal do conteúdo trabalhado.

Observamos então uma mudança de objetivos no ensino do Cálculo, situação comumente observada quando se estuda a trajetória de uma disciplina de ensino. A finalidade do currículo deve ser levada em consideração, assim como quem determina os saberes que serão abordados e quais as razões para esta abordagem. Os currículos adotados nas escolas militares e escolas politécnicas existentes no país antes da criação da Universidade de São Paulo foram elaborados com a função de proporcionar uma formação adequada à militares e engenheiros; deveriam ser ensinados saberes que pudessem auxiliar esses profissionais no exercício de sua função. Já no caso de um curso como o da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, que visava à formação de matemáticos, os objetivos deveriam ser outros; o currículo deveria ser pensado de forma a proporcionar uma sólida conceitualização das teorias matemáticas, já que somente o domínio de técnicas, da Matemática como ferramenta, não seria suficiente para o exercício profissional dos egressos daquele curso. Eles necessitariam de um conhecimento profundo sobre esta ciência em todos seus aspectos. Tudo isso se refletiu na forma como foi elaborado o programa da disciplina a ser ministrada no curso de Matemática; Fantappiè entendeu que o mais adequado, ao invés de uma disciplina de Cálculo, era uma de Análise, nos moldes das universidades italianas. Percebemos então que, a princípio, não se pensou em um curso inicial de Cálculo que fosse adequado para os alunos da Matemática; pensou-se diretamente em uma disciplina de Análise que, pouco a pouco, como veremos ao longo deste capítulo, foi dando origem a de Cálculo. Podemos dizer então que, na gênese do

curso inicial de Cálculo ministrado aos alunos da Matemática da USP, está essa disciplina de Análise implantada por Fantappiè na época da fundação da instituição. Vejamos então como eram apresentados, em tal disciplina, os conceitos de função, limite, derivada e integral.

Provavelmente tenha sido nas aulas de Fantappiè que o conceito de função tenha sido apresentado pela primeira vez no ensino superior brasileiro de acordo com a concepção de Dirichlet:

Consideremos um conjunto C de números x, com mais de um elemento. Se a cada número x de C corresponde, de um modo bem determinado, um ou mais valores de uma outra quantidade y, dizemos que y é uma função de x definida no campo C, que se chama campo de definição, e indicamos essa correspondência com a notação $y = f(x)$ ou por outro símbolo semelhante em que a letra f seja substituída por outra qualquer. Usa-se frequentemente, por exemplo, a notação $y = y(x)$. Se a função toma um só valor para cada valor de x, dizemos que ela é monódroma ou univocamente determinada. Caso contrário, será polídroma. (FANTAPPIÈ, sem data, sem numeração de páginas – grifos do autor).¹⁹

O tratamento da noção de limite segundo as idéias e notações de Weierstrass também, provavelmente, foi introduzido nas universidades brasileiras por meio deste curso. Primeiramente, Fantappiè abordava tal conceito de forma topológica e, em seguida, apresentava a definição de Weierstrass, com auxílio dos epsilons e deltas:

Seja $y=f(x)$ uma função definida num campo C, e seja a um ponto de acumulação desse campo. Dizemos que y tem por limite o número real b, para x tendendo a a, e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} y = b ,$$

quando a cada entorno β de b póde-se fazer corresponder um entorno conveniente α de a, tal que para todo ponto x de C diferente de a, contido em α , o valor $y=f(x)$ correspondente pertença ao entorno β . No caso de função polídroma aplica-se a mesma definição de limite, devendo a última condição ser satisfeita para todos os valores de $y=f(x)$, correspondentes ao mesmo valor de x. Podemos dar outra forma a essa definição, pois a condição acima é evidentemente satisfeita se nos limitarmos aos entornos simétricos de $\underline{b}$ e de $\underline{a}$, pois dentro de qualquer entorno ha sempre um entorno simétrico e o elemento que estiver nesse entorno simétrico estará dentro do entorno primitivo. Ora, $\underline{x}$ estará no entorno simétrico (ε) de $\underline{a}$, se tivermos

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

donde se tira

$$a - x < \varepsilon \text{ e } x - a < \varepsilon$$

ou

$$|x - a| < \varepsilon$$

¹⁹ Destacamos que o que Fantappiè chama de função polídroma, atualmente não é considerado função, é simplesmente uma relação.

Podemos dizer, portanto que y tende a b para x tendendo a a , quando, dado o número $\varepsilon > 0$ arbitrário, pódese determinar em correspondência um número positivo δ tal que para todo ponto x diferente de a satisfazendo á condição

$$|x - a| < \delta$$

teremos, para o valor (ou valores) de $y=f(x)$ correspondente,

$$|y - b| < \varepsilon$$

(Ibid., sem numeração de páginas – grifos do autor).

No que diz respeito à derivada, enquanto nas escolas militares trabalhava-se apenas com o método de Leibniz com ênfase nas regras de derivação de determinadas funções e nos cursos da Politécnica de São Paulo, até 1934, tal ente matemático era tratado sob o ponto de vista de três métodos: Leibniz, Newton e Lagrange, Fantappiè optava por não abordar estes três métodos; considerava que o aceito naquele momento era o de Newton:

Seja $y= f(x)$ uma função definida num campo C de números reais x , e seja x_0 um ponto de acumulação de C que pertence a C . Sendo x outro ponto qualquer de C , a diferença $f(x) - f(x_0)$ chama-se acrécimo ou incremento de $f(x)$ no ponto x_0 , relativo ao acréscimo $x - x_0$ da variável independente.

Em todos os pontos $x \neq x_0$ de C está definida a função $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, que se

chama razão incremental de $f(x)$, relativa ao ponto x_0 . Quando esta razão tem, para $x \rightarrow x_0$ um limite finito ,chama-se este limite derivada da função $f(x)$ no ponto x_0 , e se indica com a notação

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Diz-se neste caso que a função $f(x)$ é derivável no ponto x_0 .

(Ibid., sem numeração de páginas – grifos do autor).

E, após apresentar os conceitos de infinitésimo e diferencial, explicitava ao leitor de suas notas de aula as diferenças principais entre os métodos de Newton e de Leibniz:

A construção do Cálculo Diferencial, como é universalmente aceita atualmente, baseia-se no método de Newton, que introduziu a derivada de uma função como limite da relação entre o acréscimo da função e o da variável independente, quando este último tende a zero. A concepção de Leibniz, que hoje está inteiramente abandonada, baseia-se na sua teoria filosófica – a Monadologia. Segundo essa teoria, toda curva seria formada de uma quantidade infinitamente grande de segmentos retilíneos, cujas projeções sobre os eixos seriam designadas com dx e dy sendo o coeficiente angular dy/dx de cada um de tais segmentos a derivada da função $y = f(x)$ que representa a curva. Do método de Leibniz se conservou o algoritmo, por ser de manejo mais fácil, mas as quantidades dx e dy correspondem a conceitos inteiramente diferentes: dx é o acréscimo arbitrário da variável independente e dy é o produto desse acréscimo pela derivada y' . (Ibid., sem numeração de páginas).

Apresentava ainda uma interpretação geométrica para a idéia de derivada, além da interpretação mecânica das derivadas primeira e segunda.

Com relação à integral, para iniciar sua abordagem de tal conceito, considerava uma função monódroma definida e limitada em todo o intervalo $[a, b]$, toma l e L os extremos inferior e superior, respectivamente, da função em tal intervalo e dividia $[a, b]$ de um modo qualquer em outros r intervalos parciais, sendo os pontos de divisão $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_r = b$. Afirmava então que o r -ésimo intervalo desta divisão é $[x_{r-1}, x_r]$, com amplitude $h_r = x_r - x_{r-1}$ e que neste intervalo parcial, a função admitirá um extremo superior L_r e um extremo inferior l_r . Nomeava então os produtos $L_r h_r$ e $l_r h_r$, respectivamente, de adendo superior e adendo inferior relativos ao r -ésimo intervalo e afirmava que:

Somando todos os adendos superiores e todos os inferiores, obtemos dois números

$$S = \sum L_r h_r \text{ e } s = \sum l_r h_r$$

que se chamam, respectivamente, soma superior e inferior da função, relativas à divisão adotada. (FANTAPPIÈ, sem numeração de páginas, 1934 – grifos do autor).

Destacava então que, como: $l \sum h_r \leq \sum l_r h_r \leq \sum L_r h_r \leq L \sum h_r$ e $\sum h_r = b - a$, então $l(b - a) \leq s \leq S \leq L(b - a)$, ou seja, o conjunto de todas as somas superiores, relativas a todas as divisões possíveis, é limitado tanto superiormente como inferiormente:

Este conjunto terá pois, forçosamente, um extremo inferior finito, S_0 , que se chama integral superior da função no intervalo $[a, b]$, e se indica com a notação

$$S_0 = \int_a^b f(x) dx.$$

Analogamente, sendo limitado o conjunto das somas inferiores, podemos definir a integral inferior de $f(x)$ em $[a, b]$ como o extremo superior do conjunto das somas inferiores, designando esse número por

$$s_0 = \int_a^b f(x) dx.$$

Esses dois números existem sempre, desde que sejam satisfeitas as duas hipóteses fundamentais, que são: 1ª) ser a função $f(x)$ definida em todo o intervalo $[a, b]$; 2ª) ser limitada nesse intervalo.

Se os dois números s_0 e S_0 são iguais, o seu valor comum chama-se simplesmente integral da função $f(x)$ estendida no intervalo $[a, b]$ e se indica com:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Neste caso dizemos que a função $f(x)$ é integrável no intervalo $[a, b]$. (Ibid., sem numeração de páginas- grifos do autor).

Na sequência, abordava as propriedades das somas superiores e inferiores, analisando qual o efeito da inserção de um novo ponto de divisão e concluindo que “toda soma inferior é menor ou igual a qualquer soma superior”. E, então, a partir deste resultado, Fantappiè apresentava ao leitor de suas notas a relação entre integral e área, dizendo que:

A interpretação geométrica deste resultado é evidente se supusermos conhecido o conceito de área de uma figura plana; recordemos a definição de área: é uma grandeza que se associa a cada figura plana limitada tal que: 1) duas figuras congruentes têm áreas iguais; 2) se uma figura F se decompõe em duas outras F_1 e F_2 , sem pontos comuns, a área de F é, por definição, a soma das áreas de F_1 e de F_2 (...). Do princípio 2) acima se deduz imediatamente que se uma figura F contém uma figura F_1 de área conhecida A_1 , a área de F não pode ser menor que A_1 . Vamos aplicar este resultado ao cálculo da área de uma figura limitada por um segmento $[a, b]$ sobre um eixo Ox , duas retas aM e bN normais a esse eixo e o gráfico da função $y = f(x)$. Sendo $f(x)$ uma função monódroma, limitada e integrável no intervalo $[a, b]$, e que supomos positiva em todo esse intervalo. Essa figura pode ser definida como o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas x, y satisfazem as desigualdades:

$$a \leq x \leq b \quad 0 \leq y \leq f(x) \quad (3).$$

Feita uma divisão do intervalo $[a, b]$ pelos pontos $x_1, \dots, x_{r-1}$ e levantando por esses pontos paralelas a Oy , a soma inferior s será a soma das áreas dos retângulos inscritos (...) e a soma superior S será a soma das áreas dos retângulos circunscritos. Neste enunciado retângulo inscrito é o maior retângulo com base no intervalo parcial $[x_{r-1}, x_r]$, que esteja todo contido na figura, e retângulo circunscrito é o menor retângulo que contém a parte dessa figura compreendida entre as retas paralelas a Oy tiradas pelos pontos x_{r-1} e x_r . Ora, por estas últimas afirmações vê-se que a área A da figura F é maior ou igual a qualquer soma s e menor ou igual a qualquer soma S . Mas se a função é integrável, como supusemos, o único número compreendido entre essas duas somas é $s_0 = S_0$. Temos, pois,

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

isto é, a área da figura definida pelas desigualdades (3) é a integral que definimos atrás. (Ibid., sem numeração de páginas – grifos do autor).

Estabelecida esta relação entre integral e área de uma região abaixo de uma curva, considerava novamente uma função monódroma limitada, definida no intervalo $[a, b]$, $y = f(x)$, e afirmava que em cada divisão desse intervalo existe pelo menos um intervalo parcial de máxima amplitude μ , ou então que, dado um número positivo $\mu < b - a$, “há uma infinidade de divisões em que a máxima amplitude dos intervalos parciais é μ ; a cada uma destas divisões corresponde uma soma superior e uma soma inferior e estas somas podem ser consideradas como funções polídromas de μ , $S(\mu)$ e $s(\mu)$ ”. Enunciava e demonstrava então o teorema de Darboux, que estabelece que: a integral superior S_0 é o limite da soma superior $S(\mu)$ quando a máxima amplitude μ tende a zero. Nas mesmas condições, a integral inferior s_0 é o limite da soma inferior $s(\mu)$ quando a máxima amplitude μ tende a zero.

De posse deste teorema, enunciava e demonstrava o critério de integrabilidade de Riemann, apresentava alguns teoremas gerais sobre as integrais, discutia a integrabilidade de funções contínuas e monótonas, abordava o Primeiro Teorema da Média e então chegava ao tópico A Integral Considerada como Função do seu Extremo Superior e o Teorema de Barrow. Afirmava que:

Examinaremos outra dependência, que tem importância fundamental para todo o Cálculo Integral. Seja $f(x)$ uma função integrável em todo o intervalo $[a, b]$; sabemos que neste caso dado qualquer ponto x do intervalo $[a, b]$ está perfeitamente determinada a integral

$$(1) \quad \int_a^x f(t)dt = F(x)$$

em que para maior clareza designamos com t a variável de integração. $F(x)$ é portanto uma função monódroma definida em todo o intervalo $[a, b]$. Por definição (§ 4, (3)) esta função se anula para $x = a$, isto é, $F(a) = 0$. (Ibid., sem numeração de páginas – grifos do autor).

Demonstrava então que $F(x)$ é contínua e enunciava o Teorema de Barrow: “se $f(x)$ é contínua em um ponto x_0 então $F(x)$ tem neste ponto uma derivada que é $f(x_0)$ ”. Com base nesse resultado, afirmava que:

Se $f(x)$ é contínua em todo o intervalo $[a, b]$, teremos para todo ponto x desse intervalo

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x). \quad (3)$$

Chama-se função primitiva de uma função $f(x)$, qualquer função cuja derivada seja $f(x)$. Do exposto acima se conclui que a função (1) é uma função primitiva de $f(x)$ em todo intervalo em que $f(x)$ seja contínua. Ora, como vimos no capítulo sobre Derivadas e Diferenciais, quando duas funções têm a mesma derivada em um mesmo intervalo, elas diferem por uma constante, e reciprocamente. Logo, se $\phi(x)$ é uma função primitiva de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, a forma geral das funções primitivas de $f(x)$ será $\phi(x) + C$, sendo C uma constante arbitrária. Em particular se $f(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$ ela admite sempre uma infinidade de funções primitivas dadas pela fórmula:

$$\int_a^x f(t)dt + C \quad (C = \text{constante})$$

Ora, essa observação tem somente importância teórica, pois o cálculo da integral definida segundo a definição é em geral extremamente laborioso. Mas do resultado

obtido se deduz inversamente um meio de determinar a função $F(x)$ e portanto a integral definida

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)$$

Quando se conhece uma função primitiva $\phi(x)$. (Ibid., sem numeração de páginas – grifos do autor).

E então, era demonstrado que:

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a).$$

É desta maneira rigorosa que Fantappiè apresenta nas notas de aula de seu curso o Teorema Fundamental do Cálculo sem, no entanto, citar tal nomenclatura.

Procuramos descrever brevemente a maneira como os conceitos de função, limite, derivada e integral são trabalhados nas notas de aula de Fantappiè para que o leitor deste relatório de pesquisa comece a perceber em que aspectos a abordagem proposta por este matemático para a disciplina de Análise diferia daquilo que era feito nos cursos de Cálculo ministrados no país até então. Percebemos que o objetivo principal do curso de Fantappiè, como era usual na época, era apresentar aos alunos os conceitos fundamentais do Cálculo de maneira já sistematizada, rigorosa e formal; não havia preocupação em dar condições para que os alunos, durante as aulas, participassem ativamente da construção de seu próprio conhecimento e nem de fazer com que eles adquirissem habilidade com as técnicas de cálculo de derivadas e integrais.

Destacamos o quanto este curso de Fantappiè influenciou o ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil. De acordo com Lima (2006, p. 81) “em algumas escolas de nível superior, mesmo sob o nome de Cálculo [e não Análise Matemática], o ensino dessa disciplina passou a seguir os padrões impostos pela comunidade italiana aqui instalada a partir de 1934”. Podemos afirmar que Fantappiè estabeleceu um novo modelo, um padrão que mudou definitivamente o rumo do ensino de tal conteúdo no país.

Foi exatamente por meio deste curso de Fantappiè que, primeiramente, se estabeleceu a ligação, na graduação em Matemática da USP, entre as disciplinas de Cálculo e de Análise. Conforme já foi dito, a disciplina na qual os conceitos fundamentais do Cálculo seriam apresentados aos alunos ingressantes na Matemática nasceu, na verdade, como Análise. Podemos dizer, portanto, que, no ensino, ocorreu um processo contrário ao observado na história do desenvolvimento do Cálculo e da Análise como campos de conhecimento. Enquanto que, historicamente, a busca por uma fundamentação rigorosa das idéias do Cálculo

acabou dando origem a um novo campo, que é a Análise, no curso de Matemática da USP primeiramente estabeleceu-se a disciplina de Análise, que, posteriormente, deu origem a de Cálculo.

Na seção seguinte, veremos como ficou o curso de Análise do primeiro ano da FFCL após Fantappiè voltar para a Itália em 1939 e quais foram as primeiras reformulações sofridas por esta disciplina, em direção a outra efetivamente de Cálculo, a partir do momento em que Omar Catunda, auxiliado por sua assistente Elza Furtado Gomide, se tornou o responsável por ela.

4.4 – A atuação de Catunda e Gomide e o primeiro movimento explícito em direção a uma disciplina efetivamente de Cálculo Diferencial e Integral

Em 1939, Fantappiè retornou à Itália e seu assistente, o professor Catunda, cuja biografia encontra-se nos anexos deste trabalho, assumiu interinamente a cadeira de Análise Matemática. Permaneceu no cargo até 1962, ano em que se aposentou da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP.

De acordo com Lima (2006), neste período Catunda contou com a colaboração de três assistentes: até 1942, Cândido Lima da Silva Dias, que já auxiliava Fantappiè, permaneceu também como seu assistente, sendo, posteriormente, substituído por Edison Farah, que ficou no cargo até 1944. Em 1945, passou a ser auxiliado por Gomide. O papel dos assistentes era, de acordo com o depoimento desta última, dar aulas de exercícios e, frequentemente, ministrar as aulas teóricas no curso do primeiro ano. Nos cursos do segundo e terceiro ano, quem dava as aulas teóricas era o próprio catedrático. Segundo Otero-Garcia (2011, p. 184), a partir de 1942 a disciplina de Análise Matemática passou a ser ministrada apenas no primeiro e no segundo ano da graduação; no terceiro ano, os estudantes cursavam *Análise Superior*, disciplina que estava sob a responsabilidade de outro catedrático. Ainda de acordo com este autor, ao menos no ano de 1943, o esquema das aulas de Análise do primeiro e do segundo ano era o seguinte: os alunos assistiam a três aulas teóricas da disciplina por semana, sendo que cada uma delas tinha duração de uma hora; além disso, tinham, a cada semana, duas aulas de exercícios, durando duas horas cada.

Nesta seção, apresentaremos, inicialmente, alguns dados a respeito do curso ministrado por Catunda no começo da década de 1940, época em que Gomide foi sua aluna em tal disciplina. Em seguida, discutiremos aspectos do curso de Análise ministrado por Gomide que, logo depois de formada, passou a, ainda como assistente de Catunda ministrar as aulas teóricas da disciplina para os alunos do primeiro ano. Foi neste momento que a docente

começou a questionar o fato dos alunos estudarem, diretamente, *Análise Matemática*, sem terem passado, inicialmente, por um curso de Cálculo e procurou, com o passar dos anos, ir redirecionando, neste sentido, a forma de conduzir a disciplina, aproximando-a pouco a pouco de outra, efetivamente, de Cálculo. Tal redirecionamento contou com o apoio do catedrático que parece o ter levado em consideração na redação final de suas apostilas de *Análise Matemática* que passaram a ser editadas a partir de 1952. Conforme veremos, tais apostilas já apresentam algumas características normalmente observadas nos materiais de Cálculo Diferencial e Integral e que, até então, não apareciam, ao menos explicitamente, nas notas de aula dos cursos de *Análise* ministrados na FFCL a que tivemos acesso. Ainda nesta seção, apresentaremos alguns comentários a respeito do livro *Curso de Análise Matemática*, lançado por Catunda em 1962, primeiro manual brasileiro de *Análise* a ser escrito de acordo com o modelo italiano de abordagem da disciplina que foi introduzido no Brasil por Fantappiè em 1934.

Os dados que temos referentes ao curso ministrado por Catunda foram obtidos por meio de um depoimento concedido por sua ex-aluna e ex-assistente, a professora Gomide e por depoimentos de outros ex-alunos do docente publicados em trabalhos realizados por outros pesquisadores. Novamente achamos importante salientar que os dados presentes nos depoimentos talvez não reflitam a maneira como de fato ocorriam as aulas; o que temos disponível são as apropriações que seus alunos fizeram destas.

De acordo com Gomide, que foi aluna de Catunda em 1942, na época em que ela era estudante, a disciplina conduzida por ele era extremamente formal, sem nenhuma preocupação com algoritmos de cálculo e abordando teoremas nada elementares. Segundo seu depoimento,

O curso começava com a construção dos números reais. Isso é uma belíssima construção, mas extremamente elaborada. Eu me lembro muito bem que eu achei uma maravilha a idéia de corte, mas fazer, em um primeiro contato dos alunos com o Cálculo, a definição das operações e de suas propriedades baseada na noção de corte, é uma tragédia! (...) Aquilo passava em cima da cabeça dos alunos... O curso só começava a interessar quando entrava nas noções de derivada e integral. (GOMIDE, entrevista, 2008).

Era de se esperar esta posição de Catunda, já que, ao assumir as aulas da disciplina, ele ainda estava muito envolvido com o estilo de condução de curso de Fantappiè. Conforme perceberemos pelas análises de suas apostilas, que começaram a ser publicadas treze anos depois dele assumir a cátedra de *Análise*, aos poucos o docente foi realizando algumas modificações que, provavelmente, refletiram seu amadurecimento, adquirido por sua

experiência como professor de tal disciplina, em relação aos procedimentos mais adequados para a condução destes cursos e para a abordagem de seus conteúdos específicos. De qualquer forma, salientamos que, assim como acontecia no curso de Fantappiè, o foco das aulas de Catunda também estava na apresentação do conhecimento já pronto e sistematizado para os alunos e não na construção, pelo próprio estudante, dos significados dos principais conceitos do Cálculo.

Conforme destacamos no capítulo 3, em 1946 houve uma reformulação no curso de Matemática da USP, diferenciando de maneira mais efetiva as modalidades Licenciatura e Bacharelado. A partir desta data, aqueles alunos que optassem pelo Bacharelado cursariam os três primeiros anos de graduação juntamente com os alunos da Licenciatura e, em seguida, enquanto estes últimos faziam um ano de disciplinas pedagógicas, os bacharelados cursavam mais um ano de disciplinas matemáticas específicas. Com relação às disciplinas de Análise, Otero-Garcia (2011) destaca que, a partir de então, os alunos cursavam Análise Matemática nos três primeiros anos da graduação (licenciandos e bacharelados) e Análise Superior no quarto ano (apenas bacharelados). Além disso, o autor salienta que entre 1953 e 1959, os estudantes do quarto ano, além de Análise Superior, passaram a cursar também outra disciplina de Análise Matemática.

Uma das personalidades importantes na trajetória do ensino do Cálculo na USP, que iniciou sua carreira em meados da década de 1940, foi Gomide - cuja biografia também se encontra nos anexos deste trabalho – que, em 1945, começou a trabalhar como assistente de Catunda na cadeira de Análise Matemática. No início, sua função era dar aulas de exercícios, mas como ela mesma comentou em entrevista concedida a Vianna (2000),

Não levou muito tempo para que eu pegasse uma turma. Acontece que o Catunda foi fazer um estágio nos Estados Unidos e durante a ausência dele eu e o Lyra pegamos as aulas teóricas. Isso foi talvez no começo da década de 50. Quer dizer que depois de quatro ou cinco anos eu já peguei turmas, e desde então continuei... Eu acho que foi aí, quando ele foi para os Estados Unidos, que eu comecei a pegar aulas teóricas. Esse era o relacionamento comum. No começo o assistente fazia exercícios e estudava; e gradativamente, com o tempo, ele assumiria as aulas também. (...) Eu comecei dando aulas de exercícios de cálculo – o Catunda dava a parte teórica, e eu dava a aula de exercícios como assistente dele. Às vezes eu assistia à aula dele; preparava então os exercícios que eu ia fazer. (VIANNA, 2000, p. 30-33).

No entrevista que nos concedeu, a professora afirmou que, desde que começou a ministrar aulas teóricas de Análise, passou a refletir sobre a possibilidade de dar um direcionamento diferente à disciplina. Na opinião dela, os alunos, ao ingressarem na

universidade, deveriam, primeiramente, assistir a um curso de Cálculo Diferencial e Integral para somente depois cursarem Análise Matemática:

A disciplina de Análise Matemática deveria ser dada depois da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral; primeiramente dar um curso de Cálculo sem crítica e depois fazer a Análise, que é, na verdade, a justificativa, a crítica do Cálculo, com todos os teoremas, a construção dos números reais, etc. Afinal, como os alunos poderiam compreender diretamente a crítica de algo que ainda nem conheciam? (GOMIDE, entrevista, 2008).

Foi neste sentido a mudança de direcionamento que ela começou a buscar, passando, inclusive, a adotar um livro - *A Course of Pure Mathematics* de G. H. Hardy - que, segundo ela “entrava mais diretamente no Cálculo, porque eu achava, exatamente, que a Análise deveria vir depois (...), como acontece hoje em dia. Atualmente, a Análise é dada bem mais tarde no curso de graduação, depois de dois anos de Cálculo, o que eu acho correto.”²⁰. Ainda de acordo com ela, Catunda, que continuava a ser o catedrático da disciplina, lhe deu total liberdade para esta modificação: “insisti com ele que era melhor começar com o Cálculo do que com a Análise e ele concordou. Ele era muito liberal; pouquíssimos professores catedráticos davam aos assistentes a liberdade que ele nos proporcionava”²¹. Convém observar que a concordância de Catunda a essa idéia talvez não tenha sido apenas um gesto de liberdade proporcionada por ele a sua assistente; talvez ele também, a aquela altura de sua carreira profissional, achasse essa idéia interessante, tanto é que, em suas apostilas, que começaram a ser editadas exatamente na época em que Gomide estava dando começando sua carreira de docente, já podemos destacar, como veremos ainda nesta seção, a presença de alguns elementos que dão indícios de que ele também achava necessário um redirecionamento da disciplina.

D’Ambrosio, aluno de Gomide na disciplina de Análise no ano de 1951, comentou em seu depoimento a respeito das diferenças entre os cursos ministrados por ela e por Catunda, afirmando que, na época em que este último ainda era professor do primeiro ano, a disciplina era dada de acordo com o “modelo do Fantappiè e já começava com todo o rigor. (...). Era complicado. Então eles tomaram essa decisão de quebrar o curso em uma parte que seria a introdução cobrindo tudo e outra parte que seria a Análise vista sob um ponto de vista mais rigoroso”²². Com relação ao curso de Gomide, D’Ambrosio disse o seguinte:

²⁰ GOMIDE (2008).

²¹ GOMIDE (2008).

²² D’AMBROSIO (2009).

Ela dava o curso do primeiro ano, que era um curso geral (...): uma variável, várias variáveis, integral, derivada, um pouquinho de equações diferenciais, enfim, cobria tudo. Era um curso rigoroso, mas com um rigor que hoje eu classificaria como moderado. (...) Neste curso, toda a parte do que hoje é chamado Cálculo era coberta e já tínhamos uma introdução à Análise, que começava de fato, e aí era pesada, no segundo ano em uma disciplina chamada Análise II. Quem dava os cursos de Análise do segundo e do terceiro ano era o professor Catunda. Ele começava de novo, mas aí mais rigoroso: casos mais gerais, mais pesados e não se preocupava muito com a parte de cálculo; era mais conceitual. (D'AMBROSIO, entrevista, 2009).

Este mesmo docente destacou, no entanto, que, em 1951, embora Gomide possivelmente já tivesse começado a refletir a respeito da necessidade de aproximar o curso do primeiro ano do Cálculo, ele ainda continuava mais próximo da Análise. Por exemplo, os exercícios que resolviam ainda eram de Análise; diferentemente do que acontecia nas aulas da Poli, por exemplo, em que eram propostos, segundo D'Ambrosio, exercícios e problemas típicos do Cálculo Diferencial e Integral.

Em 1997, durante o 2º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática e Seminário Nacional de História da Matemática, em uma sessão especial intitulada “Memórias Vivas”, D'Ambrosio foi convidado a entrevistar as professoras Maria Laura Leite Lopes e Gomide e, nesta ocasião, ele lembrou a época em que era aluno dessa última:

Eu lembro, quando comecei meu curso na Faculdade de Filosofia (...) de minha professora, Elza Gomide. Ela era responsável pela principal disciplina de todo o curso de matemática; era o curso de Análise no primeiro ano. Deste curso eu tenho as melhores recordações... Todo mundo gosta de guardar coisas... eu tenho aqui uma jóia que guardei daquele tempo... Eu tenho aqui 200 fichas que são o curso de Análise Matemática dado pela Elza e eu não quero privar vocês de ter uma vaga idéia de como era esse curso. (...) Esse era o conteúdo: conjuntos reais, números inteiros e naturais e logo em seguida o axioma da indução completa (...). As aulas continuavam e uma semana depois a gente já estava falando no Teorema de Weierstrass... (GOMIDE & LOPES, 1997, p. 95).

Essa declaração de D'Ambrosio a respeito das aulas de Gomide deixa bastante claro que o curso dado por ela ainda era efetivamente de Análise, e não de Cálculo. A própria docente, nesta mesma ocasião, comentou, de forma bem humorada, a respeito da disciplina que ministrou na época em que D'Ambrosio era seu aluno:

Eu estava olhando boquiaberta para o que eu dava para o Ubiratan, agora realmente não há mais condições... Eu não sei se aquilo estava certo ou estava errado, mas - enfim - era uma coisa adequada para os alunos que a gente tinha na época, o Ubiratan sobreviveu, e outros certamente... Mas hoje, acho que jogariam ovos podres na gente se tentássemos fazer uma coisa daquelas, não posso nem imaginar. Eu mesma tinha esquecido o que eu fazia com os alunos naquele tempo. (Ibid, p. 100).

Durante as aulas de Gomide, os estudantes costumavam tomar nota do que ela apresentava na lousa e, para os momentos de estudos, a professora indicava alguns livros, dentre os quais estavam, de acordo com as entrevistas de D'Ambrosio e Guidorizzi, as apostilas de Análise Matemática de Catunda, *Lezioni di Analisi* de F. Severi, *Differential and Integral Calculus* de R. Courant e *A Course of Pure Mathematics* de G. H. Hardy, a respeito do qual daremos mais detalhes ao longo deste trabalho.

Na época em que era aluno deste curso de Gomide, D'Ambrosio, produziu fichas com as anotações das aulas que assistiu e estas estão separadas em duas partes, sendo que a primeira trata das funções de uma variável e a segunda de funções de mais de uma variável. Nos arquivos do GHEMAT – Grupo de História da Educação Matemática no Brasil ²³ – tivemos acesso a essas fichas que nos dão informações a respeito de como a disciplina foi conduzida no ano de 1951. É importante destacar que tais fichas se constituem por notas de aula de um aluno do curso e, portanto, não podem ser consideradas como um retrato perfeito da forma como as aulas eram, de fato, conduzidas; são apropriações de D'Ambrosio para aquele conteúdo que Gomide estava apresentando naquele ano. Além disso, tal material pode não refletir a maneira como os conceitos eram abordados pela mesma docente em outros anos; essas notas nos dão uma descrição apenas do que foi feito em 1951. Outra observação que deve ser feita é que, naquela época, os alunos tinham, em cada disciplina, um docente responsável pelas aulas teóricas e outro pelas aulas de exercícios. As fichas de D'Ambrosio são referentes apenas às aulas de teoria e, portanto, alguns elementos que, nestas ocasiões não eram trabalhados, talvez fossem abordados nas aulas de exercícios.

Segundo o que pudemos perceber, na primeira disciplina de Análise que os alunos cursaram ao ingressar na graduação em Matemática no ano de 1951, foram abordados os seguintes assuntos:

1º semestre:

- Introdução aos conjuntos numéricos, axioma da indução finita, axioma de Arquimedes, classes, permutações, cortes de Dedekind, valor absoluto, números reais, conjunto linear, limites e extremos de conjuntos, intervalo, entorno, ponto de acumulação;

²³ Maiores informações a respeito deste grupo podem ser obtidas em <http://www.unifesp.br/centros/ghemat/> - último acesso em 23 de fevereiro de 2011.

- Função, gráfico, função inversa, sucessão, limites de funções, continuidade, funções monótonas, teoremas dos intervalos encaixantes, teorema de Weierstrass, o número e (abordado por meio da idéia de limite);
- Definição de derivada, interpretação geométrica, regras de derivação, regra da cadeia, derivada de função inversa, cálculos de derivadas via definição, infinitésimos, diferencial, aplicações da derivada (máximos e mínimos, teorema de Rolle, intervalos de crescimento e decrescimento);
- Regra de L'Hospital para infinitésimos, Fórmula de Taylor e aplicações (máximos e mínimos), contato de curvas planas (curvatura, evoluta), regras de L'Hospital para limites;
- Integrais indefinidas, fórmulas/tabelas de integrais, propriedades das integrais, integração por partes, integração por substituição, integração de funções racionais, integração de funções irracionais, integração de funções binomiais, integrais abelianas, integração de funções transcendentais (exponencial), integração de funções trigonométricas;
- Funções hiperbólicas, gráfico de funções hiperbólicas.

2º semestre:

- Integrais definidas (conceito segundo Riemann), cálculo de áreas, teorema de Darboux, condição de integrabilidade (critério de Riemann), propriedades das integrais, continuidade uniforme, teorema de Heine, integrabilidade de funções monótonas limitadas, teoremas de Média, integral como função de seu extremo superior, integrais impróprias, critério de convergência de integrais impróprias;
- Funções de várias variáveis (definição, domínio, imagem, limite, continuidade, diferenciação, integração);
- Aplicações geométricas de integrais simples (comprimento de arco);
- Equações diferenciais: 1ª ordem, homogêneas, Bernoulli, Ricatti, 2ª ordem.

Com base nas fichas, percebemos que, embora Gomide, em seu depoimento, tenha se mostrado contrária a iniciar o curso com a idéia de cortes, como fazia Catunda, ela mesma, pelo menos em 1951, acabou repetindo esse modelo. Apesar de, quando aluna, ter percebido que o curso só começava a interessar, de fato, aos estudantes, a partir das noções de derivada e integral, quando se tornou professora, pelo menos a princípio, continuou iniciando-o por meio de um tratamento rigoroso e completo dos números e suas operações. Além disso, mesmo tendo afirmado que, desde que começou a dar aula, procurou aproximar a disciplina

do Cálculo, percebemos que isto ainda não era algo evidente nos primeiros cursos ministrados por ela; provavelmente essa aproximação foi um processo lento e gradual. No ano de 1951, seu curso continuava englobando diversos assuntos que, atualmente, são deixados para a disciplina de Análise, como, por exemplo, os cortes de Dedekind, teorema de Weierstrass, teorema dos intervalos encaixantes, continuidade uniforme, dentre outros.

Vejamos então de que forma Gomide apresentava os conceitos de função, limite, derivada e integral neste seu curso de 1951.

O conceito de função era apresentado de maneira praticamente idêntica à feita por Fantappiè. A única diferença que percebemos é que Gomide, antes de apresentar, de fato, a definição de função, apresentava, ainda que de maneira breve, uma idéia do significado do termo variável: “considerado um conjunto linear C diz-se que x é uma variável em C quando pode tomar os valores de C ” (D’AMBROSIO, 1951, ficha 9). O conceito de limite era abordado da seguinte forma:

Seja $y = f(x)$ definida em C e seja a ponto de acumulação de C . Diz-se que o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ quando fixado um entorno arbitrário de l (β), pode-se determinar um entorno α de a tal que $x \in \alpha$ e $x \in C$, $x \neq a$, $f(x) \in \beta$. Sendo a e l finitos (...) tem-se: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, $x \in C$ se fixados arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ seja também $|f(x) - l| < \varepsilon$. $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = l$ quando pode ser determinado, fixado um entorno β de l , um entorno α à esquerda de a tal que para $x \in \alpha$, $x \neq a$ corresponda valores de $y \in \beta$. $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = l$ lê-se para x tendendo a a pela esquerda. Analogamente para o limite (...) quando $x \rightarrow a$ pela direita. No caso de estes limites serem diferentes, o limite da função no ponto não existe. (Ibid., ficha 11).

Isso tudo, ao menos nas aulas teóricas, era apresentado sem qualquer exemplo de técnicas de cálculos de limites de uma determinada função $f(x)$ quando x tende para um dado valor. Os poucos exemplos presentes nas fichas que tratam deste conteúdo são, na verdade, demonstrações, envolvendo epsilons e deltas, de alguns limites. Não há na exposição da teoria, ao menos explicitamente, nenhuma preocupação com a manipulação do conceito.

No que diz respeito à noção de derivada, com base no que pudemos observar nas fichas, percebemos que ela era introduzida de forma idêntica à feita por Fantappiè e notamos que Gomide, antes de apresentar qualquer exemplo de cálculo, seja por meio da definição ou por meio de alguma regra, imediatamente após a definição de tal ente matemático, já enuncia e demonstra o teorema que diz que toda função derivável em um ponto é contínua no mesmo. Após tal resultado, comenta, de maneira bastante sucinta, a respeito da interpretação geométrica da derivada, mais uma vez sem apresentar exemplos. Em seguida, apresenta e demonstra as principais regras de diferenciação e, outra vez, não são apresentados exemplos

do cálculo de derivadas por tais regras, confirmando que, ao menos durante as aulas teóricas, não era dada nenhuma ênfase a esta parte algorítmica do Cálculo. Antes de apresentar o teorema de Rolle, trabalhava, como uma das aplicações da derivada, com a idéia de máximos e mínimos de funções em intervalos fechados, mas sem apresentar o cálculo de nenhum ponto de máximo ou de mínimo ou mesmo algum problema envolvendo tal idéia. De acordo com as fichas, Gomide apenas apresentava, de maneira teórica, os conceitos de valor máximo e valor mínimo. O mesmo tipo de tratamento era dado a outra aplicação da derivada: a determinação dos intervalos de crescimento e decrescimento de uma função. Dizia-se qual a relação existente entre o sinal da derivada primeira de uma função e os intervalos nos quais tal função é crescente ou decrescente, mas nenhum exemplo era trabalhado. Ainda na abordagem do conceito de derivada, apresentava as fórmulas de Taylor e de Mac Laurin, uma aplicação para elas (novamente a idéia de determinar máximos e mínimos e, mais uma vez, trabalhada apenas de maneira teórica) e as regras de L'Hospital para o cálculo de limites que, embora bastante úteis na estimativa de limites indeterminados, eram, ao menos nas aulas teóricas, somente enunciadas e demonstradas, sem qualquer ilustração de sua funcionalidade, de sua aplicação prática.

Com relação ao conceito de integral, Gomide iniciava sua exposição por meio da idéia de integral indefinida e de primitiva:

Propõe-se o seguinte problema: dado $f(x)$, determinar uma função $F(x)$ cuja derivada coincida com $f(x)$. Temos então $DF(x) = f(x)$; então $F(x)$ diz-se primitiva de $f(x)$. Se existe $F(x)$, primitiva de $f(x)$, existe uma infinidade de primitivas; acrescentando à $F(x)$ constantes arbitrárias temos todas as primitivas de $f(x)$. (...) Indica-se uma família de todas as primitivas de $f(x)$ com o símbolo $\int f(x)dx = F(x) + C$, integral indefinida de $f(x)$. (Ibid., ficha 50).

Na sequência, com o intuito de exemplificar o que havia sido trabalhado, apresentava as integrais indefinidas de algumas funções, utilizando, para isso, as regras de diferenciação enunciadas anteriormente. Em seguida, enunciava e demonstrava algumas propriedades das integrais e passava a trabalhar com as técnicas de integração, sempre ilustradas por meio de um exemplo de cálculo. Percebemos que é exatamente no tratamento das integrais indefinidas que se concentra o maior número de exemplos presentes nas notas do curso ministrado em 1951 por Gomide.

Mais adiante, depois de ter apresentado e exemplificado cada uma das técnicas de integração e de ter trabalhado com as integrais abelianas, integração de funções transcendentais e trigonométricas e com as funções hiperbólicas e seus gráficos, introduzia,

por meio da noção de área e das idéias de partições, somas inferiores, somas superiores, integral inferior e integral superior, a idéia de integral definida. Afirmava que, sendo s_0 a integral inferior de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ e S_0 a integral superior dessa mesma função nesse intervalo, “precisamos demonstrar que para qualquer função vale $s_0 \leq S_0$ e para funções contínuas elas coincidem (...). Caso $s_0 = S_0$ a função diz-se integrável em $[a, b]$ e indica-se com $\int_a^b f(x)dx = s_0 = S_0$ ” (Ibid., ficha 77). Em seguida, apresentava a idéia de refinamento de partição e de oscilação da função em um dado intervalo e, posteriormente, apresentava uma condição necessária e suficiente para que uma função definida em um intervalo fechado fosse integrável, enunciava e demonstrava mais algumas propriedades das integrais e, dando prosseguimento ao curso, abordava a integral como função de seu extremo superior:

Seja $f(x)$ definida, limitada e integrável em $[a, b]$. Então $\int_a^b f(x)dx$ é um número bem determinado em correspondência com $f(x)$. A variável x é um número do qual não depende a integral; esta depende do intervalo e da função. Então $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$. Se a função é integrável em $[a, b]$, tomado c interno, existe $\int_a^c f(t)dt$ para c qualquer. Mas f é dada, a é fixado, então a integral depende de c . Façamos c percorrer $[a, b]$ e chamemos esta variável x ($\equiv c$). Então teremos uma nova função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, definida em $[a, b]$, isto é, função do extremo superior do intervalo de integração. Estudaremos algumas propriedades de $F(x)$: $F(a) = 0$; $F(b) = \int_a^b f(t)dt$. (Ibid., fichas 92-93).

Em seguida, Gomide enunciava e demonstrava que $F(x)$ é contínua em $[a, b]$ e o teorema de Barrow, que diz que “se $f(x)$ é contínua, $F(x)$ é derivável e $F'(x) = f(x)$ ”. (Ibid., ficha 93). E então, com base em tal teorema apresentava o processo prático para o cálculo de integrais definidas:

Seja $f(x)$ definida, limitada e contínua em $[a, b]$. Seja $\phi(x)$ uma sua primitiva e sabemos que existe a integral definida de $f(x)$ em $[a, b]$. Então, $\phi(x) = \int f(x)dx$; $F(x) = \int_a^x f(t)dt$; $F(x) = \phi(x) + C$. Fazendo $x = a$, $F(a) = 0 = \phi(a) + C$ $\therefore C = -\phi(a)$. $\therefore F(x) = \int_a^x f(t)dt = \phi(x) - \phi(a)$ e daí $\int_a^b f(t)dt = \phi(b) - \phi(a)$. (Ibid., ficha 94).

E, então ilustrava essa discussão apresentado um único exemplo, o cálculo de $\int_0^{\pi/2} \sen x dx$.

Era desta forma que os conceitos fundamentais do Cálculo eram apresentados neste curso ministrado por Gomide em 1951. Embora tal professora tenha dito em seu depoimento que o ideal seria o aluno primeiramente passar por uma disciplina de Cálculo, mais manipulativa e menos crítica para, posteriormente, estudar Análise, percebemos que, em 1951, a orientação dada por Gomide ao seu curso ainda era totalmente analítica. A grande

ênfase continuava sendo a apresentação rigorosa e formal dos resultados; os exemplos de cálculos eram raríssimos e estavam presentes quase que exclusivamente na parte do curso que tratava das técnicas de integração. No entanto, a abordagem proposta pelo livro indicado como uma das referências da disciplina, a saber, *A Course of Pure Mathematics* de G. H. Hardy, escolhido, de acordo com Gomide por entrar mais diretamente no Cálculo, de fato já está mais próxima dele, apesar de abordar ainda grande parte de um conteúdo que, atualmente, só é trabalhado em cursos de Análise. Essa afirmação ficará mais evidente ao analisarmos tal manual, nos capítulos seguintes deste trabalho, que tratarão do rigor e das preocupações didáticas observadas nos cursos analisados.

Em resumo, analisando as fichas de D'Ambrosio, pudemos perceber que nas aulas teóricas de Gomide do ano de 1951 o foco não estava nem na manipulação das técnicas de Cálculo e nem na efetiva construção dos significados das idéias fundamentais deste ramo da Matemática. A ênfase era a apresentação formal do conteúdo já sistematizado. Não havia a preocupação com um aprendizado progressivo até que o aluno estivesse motivado o suficiente e pronto para a rigorização; tudo já era apresentado com alto nível de rigor desde o princípio. O conteúdo era abordado de acordo com a sequência de Cauchy-Weierstrass, com o conceito de limite, trabalhado de maneira formal, embasando toda a disciplina.

Na trajetória do curso de Matemática da USP, Gomide foi umas das primeiras pessoas a questionarem de que forma deveria ser um curso inicial de Cálculo e em quais aspectos ele deveria ser diferente de um de Análise. De acordo com o que pudemos perceber por seu depoimento, para ela, o aluno deveria, ao ingressar na universidade, passar por um curso no qual fosse apresentado aos conceitos e idéias fundamentais do Cálculo, de maneira menos crítica e mais manipulativa para que, posteriormente, na Análise, revisitasse tais idéias e conceitos por meio de uma abordagem mais crítica que, aí sim, faria sentido pelo fato do aluno já possuir conhecimentos a respeito do objeto a ser criticado. No entanto, é interessante destacar que, Gomide, ao menos neste primeiro momento, não parece ter se preocupado em criar um curso inicial de Cálculo voltado para ele mesmo. Ao demonstrar preocupações com as dificuldades enfrentadas pelo aluno ao cursar diretamente Análise Matemática e defender que este deveria inicialmente passar por uma disciplina de Cálculo, já que, em suas palavras “a Análise (...) é, na verdade, a justificativa, a crítica do Cálculo”²⁴, a impressão que nos fica é a de que, talvez, uma das funções principais do Cálculo, em sua visão, seria fornecer os pré-requisitos necessários para que o estudante pudesse acompanhar, de forma mais eficiente, o

²⁴ GOMIDE (2008)

curso de Análise. Somos então levados a concluir que, na graduação em Matemática da USP, a disciplina de Cálculo já esteve subordinada à de Análise desde o momento que antecedeu sua efetiva criação, desde quando se passou a discutir a necessidade de incluir tal disciplina no currículo do curso em questão.

Conforme já destacamos, Catunda, que continuava sendo o responsável pela cátedra de Análise Matemática não se opôs a idéia de Gomide de aproximar a disciplina do primeiro ano de um curso efetivamente de Cálculo. Também já argumentamos que, talvez, o catedrático tenha assumido tal posição por concordar com esta idéia e essa parece ser uma hipótese bastante plausível se analisarmos as apostilas escritas por ele que começaram a ser editadas em 1952. É neste material que percebemos, pela primeira vez, de maneira explícita, um esforço em redirecionar a abordagem dos conteúdos trabalhados na disciplina, em aproximá-la, de fato, do Cálculo, de um tratamento, inicialmente, mais manipulativo e menos abstrato. Conjecturamos ainda que, provavelmente, as reformulações propostas por Gomide ao assumir as aulas teóricas do primeiro ano, tenham sido colocadas em prática aos poucos. Não foi um processo que começou e terminou assim que a docente começou a lecionar; mesmo os cursos conduzidos por ela, inicialmente, continuavam apresentando uma abordagem essencialmente analítica. O redirecionamento na forma de apresentar aos alunos do primeiro ano os conceitos fundamentais do Cálculo se deu de forma lenta e gradual e, neste processo, talvez a redação das apostilas de Catunda tenha sido um dos primeiros frutos das reflexões iniciadas por Gomide. Talvez estas idéias da docente tenham tido alguma influência na organização final das apostilas de Catunda; ou, ainda, por outro lado, podem ter sido estas primeiras alterações propostas por Catunda em seus materiais que tenham levado Gomide a refletir a respeito da necessidade de introduzir uma disciplina de Cálculo, no currículo do curso de Matemática, antes daquela de Análise que havia até então. É possível que este material tenha sido escrito de forma a auxiliar docentes e alunos na condução da disciplina de acordo com esta nova orientação que estava sendo discutida, naquele momento, na Seção de Matemática, pelos envolvidos no processo de ensino de Análise. Para que estas considerações fiquem mais claras para o leitor, apresentaremos, na sequência, alguns comentários sobre tais apostilas, mas, inicialmente, é preciso que tenhamos em mente que elas não nos dão um retrato fiel das aulas deste docente; apesar destes materiais terem sido escritos pelo próprio Catunda, um texto sempre difere de uma aula. No entanto, seguramente, suas análises nos dão pistas importantes do tipo de abordagem do conteúdo feita pelo professor, de suas convicções, de suas escolhas e de suas preocupações didáticas.

De acordo com o prefácio do 1º volume das apostilas, a abordagem adotada no material ainda era bastante parecida com aquela proposta por Fantappiè: “em suas linhas gerais, o curso segue ainda a orientação daquele professor (Fantappiè)” (CATUNDA, 1952, 1º volume). Percebe-se, no entanto, uma preocupação em não somente reproduzir aquilo que era feito anteriormente, sem nenhuma crítica; havia a intenção de aperfeiçoar o curso, revendo o que dificultava o entendimento dos alunos, idéia que pode ser percebida pelas palavras do autor presentes ainda neste prefácio, em que afirma que procurou, sempre que possível, aproximar a Análise da intuição geométrica e em simplificar demonstrações, sem, com isso, prejudicar o rigor com que os conceitos são tratados, visando se afastar do caráter excessivamente abstrato que Fantappiè havia dado ao curso. A nosso ver, este é um dos indícios de que Catunda, assim como Gomide, também era favorável a um redirecionamento da disciplina.

Uma primeira grande diferença que pode ser destacada entre as notas de aula de Fantappiè e as apostilas de Catunda é que estas últimas trazem ao final de cada capítulo uma seção chamada de exercícios e complementos, na qual são propostos ao leitor exercícios teóricos envolvendo demonstrações e exercícios de aplicação dos algoritmos de cálculo abordados no decorrer do capítulo. As notas de Fantappiè, por sua vez, não traziam nenhum exercício. Percebe-se, portanto, que agora já havia uma preocupação maior em trabalhar com exercícios envolvendo técnicas de derivação e integração, ou seja, com a manipulação dos conceitos vistos e não somente como a sistematização e formalização dos mesmos.

Com relação à forma como os conceitos fundamentais do Cálculo são abordados em tais apostilas, percebemos que as apresentações de função, limite e derivada são praticamente idênticas àsquelas presentes nas notas de aula de Fantappiè. Os exercícios referentes a limites e funções são, em sua grande maioria, todos teóricos; há apenas um, tratando do domínio de funções, de caráter mais prático, mais de cálculo. Já os exercícios propostos no capítulo tratando de derivadas são quase que exclusivamente de cálculos; questões como derivar funções, calcular limites por meio da regra de L'Hospital, esboçar gráficos e escrever funções por meio da Fórmula de Maclaurin, mostrando que, nestas apostilas, ao contrário do que acontecia até então, já havia assuntos em que, nos exercícios, a manipulação é que predominava. No que diz respeito ao conceito de integral, a abordagem se inicia de forma diferente: enquanto Fantappiè introduz o conceito por meio das idéias de Darboux de soma superior e soma inferior, apresentando as integrais de Riemann, para depois falar em primitiva e integral indefinida, Catunda faz o contrário: inicia a abordagem do assunto por meio da

idéia de primitiva e de integral indefinida para, posteriormente, tratar do tema por meio das somas superiores e inferiores de Darboux e chegar ao conceito de integral de Riemann.

É interessante destacar o seguinte comentário, feito por Catunda, relacionando as duas abordagens do conceito de integral trabalhadas por ele:

Vemos assim que toda função contínua em um intervalo tem uma primitiva, e portanto tem também uma infinidade de primitivas dependendo de uma constante aditiva arbitrária. A primitiva particular que é a integral de Riemann estendida ao intervalo $[a, x]$ coincide assim com aquela que foi definida no § 2, e que se anula para $x = a$. Mas enquanto que naquele parágrafo partimos da hipótese da existência de uma primitiva particular, nós temos agora a existência assegurada, pois já demonstramos a integrabilidade das funções contínuas. Pode-se mesmo usar a definição da integral de Riemann como processo para construir a primitiva de uma função contínua; no entanto, é claro que esse processo é bastante complexo e só daria resultado (...) em casos que se estudam muito mais facilmente pelos processos de integração já expostos atrás. Muito mais comum é o cálculo de integrais de Riemann, interpretadas como áreas, momentos, momentos de inércia, etc, por meio da fórmula fundamental do cálculo integral (1) do § 2. (Ibid., p. 59).

Tal comentário nos levou a conjecturar que, é possível que a opção de Catunda por iniciar sua abordagem de integral por meio da idéia de integração como operação inversa da diferenciação tenha sido motivada pelo fato dele, talvez, considerar que os alunos, antes de se preocuparem com aprofundamentos teóricos a respeito dos conceitos que estão aprendendo, devem trabalhar com tais conceitos de maneira mais prática; primeiramente manipularem as técnicas de cálculo para depois tentarem compreender a formalização teórica daquilo que está sendo estudado. Talvez – e isto, como já dissemos, é uma conjectura nossa – tenha sido esta a razão pela qual Catunda tenha preferido alterar a ordem com que o conceito de integral é abordado. Esta nossa hipótese é reforçada pelo fato do docente, nessas apostilas, após apresentar a idéia de integral como inversa da derivada, já partir diretamente para o cálculo de áreas e para a determinação de primitivas por meio de processos elementares de integração; somente após vários exemplos de cálculos de integrais é que se preocupa com a formalização da noção de integral por meio das idéias de Riemann. Diz, inclusive, explicitamente em seu texto, que o que será feito na apresentação de integral de Riemann é uma apresentação rigorosa do conceito visto até então de forma mais intuitiva por meio da noção de área: “até aqui, temos considerado a integração como operação inversa da diferenciação, mostrando as regras mais importantes para o Cálculo das integrais das funções. (...) No entanto, a apresentação rigorosa desse conceito, (...), só foi dada por Cauchy e mais tarde por Riemann, em meados do século passado”.

É possível que esta alteração de ordem seja outro indício da existência de um processo de redirecionamento da disciplina de Análise Matemática rumo à outra efetivamente de Cálculo Diferencial e Integral. Conforme veremos, ainda neste tratamento do conceito de integral, há outros elementos que nos dão pistas deste início de processo de mudanças, outras características que reforçam nossa conjectura.

Destacamos ainda que Catunda acrescenta em suas notas de aula aspectos não abordados por Fantappiè ou que, apesar de trabalhados, não eram enfatizados por este último. Por exemplo, após tratar da integrabilidade de funções contínuas em intervalos fechados, acrescenta um critério de integrabilidade que Fantappiè apenas citava, sem grande destaque, e que, em suas apostilas, dá título a uma seção do capítulo referente à integração: *o critério de integrabilidade de Jordan*, que garante que uma função limitada em um intervalo fechado $[a, b]$ ainda é Riemann-integrável se o conjunto de seus pontos de descontinuidade tiver medida nula²⁵. Com relação aos tópicos abordados por Catunda que não são trabalhados por Fantappiè, identificamos os seguintes: funções de variação limitada, Segundo Teorema da Média (ou teorema de Bonnet), critérios de Bertrand e Integral de Stieltjes (tratada por Catunda como uma generalização da noção de integral de Riemann).

Também merece destaque a inclusão, nas apostilas, do tópico *Comprimento de um Arco*, que até então, aparentemente, não era trabalhado no curso de Análise Matemática da USP e que, atualmente, é uma das aplicações da integral bastante trabalhadas nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. É mais um indício de que, aos poucos, a disciplina ia adquirindo características mais próximas daquelas presentes, atualmente, no curso introdutório de Cálculo, embora, simultaneamente a isso, houvesse também novidades de grande complexidade como, por exemplo, a noção de integral de Stieltjes.

Salientamos ainda a presença nos exercícios propostos no final do capítulo, de outros exemplos de aplicação do conceito de integral que atualmente são muito trabalhados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e que, até então, ao menos nas notas de Fantappiè e nas fichas produzidas por D'Ambrosio em 1951 com base nas aulas de Gomide, não apareciam na disciplina de Análise Matemática. Com relação a estas aplicações, o item número 13 da seção exercícios e complementos deste capítulo tratando da integral traz o seguinte:

²⁵ Convém destacar que este resultado que Catunda, em suas apostilas, chama de *Critério de Integrabilidade de Jordan* normalmente aparece nos manuais de Análise com o nome de *Critério de Lebesgue*.

Nas aplicações do cálculo integral à Geometria e à Física, o primeiro problema que se tem de resolver é o de achar o elemento de integração. Desde que a função a integrar seja contínua, não há inconveniente em raciocinar na base de infinitésimos de primeira ordem, afim de formar a expressão da diferencial $f(x)dx$. Assim, para calcular a área limitada por uma curva contínua $y = f(x)$ e o eixo Ox , o elemento de integração é representado pelo retângulo de base dx e altura $f(x)$, o que dá o elemento de área ydx ou $f(x)dx$. Para calcular o momento da mesma curva em relação ao eixo Ox , o elemento de integração é o produto do elemento de arco pela distância desse elemento ao eixo, isto é, $f(x)ds$. O momento de área se obtém multiplicando o elemento de área ydx pela distância, ao eixo Ox , do centro de gravidade do mesmo elemento, o que dá o momento de área elementar $\frac{1}{2}y^2dx$. O momento de inércia do elemento de arco ds relativo ao mesmo eixo é y^2ds e, integrando esta expressão, obtemos o momento de inércia de toda a curva. Assim também se podem calcular volumes que dependam de uma única variável, como os volumes limitados por uma superfície de revolução, por um plano fixo perpendicular ao eixo e por outro plano variável paralelo ao primeiro. Chamando x a distância e $r = r(x)$ o raio da secção pelo plano variável, o elemento de volume é o volume do cilindro de base πr^2 e altura dx e, portanto, o volume todo é dado pela integral $\pi \int r^2 dx$. Em vista da invariância da primeira diferencial, é claro que podemos exprimir todos esses elementos de integração escolhendo de maneira mais conveniente a variável independente. (Ibid., p. 88).

Por meio desta última citação, Catunda apresenta fórmulas que permitirão ao leitor de suas apostilas aplicarem a noção de integral em cálculos que aparecem em situações práticas ou da própria Matemática. E este tipo de fórmula não aparecia, pelo menos de maneira explícita, nas notas de aula de Fantappiè e nem nas fichas de D'Ambrosio; estes cursos se detinham quase que exclusivamente na formalização dos resultados apresentados, sem qualquer preocupação com as aplicações dos mesmos. Voltamos a destacar que a impressão que nos fica, principalmente devido à forma com que o conceito de integral é trabalhado e aos tipos de exercícios propostos a respeito de derivadas, é que, pouco a pouco, Catunda foi tentando dar ao seu curso do primeiro ano um caráter mais prático, mais voltado à manipulação dos conceitos do que a formalização teórica, característica esta mais comumente presente nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral do que nas de Análise Matemática. E esta intenção é revelada pelo próprio Catunda no prefácio do 1º volume de tais apostilas:

No primeiro ano da Faculdade (de Filosofia, Ciências e Letras), o curso tem um caráter mais prático, dando-lhe, além das definições de limites e os teoremas mais elementares, toda a parte algorítmica de derivação e integração das funções elementares, de uma ou mais variáveis, as aplicações geométricas, o cálculo de integrais duplas e os tipos elementares de equações diferenciais lineares. No segundo ano retomamos o curso, expondo a teoria dos campos de números e os teoremas mais delicados contidos no Capítulo IV – De Borel-Lebesgue, de Weierstrass, de Heine e o critério de convergência de Cauchy; segue-se o estudo das séries numéricas e de funções, de integrais múltiplas e os teoremas de existência das equações diferenciais. (CATUNDA, 1952, 1º volume).

É preciso frisar, no entanto, que apesar desta idéia de que o curso do primeiro ano deveria ter um caráter mais prático, os conceitos continuavam sendo apresentados de maneira extremamente rigorosa e formal. De qualquer maneira já havia, em nossa percepção, alguma mudança no encaminhamento da disciplina; indícios de que, pouco a pouco, ela estava sendo redirecionada. E, provavelmente, esta idéia tenha sido incorporada paulatinamente aos cursos da disciplina ministrados a partir dos primeiros anos da década de 1950 pelo próprio Catunda, por Gomide e posteriormente por outros docentes. Em 1951, conforme pudemos perceber pela análise das fichas de D'Ambrosio, o curso conduzido por Gomide ainda tinha orientação bastante distante da presente nas disciplinas de Cálculo, sem qualquer preocupação com a manipulação dos conceitos estudados, mas, em 1958, de acordo com o professor Hamilton Luiz Guidorizzi, que, neste ano, foi aluno da professora em Análise Matemática, a situação já era um pouco diferente: “não havia a disciplina Cálculo, o que existia era (...) Análise Matemática (...) e esta (...) era (...) dividida em duas partes, sendo a primeira próxima de um curso de Cálculo, dando ênfase à manipulação de fórmulas bem como às demonstrações de alguma delas”²⁶.

Em 1962, após vinte e três anos à frente da cadeira de Análise Matemática da FFCL e depois de editar, com sucesso, apostilas contendo as notas de aula de seus cursos, Catunda publica o primeiro volume de seu livro, intitulado *Curso de Análise Matemática*, e, em seu prefácio, o autor justifica o porquê de escrevê-lo mesmo já tendo divulgado sua abordagem para aquela disciplina por meio das apostilas:

Este curso de Análise Matemática, baseado nas aulas dadas pelo autor na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, do qual sai agora o primeiro volume, tem sido divulgado sob forma de apostilas mimeografadas, ou em outros processos semelhantes. Depois que foi completada a sétima parte, que trata das Funções Analíticas, tendo-se esgotado alguns dos primeiros volumes, decidi o autor elaborar uma nova redação, modificando principalmente a parte conceitual, dando-lhe uma feição mais simples e mais de acordo com a teoria moderna das estruturas. (CATUNDA, 1962 – prefácio)

Percebe-se neste trecho do prefácio certa influência bourbakista na redação do livro, já que Catunda afirma que pretende adequar o curso à teoria moderna das estruturas. Apesar de percebermos essa influência e podermos afirmar que ela é, até certo ponto, esperada devido à convivência deste professor com membros do grupo Bourbaki, destacamos que, de acordo com Pires (2006), a adesão dos professores da FFCL da USP à perspectiva bourbakista não foi unânime. A pesquisadora afirma, inclusive, que Catunda à frente da cadeira de Análise

²⁶ GUIDORIZZI (2010).

Matemática foi um dos que mais resistiram. Na entrevista que nos concedeu, Gomide comentou a respeito da certa resistência de Catunda a essas idéias bourbakistas:

A característica principal do Bourbaki era generalidade, coisa que eu acho que não é nada adequada exatamente para esta linha de Cálculo e Análise, que deve ser muito mais intuitiva e concreta, na medida do possível; tanto quanto a Matemática pode ser. Havia, de fato, na área de Análise, bastante resistência a estas idéias dos bourbakis, particularmente por parte do Catunda, mas, pouco a pouco, elas foram sendo introduzido porque não havia outra saída. A Matemática atual é feita assim. (GOMIDE, entrevista, 2008).

Comparando as apostilas com o livro, percebemos que neste último foram acrescentados mais exercícios propostos, tanto de natureza teórica como prática; notamos também uma libertação da influência explícita de Fantappiè: o nome do matemático italiano já não é mais citado.

Outro aspecto que merece destaque é que no livro aparece explicitamente uma bibliografia. Esta bibliografia se divide em três tipos de obras consultadas: tratados clássicos, obras para a apresentação dos conceitos fundamentais e tratados mais recentes:

Bibliografia

Para a matéria do presente volume foram consultadas as seguintes obras, cuja leitura o autor recomenda:

Tratados clássicos:

E. Goursat – Cours d'Analyse Mathématique – 5. ed. Paris, 1927.
Ch. De La Vallée Poussin – Cours d' Analyse Infinitésimale – 10. ed. Louvain e Paris, 1947.
Wittaker and Watson – A course of Modern Analysis – 4.ed. Cambridge, 1927.
F. Severi – Lezioni di Analisi – Bologna 1933.
Ph. Franklin – A Treatise on Advanced Calculus – New York, 1940.
R. Courant – Differential and Integral Calculus (trad. de McShane) – London, 1960.

Para a apresentação dos conceitos fundamentais:

E. Landau – Grundlagen der Analysis.
Birkhoff and MacLane – A survey of Modern Álgebra – New York, 1941.
Bourbaki – Théorie des Ensembles, Topologie Générale, Fonctions d'une Variable Réelle – Paris.

Tratados mais recentes:

R.C Buck – Advanced Calculus – New York, 1956.
T.M. Apostol – Mathematical Analysis – Reading, Mass. 1957
Nickerson, Spencer and Steenrod – Advanced Calculus – Princeton, 1959.
J. Dieudonné – Foundations of Modern Analysis – New York and London, 1960.
(CATUNDA, 1962)

Lima (2006) traz uma análise de D'Ambrosio com relação a essa bibliografia:

As referências do primeiro bloco (tratados clássicos) (...) correspondem à fonte do livro de Catunda, qual seja, o Curso de Fantappiè. Tais livros (...) estão preocupados em fazer uma análise matemática moderna seguindo o modelo de Cauchy, Jordan e Hadamard. Já as referências do segundo bloco, “refletem a percepção da necessidade de fundamentos rigorosos, seguindo o modelo Bourbaki”. (...) Ubiratan D’Ambrosio complementa dizendo que: “embora o curso do Fantappiè fosse rigoroso, ele partiu de coisas específicas para a análise, recordando os campos numéricos necessários. O pensamento de Bourbaki era ser mais cuidadoso no exame dos fundamentos, daí a importância da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra. Isso sem dúvida teve influência na modernização que o Catunda fez do curso do Fantappiè”. Seguindo a sua linha de raciocínio, (...) coloca que a referência de Catunda ao livro de Birkhoff-MacLane é mais um caso de evidência da modernização do seu livro em relação ao Curso de Fantappiè. (...) Para o último grupo (tratados mais recentes), (...) relata que as obras nesse grupo refletem a influência de jovens que foram fazer doutorado nos Estados Unidos [e] tiveram contato com o que lá se fazia na graduação e assim voltavam ao Brasil (...) “impressionados por uma disciplina que dominava os currículos da matemática nas universidades americanas, chamada “Advanced Calculus”. (...) Foi a partir da volta desses recém-formados doutores que as universidades brasileiras com as suas faculdades de filosofia passaram a se reformular, particularmente os currículos de matemática. Isto acabou por influenciar também os livros de cálculo e de análise matemática produzidos nesta época, cujos reflexos podem ser percebidos no primeiro volume do livro de Catunda de 1962 quando apresenta nele o seu terceiro bloco de obras. (LIMA, 2006, p. 97-99).

Com relação à maneira como os conceitos fundamentais do Cálculo são abordados por Catunda em seu livro, podemos afirmar que a idéia de função é apresentada de maneira análoga àquela presente em suas apostilas e nas notas de aula de Fantappiè. Já a noção de limite é tratada inicialmente de forma intuitiva, provavelmente para que o leitor pudesse compreender, primeiramente, a idéia geral do conceito, sem se preocupar ainda com as notações e formalizações. Depois de apresentar esta abordagem intuitiva, introduz a noção topológica de limite para, em seguida, dar a definição segundo as idéias de Weierstrass de maneira idêntica ao que faz em suas apostilas. A definição de derivada também é apresentada da mesma forma feita nas apostilas.

No que diz respeito à abordagem de integrais, no livro, assim como nas apostilas editadas anteriormente, ela se divide em duas partes: na primeira, a integração é tratada como a operação inversa da diferenciação e, na segunda, o autor aborda o conceito de acordo com o ponto de vista de Riemann e Stieltjes. A maneira como estas duas partes são trabalhadas é análoga àquela que já aparecia nas apostilas.

É interessante notar a presença, no livro de Catunda, de uma seção chamada *Construção de Gráficos* que, como nas disciplinas atuais de Cálculo, visa dar ao aluno resultados teóricos que o permitam esboçar o gráfico de uma função conhecendo suas raízes, estudando suas derivadas (e, conseqüentemente, seus intervalos de crescimento e decrescimento e sua concavidade), assíntotas, pontos de máximos e mínimos, etc. A

introdução deste conteúdo, em nossa opinião, reforça a conjectura que havíamos feito anteriormente de que Catunda, pouco a pouco, procurava dar ao curso de Análise do primeiro ano um caráter mais prático, mais próximo daquilo que é uma disciplina de Cálculo atualmente. E nas publicações que lançou ao longo do tempo em que esteve à frente da cadeira de Análise Matemática, esta intenção foi se tornando cada vez mais explícita.

Os materiais de Análise escritos por Catunda exerceram, durante muito tempo, grande influência no ensino superior brasileiro e comentários a este respeito estão presentes no trabalho de Lima (2006, p. 121). Segundo Ávila, entrevistado pela autora, as apostilas de Catunda foram muito bem aceitas e muito úteis não só para os alunos da FFCL da USP, como também para os alunos do Mackenzie e da PUC. Catunda teve também a seu favor o fato de ter sido pioneiro na publicação de um livro brasileiro de Análise Matemática em conformidade com o rigor imposto na matemática a partir do século XIX:

É então, a partir desse cenário, que, tanto o curso ministrado na FFCL da USP quanto o livro *Curso de Análise Matemática*, ambos de Catunda, tornaram-se, segundo Ubiratan D'Ambrosio “[...] *padrão para as inúmeras faculdades de filosofia que estavam sendo abertas na década de 50*”. Um dos meios para que isso tenha acontecido foi através de alguns dos ex-alunos de Catunda que, ao se tornarem professores universitários, mencionaram terem recorrido, recomendado o livro de Catunda para auxiliá-los a ministrarem as suas aulas. (...) O livro de Omar Catunda também alcançou outras instituições de ensino superior em outros Estados, principalmente quando levado por aqueles que foram estudar na USP e depois retornavam com exemplares na sua bagagem e seus conteúdos na formação Científica. (Ibid., p. 123-124).

Gomide destaca também, a respeito da importância dos materiais de Catunda, que suas apostilas e seu livro foram, durante muito tempo, a única opção de bibliografia em português de Análise Matemática: “os alunos tinham grande problema com as línguas estrangeiras e (...) não havia (...) literatura em português. (...) O livro do Catunda era praticamente o único que podia ser usado”.²⁷

De acordo com o que apresentamos nesta seção, podemos concluir que os primeiros anos da década de 1950 foram decisivos na história da disciplina introdutória de Cálculo ministrada aos alunos do curso de Matemática da Universidade de São Paulo. As reflexões de Gomide a respeito da necessidade de se ensinar Cálculo antes de se ensinar Análise e a edição das apostilas de Catunda que, em muitos aspectos, levou em consideração esta idéia marcaram o primeiro movimento explícito em direção a um curso inicial efetivamente de Cálculo. Segundo Otero-Garcia (2011), a partir de 1951 os programas das disciplinas Análise Matemática I e Análise Matemática II começam a explicitar essa tendência de, no primeiro

²⁷ GOMIDE (2008).

ano, dar um tratamento menos analítico e mais manipulativo aos conceitos fundamentais do Cálculo para, no segundo ano, retomá-los com uma orientação mais voltada aos fundamentos. De acordo com ele, nos programas de 1951 é que “podemos começar a notar o processo de algoritmização dos cursos” (p. 210), o que, em sua opinião, é evidenciado pela existência, no programa de *Análise Matemática II*, de um item determinando que um dos trabalhos a serem feitos na disciplina é a revisão dos conceitos abordados no primeiro ano, dando a idéia de que era necessário o estudante rever aqueles tópicos já estudados, porém sob outro enfoque. Ainda de acordo com o autor:

Já no fim da década de cinquenta, mais precisamente em 1959, vemos os conteúdos de revisão de *Análise Matemática II* ganharem mais corpo, aprofundando assim o processo de algoritmização do primeiro ano da disciplina. Na realidade, pudemos observar uma tendência geral do que podemos chamar de *deslocamento à direita* do tratamento analítico dos cursos. Ou seja, pouco a pouco o tratamento algorítmico dos conteúdos parece ter ficado centrado no primeiro ano de *Análise Matemática* ao passo que o analítico nas disciplinas do segundo, terceiro ano e também *Análise Superior*. (OTERO-GARCIA, 2011, p. 210).

Embora estejamos de acordo com a idéia geral transmitida por esta consideração de Otero-Garcia (2011), não consideramos adequado nos referirmos ao processo de transição de uma disciplina que, inicialmente era de *Análise Matemática*, para outra efetivamente de Cálculo, como um processo de “algoritmização”. A nosso ver, este foi um movimento de busca por um nível de rigor e de formalismo que fosse mais adequado à maturidade matemática do ingressante no ensino superior e não de busca por um curso inicial em que o foco estivesse nos procedimentos algorítmicos, como, talvez, o termo “algoritmização” possa indicar ao leitor.

Na história do ensino, no curso de Matemática da USP, da disciplina acadêmica Cálculo Diferencial e Integral, o período que se inicia com as reflexões de Gomide e de Catunda pode ser caracterizado como um daqueles momentos que Chervel (1990) classifica como de perturbação (ou transição), nos quais se observam turbulências no que é ensinado e o modelo antigo permanece (ensinar primeiramente *Análise*) ao mesmo tempo em que o novo começa se instaurar (ensinar primeiramente Cálculo).

A partir da década de 1960, a idéia de que deveria haver uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral precedendo a de *Análise Matemática* começa a ganhar força nas FFCL do país e uma das possíveis causas para este fato foi a introdução, no ensino superior brasileiro, dos livros americanos de Cálculo. A este respeito, Ávila (2002) destaca que “até aproximadamente 1960 o ensino de Cálculo em nossas escolas superiores (...) seguia os

moldes dos livros europeus” (p. 83). Segundo o autor, tais manuais, que normalmente, tinham como modelo os famosos *Cours d’Analyse* das escolas francesas, “incorporavam o que hoje costumamos distribuir em disciplinas separadas, como o Cálculo propriamente e a Análise Matemática” (p. 83). Com a chegada dos textos americanos de Cálculo, os materiais de Análise escritos por Catunda começam a não ser mais muito utilizados como referências nas disciplinas ministradas aos alunos do primeiro ano da graduação. A este respeito, Lima (2006), baseando-se em um depoimento de Ávila, comenta o seguinte:

A influência do curso de Catunda e do seu livro começou a dividir espaço mais incisivamente com outra forma e com outros livros de ensino de cálculo e de análise matemática a partir de 1960. (...) Nessa década (...) os cursos americanos de Cálculo e os de Cálculo Avançado começaram a ser introduzidos no ensino superior brasileiro (...) [e as] universidades (...) passaram a reformular os seus cursos de análise matemática. (LIMA, 2006, p. 129-130).

De acordo com Ávila, foi a partir deste momento, ocorrido em meados da década de 1960, em que “os livros americanos tomaram o lugar dos livros europeus” (ÁVILA, 2002, p. 84), que se fortaleceu, também entre os professores do ensino superior brasileiro “o costume de ensinar o Cálculo primeiro, ficando a Análise Matemática para depois, numa disciplina separada” (p. 84). O autor pontua, no entanto, que este foi um processo gradual e que, durante muito tempo, persistiu – e em certas escolas persiste até os dias de hoje - uma abordagem analítica desde o primeiro ano do ensino superior, o que, de acordo com ele, pode ser percebido pela “introdução, logo no início do curso, da definição de limite em termos de ε e δ , e consequente dedução das propriedades do limite” (p. 84).

Em 1962, Catunda se aposentou da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo e esta aposentadoria também foi um fato marcante na trajetória do ensino da disciplina de nosso interesse, já que, a partir daquele momento, não houve mais a figura de um catedrático à frente da cadeira de Análise Matemática, ou seja, passou a não haver mais um professor que, independente de em determinado ano estar ou não lecionando aquela disciplina, era o responsável por ela, por determinar o que deveria ser ensinado e qual o direcionamento que deveria ser dado ao curso, como faziam Fantappiè na década de 30 e Catunda nas décadas de 40, 50 e início de 60. A partir de 1962, o professor que fosse ministrá-la era quem determinava – com base, é claro, na ementa e no programa oficial – de que forma o trabalho seria conduzido, qual a bibliografia que seria adotada, etc. É importante termos a consciência, então, de que, a partir da saída de Catunda, muitas mudanças radicais que encontramos na condução e na apresentação dos cursos de Cálculo são, na verdade,

consequências específicas e momentâneas da atuação das pessoas que estavam ministrando a disciplina naquele determinado período, e não necessariamente, projetos da instituição (USP) ou do Departamento de Matemática. De qualquer forma, conforme destaca Chervel (1990, p. 197) “a taxa de renovação do corpo docente é (...) um fator determinante na evolução das disciplinas”, já que a eternização de professores em seus postos introduz um elemento de inércia decisivo na mutação das disciplinas. Conforme perceberemos, essa renovação, de fato, foi bastante importante em alguns momentos da história do ensino do Cálculo na Matemática da USP.

Em 1964, a preocupação em dar um novo direcionamento à disciplina que introduzia os conceitos fundamentais do Cálculo aos alunos do primeiro ano da graduação em Matemática acabou ocasionando uma mudança de nomenclatura na cadeira de Análise Matemática, que passou a se chamar Cálculo Infinitesimal. De acordo com Pires (2006, p. 344), apesar desta mudança de nome, em termos de conteúdo, a cadeira continuou contemplando aquilo que já contemplava: no 1º ano: funções de uma variável real, cálculo diferencial, cálculo Integral, funções de mais de uma variável, aplicações geométricas do cálculo diferencial, Integrais das funções de mais de uma variável, equações diferenciais; no 2º ano: revisão de conceitos fundamentais, sucessões e séries, integrais duplas e múltiplas, equações diferenciais e, no 3º ano: equações diferenciais e teoria das funções analíticas. Uma comparação entre os programas de Análise Matemática dos anos de 1953 e de 1962 e o de Cálculo Infinitesimal do ano de 1965 reproduzidos na sequência mostra que, de fato, as duas disciplinas abordavam exatamente o mesmo conteúdo, mesmo tendo nomenclaturas diferentes e que este, por sua vez, era idêntico ao que já era trabalhado em Análise Matemática no ano de 1953.

Programa para 1953

CADEIRA DE ANÁLISE MATEMÁTICA (VIII)

Professor: — Omar Catunda (catedrático)

Assistente: — Elza Furtado Gomide

1º ano

INTRODUÇÃO

- 1 - Conjuntos de pontos sobre uma reta. Extremos (postulado de existência) e pontos de acumulação. Teorema de Bolzano.
- 2 - Funções de uma variável real. Limites e continuidade.
- 3 - Estudo das funções elementares. Gráficos.
- 4 - Derivadas e diferenciais. Infinitésimos; ordem infinitesimal.
- 5 - Teorema de Rolle. Teorema de valor médio e teorema de Cauchy.
- 6 - Regras de l'Hospital.
- 7 - Cálculo de ordens infinitesimais. Máximos e mínimos. Contacto de curvas planas. Sentido da concavidade. Circulo osculador.
- 8 - Fórmulas de Taylor e de MacLaurin.
- 9 - Funções primitivas. Regras de integração.

- 10 - Integração das funções racionais e de outras classes de funções.
- 11 - Integral de Riemann. Integrabilidade das funções contínuas e das funções monótonas. Área de uma região plana. Teorema da média.
- 12 - Integrais impróprias.
- 13 - Arco de uma curva plana.

FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL

- 1 - Conjuntos de pontos no plano e no espaço. Região e domínio.
- 2 - Funções de mais de uma variável. Limites e continuidade.
- 3 - Derivadas parciais. Diferencial. Funções diferenciáveis.
- 4 - Derivação das funções compostas.
- 5 - Funções homogêneas.
- 6 - Fórmula de Taylor para funções de mais de uma variável.
- 7 - Máximos e mínimos.
- 8 - Funções implícitas. Jacobiano. Dependência funcional.
- 9 - Integrais curvilíneas.
- 10 - Integrais duplas e múltiplas. Cálculo de volumes, momentos de inércia.
- 11 - Derivação de uma integral dependente de um parâmetro.
- 12 - Formas lineares. Diferenciais exatas.

APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL

- 13 - Pontos singulares das curvas planas. Assintotas.
- 14 - Envoltórias.
- 15 - Curvatura. Evolutas e evolventes.
- 16 - Curvas reversas. Triedro fundamental. Curvatura e torsão.
- 17 - Classificação dos pontos regulares de uma superfície. Curvatura das curvas situadas em uma superfície.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

- 18 - Tipos elementares de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.
- 19 - Equações lineares de coeficientes constantes, homogêneas ou não.

Programa para 1962

CURSOS DE FÍSICA E DE MATEMÁTICA

1.º Ano

I) Funções de uma variável real.

- Conjuntos de pontos sobre uma reta. Extremos e pontos de acumulação. Teorema de Bolzano.
- Funções de uma variável real. Limites e continuidade.
- Estudo das funções elementares. Gráficos.

II) Cálculo diferencial.

- Derivadas. Regras de derivação. Derivadas das funções elementares.
- Teorema de Rolle. Teorema de Cauchy e teorema dos acréscimos finitos.
- Infinitésimos e infinitos. Diferenciais.
- Regras de l'Hôpital.
- Cálculo de ordens infinitesimais. Máximos e mínimos. Contacto de curvas planas. Sentido da concavidade. Circulo osculador.
- Fórmulas de Taylor e de MacLaurin.

III) Cálculo Integral.

- Funções primitivas. Regras de integração. Integração de algumas equações diferenciais simples.
- Integração das funções racionais e de outras classes de funções.
- Integrais impróprias. Critérios de Bertrand.
- Arco de uma curva.

IV) Noções de mais de uma variável.

- Conjuntos de pontos no plano e no espaço. Região e domínio. Espaço vetorial. Dimensão.
- Funções de mais de uma variável. Limites e continuidade.
- Derivadas parciais. Diferencial. Funções diferenciáveis. Interpretação geométrica.
- Funções homogêneas.
- Fórmulas de Taylor e de MacLaurin, para funções de mais de uma variável.
- Máximos e mínimos para funções de duas ou mais variáveis
- Funções implícitas. Cálculo das derivadas sucessivas.

V) Aplicações geométricas do cálculo diferencial.

- Tangentes e planos tangentes, Assíntotas.
- Pontos singulares das curvas planas.
- Envoltórias.
- Curvatura. Evolutas e evolventes.
- Curvas reversas. Triedro fundamental. Curvatura e torção.
- Classificação dos pontos regulares de uma superfície.
- Curvatura das curvas situadas sobre uma superfície. Coordenadas curvilíneas. As duas formas quadráticas fundamentais.

VI) Integrais das funções de mais de uma variável.

- Integrais curvilíneas.
- Integrais duplas e múltiplas. Cálculo de volumes. Momentos e inércia, centro de gravidade, etc.
- Derivada de uma integral dependente de um parâmetro.
- Formas diferenciais. Diferenciais exatas.

VII) Equações diferenciais.

- Definições. Tipos elementares de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.
- Equações lineares de coeficientes constantes, homogêneas ou não.

CÁLCULO INFINITESIMAL - 1965

(Cadeira)

CURSOS DE FÍSICA E DE MATEMÁTICA

1.º Ano

I) Funções de uma variável real.

- Conjuntos de pontos sobre uma reta. Extremos e pontos de acumulação. Teorema de Bolzano.
- Funções de uma variável real. Limites e continuidade.
- Estudo das funções elementares. Gráficos.

II) Cálculo diferencial.

- Derivadas. Regras de derivação. Derivadas das funções elementares.
- Teorema de Rolle. Teorema de Cauchy e teorema dos acréscimos finitos.
- Infinitésimos e infinitos. Diferenciais.
- Regras de l'Hôpital.
- Cálculo de ordens infinitesimais. Máximos de curvas planas. Sentido da concavidade.
- Fórmulas de Taylor e de MacLaurin.

III) Cálculo integral.

- Funções primitivas. Regras de integração. Integração de algumas equações diferenciais simples.
- Integração das funções racionais e de outras classes de funções.
- Integrais impróprias. Critérios de Bertrand.
- Arco de uma curva.

IV) Funções de mais de uma variável.

- Conjuntos de pontos no plano e no espaço. Região e domínio. Espaço vetorial. Dimensão.
- Funções de mais de uma variável. Limites e continuidade.
- Derivadas parciais. Diferencial. Funções diferenciáveis. Interpretação geométrica.
- Funções homogêneas.
- Fórmulas de Taylor e de MacLaurin, para funções de mais de uma variável.
- Máximos e mínimos para funções de duas ou mais variáveis.
- Funções implícitas. Cálculo das derivadas sucessivas

V) Aplicações geométricas do cálculo diferencial

- Tangentes e planos tangentes. Assíntotas.
- Pontos singulares das curvas planas.
- Envoltórias.
- Curvatura. Evolutas e evolventes.
- Curvas reversas. Triedro fundamental. Curvatura e torção.
- Classificação dos pontos regulares de uma superfície.
- Curvatura das curvas situadas sobre uma superfície.
- Coordenadas curvilíneas, As duas formas quadráticas fundamentais.

VI) Integrais das funções de mais de uma variável.

- Integrais curvilíneas.
- Integrais duplas e múltiplas. Cálculo de volumes. Momentos e inércia, centro de gravidade, etc.
- Derivada de uma integral dependente de um parâmetro.
- Formas diferenciais. Diferenciais exatas.

VII) Equações diferenciais.

- Definições. Tipos elementares de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.
- Equações lineares de coeficientes constantes, homogêneas ou não. (PIRES, 2006, p. 339-350).

Uma rápida leitura destes programas comprova que os tópicos abordados nas disciplinas de Análise e de Cálculo eram idênticos. Notamos então que houve apenas uma mudança de nomenclatura na disciplina que o aluno cursava ao ingressar na universidade e na cadeira responsável por ela. O nome mudou, mas, de acordo com os dados obtidos nesta pesquisa, tudo indica que esta mudança não foi acompanhada de uma reflexão a respeito do que deveria ser uma disciplina de Cálculo para a Matemática, seus objetivos, suas especificidades e os conteúdos a serem trabalhados. O nome passou a ser Cálculo, mas, na prática, durante muito tempo, continuou sendo um curso de Análise ou, pelo menos, um curso voltado para a Análise e não para ele mesmo; ainda demorou para que sua estrutura se tornasse próxima da que conhecemos atualmente. No entanto, é importante destacar que é a partir de 1964 que podemos, de fato, falar da existência de uma disciplina chamada Cálculo no currículo do curso de Matemática da Universidade de São Paulo. A renomeação da disciplina foi o primeiro fruto, digamos oficial, produzido por aquele período de turbulências, segundo a nomenclatura de Chervel (1990), na forma como a disciplina era trabalhada e que teve início no começo da década de 1950 com as idéias de Gomide em aproximar o curso inicial do Cálculo e afastá-lo da Análise.

É interessante salientar que, de acordo com Otero-Garcia (2011), a partir de 1964, quando a cátedra de Análise Matemática passou a ser chamada Cálculo Infinitesimal, não havia mais no currículo do curso de graduação em Matemática da USP uma disciplina chamada Análise Matemática, situação que perdurou até 1970; em todos os anos do curso os alunos, oficialmente, estudavam Cálculo - embora o conteúdo e a abordagem dada fossem típicos de uma disciplina de Análise. E, no quarto ano, estudavam também Análise Superior. A partir de 1968, explicitando, mais uma vez, a influência exercida pelos manuais norte-americanos no ensino de Cálculo e de Análise, passa a constar no currículo do referido curso uma disciplina chamada *Cálculo Avançado*, ministrada no terceiro e no quarto ano e, na qual, “vários conceitos já trabalhados em Cálculo são revistos, como números reais, funções de uma variável, funções de várias variáveis e séries e seqüências numéricas e de funções. [E]

são abordados tópicos de espaços métricos (...) e medida e integral de Lebesgue” (OTERO-GARCIA, 2011, p. 191). Com a Reforma Universitária e a criação do IME em 1970, os alunos da Licenciatura passaram a cursar três semestres de Cálculo e um semestre de uma disciplina recém-criada chamada *Introdução à Análise*. Os bacharelandos tinham, além dos três semestres de Cálculo, cursados juntamente com os licenciados, mais um semestre desta disciplina e, no lugar de *Introdução à Análise*, um semestre de *Análise Matemática I* e um semestre de *Análise Matemática II* ²⁸.

Veremos, na próxima seção, como se deu o processo contínuo de reformulações da disciplina Cálculo I, a partir de 1964, até que ela se tornasse, no início da década de 1990, próxima do que é hoje em dia.

4.5 – A disciplina de Cálculo do curso de Matemática da USP a partir de 1964

Nesta seção daremos um panorama da trajetória do ensino do Cálculo Diferencial e Integral na graduação em Matemática da USP desde 1964, quando, de fato, começou a existir uma disciplina com esta nomenclatura no currículo de tal curso, até os dias de hoje. Buscaremos compreender quais foram as reformulações sofridas por tal disciplina, ao longo dos anos, até que ela se tornasse mais próxima daquela que conhecemos atualmente. Para tentarmos atingir este objetivo, começaremos analisando os cursos ministrados até a Reforma Universitária, ocorrida na instituição de nosso interesse entre o final da década de 1960 e início da década de 1970.

4.5.1 – Os cursos ministrados antes da Reforma Universitária

Conforme destacamos na seção anterior, após a aposentadoria de Catunda em 1962, não havia mais, na FFCL, a figura de um professor catedrático na cadeira Cálculo Infinitesimal. A cada ano, o curso da disciplina ministrado aos alunos ingressantes na graduação em Matemática não necessariamente era conduzido por um mesmo professor e, no caso de serem dados pelo mesmo professor em anos consecutivos, este não tinha mais aquela responsabilidade do catedrático de chefiar o ensino daquele conteúdo. Começou a haver então um maior número de docentes ministrando Cálculo no curso de Matemática da USP, o que conforme já destacamos, é, de acordo com Chervel (1990), importante para a evolução da disciplina. Passaremos então, na sequência, a tecer comentários, com relação aos aspectos de

²⁸ Para maiores detalhes a respeito dos programas referentes a estas disciplinas citadas, consultar Otero-Garcia (2011).

interesse neste capítulo, a respeito de diversos cursos de Cálculo ministrados na Matemática entre a aposentadoria de Catunda e a Reforma Universitária, que começou a ser implantada na instituição no final dos anos 1960.

Em 1964, o professor Carlos Benjamin de Lyra, cuja biografia encontra-se nos anexos deste trabalho, e que havia sido assistente de Catunda na cadeira de Análise Matemática até a aposentadoria do catedrático, foi o responsável pelas aulas teóricas de Cálculo Infinitesimal ministrada aos ingressantes nos cursos de Matemática e de Física. As informações a respeito desta disciplina e de outras conduzidas por esse docente, que serão apresentadas a seguir, são frutos das entrevistas que realizamos com João Zanetic, físico e pesquisador da Universidade de São Paulo e que foi aluno do professor Lyra em 1964, e com Sônia Pitta Coelho, ex-professora da USP que foi aluna de Lyra entre 1967 e 1970 durante sua graduação em Matemática.

Zanetic destacou que as aulas de Lyra “eram muito densas, com uma grande quantidade de conteúdo”²⁹ sendo trabalhado. Comentou ainda que, embora o nome da disciplina, em 1964, já fosse Cálculo, ela ainda estava mais próxima da Análise. “Mesmo nas avaliações [a] parte teórica (...) era contemplada. Havia provas em que precisávamos discutir os conceitos; não eram somente resoluções de aplicações”³⁰. Ainda de acordo com ele:

Como tínhamos aulas de exercícios com outro docente, o Lyra não se preocupava em ficar apenas nas aplicações dos teoremas; a parte dele era mais formal e nisso ele era muito rigoroso; se entusiasmava como aquilo que falava. Eram aulas de um matemático que procurava mostrar a matemática como uma área de conhecimento, além das possibilidades de uso para nós que éramos da área de Física. (ZANETIC, entrevista, 2009).

Convém observarmos que, em seus comentários, Zanetic parece associar ao Cálculo uma abordagem mais prática, enfatizando as resoluções de exercícios de aplicação dos conceitos e à Análise uma abordagem rigorosa e formal, enfatizando a discussão de tais conceitos. No entanto, sabemos que nem o Cálculo deve ser somente aplicações e nem a Análise apenas formalizações desprovidas de significados, mas, por outro lado, esta associação possivelmente feita por Zanetic é perfeitamente compreensível, dada a maneira como essas duas disciplinas tradicionalmente são conduzidas no ensino superior. De qualquer forma, entendemos que, ao fazer tais comentários, o objetivo de Zanetic provavelmente tenha sido mostrar que, neste curso inicial de Cálculo que Lyra ministrou em 1964, ele procurava ao mesmo tempo trabalhar com as formalizações dos conteúdos apresentados – e talvez essa

²⁹ ZANETIC (2009).

³⁰ ZANETIC (2009).

fosse a parte predominante do curso – com as aplicações dos teoremas e com a discussão dos conceitos vistos. E, em nossa opinião, é exatamente essa diversidade que devemos buscar, abordando, ao mesmo tempo, os significados, as formalizações e as aplicações dos conceitos trabalhados.

Coelho que, durante o Bacharelado em Matemática, foi aluna de disciplinas de Cálculo ministradas por Lyra, por Gomide, e por outros professores, estabeleceu uma breve comparação entre os cursos conduzidos por estes dois primeiros docentes citados: “os cursos dele [Lyra] eram difíceis, mas bem estimulantes, enquanto que os da dona Elza já eram mais fáceis de serem levados. Os dele não; às vezes, sentíamos que ele perdia um pouco o pé, dava muita informação.”³¹.

A mesma professora comentou ainda que, embora, de acordo com Zanetic, a disciplina ministrada ainda estivesse mais próxima da Análise Matemática do que do Cálculo, Lyra compactuava da opinião de Gomide e de vários autores americanos de livros didáticos, para os quais o aluno, ao ingressar na universidade, deveria primeiramente fazer um curso de Cálculo para só então estudar Análise e, por esta razão, considerava adequado os futuros matemáticos, inicialmente, estudarem Cálculo juntamente com os futuros físicos para, posteriormente, fazerem outro curso mais formal, específico da Matemática, no qual os conceitos vistos na disciplina Cálculo I eram retomados com maior nível de rigor. De acordo com nossa depoente, Lyra dizia “que o aluno precisava primeiro aprender a calcular (...) para depois fazer as justificativas. (...) Ele falava isso: primeiramente vocês têm que fazer bastante cálculo para depois entrarmos nessa parte mais dura da Matemática”³². Percebemos, portanto, que assim como Gomide, Lyra defendia algo na teoria que ainda não colocava em prática na sala de aula. Embora achasse que, primeiramente, o aluno deveria aprender “a calcular” para depois fazer as “justificativas”, seu curso, desde o início já enfatizava as formalizações, apesar de abordar também os cálculos. É interessante notar também que, de acordo com o comentário feito por Coelho a respeito da opinião de Lyra e de Gomide sobre a abordagem mais adequada para um curso inicial de Cálculo, a impressão que nos fica é que, naquela época, já havia, entre os próprios professores da universidade, essa visão associando o Cálculo aos algoritmos e a Análise à abordagem rigorosa dos conceitos.

De acordo com Zanetic, os alunos tinham o hábito de tomar nota das aulas de Lyra e, no seu caso especificamente, essas notas eram o principal material de estudo. Eram indicados também alguns livros e, dentre estes, nosso depoente destacou: *Calculus with Analytic*

³¹ COELHO (2009).

³² COELHO (2009).

Geometry – A First Course de Murray H. Protter e Charles B. Morrey Jr e *Advanced Calculus* de R. Creighton Buck. Com relação a este último manual, comentou que ele foi mais utilizado durante a disciplina de Cálculo II que ele cursou, também com o professor Lyra, em 1965: “é um livro até hoje considerado avançado. Meus colegas da Matemática dizem que este livro, atualmente é usado, às vezes, em disciplinas de pós-graduação e o Lyra o seguia já no segundo ano da graduação.”³³. No curso de Cálculo I, utilizavam além do livro de Protter & Morrey, o livro de R. Courant - *Differential and Integral Calculus*. “E eu seguia também alguns livros de Cálculo das editoras soviéticas, como a MIR, por exemplo; lembro-me de seguir alguns daqueles livros russos, traduzidos (...) para o espanhol.”³⁴. Convém destacar que, neste último trecho citado do depoimento de Zanetic é que aparece, pela primeira vez em nossas entrevistas, uma referência aos livros de Cálculo da editora MIR (Piskunov, Demidovitch, etc.) que, a partir dos anos 1960, se tornaram bastante populares entre alunos (para revisar de maneira sucinta a teoria vista em sala de aula e resolver exercícios) e professores (para a seleção de exercícios para provas e listas).

É interessante destacar que, pela primeira vez, um manual efetivamente de Cálculo foi indicado como referência principal para a disciplina, e convém observar ainda que *Calculus with Analytic Geometry – A First Course* é um livro norte-americano, o que ilustra, na prática, os comentários de Ávila (2002) e de Lima (2006), citados na seção anterior, de que, a partir do início da década de 1960, os cursos de Cálculo e Análise ministrados nas universidades brasileiras passaram a ser reformulados sob a influência dos manuais norte-americanos tratando destes assuntos que começaram a ganhar popularidade no país naquela época. Pelo fato do manual de Protter & Morrey ter sido, como já afirmamos, o primeiro texto efetivamente de Cálculo adotado no curso da Matemática na USP e apoiados na idéia de que a opção do professor por determinado livro permite que suas preocupações, suas crenças e suas escolhas metodológicas transpareçam (BARUFI, 1999, p. 7) apresentaremos uma breve análise de *Calculus with Analytic Geometry – A First Course*, visando ilustrar o que mudou, de fato, na maneira de abordar os conceitos na disciplina quando se passou a adotar um manual de Cálculo e não mais de Análise como era até então.

Iniciamos as considerações a respeito deste livro, lançado em 1962, destacando alguns comentários apresentados em seu prefácio. Os autores salientam que, na época, a maioria das universidades oferecia dois cursos de Cálculo: um para alunos iniciantes e outro para alunos que já possuíam conhecimentos sobre o assunto. Afirmam que esse livro, especificamente, foi

³³ ZANETIC (2009).

³⁴ ZANETIC (2009).

pensando para auxiliar na condução de cursos do primeiro tipo e que os tópicos apresentados foram escolhidos levando em consideração o que a maioria dos estudantes do primeiro ano precisaria saber de Cálculo Diferencial e Integral e de Geometria Analítica. Destacam ainda que Morrey é autor de um outro livro, *University Calculus*, destinado a cursos de Cálculo mais avançados e que, se compararmos *Calculus with Analytic Geometry – A First Course* com os seis primeiros capítulos de *University Calculus*, veremos que o conteúdo apresentado é o mesmo, seguindo, inclusive, a mesma ordem, mas com o nível de um curso mais elaborado: o texto de Morrey apresenta a teoria de maneira mais detalhada, com provas completas da maioria dos teoremas mais difíceis e dando um tratamento mais sólido e rigoroso ao Cálculo e à Geometria Analítica. Outra característica peculiar do livro *Calculus with Analytic Geometry* destacada no prefácio é a presença de um capítulo intitulado *Preview of the Calculus*, cujo objetivo é apresentar, de maneira informal, as noções fundamentais de limite, diferenciação e integração, visando auxiliar os estudantes de Física e Engenharia que precisam conhecer o mais rápido possível os processos elementares do Cálculo que, desde muito cedo, são utilizados como ferramentas nas disciplinas específicas de seus cursos de graduação.

Nota-se, então, que ao redigir tal manual os autores procuraram refletir, de fato, a respeito de como deveria ser um curso inicial de Cálculo, quais conceitos deveriam ser apresentados, de que forma deveria ser essa apresentação e qual deveria ser o nível de aprofundamento e rigor dessa abordagem inicial. Levando em consideração estas idéias apresentadas pelos autores no prefácio da obra, a indicação de tal livro nos cursos de Cálculo na Universidade de São Paulo na década de 1960 nos pareceu bastante coerente com o que Gomide propôs para o ensino da disciplina naquela universidade no início da década de 1950: primeiramente, no curso do primeiro ano, o conteúdo ser apresentado aos alunos de maneira menos detalhada, mais prática e, no segundo ano, os assuntos serem retomados de forma mais completa, mais rigorosa, mais crítica, mais analítica. Protter & Morrey nos dão pistas de que também defendiam este tipo de trabalho, apontando, inclusive, obras diferentes pensadas especialmente para esses dois tipos de abordagem. Podemos dizer então que, a indicação desse texto como referência bibliográfica foi mais uma etapa do processo de reflexão a respeito de como deveria ser um curso inicial de Cálculo para os alunos da graduação em Matemática, processo esse que continua até os dias de hoje. Vejamos, então, de que forma os autores trabalham com os conceitos de função, limite, derivada e integral.

A noção de função é introduzida pelos autores de forma contextualizada no capítulo 4, intitulado *Relations. Functions. Graphs*, por meio de uma motivação utilizando a fórmula do

cálculo da área de um círculo de raio r e outra situação na qual chamam de C o custo de enviar x cartas e apresentam duas tabelas com dados dessa relação, uma primeira não representando uma relação funcional e uma segunda, mais apurada, na qual existe uma correspondência funcional. Tomam x e y como duas variáveis e supõem que o domínio de x é um intervalo da reta numérica, por exemplo, (a,b) . Afirmam que, se a cada valor de x no intervalo (a,b) um único valor de y puder ser associado ou determinado, dizemos que y é função de x ; a função é a associação ou correspondência que dá um valor de y quando um valor de x é assumido. Após discutir um pouco esta idéia, voltam à questão da fórmula da área do círculo e às tabelas citadas anteriormente, visando apresentar os conceitos de domínio e imagem. E, posteriormente, definem função da seguinte maneira:

Considere uma coleção de pares ordenados de números (x,y) , com x e y sendo valores reais. Se não houver dois pares nessa coleção tendo o mesmo primeiro elemento, então chamamos essa coleção de função. Identificamos a totalidade de valores possíveis de x como o domínio e a totalidade de valores possíveis para y como a imagem. (PROTTER & MORREY, 1962, p. 17 – tradução nossa).

Comparando esta abordagem apresentada por Protter & Morrey com as feitas por Fantappiè, Catunda e Gomide, notamos que a principal diferença entre elas é o fato de o livro introduzir o conceito de forma contextualizada por meio de duas situações-problema. Além disso, enquanto que para Fantappiè, Catunda e Gomide as funções podiam ser monódromas ou polídromas, no texto de Protter & Morrey o segundo tipo, assim como nos cursos e livros atuais, é descartado por não satisfazer a definição. O que era chamado de função polídroma passa a ser visto apenas como uma relação e não mais como um tipo de função. Percebemos ainda que no manual de Protter & Morrey o que Fantappiè, Catunda e Gomide chamavam de campo de definição da função é chamado de domínio.

Com relação à noção de limite, ela é apresentada no capítulo 4 de forma intuitiva, e volta a ser trabalhada no capítulo 5 de maneira formal. No capítulo 4, partem de um exemplo: tomam a função $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$ e o valor particular $x = 3$. Esboçam o gráfico desta função e, em seguida, constroem um retângulo no gráfico, englobando o intervalo $x = 1$ a $x = 4$. Na sequência, reduzem este intervalo para $x = 2,5$ a $x = 3,5$, para então, refiná-lo ainda mais, englobando o intervalo de $x = 2,9$ a $x = 3,1$ e afirmam que esse processo pode continuar sendo feito em torno de $x = 3$. Destacam que no intervalo $x = 2,9$ a $x = 3,1$, os valores da função estão situados em um retângulo limitado pelas retas $x = 2,9$; $x = 3,1$;

$y = 1,58$ e $y = 2,38$ e que o ponto principal a ser enfatizado diz respeito à altura desses retângulos: como as larguras dos retângulos tornam-se mais estreitas, as alturas também diminuem de tamanho. Comentam então que, como x vai se aproximando do valor 3, $f(x)$ vai se aproximando do valor 2 e, por esta razão, podemos dizer que: $f(x)$ se aproxima de 2 quando x se aproxima de 3, afirmação que pode ser abreviada por $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$. Concluem então que:

Se uma função f é definida para valores de x próximos de um número fixo a , e se quando x tender a a , os valores de $f(x)$ forem se aproximando de algum número específico L , escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

E isto é lido como: o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é L . (Ibid., p. 69).

Comentam, em seguida, que, geometricamente, isso significa que os retângulos que rodeiam a têm larguras cada vez mais estreitas e alturas também cada vez menores e mais próximas de L . Ao encerrarem essa interpretação geométrica, frisam que todas as afirmações feitas anteriormente, com relação ao conceito de limite, utilizaram termos como: mais perto, mais próximo, mais estreito, etc. que são imprecisos e foram usados somente com a intenção de dar ao leitor uma idéia intuitiva do que está ocorrendo já que a definição precisa da expressão $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ será dada no capítulo 5, no qual, para iniciar a apresentação formal da idéia, comentam que, anteriormente, a definição foi dada de maneira informal, utilizando termos como intervalos se tornando “pequenos”, números “se aproximando”, quantias “aproximadamente nulas”, e assim por diante, mas que os sentidos dessas expressões “não-matemáticas” podem variar enormemente de pessoa para pessoa e, por essa razão, não podem servir de base para a definição de uma estrutura matemática. E então apresentam a definição de limite envolvendo epsilons e deltas de forma bastante semelhante àquela presente nos materiais referentes aos cursos de Fantappiè, Catunda e Gomide.

É interessante perceber que nos cursos de Fantappiè, Catunda e Gomide, a noção de limite já era introduzida diretamente por meio de uma abordagem topológica utilizando a idéia de entornos, enquanto que no manual de Protter & Morrey, embora o conceito também seja apresentado, inicialmente, por meio de uma abordagem que utiliza idéias topológicas, ao invés dos autores recorrerem diretamente a termos como entornos, lançam mão de um exemplo numérico que valoriza a visualização geométrica e a utilização de expressões não-

matemáticas que, a nosso ver, podem, em um primeiro momento, traduzir para o aluno de forma mais significativa os elementos centrais envolvidos na definição a ser posteriormente estabelecida.

A noção de derivada também é introduzida no capítulo 4; no capítulo 6 são tratadas as regras de derivação e no capítulo 7 as aplicações do conceito. A definição de tal ente matemático é apresentada da seguinte forma:

Se f é uma função da variável independente x , a derivada da função f , denotada por f' , é definida pela fórmula:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Nessa definição, x é fixo e h tende a zero. Se o limite não existir para um valor particular de x , a função não é derivável nesse valor. (Ibid., p. 77).

É interessante destacarmos que, no final da apresentação de limites feita no capítulo 4, os autores propõem uma série de exercícios nos quais se devem calcular limites da forma

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a)}{x}.$$

Ou seja, os leitores já irão trabalhar com o cálculo de derivadas em um

ponto dado, pela definição, sem sequer imaginarem que estão calculando tal coisa. Somente após a apresentação da definição de derivada é que o leitor é informado de que, na seção anterior do capítulo, havia visto muitos problemas que consistiam em encontrar a derivada para um valor particular de x .

Os autores apresentam um processo sistemático para calcular derivadas, um método chamado de “regra dos cinco passos”. Para isso, tomam como exemplo a função $f(x) = x^2$.

1º passo: Escrever a fórmula da função para x : $f(x) = x^2$.

2º passo: Escrever a fórmula da função para o valor $x+h$: $f(x+h) = (x+h)^2$.

3º passo: Subtrair $f(x)$ de $f(x+h)$:

$$f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2.$$

4º passo: Dividir por h . Como h é um fator comum no numerador e no

denominador, podemos cancelá-lo: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$.

5º passo: Tomar o limite quando $h \rightarrow 0$: $\lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$.

Resposta: $f'(x) = 2x$. (Ibid., p. 77).

Protter & Morrey destacam que os quatro primeiros passos da regra são puramente mecânicos e que é o quinto e último passo que frequentemente requer habilidade e manipulação algébrica.

O livro traz também uma discussão a respeito da interpretação geométrica da derivada; são apresentados exemplos da determinação da reta tangente e da reta normal a uma determinada curva em um ponto dado. Os autores apresentam ainda um exemplo no qual procuram determinar em quais intervalos uma função dada é crescente e em quais é decrescente, informações que são utilizadas para esboçar o gráfico da função em questão. Por meio deste exemplo, os leitores começam a ter condições de perceber que há uma relação entre o sinal da derivada primeira e o crescimento e decrescimento da função original. Ainda neste mesmo exemplo, há uma discussão inicial referente a pontos de máximos e de mínimos relativos. O objetivo dos autores é introduzir conceitos que serão detalhados e aprofundados no capítulo 7, chamado *Applications of Differentiation. The Differential*.

A principal diferença notada entre a abordagem de derivada presente em Protter & Morrey e àquelas encontradas nos materiais de Fantappiè, Catunda e Gomide é que, ao contrário do que acontecia nas apostilas e notas de aula desses docentes, no manual de Protter & Morrey havia uma grande quantidade de exemplos, ilustrando tanto o cálculo de derivadas pela definição, quanto pelas regras de diferenciação, a determinação de pontos de máximos e mínimos de funções, o estabelecimento dos intervalos de crescimento e decrescimento de funções e o esboço de gráficos por meio das informações fornecidas pela derivada. Além disso, o fato de trazer um algoritmo prático para o cálculo de derivadas pela definição (a regra dos cinco passos) também é, de certa forma, uma inovação do livro, pelo menos em relação ao que era feito nos cursos ministrados aos alunos da Matemática até então. E, em nossa opinião, as regras e os algoritmos, embora não devam ser a parte central de nenhuma disciplina, também são importantes e necessários de serem trabalhados em um curso inicial de Cálculo.

O conceito de integral também aparece no livro pela primeira vez no capítulo 4, *Preview of the Calculus*, e os autores iniciam sua abordagem comentando que a área de um círculo pode ser calculada por meio da área dos polígonos regulares nele inscritos ou circunscritos, já que, como eles vão se aproximando cada vez mais do círculo, a área deste último pode ser definida como sendo o limite das áreas desses polígonos, quando o número de seus lados tende a infinito. Advertem que nesse capítulo será feita apenas uma introdução do assunto integral, que será tratado de maneira precisa no capítulo 8; optam aqui por fazer esta introdução por meio das somas de Riemann. Tomam então uma função $y = f(x)$, cujo gráfico está acima do eixo x e afirmam que querem calcular a área da região limitada pelo seu

gráfico, pelo eixo x e por retas verticais traçadas a partir de dois pontos a e b do eixo x . Assumem então que só sabemos calcular área de regiões retangulares, tomam um intervalo $[a, b]$ no eixo x e dividem-no em um determinado número de subintervalos, que não precisam ser de tamanhos iguais, considerando $x_0, x_1, \dots, x_n$ como pontos dessa subdivisão de tal forma que $a = x_0$ e $b = x_n$. Então, se i é um número qualquer entre 1 e n , $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ é o comprimento do i -ésimo subintervalo. Seleccionam, de maneira arbitrária, um ponto de cada um dos subintervalos nos quais dividiram $[a, b]$ e denotam esses pontos por $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Na sequência, por cada ponto ξ_i traçam um segmento de reta vertical até a curva $y = f(x)$ e explicitam que a altura do segmento traçado por ξ_i é $f(\xi_i)$. Calculam então a área de cada retângulo de comprimento $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ e altura $f(\xi_i)$. Cada uma destas áreas é dada por $f(\xi_i)\Delta_i x = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Afirmam que a soma das áreas de todos esses retângulos, dada por $f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + \dots + f(\xi_n)\Delta_n x$ designa, aproximadamente, a área abaixo da curva $y = f(x)$. Comentam então que é natural que quanto mais subintervalos forem usados para dividir $[a, b]$, melhor será a aproximação dessa área; por exemplo, para 6 intervalos de subdivisão temos um valor para a área, para 60 subintervalos um valor melhor, para 600 uma aproximação melhor ainda e assim por diante. Afirmam que é aí que aparece a idéia de limite, supondo que essas aproximações tendam para um valor limitante (digamos L) e ainda que as seguintes afirmações são válidas: 1) O valor de L não depende do modo como as subdivisões são escolhidas, contanto que o comprimento máximo de qualquer subintervalo tenda a zero quando o número de subintervalos tende a infinito; 2) O valor de L não depende de onde, em cada subintervalo, os pontos ξ_i são escolhidos. Em seguida, definem integral:

Nessas circunstâncias, chamamos esse limite L de integral definida de f em $[a, b]$ e denotamos isso por:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

(Ibid., p. 90).

Os autores afirmam, ainda, que, no capítulo 8 (no qual a teoria referente à integração será formalizada), será mostrado que o número L pode ser usado para definir a área abaixo de uma curva e que, de fato, isso coincide com a definição usual de áreas de regiões elementares. Passam então a trabalhar a relação existente entre a idéia de derivada e os conceitos de integral definida e área abaixo de uma curva:

Considere o problema de encontrar a área abaixo de uma curva $y = f(x)$ entre os pontos a e X , com X entre a e b . Podemos escrever essa área como a integral definida $\int_a^X f(x)dx$. Como X varia, essa área assume diferentes valores. Se X é a , o valor é zero. Vamos denotar a área por A e, como A é função de X , escrevemos: $A = F(X)$. Escolhemos então um $h > 0$ e calculamos $F(X + h)$. Isto é, calculamos a área abaixo da curva entre a e $X + h$. Isto é justamente a integral $\int_a^{X+h} f(x)dx$. A diferença $F(X + h) - F(X)$ é área da região hachurada mostrada na figura 4.23.

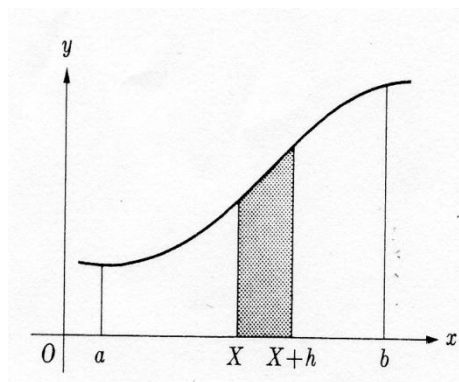


Figura 4 - 23

Se h é pequeno, a região hachurada é quase um retângulo e, se tomarmos Y como sendo o valor médio da função $f(x)$ entre X e $X + h$, podemos dizer que:

$$F(X + h) - F(X) = Yh \quad \text{ou} \quad Y = \frac{F(X + h) - F(X)}{h}. \quad \text{Se } h \rightarrow 0, \text{ sabemos}$$

que esse limite é aproximadamente a derivada $F'(X)$. Por outro lado, geometricamente, vemos que se $h \rightarrow 0$, a altura média Y precisa se aproximar da altura da função f no ponto X , isto é, $f(X)$. Concluímos por este argumento que $F'(X) = f(X)$, o que estabelece que a função f é a derivada da função área F . Podemos também dizer que F é uma antiderivada de f . Em outras palavras, o processo de encontrar a área e o processo de diferenciação são um o inverso do outro. (Ibid., p. 91-92).

É dessa maneira indireta e, de certa forma, intuitiva que apresentam o Teorema Fundamental do Cálculo, deixando explícito ao leitor, embora sem citar o nome de tais personagens, a contribuição fundamental de Newton e Leibniz para o Cálculo, que é a descoberta de que o processo de encontrar a área abaixo de uma curva limitada pelo eixo x e o processo de diferenciação da função representada por aquela curva são um o inverso do outro.

Os autores então propõem algo não visto até então nos materiais dos cursos de Cálculo ministrados na Matemática da Universidade de São Paulo: obter a antiderivada de funções a

partir das derivadas sem utilizar “explicitamente” a idéia de integral, visando discutir o significado da constante que aparece após a integração. Para isso, iniciam informando aos leitores que por meio da regra dos cinco passos, eles são capazes de deduzir como derivar funções polinomiais, ou seja, são capazes de resolver, por exemplo, o problema de calcular a derivada de $f(x) = 5x^2 + 12x - 6$, obtendo como resultado $f'(x) = 10x + 12$. Propõem, então, o problema inverso: suponha que a derivada da função f é dada por $f'(x) = 4x + 3$. Qual é então a função f ? Uma das possibilidades seria $f(x) = 2x^2 + 3x + 7$ ou $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ ou ainda $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$... Explicam que não há uma única solução para o problema de dada uma derivada, encontrar a função que lhe deu origem, isto é, a antiderivada, e que uma maneira de contornar essa dificuldade é escrever: $f(x) = 2x^2 + 3x + c$ onde c pode ter qualquer valor que se queira. Se for dada alguma informação que revele o valor de c então a solução é determinada precisamente. Por exemplo, se soubéssemos que $f(2) = 3$, poderíamos concluir que $c = -11$ e que a antiderivada procurada é $f(x) = 2x^2 + 3x - 11$. Protter & Morrey passam, então, a dar exemplos do que foi discutido; primeiramente, propõem uma situação na qual, partindo-se da expressão da aceleração instantânea de um corpo, deve-se encontrar, por meio do processo da antiderivação, a expressão da velocidade instantânea deste corpo e também a função que fornece sua posição em determinado instante. Em seguida, são propostos exemplos no quais uma mesma área abaixo de uma curva é calculada por meio das aproximações por retângulos e pelo processo de antiderivação, procurando fazer com que os leitores estabeleçam uma comparação entre os valores obtidos por meio destes dois processos (o aproximado e o exato).

No capítulo 8, intitulado *The Definite Integral*, os autores se propõem a apresentar detalhes a respeito do tópico e trabalhá-lo de maneira formal. Fazem uma discussão detalhada a respeito da noção de área de uma região do plano, do cálculo de áreas por somas, da definição formal de integral definida, etc. Apresentam também o conceito de integral indefinida:

Toda função tem um número infinito de antiderivadas, já que uma constante de magnitude arbitrária pode ser adicionada a uma antiderivada para produzir outra. Uma notação comumente utilizada para indicar todas as antiderivadas de uma função f é: $\int f(x)dx$ na qual não há limites superior e inferior. Essa é a chamada integral indefinida de f . (Ibid., p. 235).

Enquanto Fantappiè optava por introduzir o conceito de integral por meio da noção de integral definida e das idéias de Darboux de somas superiores e inferiores, Gomide e Catunda iniciavam suas abordagens do assunto pelo conceito de primitiva e de integral indefinida. Protter & Morrey, por sua vez, escolhe, assim como Fantappiè, abordar inicialmente as integrais definidas, mas utilizando diretamente as idéias de Riemann, sem recorrer às somas superiores e inferiores como fazia o matemático italiano. O tratamento trazido por *Calculus with Analytic Geometry – A First Course* difere dos presentes nos materiais dos cursos anteriores, dentre outros aspectos, por trazer, desde o princípio, um maior número de exemplos e de discussões valorizando as noções intuitivas do conceito o que fica bastante evidente, principalmente na apresentação da idéia de primitiva de uma função.

Achamos interessante destacar ainda que, nos capítulos 4 e 5, os autores comentam que a idéia de limite é a mais importante no Cálculo, pois tal conceito está presente na fundamentação de toda a Análise Matemática, sendo sua compreensão absolutamente essencial para uma boa compreensão dos processos básicos do Cálculo. Dessa forma, embora tenhamos afirmado, baseados nos comentários feitos por Protter & Morrey no prefácio do manual, que os autores parecem ter refletido a respeito de como deveria ser uma disciplina inicial de Cálculo, notamos, por meio dessa observação a respeito do conceito que, para eles, é o mais importante do Cálculo e embasados nas discussões feitas por Rezende (2003) e apresentadas na segunda seção deste capítulo, que, ao colocar a noção de limite como idéia central do Cálculo por ela estar presente na fundamentação de toda a Análise Matemática, Protter & Morrey deixam transparecer a idéia de que, para eles, o Cálculo está subordinado à Análise, que é uma preparação para ela.

Conforme já discutimos, Rezende (2003) destaca que se nos questionamos a respeito de quais os conceitos fundamentais do Cálculo, precisamos refletir a respeito de quais são nossos objetivos em um curso inicial dessa disciplina; se for a significação lógica, a formalização, então, de fato, a noção central é a de limite, mas se for a construção dos significados, então as idéias fundamentais são a diferenciação, a integração e a relação estabelecida entre ambas pelo Teorema Fundamental, já que, desde a gênese do Cálculo, a derivada e a integral é que sempre foram os seus grandes eixos temáticos. A noção formal de limite, introduzida por Weierstrass, é o conceito central da Análise. Podemos dizer, portanto, que embora, aparentemente, os autores de *Calculus with Analytic Geometry – A First Course* tenham refletido a respeito de como deveria ser a abordagem do conteúdo em um curso inicial da disciplina, eles não parecem ter se preocupado em voltar o Cálculo para ele mesmo, para seus problemas fundamentais e para os significados de suas idéias principais; tal disciplina

continuava sendo vista como uma Pré-Análise o que, é preciso destacar, não elimina os méritos do manual, que, em nossa opinião adota uma abordagem bastante interessante para o que se propõe a apresentar.

Em 1966, as responsáveis pela disciplina de Cálculo no curso de Matemática foram as professoras Gomide (que ministrava as aulas teóricas – 4 horas semanais) e Junia Borges Botelho (responsável pelas aulas de exercícios – 2 horas semanais). Com relação a este curso, as informações que temos são provenientes das entrevistas que realizamos com Maria Cristina Bonomi e Vera Helena Giusti de Souza, ex-alunas da Matemática da Universidade de São Paulo e que cursaram Cálculo em 1966. Bonomi é atualmente professora desta mesma universidade e De Souza deu aulas na instituição até 1996.

As depoentes descreveram este curso de Cálculo que vivenciaram como alunas como sendo bastante tradicional, todo baseado em aulas expositivas e sem nenhuma preocupação didática diferenciada que houvesse lhes chamado atenção: “era seguido um modelo, que ainda hoje permanece, no qual você parte da definição, depois passa pelo lema, teorema e depois aplicações”³⁵. Percebe-se, portanto, que não havia a preocupação de proporcionar ao aluno a construção do próprio conhecimento; tudo já era apresentado formalizado e sistematizado pelo professor.

Para as aulas de exercício, eram indicados como referências dois livros *Calcul Différentiel et Integral* de Piskunov e *Problems in Mathematical Analysis* de Demidovitch. De Souza destacou que o esquema destas aulas conduzidas por Botelho era o seguinte: “ela ia resolvendo (...) e nós copiávamos”³⁶. E deve-se frisar que eram trabalhadas apenas questões de técnicas de Cálculo - derivação, primitivação, etc. – e recomendava-se que os alunos resolvessem uma grande quantidade delas e, por esta razão, estes livros eram, de fato, muito utilizados: “usei bastante o Demidovitch, porque tal livro traz somente exercícios e tínhamos que resolver muitos para estudar. Acho que só de técnicas de primitivação, fiz uns cem.”³⁷.

As depoentes destacaram ainda que a disciplina, ao menos nas aulas teóricas, em alguns aspectos, se assemelhava mais a um curso de Análise do que a um de Cálculo. Bonomi, por exemplo, afirmou que Gomide trabalhava com a definição formal de limite, algo que, em sua opinião, é mais adequado para um curso de Análise. Eram trabalhados exemplos e exercícios teóricos envolvendo esta definição como, por exemplo, situações nas quais o epsilon era dado e o aluno deveria encontrar o delta. Esse comentário de Bonomi vai ao

³⁵ BONOMI (2009).

³⁶ DE SOUZA (2009).

³⁷ DE SOUZA (2009).

encontro do que defende Rezende (2003), para o qual, de fato, a definição formal de limite não está nos domínios do Cálculo e sim da Análise; no Cálculo o tratamento de tal noção deve ficar no nível intuitivo. Concordamos que em um curso inicial, tal idéia deve ser tratada, primeiramente, de forma intuitiva, mas, por outro lado, acreditamos que, após esta abordagem introdutória, o conceito pode sim ser apresentado de maneira formal, embora não se deva fazer desta apresentação a parte central da disciplina. Além disso, esta abordagem deve ser feita apelando-se aos aspectos topológicos envolvidos para que o simbolismo presente na definição possa ter significado para os alunos.

De acordo com De Souza, é difícil comparar o curso de Cálculo daquela época com os atuais porque o conteúdo visto era muito diferente, mas, de qualquer maneira:

Era mais próximo mesmo da Análise, porque tínhamos a parte dos teoremas, das demonstrações, definições. O conteúdo que víamos era muito maior do que o de agora; fazíamos em um ano o que, atualmente, é visto em dois ou ainda em outras disciplinas que não o Cálculo. (DE SOUZA, entrevista, 2009).

Além disso, a mesma professora destacou que, assim como ocorre mais tradicionalmente nas disciplinas atuais de Análise, as demonstrações eram apresentadas durante as aulas teóricas e depois cobradas nas provas: “a professora Elza dava a parte de demonstrações e isso nos era cobrado nas avaliações: a demonstração do Teorema do Valor Médio, do Teorema de Rolle... Precisávamos saber as demonstrações de todos esses teoremas por causa das provas”³⁸.

Percebemos embutida nos comentários da professora De Souza a idéia de que teoremas e demonstrações são do âmbito da Análise e não do Cálculo e esta concepção, outra vez, decorre, provavelmente, da forma como os conceitos são usualmente apresentados nessas duas disciplinas. Na maioria das vezes, nos cursos de Cálculo as demonstrações dos teoremas não são apresentadas; deixa-se essa parte para a Análise e trabalha-se apenas com exercícios envolvendo tais resultados. No entanto, há demonstrações que são essenciais no Cálculo e devem ser feitas, da maneira mais adequada e no momento mais oportuno, após o aluno já ter trabalhado intuitivamente com aquele resultado que vai ser demonstrado; o que não é adequado é reduzir essa disciplina à apresentação de teoremas e suas demonstrações, afinal, conforme destaca Rezende (2003), estas, na maioria das vezes, não carregam em si a idéia que permitiu intuir o resultado e o significado do mesmo.

Embora, de acordo com as falas de nossas depoentes, a disciplina ainda estivesse mais próxima da Análise do que efetivamente do Cálculo, destacamos uma observação bastante

³⁸ DE SOUZA (2009).

pertinente feita por De Souza que nos dá pistas de que, naquela época, já estava começando a acontecer na USP um fato bastante comum nos cursos de Cálculo atuais: os alunos concluírem a disciplina sabendo manipular muito bem as técnicas de cálculo, mas sem terem aprendido, ainda que de maneira intuitiva ou superficial, o significado de cada um daqueles conceitos vistos. Nossa entrevistada comentou que, embora o curso tenha sido conduzido de uma maneira que, atualmente, é bastante criticada pelos educadores, no caso específico dela, ele funcionou, mas funcionou no sentido de saber a técnica, de fazer com que o aluno, por meio da resolução de uma grande quantidade de exercícios, se tornasse capaz de realizar cálculos; foi um aprendizado por repetição e não um aprendizado efetivo do conceito:

A professora Junia falou: façam exercícios porque é o único jeito de aprender as técnicas. E eu fiz e realmente aprendi as técnicas (...) por repetição. (...) No entanto, quando eu me formei e fui dar aulas, não sabia, por exemplo, o que era uma derivada; eu sabia calcular. Sabia também calcular limite, porque fizemos muitos exercícios. (DE SOUZA, entrevista, 2009).

Desta forma, podemos dizer que, embora durante as aulas a preocupação principal fosse a fundamentação rigorosa da teoria, o estilo dos exercícios selecionados para que os alunos resolvessem nos momentos de estudo privilegiava, em demasia, o treino, por meio da repetição, das técnicas de cálculo de derivadas, integrais, etc., e não um aprendizado significativo daqueles conceitos vistos detalhadamente nas aulas teóricas. Rezende (2003) destaca que disto decorre um conflito pedagógico entre o que se faz e o que se pede: nas aulas prevalecem as demonstrações e as formalizações, ou seja, a sistematização do conteúdo, enquanto nos exercícios e nas avaliações o que se cobra, em geral, são técnicas de cálculos de limites, derivadas e integrais. Havia, portanto pouco espaço para dois elementos que, de acordo com o autor, são fundamentais no ensino de qualquer conteúdo: a preocupação com a significação do que está sendo trabalhado e com a construção do conhecimento e não apenas com a apresentação dos conceitos já prontos. Neste aspecto, talvez a disciplina já estivesse mais próxima do que é feito, atualmente, na maioria dos cursos de Cálculo de diversas instituições brasileiras, apesar de, hoje em dia, haver o agravante de o trabalho ser feito quase que exclusivamente com ênfase nas técnicas mesmo nas aulas teóricas, o que não acontecia naquela época; ao menos durante a exposição da teoria, o aluno tomava contato com detalhes importantes que atualmente ficam em segundo plano em muitas das disciplinas de Cálculo oferecidas no país. Por outro lado, de pouco adianta um curso que, nas aulas teóricas explore os conceitos de maneira profunda, mas que, depois, nos exercícios ignore totalmente aquilo que foi trabalhado ou um curso que trabalhe quase que exclusivamente com técnicas nas aulas

teóricas e exija que o aluno, nos exercícios, entre em contato com os refinamentos teóricos. É preciso atingir um equilíbrio, algo que, como ficará evidente ao final deste trabalho, aconteceu em pouquíssimos momentos ao longo da trajetória do ensino da disciplina no curso de Matemática da USP. E, provavelmente, essa não seja uma característica apenas desta instituição; se fizermos um estudo a respeito da trajetória do ensino do Cálculo em outras universidades, a situação poderá ser bastante parecida.

No ano de 1967, Botelho, que em 1966 havia sido a responsável pelas aulas de exercícios da disciplina de Cálculo conduzida por Gomide, foi quem ministrou as aulas teóricas deste assunto aos ingressantes nos cursos de Matemática e de Física. Segundo depoimentos de Ana Catarina Pontome Hellmeister e de Coelho, ex-professoras da USP e ex-alunas de Botelho neste curso de Cálculo, as turmas, assim como já acontecia em 1964 e 1966, eram muito grandes e as aulas eram ministradas em um auditório do instituto de Física.

Coelho destacou que a abordagem feita durante as aulas era bastante semelhante ao que estava feito no livro indicado como bibliografia para o curso - *Calculus with Analytic Geometry – A First Course* de Murray H. Protter e Charles B. Morrey Jr, o mesmo indicado por Lyra em 1964. No entanto, segundo ela, o livro praticamente não era utilizado no momento das aulas:

A Junia talvez nos falasse: isto está na página tal (...) mas, durante as aulas, nem abríamos o livro. Copiávamos o que ela fazia e usávamos o livro para fazer exercício. Eu, particularmente, também estudava a teoria por lá, porque, às vezes, ela pulava uma ou outra demonstração que nele estava feita. (COELHO, entrevista, 2009).

De acordo com nossas depoentes, o curso de Botelho se assemelhava mais a um curso de Análise atual do que a um curso atual de Cálculo:

Estava mais próximo de um curso de Análise atual, porque, por exemplo, fazíamos supremo, ínfimo, os epsilons e deltas, demonstrávamos teoremas de continuidade, enfim, coisas que hoje não se fazem nos cursos de Cálculo. (...) Era um curso de Cálculo, voltado às técnicas de cálculo, mas que englobava também esta parte que hoje se deixa para a Análise. (HELLMEISTER, entrevista, 2009).

Naquela época, era comum nas avaliações serem cobradas também algumas das demonstrações que haviam sido trabalhadas durante as aulas teóricas: “em toda prova havia uma parte essencialmente teórica (...) que era de demonstrações” ³⁹. No entanto, “a maioria dos alunos copiava aquela parte teórica e nem olhava; se preocupava apenas em aprender os

³⁹ COELHO (2009).

exercícios”⁴⁰. Esse comentário de Hellmeister destacando que a maioria dos alunos apenas copiava a parte teórica e depois a ignorava, se preocupando apenas em aprender a resolver os exercícios, mostra que, realmente, da forma como são apresentadas, para grande parte dos alunos, as demonstrações não fazem qualquer sentido em um curso inicial de Cálculo. Como alerta Rezende (2003), é necessário que os professores reflitam a respeito do papel das demonstrações para o desenvolvimento e a compreensão dos resultados teóricos do Cálculo; é preciso ter consciência de que, isoladamente, elas são incapazes de conduzir os alunos a essência do conhecimento matemático. De nada adianta o professor de Cálculo transformar seu curso em um rol de teoremas e demonstrações se não der condições para que aquilo tudo seja compreendido, de forma significativa, por seus alunos.

Além das aulas teóricas com Botelho, os alunos assistiam a algumas aulas de exercícios ministradas por um auxiliar. Segundo Coelho, essas aulas funcionavam da seguinte maneira:

O professor chegava, resolvia e esclarecia as dúvidas dos exercícios que ele havia nos passado na aula anterior. Ia resolvendo na lousa e se você olhasse e dissesse: eu fiz diferente ou por que isso não dá certo?... ele respondia, mas, não que fosse ficar andando pela classe e vendo se havíamos ou não resolvido os exercícios; ele ficava na lousa o tempo inteiro. (COELHO, entrevista, 2009).

Novamente, ao contrário do que acontecia nas aulas teóricas, nas aulas de exercícios não eram trabalhadas questões envolvendo demonstrações; eram exercícios de cálculo mesmo; questões do tipo: calcule a derivada, calcule a integral. “As demonstrações eram trabalhadas durante as aulas teóricas; talvez a própria Junia, de vez em quando, passasse algum exercício teórico”⁴¹.

Hellmeister frisou que o foco das aulas estava na apresentação já formalizada e sistematizada do conteúdo e no trabalho com as técnicas e que, embora, em alguns aspectos, o curso ainda fosse muito parecido com o que se faz atualmente em Análise, os livros indicados para consulta já eram, em sua maioria, de Cálculo: “eu me lembro que recomendavam o Apostol que já era um pouco mais profundo, (...) mas daí era somente para uma coisa mais especial. A maioria dos livros indicados era de Cálculo”⁴². Destacou ainda que, apesar de os livros serem, em sua maioria, em língua estrangeira, “a língua não foi um obstáculo (...);

⁴⁰ COELHO (2009).

⁴¹ COELHO (2009).

⁴² HELLMEISTER (2009).

obstáculo maior era realmente entender o conteúdo trazido pelos livros, que eram densos, tinham uma diagramação compacta, enfim, eram difíceis de ler.”⁴³.

Em resumo, com relação ao ensino de Cálculo no curso de Matemática da USP entre a aposentadoria de Catunda, em 1962, e a Reforma Universitária, ocorrida entre o final dos anos 1960 e início de 1970, podemos dizer que: foi nesta época que a disciplina se tornou cada vez mais próxima, de fato, do Cálculo Diferencial e Integral, mudando inclusive sua nomenclatura – já que até 1964 chamava Análise Matemática. Seguindo as idéias de Chervel, podemos afirmar que as alterações surgidas ao longo daquele momento de transição (ou de instabilidade) que havia começado com a mudança de direcionamento proposta Gomide e por Catunda a partir do início da década de 50, são incorporadas pelos professores e uma nova tendência passa a imperar: a partir desta época, os alunos primeiramente aprendem, de fato, a manipular os conteúdos básicos do Cálculo ainda sem muita crítica, embora de forma muito mais rigorosa e teórica do que aquela presente na maioria dos cursos atuais, para, posteriormente, em outra disciplina (que ao longo da trajetória do curso de Matemática da USP recebeu diversas denominações), retomarem, sob ponto de vista mais crítico, mais formal e com um nível maior de rigor, aqueles conceitos já vistos. Foi nesta época também que manuais, efetivamente de Cálculo, como, por exemplo, as obras de Protter & Morrey e até mesmo Piskunov e Demidovitch se tornaram populares entre alunos e professores do curso de Matemática da USP. É importante frisar, no entanto, que, em nenhum momento, até o final dos anos 1960, houve a preocupação em voltar a disciplina de Cálculo para ela mesma, para seus conceitos fundamentais e os seus significados; ela esteve o tempo todo subordinada a disciplina de Análise.

Vejamos então, como ficaram, e como se transformaram ao longo do tempo, os cursos de nosso interesse ministrados entre a Reforma Universitária, colocada em prática na Universidade em 1970, e a separação das disciplinas iniciais de Cálculo do Bacharelado e da Licenciatura ocorrida em 1994.

4.5.2 – Os cursos ministrados entre a Reforma Universitária e a separação das disciplinas iniciais de Cálculo do Bacharelado e da Licenciatura em 1994

A partir de 1968, a Reforma Universitária começou a ser implantada na Universidade de São Paulo e, dentre outras mudanças, as disciplinas deixaram de ser anuais e se tornaram

⁴³ HELLMEISTER (2009).

semestrais. No caso do Cálculo I, para o curso do primeiro semestre, estabeleceu-se o seguinte programa:

Cálculo Diferencial e Integral

1o semestre

1. Números reais e funções. Corpo real, axiomas. Função de uma variável real. Limites e continuidade. Estudo das funções elementares. Coordenadas no plano. Gráficos.
2. Cálculo Diferencial. Derivadas. Regras de derivação. Derivadas das funções elementares. Teorema de Rolle. Teorema dos acréscimos finitos. Aplicações ao estudo de gráficos de funções. Máximos e mínimos. Sentido da concavidade. Regras de l'Hospital. Diferencial. Infinitésimos e infinitos. Fórmula de Taylor. Resto.
3. Cálculo Integral. Integral definida. Propriedades. Integrabilidade de funções contínuas. Funções primitivas. Regras de integração. Integração de funções racionais e outras classes de funções. Integral imprópria.
4. Geometria analítica. Retas e segmentos orientados. Fórmula da distância. Equação de certas curvas. Retas, Retas paralelas e perpendiculares – Vetores num plano. Combinações lineares. Ângulos. Componentes. Funções vetoriais e suas derivadas. Velocidade e aceleração. Componentes normais e tangenciais. Coordenadas polares. Coordenadas no $\mathbb{R}^3$. Fórmula da distância. Retas. Planos. Ângulos, intersecções. Vetores no espaço. Combinações lineares. Produto escalar. Produto vetorial.
5. Aplicações geométricas do cálculo. Gráficos de funções. Tangentes. Assíntotas. Arco de uma curva. Curvas reversas. Triedro fundamental. Curvatura e torsão. (PIRES, 2006, p. 548).

Comparando o programa elaborado para a disciplina no momento em que ela se tornou semestral com aqueles da época em que ainda era anual que foram apresentados anteriormente, podemos perceber, inicialmente, que o curso de Cálculo I, que a partir de então passou a ter a duração de um semestre, passou a trabalhar apenas com funções de uma variável. Além disso, há tópicos que não aparecem mais, ao menos explicitamente, no programa, tais como: extremos de conjuntos, pontos de acumulação, conjunto de pontos sobre uma reta, Teorema de Bolzano, integração de algumas equações diferenciais simples, critérios de Bertrand, pontos singulares de uma curva, envoltória, evoluta, classificação dos pontos singulares de uma superfície, curvaturas das curvas situadas sobre uma superfície, coordenadas curvilíneas, duas formas quadráticas fundamentais. Por outro lado, foram acrescentados alguns conteúdos que, ao menos explicitamente, não constavam dos programas anteriores, como: coordenadas no plano, aplicações do Cálculo Diferencial ao estudo de gráficos de funções, integrabilidade de funções contínuas e gráficos de funções como uma aplicação geométrica do Cálculo. Também foi acrescentado todo o estudo da Geometria Analítica que, até então, não fazia parte do curso inicial de Cálculo. Notamos que foi a partir deste momento em que a disciplina passou a ser semestral que seu programa começou a se tornar mais próximo daquele em vigor atualmente na instituição, embora, na década de 1970, abordasse ainda determinados conteúdos que, hoje em dia, não são mais estudados na

disciplina de Cálculo, como, por exemplo, o corpo real e seus axiomas. Em sua pesquisa, Otero-Garcia (2011) sintetiza este caminhar, desde meados da década de 1940 até a criação do IME em 1970, em direção a um curso inicial efetivamente de Cálculo, tomando como referências as disciplinas de Cálculo e Análise que foram sendo criadas ou renomeadas ao longo deste período:

Na USP, observamos um início de tendência de especialização do ensino de análise [organização do Cálculo e da Análise em disciplinas diferentes] a partir da década de quarenta, com a criação da cadeira de *Análise Superior*, e, de forma acentuada na década seguinte, onde já se nota que os conceitos da análise parecem estar mais focados nas disciplinas de *Análise Matemática* do segundo e terceiro anos, e *Análise Superior* do quarto, enquanto que a parte algorítmica parece mais forte no primeiro. Esse movimento fica mais claro na década de sessenta, primeiramente com a separação da cadeira de *Análise Matemática* em *Cálculo Infinitesimal* e *Equações Diferenciais* e depois com o surgimento da disciplina de *Cálculo Avançado*. Finalmente, na década de setenta, após a reforma universitária, a separação do cálculo da análise é, de certo modo, efetivada. (OTERO-GARCIA, 2011, p. 212).

No ano de 1972, o professor responsável por ministrar Cálculo I para os alunos dos cursos do Bacharelado e da Licenciatura em Matemática foi Jacob Zimbarg Sobrinho. De acordo com o depoimento de Zara Issa Abud, ex-aluna deste curso e atual professora do IME, as aulas deste docente possuíam um equilíbrio entre teoria e técnica. Não era uma disciplina de Análise; era Cálculo mesmo, mas feito de uma forma bem cuidada:

Em geral, em um curso de Cálculo, aprendemos muita técnica e ele conseguiu dosar um pouco de teoria e um pouco de técnica. Não era só uma porção de regras para serem memorizadas; ele tentava explicar o porquê das coisas e desenvolver o espírito crítico do aluno. Ele não podia dar um curso de Análise, porque havia um programa a ser cumprido e talvez nem desse tempo de fazer tudo, mas tentava sempre não jogar as coisas, procurava justificar; e a Análise, o quê que ela faz? Ela é uma justificativa decente do Cálculo. Sem querer subestimar a Análise, mas uma das coisas que ela faz é justificar, de maneira rigorosa, o Cálculo. (ABUD, entrevista, 2009).

É interessante destacar que Abud, no último trecho citado, demonstra ter a mesma opinião de Gomide a respeito de uma das relações existentes entre as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise Matemática: o conteúdo trabalhado na segunda é uma justificativa, uma crítica rigorosa daquilo que foi apresentado na primeira. Convém destacar que, pelos comentários de Abud, Zimbarg Sobrinho conseguiu ministrar um curso inicial de Cálculo bastante próximo daqueles considerados ideais, equilibrando discussões teóricas a respeito dos conceitos com a manipulação dos mesmos. Embora não fizesse uma abordagem com o nível de rigor típico da Análise, também não reduzia a disciplina a um conjunto de

técnicas a serem memorizadas; estas eram sim apresentadas e trabalhadas, mas de forma crítica, com justificativas.

A entrevistada destacou também que não se recorda de Zimbarb Sobrinho ter adotado algum livro-texto durante o curso; os livros eram utilizados mais por ele, no preparo de suas aulas, do que pelos alunos e um dos empecilhos para isso, de acordo com ela, era o idioma:

Ele frequentemente levava livros em inglês para a sala de aula, mas nós estávamos no começo e não tínhamos nenhum traquejo com as línguas estrangeiras. (...) Há uns 30 anos (...), quase não havia livros de Cálculo em português. Havia o Piskunov e o Demidovitch que acho que já eram traduzidos (...), mas a maior parte deles era em inglês. (...) Depois, quando começaram a aparecer os livros [em português], apareceu uma série deles de uma só vez (Ibid.).

Abud destacou ainda que o material de Análise de Catunda, tão difundido entre alunos e professores até o início da década de 1960 não era mais utilizado neste momento, ao menos na disciplina introdutória, que nesta época já tinha um enfoque totalmente diferente do período em que o catedrático esteve na universidade: “a geração anterior a minha falava muito do professor Catunda e de seus livros, mas eu nem cheguei a conhecê-lo”⁴⁴. Talvez, a obra deste matemático ainda fosse uma das referências na disciplina de Análise que agora não era mais cursada no primeiro ano da universidade.

Zimbarb Sobrinho, algum tempo depois de ter ministrado este curso em 1972, publicou um livro chamado *Cálculo sem Epsilons nem Deltas*. Nossa depoente nos disse que essa obra não chegou a ser adotada em nenhum curso da Universidade de São Paulo, nem mesmo naqueles ministrados pelo próprio autor. Segundo ela, é um livro puramente teórico, sem nenhum exercício, difícil de ser adotado em um curso inicial. Durante as aulas que ministrou em 1972, tal professor chegou a comentar com seus alunos a respeito da possibilidade dessa abordagem do Cálculo sem os epsilons e deltas: ele “comentou conosco que toda aquela parte de limite e continuidade, que normalmente é feita com epsilons e deltas e que os alunos têm muita dificuldade, ele achava que era possível fazer sem essa parte mais complicada, que havia outra maneira.”⁴⁵.

É importante destacar que, entre o final da década de 1960 e início da de 70, com a Reforma Universitária, a criação do IME e a exigência de que todas as disciplinas de Matemática da Universidade fossem ministradas por este Instituto, começou a haver uma grande demanda por novos professores universitários. Por esta razão, diversos ex-alunos, recém-formados no curso de Matemática, foram contratados e aquelas disciplinas destinadas

⁴⁴ ABUD (2009).

⁴⁵ ABUD (2009).

aos ingressantes acabavam ficando, na maioria das vezes, sob a responsabilidade destes jovens professores que, conforme veremos, acabaram sendo responsáveis por inserir algumas novidades na forma como o Cálculo era trabalhado, confirmando a tese de Chervel (1990) de que a renovação do corpo docente é fundamental para a evolução das disciplinas.

Em 1973, a disciplina de Cálculo I do curso de Matemática foi conduzida pela professora Hellmeister que tinha, na época, apenas 22 anos de idade e havia concluído sua graduação três anos antes. De acordo com o depoimento de Eduardo do Nascimento Marcos, atual professor do IME e ex-aluno dessa disciplina ministrada por Hellmeister, tal professora deu um excelente curso de Cálculo, bastante rigoroso, se assemelhando ao que se exige, atualmente, na disciplina de Análise: “comparado com o que fazemos hoje, era mais ou menos o nível de rigor que se exige em um curso de Análise para o Bacharelado”⁴⁶ com todos os resultados teóricos cuidadosamente demonstrados durante as aulas. No entanto, apesar do formalismo, Marcos destacou que aquele curso já estava mais próximo “de um curso de Cálculo, porque, na época, a disciplina de Análise era mais rigorosa do que esta (...) de Cálculo da Ana”⁴⁷; era um Cálculo bem dado. Comparando o que se fazia naquela época com o que se faz atualmente, Marcos comentou que:

Os exercícios não tinham que ser absolutamente triviais e, hoje em dia, nesse sentido, piorou muito. O Cálculo ficou muito mais trivializado; por exemplo, quase não se faz demonstrações usando os epsilons e deltas, morre-se de medo disso; muitos teoremas interessantes não são mais demonstrados e também não se exige tanto no Cálculo. (Ibid.).

Os exercícios trabalhados eram, em sua maioria, teóricos. Marcos disse que até havia exercícios do tipo “calcule tal coisa”, mas não era o que aparecia com mais frequência; a ênfase era mais na teoria do que nas técnicas. E novamente exemplificando com questões que eram trabalhadas na época, voltou a comparar o nível dos exercícios discutidos no curso de Hellmeister com o dos apresentados no Cálculo atualmente:

Os exercícios não eram triviais; eram muito mais difíceis do que os que se fazem hoje. Víamos, por exemplo, no Cálculo I o completamento dos números reais pelo axioma do supremo, pelos intervalos encaixantes, pelas seqüências de Cauchy e depois mostrávamos que as três formas eram equivalentes. (Ibid.).

Destacou, inclusive, um exercício trabalhado por Hellmeister que o marcou e que, em sua opinião, o possibilitou compreender a definição de limite:

⁴⁶ MARCOS (2009).

⁴⁷ MARCOS (2009).

Eu me lembro, inclusive, de um exercício em particular que me fez entender, de fato, a definição de limite e que, em minha opinião, todos os alunos também deveriam fazer; o dia em que fizeram tal exercício e entenderem, a partir daquele momento, poderão compreender as definições mais difíceis de limite. O exercício consiste em mostrar que, para a função definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \\ 1/q & \text{se } x = p/q \end{cases}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ para qualquer a . Precisávamos demonstrar então que o limite desta função é zero em todos os pontos apesar de existirem infinitos pontos onde a função não vale zero. Além disso, esta é uma função que só é contínua nos irracionais e pensar em uma função que é contínua apenas nos irracionais era algo surpreendente para nós alunos e eu acho que o dia em que consegui resolver tal exercício, pude entender um pouco melhor qual a estrutura dos racionais dentro dos reais e também a definição de limite. É um exercício no qual a definição tem de ser usada com muita precisão e isto me marcou. (Ibid.).

Estes comentários de Marcos nos deixam com a impressão de que a disciplina ministrada por Hellmeister tinha uma orientação bem mais voltada para a Análise do que algumas outras analisadas anteriormente. Enquanto que, em alguns dos cursos iniciais de Cálculo ministrados na década de 1960, durante as aulas teóricas a ênfase era a formalização dos conceitos e nos exercícios trabalhava-se apenas com manipulações de técnicas, neste curso de Hellmeister a ênfase, tanto nas aulas quanto nos exercícios, estava nas discussões dos resultados, nos aspectos teóricos do conteúdo. Além disso, as afirmações de Marcos mostram claramente seu descontentamento com o rumo tomado pelos cursos de Cálculo atuais, que valorizam demasiadamente a técnica em detrimento das discussões teóricas. Talvez o ideal, hoje em dia, não seja uma disciplina tão teórica, formal e rigorosa como esta ministrada por Hellmeister em 1973, mas, com certeza, também não podemos eliminar do Cálculo qualquer demonstração ou discussão mais aprofundada a respeito de seus conceitos fundamentais. Concordamos com Marcos que reduzir a disciplina a um amontoado de regras de diferenciação e integração é trivializá-la em demasia.

Durante as aulas de Hellmeister, os alunos costumavam tomar nota do que era apresentado na lousa e havia também um livro-texto que era seguido: “*Cálculo: um curso universitário*” de Edwin Moise, que trazia uma forma diferenciada de abordar os conteúdos: uma apresentação em espiral. De acordo com nossos depoentes, a introdução do texto de Moise foi a primeira novidade trazida aos cursos de Cálculo por estes jovens professores contratados pelo Instituto de Matemática no início da década de 1970. A respeito desse manual, Marcos disse o seguinte:

É um livro que, como o próprio autor dizia no início, é circular. Então, (...) faz o seguinte: assume alguns resultados, diz ao leitor: isso aqui vai ser assumido, isto também, enfim, assume várias coisas e, em cima daquilo, aborda vários assuntos de

maneira rigorosa e, depois, volta demonstrando algumas daquelas coisas assumidas anteriormente; não é um livro linear. E eu acho que isso, para mim, funcionou (MARCOS, entrevista, 2009).

Marcos afirmou que Hellmeister seguia, em suas aulas, essa mesma idéia de trabalho em espiral presente no livro. Salientou também que, embora o Moise fosse o texto de referência, outras obras eram indicadas aos alunos, como, por exemplo, os livros de Spivak (*Cálculo Infinitesimal*), Apostol (*Calculus*) e Courant (*Cálculo Diferencial e Integral*).

Percebe-se então que neste curso de Hellmeister, embora o foco ainda fosse a apresentação já formalizada e sistematizada do conteúdo, esta já começou a ser feita de uma forma diferenciada, adotando para isso um manual que trazia uma abordagem alternativa dos conceitos, que poderia contribuir para a construção, por parte dos alunos, dos significados dos elementos principais do Cálculo vistos durante a disciplina.

Deve-se destacar que, enquanto os cursos de Cálculo I ministrados aos alunos da Matemática nos primeiros anos da década de 1970 continuavam sendo conduzidos de forma tradicional, totalmente baseado em aulas expositivas, algo inovador estava sendo feito nos cursos da mesma disciplina ministrados aos alunos da Física. Um grupo de docentes comandados pela professora Iracema Martin Bund estava conduzindo uma experiência de ensino baseada em dinâmica de grupo e estudo dirigido, na qual todos os conteúdos do Cálculo eram trabalhados primeiramente pelos alunos, por meio de discussões e trabalhos em grupo, para posteriormente serem institucionalizados pelo professor. Por volta de 1974, a professora Maria Cristina Bonomi, recém-contratada pela USP, resolveu adaptar tal experiência, que será detalhada no capítulo 5 deste trabalho, e levá-la também para as turmas da Matemática; explicitando, mais uma vez, o quanto a contratação de novos professores pode influenciar no processo de evolução de uma disciplina.

Em 1976, Bonomi foi uma das professoras responsáveis por ministrar a disciplina em questão para os alunos da graduação em Matemática e seu curso, de acordo com sua ex-aluna Cláudia Cueva Cândido, que atualmente é professora do IME, foi todo baseado em textos, exercícios e questões para serem pensadas em grupo:

Em cada um das aulas, ela [Bonomi] nos entregava um roteiro (...) que nos levava até a definir os conceitos. Nesses roteiros, ela propunha algumas questões para pensarmos e discutirmos em grupo: tinha coisa para completar, para fazer gráfico, para recordarmos do ensino médio... Discutíamos em grupo e daí, em certo momento, estávamos prontos para uma definição bem escrita, com rigor, na lousa. Depois que ela havia passado por todos os grupos e discutido – ela rodava o tempo todo entre nós enquanto trabalhávamos nas questões do roteiro – ela ia para a lousa e amarrava. A cada aula, todas as pessoas do grupo recebiam o roteiro, cada um fazia

suas anotações no seu caderno e, depois, entregávamos alguns exercícios, algumas atividades, que ela pedia para o grupo escrever (CÂNDIDO, entrevista, 2009).

Por meio dessa descrição das aulas de Bonomi feita por Cândido, percebemos que, ao contrário do que acontecia nos cursos de Cálculo ministrados na Matemática até então, em que a ênfase era a apresentação, com níveis variáveis de rigor, do conteúdo já construído e sistematizado, nestes cursos conduzidos de acordo com essa metodologia de roteiros de estudos e trabalhos em grupo, a ênfase era a construção do conhecimento pelo próprio aluno. A sistematização só era feita após uma série de discussões introdutórias, normalmente em grupos, a respeito do conceito que estava sendo introduzido; discussões estas que conduziam naturalmente o aluno até a definição formal do que ele estava estudando. Podemos dizer, portanto, que nessas experiências de ensino, a significação dos elementos fundamentais do Cálculo é que foi valorizada e que a principal preocupação dos professores era fazer com que os conceitos fossem aprendidos de forma significativa pelos alunos, que deveriam participar ativamente da construção do próprio conhecimento, ao invés de apenas assistirem e tomarem nota do conteúdo já formalizado e sistematizado.

A professora Iole de Freitas Druck, responsável pelo curso de Cálculo I de outra turma da Matemática em 1976 e que também adotava os roteiros, comentou que, apesar desses professores envolvidos nesta experiência empregarem um método de ensino diferente, a disciplina continuava sendo ministrada de forma bastante rigorosa. De acordo com ela: “nossa pretensão, aquilo com que nos preocupávamos, era que os alunos aprendessem, de fato, a fazer as demonstrações com epsilons e deltas. Aliás, nesses cursos não havia muito contexto não; era mais a teoria (...) era mastigar conceitos”⁴⁸. O nível de rigor, embora ainda bastante alto, já não era aquele presente em um curso de Análise. A este respeito, Cândido comentou o seguinte:

A Cristina demonstrou tudo, todos os resultados; cobrou demonstração, inclusive em provas. Então poderíamos dizer que estava mais próximo de um curso de Análise, mas, por outro lado, nenhum curso de Cálculo foi tão pesado quanto meu (...) de Análise I, no qual estudamos a construção do conjunto dos números reais, com os oito axiomas e as implicações todas. No (...) Cálculo vimos supremo e ínfimo, mas não discutimos os cortes de Dedekind, os intervalos. (...) Eu acho que o que a Cristina fez conosco foi um curso de Cálculo muito bem feito (Ibid.).

Por esse comentário de Cândido percebemos que, de fato, como havíamos destacado ao analisarmos o programa elaborado para a disciplina de Cálculo no momento em que ela se

⁴⁸ DRUCK (2009).

tornou semestral, alguns conteúdos que, anteriormente, eram trabalhados no curso inicial da disciplina deixaram de ser abordados, como, por exemplo, intervalos e a idéia de cortes de Dedekind. Além disso, notamos, embutida em tal comentário, mais uma vez, a idéia de que em um curso de Análise é que as demonstrações devem ser todas feitas e cobradas nas avaliações e não em um curso de Cálculo. Em qualquer uma destas disciplinas demonstrações podem ser feitas e cobradas dos alunos; o que deve ser levado em consideração no curso inicial de Cálculo, conforme já destacamos algumas vezes, é quais as demonstrações que são fundamentais para a compreensão dos significados dos conceitos e resultados centrais da disciplina e de que forma estas devem ser trabalhadas. O ponto principal não diz respeito a fazer ou não demonstrações e sim a como fazê-las de forma compreensível e significativa para o aluno.

Os alunos costumavam tomar nota naqueles momentos em que a professora ia para a lousa institucionalizar o conteúdo, mas os roteiros eram mesmo a base das aulas; gastavam muito mais tempo trabalhando neles do que tomando nota: “eu sempre tive um caderno, mas era bem fininho porque a maior parte das coisas nós fazíamos nos roteiros”⁴⁹. Bonomi não adotava um livro-texto; apenas recomendava alguns para quem quisesse estudar por outro material: “ela falava a respeito de alguns livros, como o Apostol, por exemplo. E também nos indicava o Piskunov caso quiséssemos fazer mais exercícios. (...) Mas não havia esse estímulo por buscar livros”⁵⁰. Na época, o que eram utilizados eram fascículos de Cálculo Diferencial e Integral escritos por vários professores do IME como, por exemplo, Hamilton Luiz Guidorizzi; os roteiros chegavam, inclusive, a fazer referência a estes fascículos, a indicar algumas páginas dos mesmos para que os alunos lessem durante as aulas. A respeito de tais fascículos, Cândido comentou o seguinte:

Eram bem formais, como livrinhos de Cálculo. Era legal termos os fascículos; comprávamos todos (...). Eu me lembro que ela nos falava: agora estamos no fascículo tal, então íamos lá e comprávamos. Eram em português e isso nos ajudava na hora de estudar, de fazer exercícios, demonstrar alguma coisa (Ibid.).

Em 1977, Bonomi não estava mais dando aulas na USP – ficou afastada entre 1977 e 1988 – mas o curso de Cálculo I continuava a ser ministrado de acordo com essa metodologia de trabalhos em grupos e roteiros. Cristina Cerri, atual professora da Universidade de São Paulo, ingressou como aluna no curso de Matemática desta universidade exatamente em 1977

⁴⁹ CÂNDIDO (2009).

⁵⁰ CÂNDIDO (2009).

e teve aulas de Cálculo com a professora Carmen Sylvia Cardassi. Na entrevista que nos concedeu, destacou que essa disciplina, naquele ano,

Foi trabalhada por meio de roteiros e (...) tínhamos trabalhos em grupo, trabalhos individuais, tarefas para casa e aulas expositivas. Depois de um roteiro de trabalho, tínhamos, em geral, uma aula expositiva de sistematização do assunto, mas os trabalhos, na maioria das vezes, eram em grupo mesmo. Cada roteiro tratava de um tema; alguns assuntos eram introduzidos em aula expositiva e depois trabalhávamos com o roteiro, mas, realmente, ao longo do curso, tínhamos muitos roteiros. A lembrança que eu tenho é de trabalhar bastante em sala de aula; era um curso de três horas com três encontros semanais; às vezes, não dava para terminar um roteiro em uma aula e então terminávamos na outra. (CERRI, entrevista, 2009).

Alegria Gladys Chalom, atual professora do IME, também foi aluna de Cardassi nesta turma de 1977 e comentou que os roteiros e trabalhos em grupo eram usados como ferramentas na tentativa de promover maior aprendizagem do conteúdo.

O curso de Cardassi era bastante rigoroso e, de acordo com Chalom e Cerri, para espanto de todos os alunos, o conteúdo visto na primeira semana de aula foi o axioma da completividade, que estabelece que o corpo dos números reais é ordenado e completo. Os resultados eram todos demonstrados e, segundo Cerri,

Os roteiros, inclusive, encaminhavam as demonstrações de resultados importantes, como, por exemplo, o Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema do Valor Médio e suas aplicações... Enfim, havia vários assuntos nos quais as demonstrações eram encaminhadas pelos roteiros, como todo o rigor. Víamos: supremo e ínfimo, depois funções, limites com epsilons e deltas, propriedades de limites, depois derivadas e todos os resultados, etc. Tudo sempre com todas as demonstrações (Ibid.).

Chalom destacou que o nível de rigor do curso de Cardassi era bem mais alto que o adotado atualmente nos cursos de Cálculo. Segundo ela, dedicava-se muito mais tempo aos epsilons e deltas do que hoje em dia. Para Cerri, aquela disciplina ainda estava mais próxima da Análise: “comparando com o que é hoje o curso de Análise e com o que se transformou o curso atual de Cálculo, aquela disciplina que eu cursei em 1977 tinha mais corpo de um curso de Análise”⁵¹. E, de acordo com ela, analisando o que acontece hoje em dia, fica-se com a impressão de que “o curso (...) como era dado antigamente preparava melhor o aluno para a área de Análise, para o pensamento analítico; um curso (...) dando muita ênfase às técnicas deixa buracos”⁵². Tal comentário de Cerri traz à tona, mais uma vez, e, nesse caso, de maneira explícita, uma idéia bastante difundida entre professores universitários: a de que o curso de Cálculo é, na verdade, uma preparação para a área de Análise. É inegável que este é

⁵¹ CERRI (2009).

⁵² CERRI (2009).

um de seus papéis, mas que não pode, de forma alguma, como aconteceu muitas vezes desde a introdução destas duas disciplinas no ensino superior brasileiro e ainda hoje acontece, ser visto como sendo o único, pois, assim, todas as especificidades do Cálculo, percebidas pela história de seu desenvolvimento, seriam perdidas. Mais uma vez, destacamos a importância de se voltar esta disciplina a ela mesma e às suas idéias fundamentais, dissociando-a, ao menos em parte, da disciplina de Análise, o que ainda não acontecia nesse curso ministrado por Cardassi em 1977. De qualquer forma, concordamos com Cerri que um curso enfatizando em demasia às técnicas “deixa buracos” e pode dificultar a formação do pensamento analítico nos alunos.

No curso de Cardassi, além dos roteiros, eram indicados alguns livros para que os alunos pudessem estudar: “Eu me lembro daquelas apostilas que, posteriormente, deram origem ao livro do Hamilton Guidorizzi e (...) também de termos utilizado o Spivak. (...) Me lembro de ter usado os livros clássicos da época para estudar”⁵³. Chalom complementa dizendo que “ela [Cardassi] nos indicou uma série de livros dentre os quais estavam o Moise e o Apostol”⁵⁴. Estes, no entanto, não eram utilizados durante as aulas, nas quais se usava apenas os roteiros e, eventualmente, aqueles fascículos de Cálculo Diferencial e Integral, também adotados na disciplina conduzida por Bonomi em 1976.

Assim como acontecia no curso de Bonomi, o objetivo central das aulas de Cardassi era a construção do conhecimento por parte do aluno e não a apresentação formalizada, por parte do professor, do conteúdo já sistematizado. No entanto, apesar desta semelhança de objetivos, a descrição do curso de Cardassi apresentada por Cerri e por Chalom nos dá indícios de que as disciplinas conduzidas por Bonomi e por Cardassi tinham orientações um pouco diferentes: enquanto a primeira era totalmente estruturada por meio de roteiros, a segunda os combinava com aulas expositivas e, de acordo com as impressões de nossos depoentes, tinha uma abordagem ainda mais próxima da Análise do que aquela do curso de Bonomi, o que mostra, de maneira bastante clara, a influência do professor e de suas concepções na condução de uma disciplina. De qualquer forma, o principal a se destacar é que, em ambos os casos, o aluno exercia papel ativo na construção do próprio conhecimento, algo que deixou de acontecer em 1978, quando os professores envolvidos na experiência dos roteiros passaram a se dedicar a outros projetos e a nova equipe responsável pelo ensino de Cálculo optou, provavelmente pelo grande volume de trabalho ocasionado pela metodologia em vigor até então, por retomar a forma tradicional de ensino, baseada predominantemente

⁵³ CERRI (2009).

⁵⁴ CHALOM (2009).

em aulas expositivas, o que mostra que, embora a renovação do corpo de professores responsável por uma disciplina ocasione, na maioria das vezes, alterações na forma como esta é ensinada, nem sempre tais mudanças são no sentido de inovações; pode também haver retrocessos.

Em 1978, uma das professoras responsáveis por tal disciplina foi Nair Fernandes e uma de nossas entrevistadas, Chalom, não concluiu a disciplina de Cálculo I, em 1977, com Cardassi e, por esta razão, precisou fazer o curso de Fernandes. De acordo com ela: “O curso da Nair era bem canônico. Era aquele modelo com começo, meio e fim. Ela fazia quase tudo na lousa. (...) Não tinha mais aqueles roteiros. (...) Era lousa, giz”⁵⁵, ou seja, o foco deixou de ser a construção dos conceitos e de seus significados por parte dos alunos e voltou a ser a apresentação formal, pelo professor, do conteúdo já sistematizado, como acontecia antes da introdução dos roteiros. Com relação aos materiais utilizados durante as aulas, afirmou que os alunos costumavam tomar nota daquilo que era exposto e, além disso, eram indicados alguns livros para auxiliar no estudo dos conteúdos trabalhados, como, por exemplo, as obras *Cálculo: um curso universitário* de Moise e *Calculus* de Apostol.

Chalom destacou que Fernandes conduzia a disciplina com um nível de rigor bastante alto: “não dá nem para comparar o curso daquela época com os cursos de hoje em dia. Era outro mundo”⁵⁶. Todos os resultados teóricos eram cuidadosamente demonstrados durante as aulas e, posteriormente, cobrados dos alunos no momento das avaliações e, ainda de acordo com nossa depoente, embora o curso já estivesse mais próximo de uma disciplina efetivamente de Cálculo, no programa ainda estavam presentes conteúdos que, atualmente, são abordados em Análise Matemática, como, por exemplo, a construção dos números reais e axioma da completividade.

Pelo que foi exposto até este momento, podemos perceber que foi na década de 1970 que alguns professores começaram a se preocupar com a forma como os cursos de Cálculo eram ministrados, propondo alterações nos materiais que eram utilizados como referências bibliográficas e inovações metodológicas, sendo que estas últimas, inicialmente, se restringiram às turmas da graduação em Física, mas posteriormente, foram levadas também para a Matemática. É interessante destacar que tais mudanças não tiveram como objetivo “facilitar” a disciplina, deixá-la mais próxima do Cálculo do que da Análise, mais intuitiva, mais voltada à manipulação de técnicas. O objetivo dos que as propuseram era tentar proporcionar aos alunos um aprendizado significativo daquele conteúdo que continuava – e,

⁵⁵ CHALOM (2009).

⁵⁶ CHALOM (2009).

de acordo com o que se defendia na época, deveria continuar - a ser trabalhado de forma bastante rigorosa e formal na disciplina. Deve-se frisar, no entanto, que essas reformulações não foram incorporadas à prática dos professores do Instituto de Matemática; foram experiências isoladas de um grupo de docentes que estava ministrando a disciplina naquelas ocasiões. Ao final da década, após experiências de ensino baseadas em abordagens não convencionais do conteúdo, como, por exemplo, aquela em espiral proposta por Moise, e aquela baseada em trabalhos em grupos, conduzidos por meio de roteiros, como aqueles introduzidos por Martin Bund na Física e por Bonomi na Matemática, a disciplina de Cálculo I volta a ser trabalhada de forma tradicional, por meio, exclusivamente, de aulas expositivas e adotando como referências manuais que tratam do assunto de maneira clássica. Como veremos na sequência, ao longo de toda a década de 1980 diversas orientações diferentes de condução da disciplina passaram a coexistir – algumas mais próximas da Análise, outras mais próximas do Cálculo, outras equilibrando elementos destas duas tendências - até que, a partir do início dos anos 1990, o curso de Cálculo I se tornou efetivamente mais próximo daquele que conhecemos hoje em dia.

No ano de 1980, uma das professoras responsáveis pela condução da disciplina inicial de Cálculo foi Maria Stella Amorim Coutinho Castilla e um de seus alunos neste curso foi o atual professor do IME, Oswaldo Rio Branco de Oliveira, que nos concedeu uma entrevista para esta pesquisa.

De acordo com o depoimento deste professor, o esquema das aulas de Castilla era o seguinte: primeiramente, ela apresentava o conteúdo a ser trabalhado, demonstrava quase todos os resultados teóricos referentes àquilo que estava sendo abordado e, em seguida, reservava um tempo para que os alunos resolvessem alguns exercícios, sempre de técnicas: “era um curso de Cálculo, realmente de cálculo: calcular derivadas a granel, (...) integrais (...), mudanças de variáveis em integração (...). Tudo a granel; bastante prática de cálculo. (...) O curso era, realmente, bem prático”⁵⁷.

Percebe-se que, neste curso, a única participação do aluno em seu processo de aprendizagem era fazer uma infinidade de exercícios baseados naquilo que havia sido exposto em sala de aula pelo professor; não lhes cabia qualquer papel na construção significativa dos conceitos e idéias fundamentais do Cálculo; tudo lhes era apresentado já formalizado e sistematizado. O foco do curso estava no treinamento algébrico e sintático dos resultados o que, de acordo com Rezende (2003), traz imbuída uma visão bastante comum: o Cálculo

⁵⁷ OLIVEIRA (2009).

como uma Pré-Análise e não como uma disciplina independente com conteúdos e objetivos próprios e, como possivelmente ficará evidente para o leitor ao final deste capítulo, esta foi uma visão que esteve bastante presente em diversos momentos da trajetória do curso de Matemática da USP.

A disciplina, segundo Oliveira, estava, de fato, mais próxima do Cálculo Diferencial e Integral do que da Análise Matemática, dando ênfase, principalmente, à manipulação das técnicas de cálculo por meio de “bastante exercício para fazer em casa, (...), muitas listas de exercícios, exercícios resolvidos”⁵⁸. Este comentário de nosso entrevistado deixa bastante claro que ele associa à disciplina de Cálculo a manipulação de técnicas por meio da resolução de uma série de exercícios, concepção que, como já destacamos, não é adequada, mas perfeitamente compreensível, já que, estar mais próximo do Cálculo do que da Análise, tem sido, ao longo da história do ensino dessas disciplinas, valorizar as resoluções de exercícios de técnicas de cálculo ao invés de destinar um tempo maior a discussão de detalhamentos teóricos e demonstrações.

Oliveira destacou ainda que o próprio livro indicado como referência por Castilla – *O Cálculo com Geometria Analítica* de Louis Leithold – já deixava explícito que se tratava de um curso de Cálculo e não de Análise. No entanto, era um Cálculo diferente do ministrado em cursos aplicados como os de Engenharia; era seguido um modelo específico para alunos das diversas graduações oferecidas pelo Instituto de Matemática:

Como o primeiro ano era unificado [para todos os alunos dos diversos cursos de graduação oferecidos pelo IME], a disciplina [de Cálculo I] também era unificada, tanto para quem fosse para a Matemática pura ou para a Licenciatura, Computação, Estatística... E o padrão (...) era o de um curso para o Bacharelado em Matemática pura (OLIVEIRA, entrevista, 2009).

Neste curso de Castilla, as demonstrações dos resultados apresentados em sala de aula, ao contrário do que acontecia até o final da década de 1970, já não eram mais cobradas dos alunos nas avaliações:

Que eu me lembre, elas não eram cobradas. Em uma prova ou outra, às vezes, aparecia uma demonstração mais simples com epsilons e deltas. (...) Para nós, qualquer demonstração era complicada. Os alunos até se dividiam entre aqueles que gostavam de fazer exercícios de conta e aqueles que gostavam de fazer demonstrações; os que gostavam de demonstrações eram minoritários (OLIVEIRA, entrevista, 2009).

⁵⁸ OLIVEIRA (2009).

Segundo nosso entrevistado, a disciplina continuava a ser ministrada de forma rigorosa, mas com um nível de rigor que, provavelmente, era menor do que o observado em anos anteriores; o próprio “livro básico adotado era mais simples, apesar dos epsilons e deltas [ainda] estarem presentes no curso”⁵⁹. Aliás, ainda de acordo com o depoente, além deles estarem presentes no livro eram trabalhados também em sala de aula: “a professora também procurava ensinar epsilons e deltas. Essa parte do curso era bem difícil, um problema para entender”⁶⁰. Especificamente com relação ao manual de Leithold, Oliveira destacou que:

Era mais básico do que o [livro] adotado atualmente na Engenharia – (...) o texto de Hamilton Guidorizzi⁶¹. [O Cálculo com Geometria Analítica de Leithold] é um livro com bastante aplicação e uma forma de ensinar paulatina, com muitos exemplos. (...) É um livro, realmente, elementar, mas mesmo assim gerava dificuldades. (...) Não é um livro de Matemática teórico; é (...) bastante útil para Matemática Aplicada, Engenharia. (Ibid.).

É interessante destacar que, pelo que pudemos perceber, Leithold parece ter planejado este manual não para os cursos de Matemática, nos quais, geralmente, a ênfase é posta no trabalho com a conceitualização rigorosa das idéias do Cálculo, e sim para aqueles cursos que utilizam os conceitos em questão como ferramentas. O uso deste texto parece bastante adequado para alunos que, em sua trajetória profissional, precisarão trabalhar com as aplicações da Matemática em outras áreas. Neste sentido, Leithold é um texto bastante diferente dos adotados até então nos cursos de Matemática da USP e que contribuiu para que fosse dado um novo direcionamento à disciplina inicial de Cálculo. Em 1980, quando tal livro foi utilizado como referência principal, é que a disciplina esteve mais próxima daquela ministrada atualmente. É preciso salientar, no entanto, que, embora Castilla tenha optado por trabalhar com tal livro-texto, na mesma época outros professores do IME não o recomendavam no curso de Matemática e tal fato vem ao encontro do alerta feito pela professora Cerri durante a entrevista que nos concedeu:

Aqui [na USP] temos muita autonomia, ao contrário, talvez, das faculdades particulares ou escolas menores, em que a decisão vem de cima para baixo, em que os professores são horistas e apenas dão aulas, sem toda esta liberdade. Aqui, quando você é designado para ministrar uma disciplina, há toda liberdade para que você o faça como desejar. Então, muitas vezes acontecem mudanças radicais de um ano para outro não porque houve discussões a respeito, e sim porque o professor que está ministrando a disciplina acha isso ou aquilo, ou tem algum material que gosta de usar, ou já está acostumado dar aulas de um determinado jeito. (...) Então, ao fazer esse levantamento ao longo da história do ensino do Cálculo no curso de

⁵⁹ OLIVEIRA (2009).

⁶⁰ OLIVEIRA (2009).

⁶¹ GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 1988.

matemática da USP, você vai observar mudanças de condução, de apresentação, de trabalho, que tem muito a ver com as pessoas que estão lá naquele momento. Muitas vezes não tem um investimento de um determinado grupo, (...) um grande investimento, um projeto, uma proposta (...) discutida, pensada (CERRI, entrevista, 2009).

O padrão de curso adotado por Castilla não foi o único predominante no IME durante a década de 1980. Havia, na mesma época, professores que continuavam ministrando a disciplina inicial de Cálculo com altíssimo nível de rigor e com orientação mais voltada à Análise Matemática e à conceitualização formal do conteúdo do que à manipulação dos conceitos básicos e das técnicas de cálculo, conforme explicitaremos neste final de capítulo.

Em 1983, o professor Paulo Ferreira Leite foi o responsável por ministrar as aulas de Cálculo I para uma das turmas do curso de Matemática da USP e entre seus alunos estava Fernanda Soares Pinto Cardona, atual professora do IME e uma de nossas entrevistadas nessa pesquisa.

De acordo com ela, as aulas de Leite eram sempre expositivas e o curso de Cálculo ministrado por ele, assim como todas as outras disciplinas que cursou durante sua graduação, apresentava um grande nível de formalismo, com todos os resultados teóricos cuidadosamente demonstrados: “o conteúdo da disciplina era muito difícil; a idéia naquele tempo era formalizar o mais rápido possível. E (...) destaco que isso não era uma falha apenas do curso do professor Paulo; era uma característica de todas as disciplinas da graduação”⁶². A entrevistada comentou que o curso de Leite estava, na realidade, muito mais próximo da Análise Matemática do que do Cálculo Diferencial e Integral:

Sem dúvida estava mais próximo da Análise do que do Cálculo. E mesmo os meus outros cursos além do Cálculo eram bem mais pesados. Por exemplo, o curso de Análise que eu fiz quando era estudante foi um curso de Medida; não tínhamos uma disciplina de Análise nesse sentido que se vê hoje; tínhamos, ainda na graduação, um curso de Medida mesmo. O curso de Álgebra Linear que fizemos também não foi um curso comum de Álgebra Linear de graduação; usávamos um livro que hoje é adotado na pós-graduação. O livro básico de Álgebra Linear da pós-graduação foi trabalhado conosco ainda na graduação. (CARDONA, entrevista, 2010).

Podemos perceber por esta citação que, assim como outros professores que entrevistamos, em certo sentido Cardona também associa a disciplina Análise a um curso mais elaborado, rigoroso e formal. Como a disciplina inicial de Cálculo que ela cursou quando aluna de graduação da USP apresentava todas estas características, então, em sua

⁶² CARDONA (2010).

opinião, ela estava mais próxima da Análise. Novamente se percebe a tendência de subjugar o Cálculo à Análise e não se fazer a devida reflexão a respeito de suas especificidades.

Cardona destacou que, naquela época, havia uma idéia bastante utilizada por alguns professores do IME para justificarem disciplinas com abordagens tão pesadas logo no primeiro semestre da graduação: “não podemos baixar o nível”. Buscando “manter o nível” estes professores não se preocupavam em saber quem eram os alunos que estavam ingressando na Universidade, se estavam habituados com tanto rigor e se teriam condições de acompanhar, logo no início de suas graduações, disciplinas ministradas de maneira tão rigorosa e formal. E, em alguns casos, dependendo do professor que é escolhido para ministrar determinada disciplina, notamos que esta idéia de “não baixar o nível” independente dos alunos estarem ou não acompanhando o curso vigora até hoje.

O foco da disciplina inicial de Cálculo ministrada por Leite estava na formalização dos conceitos e não na manipulação das técnicas básicas de cálculo, como explicita o seguinte comentário de Cardona:

Acontecia o seguinte: quando eu aprendi integração, sabia formalizar, mas não sabia calcular uma integral; no curso de Equações Diferenciais, eu sabia o Teorema de Existência e Unicidade, mas não sabia resolver uma Equação Diferencial, que era muito mais simples. (...) Este tipo de abordagem tirava um pouco o foco; deveria ter as duas coisas, mas naquela época não tinha. Acho que hoje em dia chegamos a um tipo de curso mais equilibrado (Ibid.).

Nossa entrevistada afirmou que durante as aulas eram trabalhados tanto exercícios e exemplos teóricos quanto de técnicas de cálculo, mas “pelo que eu me lembre, talvez por ter me marcado mais, era uma quantidade maior de exemplos e exercícios formais de demonstrações do que de aplicações de técnicas”⁶³. Com relação aos exercícios que os alunos deveriam resolver para estudar, Cardona destacou que esta era uma parte complicada de todas as disciplinas de sua graduação: não havia uma lista “oficial” passada pelo professor; os alunos é que deveriam selecionar os exercícios que iriam resolver:

Exercícios, o aluno fazia por sua conta, não havia essa história de preparar uma lista de exercícios para entregar aos alunos; o aluno é que deveria ir atrás dos exercícios e azar o dele se escolhesse questões muito fáceis para resolver, porque o que seria cobrado não era por aí. Então, precisávamos pegar o jeito de escolher (...) – e isso acontecia em todos os cursos, não só no de Cálculo. (...) Se você desse o azar de pegar um livro que tivesse apenas exercícios muito fáceis, não corresponderia ao que o curso esperava de você e se ficasse apenas nos difíceis e não conseguisse fazer nada, você desanimava. Então era meio complicado; demorou certo tempo – pelo menos para mim e para alguns outros alunos – para encontrarmos o caminho,

⁶³ CARDONA (2010).

entendermos o que estava sendo esperado de nós, qual era o nível dos exercícios que deveríamos resolver e que aqueles exercícios fáceis serviam como um degrau para chegarmos aos mais difíceis e continuarmos; foi um processo, não foi algo imediato (Ibid.).

Nas avaliações a que os alunos eram submetidos neste curso de Leite, também prevaleciam os exercícios teóricos, envolvendo demonstrações: “havia as duas coisas, embora, pelo que eu me lembre, a ênfase maior era em demonstrações, em exercícios mais formais; mesmo quando era cálculo, era algo mais formal”⁶⁴.

Os materiais indicados como referências básicas para este curso de 1983 eram as apostilas de Cálculo do professor Guidorizzi, que, posteriormente, foram reformuladas e deram origem ao seu livro *Um Curso de Cálculo*. De acordo com Cardona, estas apostilas traziam uma abordagem bem mais formal do que aquela presente no livro a que deram origem: “eram mais formais mesmo. (...) Quando as apostilas deram origem aos livros (...), o Guidorizzi deu uma repaginada bem grande”⁶⁵ e a ênfase passou a ser a manipulação dos conceitos fundamentais e o desenvolvimento de habilidades em calcular limites, derivadas e integrais. Segundo nossa depoente, havia aqueles que utilizavam as apostilas durante as aulas para acompanhar a exposição do professor – que, de acordo com ela, não necessariamente era parecida com o que lá estava feito – e aqueles que não utilizavam tal material em sala de aula:

Havia de tudo. Tinha gente que comprava as apostilas antes e acompanhava na sala, tinha gente que não comprava a apostila, tinha gente que só tomava nota... Havia (...) pessoas que ficavam frustradas porque tentavam acompanhar na apostila e a aula não necessariamente era parecida com o que estava apresentado ali (Ibid.).

Estas apostilas também eram o ponto de partida para os alunos naquele momento de selecionarem os exercícios que iriam resolver para estudar: “havia alguns exercícios [nas apostilas] e nós começávamos tentando resolver aqueles. Às vezes, também procurávamos outros livros; gostava muito do livro de Cálculo do Geraldo Ávila”⁶⁶. Outros manuais bastante utilizados no momento de resolver exercícios eram os de Piskunov e Demidovitch: “usávamos [estes livros] e era de onde também saiam questões de provas – é claro que só percebíamos isso depois das provas”⁶⁷. A utilização destes dois livros pelos alunos e professores do IME é um ponto, de certa forma, polêmico: alguns de nossos entrevistados disseram que tais manuais eram realmente bastante utilizados enquanto que outra pessoa que ouvimos – que não foi elencada dentre os entrevistados da pesquisa por não ter cursado

⁶⁴ CARDONA (2010).

⁶⁵ CARDONA (2010).

⁶⁶ CARDONA (2010).

⁶⁷ CARDONA (2010).

Cálculo juntamente com a turma de Matemática – nos disse que tais livros eram mal vistos por alguns professores. A este respeito, Cardona comentou o seguinte:

Eu sinceramente não tenho essa idéia de que esses livros eram mal-vistos. Para mim, os professores nunca passaram esta idéia; havia brincadeiras e tudo mais, mas ninguém nunca falou: esse livro é uma porcaria. O que eu percebia que eram mal-vistos eram os livros da Coleção Schaum, que, para nós alunos eram uma salvação, porque quando, muitas vezes, não tínhamos idéia de como começar um exercício, naqueles livros (...) havia coisas básicas que nos ajudavam. Os exercícios são mais fáceis? São e realmente não acho que seja um nível de exercício que, normalmente, o professor daqui queira para o seu curso, mas para um aluno começar, eu acho que faz muita diferença, principalmente se o professor não tem o costume de dar aula de exercício, de mostrar como ele vê a Matemática escrita, de colocar para os alunos a maneira como ele pensa. Nestes casos, acho que os livros dessa coleção são uma saída para o aluno começar a entender as coisas (Ibid.).

Também na década de 80, em pelo menos dois cursos de Cálculo I ministrados aos alunos da graduação em Matemática da USP adotou-se como referência bibliográfica o livro *Cálculo Diferencial e Integral* de Roberto Romano. Um destes cursos foi ministrado em 1985 pela professora Cerri e o outro em 1987 pelo próprio Romano. Não entrevistamos pessoalmente nenhum ex-aluno destes cursos, pois todos aqueles com os quais entramos em contato, disseram não se lembrar de tantos detalhes a ponto de concederem uma entrevista a respeito deste assunto. No entanto, algumas dessas pessoas nos deram pequenas informações a respeito de tais cursos via e-mail, baseadas nas quais apresentamos aqui breves comentários sobre eles.

De acordo com Alfredo Goldman Vel Lejbman, Lúcia Satie Ikemoto Murakami e Carlos Henrique Barbosa Gonçalves, atuais professores da USP e ex-alunos desses cursos baseados no manual de Romano, as aulas eram expositivas e a disciplina ainda apresentava bastante formalismo e um alto nível de rigor, com todos os resultados teóricos cuidadosamente demonstrados, mas, no entanto, já não podia ser equiparada a uma disciplina de Análise Matemática, que, com suas dificuldades e sutilezas, exigem um maior amadurecimento do aluno. Já era, de fato, um curso de Cálculo Diferencial e Integral.

Com relação ao conteúdo visto e à forma como ele era trabalhado, Goldman destacou um fato que, na época, achava curioso: no mesmo semestre em que fazia Cálculo I, cursava também Física I, e, neste curso, além de alguns conceitos do Cálculo serem aplicados, eles apareciam antes de serem abordados na outra disciplina, o que o deixava com a impressão de que a disciplina Cálculo I estava atrasada em relação à Física I e que era ministrada sem nenhuma motivação prática. Provavelmente esta impressão era ocasionada pelo fato de tal curso inicial de Cálculo valorizar em demasia técnicas e formalizações em detrimento dos

conceitos fundamentais deste campo de conhecimento, conceitos estes que trazem em seu bojo diversos problemas práticos e aplicações que, se bem trabalhados, poderiam auxiliar os alunos a compreenderem os significados dos elementos principais do Cálculo e de suas relações com outras áreas científicas. É mais uma evidência de que um curso voltado somente às técnicas, assim como outro voltado somente à apresentação rigorosa do programa acaba esvaziando de significado os conteúdos vistos.

Os ex-alunos de Cerri e de Romano comentaram também que nestes cursos vivenciados por eles na época de estudantes, havia uma grande quantidade de listas de exercícios, que eram, em sua maioria, mais simples, de cálculo mesmo. Estes alunos não se recordam, no entanto, se os exercícios eram do próprio livro indicado como referência ou se eram escolhidos em outros materiais.

Outro manual bastante presente dentre as referências de diversos cursos de Cálculo ministrados no decorrer da década de 1980 é *Um Curso de Cálculo* de Guidorizzi que, até os dias de hoje, é um texto frequentemente indicado no Instituto de Matemática da USP. Conforme já foi dito, tal livro teve origem nas apostilas de Cálculo Diferencial e Integral lançadas pelo autor desde o final da década de 1970 e que já eram muito utilizadas por professores da Universidade de São Paulo. Com o passar do tempo, tais apostilas que eram bastante sintéticas e formais foram sendo reformuladas e agrupadas dando origem aos diversos volumes da coleção *Um Curso de Cálculo*, já com um nível de rigor mais moderado e predomínio da manipulação das técnicas de cálculo ao invés da ênfase na formalização dos resultados estudados, como acontecia até então.

Um dos cursos que adotou como referência o livro de Guidorizzi foi o ministrado pelo professor Seiji Hariki em 1986. A respeito de tal curso, entrevistamos sua ex-aluna, a atual professora do Departamento de Computação do IME, Nina Sumiko Tomita Hirata.

De acordo com ela, nesta ocasião em que a disciplina de Cálculo I foi ministrada pelo professor Hariki, as aulas eram expositivas, com teoremas, exercícios, etc. e, apesar de, durante as aulas teóricas, o conteúdo ser trabalhado de maneira rigorosa e de todos os resultados serem demonstrados, no momento de cobrar dos alunos, isto é, nos exercícios e avaliações, o que predominava era o trabalho com as técnicas básicas do Cálculo Diferencial e Integral: “a exposição era rigorosa, os fundamentos eram bem ‘passados’, mas a cobrança não ia tanto para essa parte mais teórica; (...) [aí predominava] mais cálculo mesmo”⁶⁸. Tanto nas listas de exercícios quanto nas avaliações, o que mais aparecia era:

⁶⁸ HIRATA (2010).

Aplicar as regrinhas de derivação, integração... Isso eu me lembro mais claramente; já a parte de demonstrar coisas não é algo que eu me lembre muito não. (...) Acho que não tinha muito isso. (...) Eu acho que já foi um curso de Cálculo; trabalhávamos mesmo com cálculos: calcule a derivada, calcule a integral, calcule os pontos de máximo, de mínimo, essas coisas... (HIRATA, entrevista, 2010).

E mais uma vez se estabelecia aquilo que Rezende (2003) denomina de conflito pedagógico entre o que se faz e o que se pede.

Com relação às listas de exercícios que os alunos deveriam resolver, Hirata destacou que, ao contrário do que acontecia no curso ministrado por Leite em 1983, no qual os alunos é que escolhiam as questões, nesta disciplina conduzida por Hariki tais exercícios eram escolhidos pelo professor: “essa liberdade de escolher exercícios com certeza não tivemos”⁶⁹. Além dos problemas das listas, selecionados para que os alunos resolvessem em seus momentos de estudo, Hariki também escolhia algumas questões para serem resolvidas por ele em sala de aula.

Os alunos normalmente tomavam nota do conteúdo que o professor apresentava na lousa e, nos momentos de estudo, para revisarem a teoria e resolverem exercícios recorriam também ao livro indicado como referência – neste caso *Um Curso de Cálculo* de Guidorizzi. Nossa entrevistada destacou que, durante as aulas, o professor “seguia a ordem proposta pelo livro para a apresentação dos assuntos, mas, provavelmente, da maneira que considerava mais adequada para a sala de aula”⁷⁰. Comentou também que não se recorda de Hariki ter indicado outros livros além do Guidorizzi: “eu me lembro que havia (...) livros de Cálculo que os outros colegas usavam porque os veteranos tinham utilizado e recomendavam que também estudássemos por eles. Mas não me lembro do professor indicando outros livros”⁷¹.

Mais uma vez, o foco da disciplina inicial de Cálculo estava na apresentação do conteúdo já formalizado e sistematizado e na resolução de exercícios envolvendo cálculos de derivadas e integrais, não havendo espaço para a construção prévia, por parte dos alunos, dos significados das idéias fundamentais do campo de conhecimento em questão.

Apesar da convivência quase que simultânea de disciplinas de Cálculo conduzidas com orientações tão diferentes, para alguns professores, durante a década de 1980, tal curso começou a perder muito do rigor que o havia caracterizado até então e este fato não os agradava. No decorrer da entrevista que nos concedeu, a professora Cerri destacou que ela estava naquele grupo de professores que achavam que a disciplina estava sendo ministrada

⁶⁹ HIRATA (2010).

⁷⁰ HIRATA (2010).

⁷¹ HIRATA (2010).

com um nível de rigor abaixo do esperado, e que, este grupo, tentando reverter tal situação, optou por ministrá-la utilizando como referência bibliográfica básica o livro *Cálculo Infinitesimal* de Michael Spivak:

Fizemos (...) uma experiência com as turmas de Bacharelado e Licenciatura, que eram misturadas na época (...): demos o curso de Cálculo I pelo Spivak, seguindo o livro capítulo por capítulo. (...) Foram dois anos consecutivos fazendo isso; depois foi modificado. (...) Foi uma experiência difícil. Fizemos isto porque percebíamos que o curso de Cálculo estava se distanciando do rigor e nós queríamos aproximá-lo novamente (...). Então, esse grupo de três professores do qual eu fazia parte tentou voltar um pouco no tempo e adotou o Spivak. Tivemos vários problemas: primeiro que o Spivak estava esgotado e então precisávamos tirar cópias dos capítulos e pedir para os alunos lerem. Além disso, o livro já tinha uma linguagem antiga para a época e então os alunos tinham certa dificuldade. Por isso, precisávamos complementar muito o texto, com exercícios e com explicações. Foi um curso bastante difícil de administrar. No ano seguinte repetimos a experiência, mas fizemos um pouco diferente: usamos partes do Spivak, mas introduzimos também muita coisa diferente, principalmente exercícios, e fizemos, também, trabalhos em sala de aula, elaborados por outro pessoal. (...) Depois, eu abandonei essa experiência (...) e outros professores entraram para dar Cálculo I e acharam que nós estávamos indo demais para o rigor, que o curso precisava ser aligeirado e, então, voltaram a dar a disciplina (...) mais da maneira como é feita nos cursos aplicados (CERRI, entrevista, 2009).

Entrevistamos Vitor de Oliveira Ferreira, atual professor do IME, que foi aluno de um destes cursos baseados no Spivak. Ferreira cursou a disciplina no primeiro semestre de 1989, ao ingressar no Bacharelado em Matemática. Seu professor foi Antonio Luiz Pereira, a quem se refere por Toninho. Segundo o entrevistado, sua turma de graduação foi uma das últimas – talvez, até mesmo, a última – a passar por um curso tão rigoroso de Cálculo: “pelo que me dizem os colegas aqui do IME, pouco tempo depois [de eu ter cursado a disciplina], o ensino do Cálculo se transformou nesse (...) que é mais voltado para contas, para manipulações de integrais, etc, do que para a formalização da teoria”⁷².

A respeito do estilo das aulas de Pereira, o entrevistado comentou que elas eram sempre expositivas, com estilo de seminários: “ele chegava, falava bom dia, subia no tablado e começava a colocar coisas na lousa; havia muito pouca interação entre professor e aluno durante a aula”⁷³; os alunos ficavam apenas assistindo à exposição do professor e tomando nota. Este comentário de Ferreira evidencia que o foco do curso não estava na construção do conhecimento por parte do próprio aluno e sim na apresentação já sistematizada do conteúdo, que era cuidadosamente apresentado de maneira formal; por exemplo, “todos aqueles

⁷² FERREIRA (2010).

⁷³ FERREIRA (2010).

primeiros limites das funções $f(x) = c$, $f(x) = x$; $f(x) = x^2$, etc, eram calculados com epsilons e deltas”⁷⁴ e, em diversos aspectos, a disciplina se assemelhava mais ao que se observa, atualmente, em cursos de Análise Matemática do que de Cálculo:

Eu acho que era um curso de Análise. (...) Não tivemos muito topologia da reta; lembro-me que fomos estudar já a topologia do $\mathbb{R}^n$, mas no Cálculo tivemos todas as demonstrações e o axioma do supremo usado em todos os momentos em que ele era necessário, inclusive as utilizações mais sutis. Enfim, vivenciamos tudo isso que, hoje em dia, é ensinado no curso de Análise. (FERREIRA, entrevista, 2010).

Nosso depoente comentou, inclusive, que, naquela época, dado o nível de aprofundamento com que os conceitos eram tratados no Cálculo, a disciplina de Análise presente no currículo do curso de Matemática não abordava novamente aqueles assuntos já estudados; o seu conteúdo programático era completamente diferente; afinal, não faria sentido estudar novamente algo que já havia sido visto com tantos detalhes:

Hoje em dia, temos aqui na graduação os Cálculos e a Análise Real que é uma disciplina também de 6 horas semanais, mas, na época, não havia Análise Real; havia os Cálculos e, mais para frente, uma disciplina chamada Análise I, em que estudávamos integração de Riemann, Stieltjes e Lebesgue e outra chamada Análise II, na qual estudávamos Análise Funcional. Então não havia um curso de Análise Real, mesmo porque, todo o conteúdo era dado no Cálculo. (Ibid.).

Ainda comentando a respeito da opção de Pereira em dar à disciplina um caráter mais analítico do que técnico, Ferreira destacou uma observação feita por Spivak no prefácio da edição mais recente de seu manual que, para ele, sintetiza muito bem esta comparação entre a disciplina de Cálculo daquela época em que ele foi aluno de graduação e a que é ministrada nos cursos atuais: “a última edição do Spivak abre com um prefácio no qual o autor afirma que quando ele lançou aquele livro, era um livro de Cálculo, mas que, hoje em dia, é um livro de Análise”⁷⁵, ou seja, com o passar do tempo aquela abordagem proposta pelo autor para ser desenvolvida em uma disciplina de Cálculo se torna inadequada para tal curso, sendo mais bem aproveitada pelos alunos se for desenvolvida em uma disciplina de Análise Matemática, após os mesmos já terem tido, no Cálculo Diferencial e Integral, um primeiro contato com o conteúdo de uma forma mais manipulativa e menos analítica e formal.

Com relação à utilização do livro de Spivak, Ferreira destacou que o professor não disse que o adotaria como referência básica e que sua leitura seria fundamental para a compreensão do curso; apenas destacou que a apresentação da teoria a ser feita em sala de

⁷⁴ FERREIRA (2010).

⁷⁵ FERREIRA (2010).

aula se basearia na abordagem presente em tal manual. E, de acordo com nosso depoente, isto, de fato, ocorreu:

Na verdade, não tínhamos um livro-texto; o professor nos explicou, na primeira aula, que não seguiria um livro especificamente, mas nos disse também que as aulas expositivas seriam baseadas na apresentação do Cálculo que estava no Spivak. (...) Mas nós não precisávamos, caso não quiséssemos, entrar em contato com o livro (Ibid., entrevista, 2010).

Ferreira destacou que Pereira, durante suas aulas, realmente seguia a mesma sequência de apresentação dos conteúdos proposta por Spivak, com pouquíssimas alterações, o que pode ser comprovado pelas anotações do curso que guarda até hoje:

Se compararmos os meus cadernos com o livro, veremos que o que ele passava na lousa era realmente muito parecido com a apresentação do Spivak. Hoje, antes de conversarmos, fui dar uma olhada nos meus cadernos e no livro para refrescar minha memória e percebi que há uma ou outra diferença. O Spivak, por exemplo, só introduz as funções exponenciais depois de integração; o Toninho fez diferente: ele definiu exponencial antes de integração e então nós conseguíamos utilizar a função exponencial como uma daquelas do nosso conjunto de funções conhecidas, já derivávamos, utilizávamos essas funções para resolver problemas. Mas, as funções trigonométricas não; elas só foram introduzidas depois de integração, assim como o Spivak faz. Essa é a grande diferença existente entre o curso do Toninho e o Spivak (Ibid.).

Neste ano em que Ferreira foi seu aluno, Pereira não abordou todo o conteúdo que normalmente é trabalhado em tal disciplina o que, segundo nosso depoente, talvez tenha acontecido em razão do tempo dispensado à formalização de todos os conceitos estudados:

Não vimos o Spivak todo; o meu curso de Cálculo I foi só teoria de derivação; começamos a ver integração no Cálculo II, apesar das 6 horas semanais de carga horária do Cálculo I. Toda a formalização, com todos os detalhes, acabou impedindo que déssemos conta da integração ainda no primeiro semestre (Ibid.).

Ferreira destacou, no entanto, que Pereira também foi o professor daquela mesma turma em Cálculo II e, então, provavelmente, tenha ajustado o programa e cumprido todo o conteúdo previsto para estas duas disciplinas, só que de maneira um pouco diferente da usual.

As listas de exercícios solicitadas dos alunos não eram compostas exclusivamente por questões presentes no manual do Spivak: “ele tirava muitos de lá, mas também elaborava listas com outros exercícios criados por ele ou retirados de outros materiais”⁷⁶. E eram exercícios predominantemente “teóricos de demonstrações; tínhamos poucos exercícios

⁷⁶ FERREIRA (2010).

numéricos”⁷⁷, da mesma forma que no livro seguido também são poucas as questões de cálculo.

Ferreira destacou ainda que as provas também cobravam pouco exercícios numéricos; cobrava-se mais demonstrações do que técnicas: “as provas eram duras (...). Pelo que eu me lembro, (...) eram quase que exclusivamente mini-teoremas; havia uma ou outra questão numérica, que se tornaram mais frequentes no Cálculo II; no Cálculo I ainda era tudo muito formal”⁷⁸. Além do fato de priorizar demonstrações, outra dificuldade enfrentada pelos alunos nas avaliações era que “nas provas nunca caíam questões que já havíamos visto ou discutido antes. (...) Eram todos exercícios inéditos, novidades mesmo!”⁷⁹. De acordo com o entrevistado, a primeira avaliação foi um ‘desastre’ para toda a turma, mas, depois, por um lado os alunos se acostumaram um pouco com aquela linguagem própria do Cálculo e com todo o formalismo deles exigido na disciplina e, por outro, o conteúdo se tornou mais fácil, afinal “é só na primeira prova que aparecem os limites com epsilons e deltas; depois, apesar de ainda aparecerem supremos e outros conceitos profundos, são coisas que, em minha opinião, são mais fáceis de serem manipuladas”⁸⁰. De qualquer forma, era um “curso que (...) exigia muita dedicação e causava desconforto em todos os alunos, porque a prova era dura e nós tínhamos esta sensação de impotência, de não sabermos o que fazer, de não estarmos entendendo”⁸¹. Ferreira frisou, no entanto, que é fundamental salientar que esta era uma característica de todas as disciplinas que cursou durante sua graduação; não era algo que acontecia exclusivamente no Cálculo: “é importante destacar que eu não debito este fato na conta do Cálculo I, deste curso do Toninho. Acho que todos os cursos tinham essas características que eu destaquei”⁸².

O entrevistado disse não se lembrar exatamente quais livros eram indicados por Pereira além do Spivak, mas comentou que, em seu caso especificamente, por indicação de um colega de turma – o também atual professor do IME Antonio de Pádua, que já havia feito Engenharia e, por esta razão, conhecia os conteúdos do Cálculo – recorria constantemente ao manual de Courant⁸³, que era “um livro que não estava na lista dos indicados pelo Toninho, mas que a biblioteca tinha muitos exemplares porque acho que em algum momento ele havia

⁷⁷ FERREIRA (2010).

⁷⁸ FERREIRA (2010).

⁷⁹ FERREIRA (2010).

⁸⁰ FERREIRA (2010).

⁸¹ FERREIRA (2010).

⁸² FERREIRA (2010).

⁸³ COURANT, Richard. **Differential and integral calculus**. New York: Nordemann, 1937.

sido bastante adotado”⁸⁴. Destacou também que outro livro já bastante popular naquela época era *Um Curso de Cálculo* de Hamilton Guidorizzi que estava em suas primeiras edições: “havia uma divulgação boca a boca desta obra entre os alunos do curso; (...) os alunos mais antigos (...) indicavam esse livro para que (...) novos lessem. Então, houve quem tentou seguir esse curso do Toninho pelo livro do Guidorizzi”⁸⁵.

Uma característica do curso ministrado por Pereira que nos ficou bastante clara durante a entrevista concedida por Ferreira foi que, naquela disciplina de Cálculo I, a ênfase estava nos fundamentos da Matemática e não na idéia de Matemática como ferramenta:

Realmente não tinha essa preocupação [de aplicar os conceitos vistos, apresentar o conteúdo por meio de suas aplicações]. Era um curso formal, baseado em axiomática e consequências desses axiomas; não víamos, por exemplo, problemas de aplicações concretas, como esses que ensinamos atualmente nos cursos de Cálculo da engenharia. Os problemas de máximos e mínimos (...) que são (...) de aplicação da derivação, nós não víamos. Calculávamos máximos e mínimos de funções, mas eram exercícios nos quais a função já era dada e devíamos simplesmente determinar os pontos de máximo e de mínimo. Era um curso voltado para ele mesmo. (Ibid.).

O foco da disciplina não estava na construção do conhecimento pelo próprio aluno, nem no trabalho com os significados das idéias fundamentais do Cálculo e nem na manipulação das regras de integração e diferenciação; a ênfase estava na apresentação formal, rigorosa e sistematizada do conteúdo pelo professor.

Para Ferreira, apesar desta disciplina de Cálculo ter dado muito trabalho para os alunos, exigido muito estudo e ter sido, em certo sentido, traumática, “foi um curso que me preparou muito bem para encarar o resto da graduação aqui”⁸⁶. Por outro lado, faltou algo que o aproximasse mais “do que é viver a Matemática, vivenciar, perceber o que é o contato entre matemáticos”⁸⁷. E comparando a maneira como Pereira ministrou suas aulas com a forma como a disciplina é trabalhada atualmente, voltou a destacar que tal curso de Cálculo o deixou bastante preparado, do ponto de vista da fundamentação dos conceitos, mas foi deficiente no que diz respeito a lhe proporcionar habilidade na manipulação das técnicas de cálculo de derivadas, integrais, etc.:

O que ficou faltando, em comparação com a formação que o aluno tem atualmente, são aquelas aplicações do Cálculo: o cuidado com a construção de gráficos, problemas de máximos e mínimos, cálculo de áreas e volumes... Esse tipo de coisa nós fazíamos muito menos, as técnicas de integração também... Hoje em dia,

⁸⁴ FERREIRA (2010).

⁸⁵ FERREIRA (2010).

⁸⁶ FERREIRA (2010).

⁸⁷ FERREIRA (2010).

trabalhamos tanto com técnicas de integração, fazemos tanto treino que o aluno bate o olho e é capaz de resolver aquelas integrais mais complicadas; no curso que eu fiz quando aluno não era assim; não tínhamos a menor condição de resolver integrais complicadas, não havia nenhum treinamento para isto. (Ibid.).

Esta experiência de ministrar Cálculo I adotando como referência o livro de Spivak, que não sabemos exatamente quando começou, durou, segundo Cerri apenas dois anos, ou seja, chegou ao fim, no máximo, no início da década de 1990. Em 1992, por razões que serão explicitadas no capítulo 5 deste trabalho, a disciplina inicial de Cálculo (Cálculo I) passou a ser anual, enquanto que Cálculo II e Cálculo III continuaram sendo semestrais. Esta estrutura foi mantida até o final de 2000 e em 2001 todas as disciplinas de Cálculo voltaram a ser semestrais, por razões que também serão discutidas no capítulo 5.

A partir de 1994, o curso de Cálculo I ministrado aos alunos da Licenciatura passou a ser diferente daquele ministrado aos alunos do Bacharelado. Faremos então, na sequência, algumas primeiras considerações a respeito desta separação, que voltará a ser discutida no capítulo 5.

4.5.3 – Os cursos ministrados após a separação das disciplinas iniciais de Cálculo do Bacharelado e da Licenciatura em 1994

Em uma das seções do capítulo 3, destacamos vários momentos nos quais professores da USP se preocuparam em dar características diferentes às modalidades Licenciatura e Bacharelado do curso de Matemática da instituição, mas, apesar de tais preocupações, de acordo com o site oficial da FUVEST⁸⁸ (Fundação Universitária para o Vestibular), instituição responsável pelo exame de seleção de alunos para a USP, até o vestibular de 1988 a Licenciatura ainda não constituía uma carreira própria, pela qual o estudante optava ao se inscrever no exame; Licenciatura e Bacharelado em Matemática eram cursos separados, mas que estavam ambos dentro de uma mesma carreira, a saber, *Ciências Exatas-USP*. A partir do vestibular de 1989 é que passou a haver a carreira *Matemática-IME*, englobando os cursos de Licenciatura e que durou até 1993, quando as Licenciaturas em Matemática e Física passaram a pertencer à carreira *Matemática-Física*, que a partir de 1994 passou a se chamar *Licenciatura em Matemática/Física*, nomenclatura que permanece até hoje. Já o curso de Bacharelado em Matemática continuou na carreira de *Engenharia e Ciências Exatas* até 2003, quando passou a integrar a carreira, que após algumas mudanças de nomes, atualmente se

⁸⁸ www.fuvest.br – último acesso em 01 de dezembro de 2011.

denomina *Física, Meteorologia, Geofísica, Astronomia, Estatística, Matemática e Matemática Aplicada*.

De acordo com Cerri (2009) e Druck (2009), a principal razão que levou à separação de Bacharelado e Licenciatura em carreiras distintas no vestibular, a partir de 1989, foi a seguinte: como a Licenciatura em Matemática estava dentro da carreira Ciências Exatas, assim como os cursos de Engenharia da Poli, os professores começaram a perceber que muitas das vagas destinadas a ele estavam sendo ocupadas por aqueles alunos que o haviam colocado como terceira ou quarta opção no momento de se inscreverem na FUVEST e que acabavam obtendo, no exame de seleção, classificações melhores do que aqueles que o haviam colocado como primeira opção. No entanto, ao final do primeiro ano, que era um ciclo-básico para todos os cursos da carreira, esses alunos que tinham outras vocações que não o magistério, acabavam solicitando o aproveitamento das disciplinas já cumpridas e migrando para outros cursos que estavam na mesma carreira de Ciências Exatas, ocasionando um grande esvaziamento na Licenciatura. “Resolvemos então que preferíamos ter alunos mais fracos, mas (...) que, de fato, quisessem fazer Licenciatura”⁸⁹ e que viessem estimulados para tal modalidade de graduação. “Isto mudou completamente a cara do curso, (...) o público que vem e que se forma”⁹⁰.

No entanto, apesar desta separação de carreiras no vestibular, de acordo com Cerri (2009), após ingressarem na Universidade os alunos eram misturados: “os únicos (...) que não eram misturados eram os do Bacharelado em Computação, porque se achava que, para esses (...) outros professores é que deveriam dar aula”⁹¹. Havia, portanto, na maioria das vezes três turmas da disciplina Cálculo I: uma só para Computação e outras duas com alunos do Bacharelado e da Licenciatura juntos. Após algum tempo trabalhando desta maneira, os professores começaram a perceber que este primeiro ano unificado não estava fornecendo uma preparação adequada para as carreiras que os alunos iriam seguir; os cursos de Licenciatura e Bacharelado já estavam separados como carreiras, mas, na prática, no primeiro ano, continuava-se dando a ambos o mesmo tratamento. De acordo com Cerri, começou-se a discutir que principalmente a Licenciatura deveria ter características próprias desde o primeiro ano e esta discussão ganhou fôlego com o Fórum das Licenciaturas, classificado pelo site oficial do IME, como um longo e aprofundado debate, realizado na instituição entre 1990 e 1992, reunindo todas as Unidades da USP envolvidas com Licenciaturas. “Como fruto desse

⁸⁹ DRUCK (2009).

⁹⁰ CERRI (2009).

⁹¹ CERRI (2009).

Fórum é que surge uma estrutura de curso totalmente diferente para a Licenciatura em Matemática”⁹²:

Encerrados os debates no âmbito da Universidade, as discussões prosseguiram no interior do IME no sentido de definir uma nova estrutura curricular para o nosso curso de Licenciatura. Tomando por base a proposta oriunda do Fórum da USP, prosseguimos no aprofundamento das questões mais específicas de uma Licenciatura em Matemática. Novamente foram formados grupos de trabalho e realizadas sessões coletivas de debates coordenadas pela Comissão Coordenadora do Curso de Licenciatura (Coc-Lic) do IME, com a participação de uma parcela significativa de docentes e também de alunos. Tal processo culminou com a implantação de uma nova estrutura curricular para a Licenciatura do IME a partir de 1994. (<http://www.ime.usp.br/webadmin/mat/grad/licenciatura/historico> - último acesso em 26 de fevereiro de 2011).

Nesta nova estrutura curricular do curso de Licenciatura, colocada em prática a partir de 1994, é que a disciplina de Cálculo I cursada pelos licenciandos passou a ser oficialmente diferente daquela oferecida aos alunos do Bacharelado, embora no período noturno, em que só havia Licenciatura, tal disciplina já possuísse, provavelmente, características próprias. De acordo com Cerri, “a Licenciatura sempre foi vista como o “patinho feio”, como o curso em que os alunos eram os mais fracos ou mais desinteressados”⁹³ e então era necessário dar uma nova estrutura às disciplinas oferecidas a este “público que estava entrando, que era mais fraco e precisava ter uma preparação mais adequada para poder começar, de fato, um curso mais rigoroso”⁹⁴. Além disso, era preciso que houvesse uma preocupação em abordar aqueles conteúdos que fossem mais apropriados para o futuro professor. Druck também comentou a respeito da necessidade dessa diferenciação entre os cursos iniciais de Cálculo da Licenciatura e do Bacharelado, apontando como uma de suas causas o alto índice de reprovação, no primeiro ano, entre os alunos da Licenciatura, antes de tal mudança ser feita:

Constatamos que (...) dos 150 alunos que entravam na Licenciatura pela nova carreira, apenas 4 ou 5, no máximo, completavam a grade proposta para o primeiro ano, aquela chamada ideal e que não tinha nada a ver com esse novo público que estava entrando; era absurdamente puxada para eles. E foi aí, então, que resolvemos mudar (...) o Cálculo da Licenciatura em relação ao (...) do bacharelado. (DRUCK, entrevista, 2009).

Cerri destaca, no entanto, que o novo programa da disciplina proposto para a Licenciatura “não se afastou muito do Cálculo convencional; a diferença é que passou a haver

⁹² CERRI (2009).

⁹³ CERRI (2009).

⁹⁴ CERRI (2009).

uma preparação inicial”⁹⁵. Afirmar também que o curso inicial de Cálculo oferecido aos alunos do Bacharelado não sofreu nenhuma grande mudança.

Vejamos então como ficaram as ementas da disciplina inicial de Cálculo para a Licenciatura e para o Bacharelado a partir de 1994. Primeiramente apresentaremos as ementas que vigoraram entre 1994 e 2000, período em que as disciplinas de Cálculo I da Licenciatura e do Bacharelado eram diferenciadas, mas ambas anuais:

Ementa da disciplina MAT 131 – Cálculo Diferencial e Integral I – oferecida aos alunos do Bacharelado em Matemática entre 1994 e 2000

Objetivos: estudo de limites, derivada e integral das funções reais de uma, duas e mais variáveis; aplicações; curvas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Conteúdo: Números reais
Funções, função Exponencial, logarítmica, trigonométricas diretas e inversas
Limites e continuidade
Funções contínuas em intervalos fechados
Derivadas
Regra da Cadeia
O Teorema do Valor Médio
Fórmula de Taylor
Aplicações das derivadas
Máximos e Mínimos
Gráficos
Integrais Indefinidas
Técnicas de Integração
Noções sobre equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem.
Integral Definida
Aplicações
Integrais Impróprias
Curvas no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$
Representação Paramétrica
Comprimento de curva
Conjuntos abertos, fechados, conexos por poligonais em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$
Funções de duas ou mais variáveis: limite, continuidade e diferenciabilidade
Gradiente
Regra da Cadeia
Teorema do Valor Médio
Derivadas de Ordem Superior
Teorema de Schwarz
Fórmula de Taylor
Máximos e Mínimos.

Carga Horária: 6 horas semanais/12 créditos (disciplina anual).

Bibliografia Básica: S. Lang – Cálculo vol.1
M. Spivak – Calculus
L. Leithold – O Cálculo com Geometria Analítica
P. Boulos – Introdução ao Cálculo – vol. I e II
H. Guidorizzi – Um Curso de Cálculo vol. I
R. Romano – Cálculo Diferencial e Integral: funções de uma variável.

⁹⁵ CERRI (2009).

Ementa da disciplina MAT 135 – Cálculo para Funções de Uma Variável Real – oferecida aos alunos da Licenciatura em Matemática entre 1994 e 2000

Objetivos: introdução ao estudo de funções de uma variável: limites, derivadas e integrais; inicialmente uma abordagem não formal. Estudo das aplicações clássicas do Teorema do Valor Médio e do Teorema Fundamental do Cálculo para funções de uma variável real. Estudo de seqüências e séries. Introdução da noção formal de limite.

Conteúdo: 1. Definição de função: gráficos; parábola, funções trigonométricas, polinômios de 3º e 4º graus.
2. Limite; idéias intuitivas de limite através de exemplos (velocidade, reta tangente, seqüência); algumas situações de limite (comprimento e área); continuidade.
3. Cálculo de derivadas (derivadas parciais de funções de várias variáveis) e cálculo de primitivas.
4. Equações diferenciais; equações do tipo $y' = f(x)$ e equações de variáveis separáveis; aplicações.
5. Funções exponenciais e logarítmicas.
6. Funções crescentes e decrescentes: gráficos, máximos e mínimos, regra de L'Hospital.
7. Fórmula de Taylor.
8. Integral definida: definição da integral de Riemann por área; Teorema Fundamental do Cálculo; aplicações da integral: área, volume de sólidos pelo processo de fatias, aplicações às equações diferenciais.
9. Seqüências e séries numéricas: definição, critério de convergência (termo geral, comparação e razão); série de Taylor.
10. Integral imprópria.

Carga Horária: 4 horas semanais/8 créditos (disciplina anual).

Bibliografia Básica: S. Lang – Cálculo vol.1
G. F. Simmons – Cálculo com Geometria Analítica
L. Leithold – O Cálculo com Geometria Analítica
P. Boulos – Introdução ao Cálculo – vol. I e II

(Transcrição das ementas presentes no Catálogo de Graduação da USP dos anos de 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999 e 2000).

Com relação a estas ementas, observamos primeiramente que já há uma diferença entre elas no próprio título das disciplinas: enquanto que a do Bacharelado continua sendo chamada de *Cálculo Diferencial e Integral I*, denominação que já possuía antes da mudança, a da Licenciatura passou a ser chamada de *Cálculo para Funções de Uma Variável Real*, já deixando explícito que o programa de tal disciplina englobaria apenas o estudo de funções de uma variável. Notamos também que, embora as duas disciplinas fossem anuais, a carga horária semanal da disciplina da Licenciatura era menor (4 horas semanais) que a do Bacharelado (6 horas semanais). Além disso, o programa do Bacharelado era bem mais extenso que o da Licenciatura, englobando o estudo do Cálculo para funções de uma e de várias variáveis, o que indica, provavelmente, que o ritmo de trabalho com os conceitos era diferente nestes dois cursos. Nos objetivos das disciplinas, destacamos o fato de o da Licenciatura trazer explicitamente que, a princípio, seria feita uma abordagem não formal de funções, limites, derivadas e integrais, enquanto que o do Bacharelado não traz qualquer

comentário a este respeito. No conteúdo programado para a Licenciatura, observamos a existência de preocupações em apresentar a noção intuitiva de limite por meio de exemplos e de algumas aplicações de tal idéia. Ainda com relação aos conteúdos selecionados para serem trabalhados em tais disciplinas, percebemos que, na Licenciatura, os *números reais* deixaram de ser abordados, permanecendo apenas na ementa do Cálculo I do Bacharelado. Com relação às bibliografias básicas sugeridas, observamos que a da Licenciatura engloba apenas manuais com abordagens mais próximas daquilo que tradicionalmente é feito nas disciplinas de Cálculo atuais; são livros que trazem, majoritariamente, exercícios de manipulação das técnicas de cálculo e de aplicações dos conceitos. Já a do Bacharelado inclui também o manual de Spivak, que propõe uma abordagem mais analítica e formal para os conceitos, centrada em exercícios de cunho teórico e sem preocupações com as manipulações de técnicas e problemas aplicados envolvendo os conteúdos estudados. Os objetivos dessas mudanças introduzidas no curso de Cálculo I da Licenciatura, serão discutidos em detalhes no capítulo 5 deste trabalho, que terá como meta apresentar os níveis de rigor e as preocupações didáticas observados ao longo da trajetória da disciplina inicial de Cálculo ministrada no curso de Matemática da USP.

A partir de 2001, os cursos de Cálculo I do Bacharelado e da Licenciatura deixaram de ser anuais e voltaram a ser semestrais, por razões que veremos com detalhes no capítulo 5. A partir desta época, os programas destas disciplinas ficaram da seguinte forma:

Ementa da disciplina MAT 111 – Cálculo Diferencial e Integral I – oferecida aos alunos do Bacharelado em Matemática a partir de 2001

Objetivos: estudo de funções de uma variável, limites, derivadas e integrais.

Conteúdo: Números reais
 Funções
 Função Exponencial, logarítmica, trigonométricas diretas e inversas
 Limites e continuidade
 Funções contínuas em intervalos fechados
 Derivadas
 Regra da Cadeia
 O Teorema do Valor Médio
 Fórmula de Taylor
 Aplicações das derivadas
 Máximos e Mínimos
 Gráficos
 Integrais Indefinidas
 Técnicas de Integração
 Noções sobre equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem.

Carga Horária: 6 horas semanais/6 créditos.

Bibliografia Básica: S. Lang – Cálculo vol.1
 M. Spivak – Calculus
 L. Leithold – O Cálculo com Geometria Analítica
 P. Boulos – Introdução ao Cálculo – vol. I e II

H. Guidorizzi – Um Curso de Cálculo vol. I
R. Romano – Cálculo Diferencial e Integral: funções de uma variável.

Ementa da disciplina MAT 1351 – Cálculo para Funções de Uma Variável Real I – oferecida aos alunos da Licenciatura em Matemática a partir de 2001

Objetivos: estudo da variação de uma grandeza em relação à variação de outra grandeza; a idéia de função. O conceito de taxa de variação média e instantânea; a derivada de uma função. Estudo da variação acumulada; a integral definida.

Conteúdo: Equações e inequações
Definição de função e gráficos
Funções polinomiais de 1º e 2º graus
Função inversa de um número real
Funções modulares
Funções inversíveis
Funções exponenciais e logarítmicas
Funções trigonométricas e suas inversas
Taxa de variação, velocidade, coeficiente angular da reta tangente
Conceito de derivada em um ponto
A função derivada
Aproximação e linearidade local
Conceito intuitivo de limite, continuidade e diferenciabilidade
Regras de derivação
O cálculo da distância total percorrida a partir da velocidade
O cálculo de áreas
A integral definida
O Teorema Fundamental do Cálculo e exemplos.

Carga Horária: 6 horas semanais/6 créditos.

Bibliografia Básica: Hughes-Hallett – Cálculo vol. I
L. Leithold – O Cálculo com Geometria Analítica
G. F. Simmons – Cálculo com Geometria Analítica.

(Transcrição das ementas presentes no Catálogo de Graduação da USP a partir de 2001).

Comparando as ementas destas disciplinas semestrais que passaram a ser oferecidas a partir de 2001 com aquelas das disciplinas anuais ministradas entre 1994 e 2000, notamos, inicialmente, que houve uma mudança nas siglas das disciplinas. A do Bacharelado passou de *MAT 131* para *MAT 111* e a da Licenciatura de *MAT 135* para *MAT 1351*. São estas as siglas atuais das disciplinas. Com relação às nomenclaturas, a do Bacharelado permaneceu a mesma e na da Licenciatura foi acrescentado o número um após o título, para explicitar que esta será a primeira parte do tratamento das funções de uma variável real. Após 2001 não houve mais nenhuma modificação no título das disciplinas de nosso interesse. Observamos também que, ao se tornarem semestrais, tanto a disciplina de Cálculo I do Bacharelado quanto a da Licenciatura passaram a ter a mesma carga horária semanal (6 horas de aula). Com relação ao conteúdo abordado, a partir de 2001, tanto Bacharelado quanto Licenciatura passaram a estudar apenas funções de uma variável real no curso inicial de Cálculo. O programa do Bacharelado é praticamente idêntico à primeira metade do programa adotado entre 1994 e 2000; já no da Licenciatura é incluído o tópico *equações e inequações*, há um maior

detalhamento em relação aos tipos de funções que serão estudadas e os tópicos *equações diferenciais*, *sequências*, *séries numéricas* e *integral imprópria* não aparecem mais. No objetivo da disciplina da Licenciatura não aparece mais, ao menos explicitamente, que os conceitos serão trabalhados inicialmente de maneira não formal e todos os objetos de estudo são colocados com base na noção de variação. A bibliografia básica do Bacharelado continua incluindo o manual do Spivak, que propõe uma abordagem bastante analítica, formal e com alto nível de rigor do Cálculo, enquanto que a da Licenciatura permanece trazendo apenas manuais com tratamentos mais próximos daqueles observados nos cursos atuais da disciplina. Cândido afirma, no entanto que, mesmo no Bacharelado, ao longo da década de 1990 “os professores começaram a achar que trabalhar com definições de limites, muitas demonstrações, etc. podia não ser mais adequado em um curso de Cálculo. Então, criaram a disciplina Análise Real para trabalhar com todo este conteúdo”⁹⁶.

Durante as décadas de 1990 e 2000, percebemos que houve uma grande variabilidade com relação aos professores que ministraram Cálculo I para o Bacharelado e para a Licenciatura o que acabou provocando a convivência quase que simultânea de disciplinas com orientações bastante diferentes, que dependiam da forma de trabalho considerada mais adequada pelos docentes responsáveis por elas em cada momento. No entanto, de maneira geral, podemos afirmar que, pouco a pouco, depois de separadas, as disciplinas de Cálculo I do Bacharelado e da Licenciatura passaram a ser ministradas dando, cada vez mais, ênfase à manipulação das técnicas de cálculo de limites, derivadas e integrais do que a formalização de tais conceitos, que são sim apresentados de forma rigorosa, mas com um nível de rigor e formalismo mais baixo do que aquele com os quais serão revistos, sob outros aspectos, nas disciplinas de *Análise Real (MAT 0206)*, que o aluno do Bacharelado cursa no 3º semestre de sua graduação, e de *Introdução à Análise (MAT 0315)* que o aluno da Licenciatura cursa no 5º semestre de sua graduação (de acordo com o currículo em vigor na instituição atualmente).

Druck nos resumiu de maneira ilustrativa esse processo de transição de uma disciplina inicialmente de Análise Matemática para outra efetivamente de Cálculo:

Não posso dizer em que momento e porque os cursos passaram a ser mais de Cálculo, mas deve ter sido concomitante com essa escolha de novos tipos de livros. Quer dizer, aparecendo novos livros, novas bibliografias, novas tendências, as dificuldades dos alunos com a aprendizagem da Análise, essa consciência de que o Cálculo era, e continua sendo, um grande obstáculo no ingresso à universidade, então as coisas começam a mudar. (DRUCK, entrevista, 2009).

⁹⁶ CÂNDIDO (2009).

E, nos baseando no que apresentamos neste capítulo, podemos dizer este processo não terminou em 1964, quando, de fato, uma disciplina com a nomenclatura Cálculo foi incluída no currículo do curso de Matemática da USP. Este foi um processo lento, gradual e com diversas idas e vindas, com o conteúdo tradicionalmente abordado na disciplina sendo apresentado aos alunos com diferentes enfoques, em diferentes épocas e por diferentes professores. Enquanto a partir de meados da década de 1950, com as iniciativas de Gomide e Catunda e mesmo com a disciplina ainda chamando Análise Matemática, parece ter havido um caminhar lento, porém uniforme em direção a um curso efetivamente de Cálculo que, pouco a pouco, ia se afastando do caráter essencialmente analítico que possuía até então e adotando como referências manuais cada vez mais próximos do Cálculo do que da Análise, apesar de ainda ser ministrado com um nível de rigor e de formalismo bem mais alto do que os presentes atualmente na mesma disciplina, no decorrer da década de 1970 este processo começa a apresentar movimentos de idas e vindas bastante explícitas, diretamente relacionadas com a orientação tida como mais adequada pelo professor que estava ministrando a disciplina em cada ocasião. Podemos afirmar que foi a partir do começo dos anos 90 que o curso de Cálculo I se tornou, de fato, semelhante, àquele presente atualmente no currículo da Matemática, sem tantas diferenças de enfoque, de um ano para outro, como acontecia até então. A partir deste momento, o tratamento dado a tal conteúdo se tornou mais uniforme, embora, é claro, ainda possa haver algumas pequenas variações no nível de rigor e formalismo, dependendo do professor que está ministrando a disciplina, mas, ainda assim, não são diferenças tão grandes como as observadas anteriormente.

No próximo capítulo, analisaremos concomitantemente quais foram os níveis de rigor e as preocupações didáticas presentes nestes cursos iniciais de Cálculo e nos manuais que lhes serviram de referência.

CAPÍTULO 5 – OS NÍVEIS DE RIGOR E AS PREOCUPAÇÕES DIDÁTICAS PRESENTES NOS CURSOS INICIAIS DE CÁLCULO DA MATEMÁTICA DA USP E EM SEUS LIVROS DE REFERÊNCIA

Neste capítulo, analisaremos como variou, ao longo do tempo, o nível de rigor adotado nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral ministrados na graduação em Matemática da Universidade de São Paulo durante o período considerado nesta pesquisa. A questão do rigor se encontra, de acordo com Reis (2001, p. 159), no centro da intersecção/relação histórica existente entre os campos de conhecimentos Cálculo e Análise bem como entre as respectivas disciplinas acadêmicas universitárias nas quais seus elementos são apresentados aos alunos dos cursos superiores de Matemática. A principal justificativa para esta afirmação é que o próprio processo de Aritmetização da Análise é usualmente retratado/identificado como sendo um processo de “rigorização do Cálculo”. Desta forma, consideramos importante em um estudo como este aqui relatado discutir a respeito dos níveis de rigor que orientaram, em diferentes momentos, a maneira com que os conceitos fundamentais do campo em questão foram trabalhados.

Paralelamente a esta discussão, analisaremos algumas preocupações didáticas observadas nos cursos de Cálculo investigados neste trabalho, bem como nos manuais que lhes serviram de referências. Procuramos perceber a partir de quando e por quais razões os professores e os autores de livros-didáticos começaram a manifestar, de maneira mais explícita em seus cursos e textos, preocupações com o ensino e a aprendizagem do conteúdo que estavam abordando, com a forma como as aulas eram conduzidas, com o papel do aluno em seu próprio aprendizado, etc.

Optamos por reunir estes dois aspectos – rigor e preocupações didáticas - no mesmo capítulo porque percebemos que muitos dos cuidados manifestados pelos docentes e pelos autores dos livros adotados como referência nos cursos que aqueles ministraram, de alguma forma, estavam relacionados com o rigor. Eram, na maioria das vezes, preocupações no sentido de buscar abordagens e de fazer comentários, como, por exemplo, referentes às notações e aos significados dos símbolos presentes nas definições matemáticas, que pudessem proporcionar aos estudantes uma melhor compreensão da estrutura rigorosa e formal do Cálculo, estrutura esta que, durante muito tempo, foi a ênfase dos cursos desta disciplina. Podemos afirmar então que, em diversas ocasiões, as dificuldades dos alunos com abordagens

realizadas com altos níveis de rigor levaram os professores de Cálculo a modificarem a prática de suas aulas e a buscarem inovações didáticas.

Antes de iniciarmos, de fato, as discussões referentes ao rigor e às preocupações didáticas, faremos, na primeira seção do capítulo, algumas considerações teóricas a respeito das diferentes concepções de rigor e suas relações com a intuição e a respeito do surgimento de preocupações didáticas na universidade, em particular, no ensino da Matemática.

5.1 – As diferentes concepções de rigor, suas relações com a intuição e o surgimento das preocupações didáticas na universidade, em especial no ensino da Matemática

Ao iniciarmos a redação deste capítulo, sentimos a necessidade de buscar elementos teóricos referentes às diversas concepções de rigor em Matemática e a respeito do surgimento das preocupações didáticas no ensino superior, em particular de Cálculo e de Análise, que nos embasassem na discussão das informações, a respeito destes dois aspectos, obtidas nesta pesquisa.

Realizamos então, primeiramente, leituras de textos tratando de várias concepções de rigor, manifestadas por diversos autores, e suas relações com a intuição. Ao concluirmos tais leituras, estávamos de posse de uma grande quantidade de informações e idéias relevantes para a fundamentação das análises de diversos pontos que serão abordados neste capítulo. Optamos então por sintetizar e articular tais idéias por meio de um texto próprio que será apresentado na sequência.

5.1.1 – O rigor no ensino da Matemática e, em especial, do Cálculo: concepções e posicionamentos de diferentes autores

Para que possamos iniciar a discussão referente ao rigor no ensino do Cálculo, achamos pertinente retomar alguns elementos da apresentação feita por Reis (2001, p. 70) a respeito dos significados do termo *rigor* trazidos por diversos dicionários. De acordo com o autor, estes trazem sentidos diretos e figurados para tal termo, sendo que os diretos são: i) ausência de qualquer desvio, clareza; ii) concisão, exatidão, precisão; iii) forma exata e precisa. E os figurados são: i) regra de procedimentos, preceito, “o rigor manda que...”; ii) sentido preciso e necessário, interpretação restrita, explicação exata: “o rigor de uma demonstração...”; iii) último ponto a que se pode chegar alguma coisa, sentido próprio (das palavras); “o rigor matemático...”.

É impossível tratarmos do rigor e não nos referirmos a outro termo que, no processo de ensino e aprendizagem, muitas vezes, é, erroneamente, tomado como seu antônimo: *intuição*. É importante que tenhamos consciência de que, da mesma forma que afirmamos, no capítulo 4, que é inadmissível associar um ensino intuitivo ao Cálculo e um ensino rigoroso à Análise, também é “inadmissível separar intuição e rigor no ensino de qualquer conceito matemático” (REIS, 2001, p. 79). A este respeito, assim como Tall (1991), Reis (2001) afirma que, ao se tentar “opor totalmente” o rigor à intuição, chega-se a uma falsa dicotomia, quando, na verdade, entre tais elementos deveria existir uma relação dialética. Os trabalhos da linha cognitivista de Tall sobre a construção do pensamento matemático avançado defendem uma relação de complementaridade entre a intuição, presente na criação de novos resultados, e o rigor, presente no estabelecimento formal dos mesmos por meio de uma prova ou de uma definição. Esta mesma relação deve estar presente no terreno pedagógico por meio de práticas que relacionem “tensionalmente” o rigor à intuição. De acordo com Bicudo (1992),

É por essa tensão dialética entre intuição e rigor que se sobe na espiral do conhecimento matemático. Mesmo que não percebamos, a intuição está impregnada do rigor que colaborou na possibilidade de sua criação. É o equilíbrio das tendências de diferenciação (intuição) e unificação (rigor). Não há avanço de uma sem a outra. (BICUDO, 1992, p. 64).

Para Kline (1998, prefácio), “o rigor refina indubitavelmente a intuição, mas não a suplanta”. Mesmo no ensino de Análise, equivocadamente vista por muitos como um “Cálculo rigorizado”, é preciso que se tenha consciência do importante papel da intuição: “não apenas o rigor está presente no processo de construção dos conceitos em Análise (...). Também a intuição desempenha um papel fundamental neste processo, uma vez que a mesma permeia as imagens conceituais construídas pelos alunos” (p. 194). Para Guidorizzi, “em sala de aula, o rigor junto com as idéias intuitivas fornece ao estudante uma flexibilidade muito grande”⁹⁷.

No entanto, mesmo com a maioria das pesquisas recentes em Educação Matemática defendendo que intuição e rigor devem ser vistos como ferramentas que se complementam no ensino, conforme destaca Miranda (2004, p. 27) baseado em Freudenthal (1973, p. 143), compreender e, principalmente, colocar em prática tal idéia não é uma tarefa simples, já que ainda existem muitas divergências a respeito daquilo que caracteriza o rigor matemático na história desta ciência, uma vez que este sofreu diversas modificações ao longo do desenvolvimento de toda a Matemática e especificamente do Cálculo. Neste sentido, Lakoff

⁹⁷ GUIDORIZZI (2010).

& Núñez (1997) alertam a respeito da importância de se discutir o que é ser rigoroso em Matemática e quais as vantagens que este rigor proporciona ao seu ensino. Vejamos então o que dizem alguns autores a este respeito.

Para Grattan-Guinness (1997), existem diferentes níveis de rigor. O autor afirma que “a história da matemática ensina muito claramente que, de fato, o rigor se dá em níveis, os quais, portanto, devem ser especificados antes de se avaliar o trabalho matemático do estudante” (p. 81). A existência de tais níveis parece bastante natural se levarmos em conta uma daquelas definições de rigor presentes nos dicionários e que foram apresentadas anteriormente: uma delas estabelece que o rigor é obtido ao atingirmos o último ponto possível de se chegar; tal ponto corresponderia, desta forma, ao nível máximo de rigor.

Conforme destaca Reis (2001, p. 79), embasado nesta idéia de Grattan-Guinness (1997), o professor de Cálculo e de Análise precisa avaliar qual o nível de rigor mais conveniente de ser atingido naquele curso que está ministrando no momento. O rigor deve ser sempre compatível com o contexto no qual está se dando o ensino de determinada disciplina e, para isso, deve-se levar em conta: o perfil dos alunos daquela turma, em especial suas formações matemáticas anteriores, o objetivo da disciplina em questão e o profissional a ser formado pelo curso no qual ela está inserida. Para Grattan-Guinness (1997), a tomada de consciência, por parte dos professores, de que o rigor de fato se dá em níveis é de grande importância para que estes possam traçar seus objetivos e elaborar suas metodologias de ensino. Na opinião dos professores Baldino e Lages Lima⁹⁸, o nível de rigor a ser atingido em um curso de Cálculo deve ser aquele suficiente para que os alunos compreendam o resultado, mesmo que esse processo de compreensão ainda esteja carregado de intuições, principalmente as geométrico-espaciais. Para Carvalho (1990), é preciso que se tenha em mente que o rigor deve ser um efeito da atividade matemática e não sua condição prévia.

Para Baldino, é fundamental que o professor tenha em mente que o conceito de rigor não é absoluto; varia conforme o contexto em que os assuntos são trabalhados. Para ilustrar este seu ponto de vista, o professor supõe que esteja explicando a um aluno do curso de Física que uma função que tem derivada nula em um intervalo é constante no mesmo. Se este aluno interpretar o resultado visto fazendo uma analogia entre a derivada e a velocidade de um automóvel, isto é, se perceber que se a velocidade de um automóvel for zero em certo intervalo de tempo, então, neste período, o automóvel está parado, neste caso não há necessidade de se fazer, naquele momento, a demonstração formal deste fato:

⁹⁸ Ao citarmos, neste capítulo, Baldino, Ávila e Lages Lima, estaremos nos referindo às entrevistas concedidas por estes professores a Reis (2001).

Demonstrar, no fundo, é justificar. Ele tá justificado, ele tem justificações. O aluno fala, (...) mostra com um gesto que se a derivada é zero, a função não se mexe, é constante. Então, isso pra ele é uma demonstração. Agora, pro matemático não é, mas é outro contexto, é outro campo semântico. Num campo semântico de um curso de Cálculo, isso aí tá mais do que demonstrado. (BALDINO apud REIS, 2001, p. 176).

Essa idéia de Baldino é bastante semelhante à de Do Carmo (1974), para o qual, muitas vezes, se confunde o rigor substancial (aquele que Baldino classificaria como sendo o adequado para o contexto no qual determinado assunto está sendo trabalhado) com o rigor formal:

Um exemplo esclarecerá o que queremos dizer. Vamos supor que liguemos por uma reta dois pontos de um plano, um no interior e outro no exterior de uma elipse neste plano. A informação que a reta em questão encontra a elipse é substancialmente rigorosa. É possível formalizar uma demonstração desta afirmação, porém no caso isto seria inútil. Dentro do contexto de um trabalho de pesquisa, uma tal demonstração seria um pedantismo. Dentro do contexto do ensino básico, a demonstração seria enfadonha e desviaria a atenção para pontos não relevantes ao assunto. (DO CARMO, 1974, p. 13).

Segundo este autor, é claro que o rigor formal tem um papel fundamental a desempenhar, “mas aplicá-lo em situações como a acima revela uma falta de compreensão da natureza da Matemática” (Ibid, p. 13). Do Carmo, assim como Baldino, também não acredita na existência/necessidade de um rigor formal absoluto em Matemática. Para ele, se tal ciência seguisse na busca deste tipo de rigor, nela se instalaria um nível muito alto de demência, já que:

O rigor formal absoluto de uma teoria só poderá ser atingido com a total ausência de significados dos elementos da teoria. Pois uma tal teoria seria um conjunto de proposições da forma “ p implica q ”, onde nada sabemos sobre p ou q e nem sequer se q é verdade; apenas garantimos que q decorre de p segundo as regras de uma certa lógica. Como disse Bertrand Russel, é uma teoria da qual não sabemos do que estamos falando nem se o que estamos dizendo é verdade. (Ibid., p. 13).

Outro autor para o qual o rigor também depende do contexto em que se está trabalhando e da maturidade matemática dos alunos do curso que está sendo ministrado é Ávila, que defende que o professor deve prosseguir até o ponto em que o aluno esteja convencido da validade e coerência daquilo que está sendo apresentado:

Eu costumo dizer para os meus alunos que rigor e exigência de precisão em matemática é muito parecido, quando você dá aula, (...) com ensinar educação sexual para uma criança. Você vai até o ponto em que ela fica satisfeita. Mais tarde,

quando ela for amadurecendo, você vai mais longe. E mais tarde quando ela for amadurecendo mesmo, não precisa mais de você, ela já sabe. A mesma coisa é em matemática. Você não deve ir além do que os seus alunos necessitam, se eles estão satisfeitos com a sua explicação... Desde que não seja uma mentira. Você não vai dizer para o seu filho que as crianças vieram com a cegonha, por exemplo, que depois você vai ter que se desdizer (...). É a mesma coisa em matemática. Você não vai fazer uma coisa dizendo que $a + b$ ao quadrado é igual $a^2 + b^2$ porque depois você vai ser pego na mentira. Mas, respeitando esse princípio de que você sempre deve dizer a verdade, mas não necessariamente toda a verdade, eu acho que aí está um dos pontos de equilíbrio do ensino. (ÁVILA apud REIS, 2001, p. 292).

Para Freudenthal (1973, p. 147), em Matemática, o rigor está relacionado aos critérios que se utiliza para estabelecer uma verdade científica, pois, nesta ciência, não basta apenas saber se determinado resultado é válido ou não; o que é de suma importância é saber se ele foi corretamente fundamentado.

Já Loyes (1993), aponta, de acordo com Reis (2001), três concepções usuais de rigor em Matemática. São elas:

- 1) O rigor é uma característica inerente ao método matemático: as definições são acabadas e perfeitas;
- 2) O rigor é um fantasma: nossas demonstrações são sempre suscetíveis de serem criticadas, nossos conceitos de serem completados, nossa linguagem de ser enriquecida;
- 3) O rigor é um imperativo do trabalho matemático: busca-se no método dedutivo a confirmação dos processos construtivos que se utilizam de definições parciais, demonstrações informais e linguagens representativas ou empíricas. (REIS, 2001, p. 76).

É interessante observar que cada uma destas concepções se contrapõe às demais, ilustrando o fato destacado Miranda (2004), e já citado há alguns parágrafos, de que, realmente, há divergências a respeito do que é ser rigoroso em Matemática.

Para Perminov (1988), o rigor pode ser pensado como um “*processo de conceptualização de intuições*”, no qual algumas delas são mantidas e outras não. O que é importante de se perceber, de acordo com Reis (2001, p. 201), é que “isto significa que nenhuma categoria de intuição pode, de antemão, ser desprezada. O rigor pode e deve complementar a intuição, nunca sobrepujá-la”.

Embutida nessa concepção de Perminov discutida por Reis, mais uma vez, aparece a idéia do rigor complementando a intuição, algo que, de maneira geral, ainda precisa ser aperfeiçoado no trabalho em sala de aula, especialmente nas disciplinas de Cálculo e Análise, consideradas pontes de transição entre o pensamento matemático elementar e o pensamento matemático avançado dos alunos. Essa transição não implica, determinantemente, na transição do pensamento intuitivo para o pensamento rigoroso. É preciso que se tenha em mente que, no

ensino, “o processo de desenvolvimento de um pensamento matemático mais avançado demanda atividades de significação (...), consideradas mais intuitivas, às quais precedem às atividades com definições e provas formais, por sua vez, mais rigorosas” (REIS, 2001, p. 52).

Ávila, por exemplo, defende que a primeira abordagem dos conceitos deve ser feita de forma intuitiva e visual; somente após este primeiro momento de descoberta dos resultados é que os mesmos devem ser abordados de maneira lógico-rigorosa. Para este matemático, apresentar os conceitos diretamente de maneira rigorosa dificulta a apreensão das idéias principais neles envolvidas. O rigor é importante, mas em um momento posterior, de maior amadurecimento do aluno. Ávila exemplifica seu raciocínio afirmando que o estudante não compreenderá/assimilará, por exemplo, a noção formal de limite, por epsilons e deltas, enquanto estiver trabalhando, no contexto do Cálculo, apenas com funções contínuas.

O próprio Ávila destaca ainda que, a História da Matemática mostra que, primeiramente, as coisas são descobertas intuitivamente e visualmente; somente depois é que os matemáticos iam procurar formas de demonstrar de maneira lógica e rigorosa aquilo que haviam descoberto de maneira intuitiva. E essa é uma das razões que o levam a defender que, no ensino, deve-se começar pela intuição, abrindo mão, inicialmente, de grande parte do rigor, levando “o aluno a um aprendizado progressivo, continuado até que ele atinja aquele grau de amadurecimento que permita então a rigorização da disciplina” (Ibid., p. 252).

Esta visão associando a intuição ao processo de descoberta dos conceitos e resultados e o rigor à demonstração ou justificação dos mesmos é bastante comum entre autores que estudam a relação entre a intuição e o rigor no ensino. Tais autores defendem que o trabalho em sala de aula feito inicialmente de maneira intuitiva torna mais claro para os alunos os processos de descoberta ou criação de determinado conceito ou resultado matemático, enquanto que uma abordagem exageradamente rigorosa desde o princípio, na maioria das vezes, encobre tais processos. Do Carmo, por exemplo, afirma que:

Do ponto de vista didático, o problema fundamental é que a apresentação formal da Matemática, na maior parte dos casos, encobre e dissimula os mecanismos de criação. Somente os alunos muito bem dotados são capazes de apreciar este tipo de apresentação. (...) O aluno médio tem uma profunda dificuldade em acompanhar longas formalizações. A tendência é reagir com desgosto e medo, ou aceitá-las como um dogma, com grandes prejuízos para a sua imaginação criadora. Mesmo para aqueles que vão se transformar em matemáticos (...) o excesso de formalização pode facilmente se transformar em um freio ao processo criador. O objetivo da Matemática é, devemos repetir, resolver problemas. Simples, no caso do ensino, complexos e em aberto, no caso de pesquisas. Em qualquer dos casos, a intuição e a imaginação criadora desempenham um papel fundamental e a formalização é apenas um elemento auxiliar. (DO CARMO, 1974, p. 12).

Dando prosseguimento a seu raciocínio, Do Carmo, afirma também que, “neste sentido, o espírito de Arquimedes é muito mais adequado à Matemática atual do que o espírito de Euclides” (Ibid., p. 13), afirmação que, para ser bem compreendida, requer alguns esclarecimentos. Primeiramente, é preciso destacar que muitos professores de Cálculo e Análise identificam rigor com formalismo. De acordo com Reis (2001, p. 182), todos os seus depoentes estabeleceram tal identificação, utilizaram o termo *formalismo* para se referirem às situações nas quais os conteúdos são trabalhados com rigor em sala de aula e descreveram um ensino rigoroso por meio de características muito próximas daquelas utilizadas por Fiorentini (1995) para caracterizar um ensino formalista.

De acordo com Fiorentini (1995), a tendência formalista clássica de ensino, predominante no Brasil até o final da década de 1950, se caracteriza por enfatizar as idéias e formas da Matemática clássica, sobretudo a concepção platônica desta ciência e o modelo euclidiano. A primeira é caracterizada por uma visão estática, a-histórica e dogmática das idéias matemáticas, como se estas existissem independentemente dos homens. Já o modelo euclidiano se caracteriza por estabelecer que o conhecimento matemático deve ser logicamente sistematizado a partir de elementos primitivos (definições, axiomas, postulados) e que tal sistematização deve ser expressa por meio de teoremas e corolários deduzidos de tais elementos. Na tendência formalista clássica o ensino é centrado na figura do professor, que exerce papel de transmissor e expositor do conteúdo por meio de preleções e desenvolvimento teóricos na lousa. O aluno tem um papel passivo em sua própria aprendizagem, que consiste em memorizar e reproduzir, de maneira precisa, os raciocínios apresentados pelo professor ou pelos livros-didáticos.

Com relação à tendência formalista moderna, bastante presente no ensino brasileiro a partir do final da década de 1950, Fiorentini (1995) afirma que tal tendência prega um retorno ao formalismo matemático, porém com um novo fundamento: as estruturas algébricas e a linguagem formal da Matemática contemporânea. Passa-se a dar maior ênfase ao uso preciso da linguagem matemática, ao rigor e as justificativas das transformações algébricas por meio de propriedades estruturais. O ensino continua centrado na figura do professor, que apresenta e demonstra rigorosamente o conteúdo na lousa, restando ao aluno, na maioria dos casos, reproduzir a linguagem e os raciocínios lógico-estruturais apresentados por tal docente. A concepção estrutural-formalista da Matemática foi, de acordo com o autor, difundida, durante muito tempo, por professores universitários influenciados pelo trabalho do grupo Bourbaki.

Em resumo, as tendências formalistas de ensino, clássica ou moderna, de acordo com Fiorentini (1995), pecam por um reducionismo à organização e sistematização dos conteúdos,

relegando a um segundo plano a significação histórico-cultural e a concretude das idéias e conceitos. Enfatizam a Matemática pela Matemática, seus aspectos estruturais e suas definições (geralmente pontos de partida para o trabalho com qualquer conteúdo) em detrimento do significado epistemológico e da essência dos conceitos. Demonstram grande preocupação com a precisão, com o rigor, com a linguagem, com o uso correto dos símbolos, mas não dão tanta atenção aos processos que originaram os conceitos que estão sendo apresentados. De acordo com Reis (2001), estas foram, também, as características utilizadas pelos professores entrevistados por ele em sua pesquisa para descreverem um ensino rigoroso, estabelecendo, então a já citada identificação entre ensino formalista e ensino rigoroso.

Este autor destaca que tal identificação talvez seja a causa da visão dicotômica entre intuição e rigor ainda muito presente no ensino atualmente. Isso porque a tendência formalista aceita como legítimas apenas algumas formas de rigor no tratamento dos conceitos matemáticos: as fundamentadas no modelo euclidiano ou no modelo bourbakista; não considera, portanto, que possa haver rigor em Matemática fora do sistema axiomático. Reis questiona então se não existem mesmo outras formas de rigor aceitáveis no ensino de Cálculo e de Análise e conclui, por meio dos exemplos citados nos depoimentos de seus entrevistados, que há sim outras maneiras de trabalhar de forma rigorosa que não a axiomática e que, portanto, não faz sentido uma identificação total e absoluta entre ensino rigoroso e ensino formalista. É possível o professor ser rigoroso sem ser formalista, iniciando a abordagem dos conceitos de maneira intuitiva, deixando com que os alunos, primeiramente, os descubram ao invés dele os apresentar diretamente na sequência definição/teorema/demonstração/aplicação. Somente após esse momento de descoberta e de tratamento intuitivo é que se passaria a justificar de maneira rigorosa o conceito ou resultado visto.

De acordo com Ávila, esta forma de trabalho rigorosa, mas não formalista, se assemelha muito ao modo como Arquimedes fazia suas descobertas: “Era de uma maneira muito intuitiva, apelando para experiências físicas, de balança, pesando a esfera de um lado, o cone, para poder chegar ao relacionamento do volume de um com o volume de outros sólidos geométricos. Depois ele passa à demonstração” (REIS, 2001, p. 294). E Ávila destaca que, embora as descobertas fossem feitas de maneira intuitiva, suas obras apresentam demonstrações com um rigor muito refinado.

É exatamente nesse sentido de primeiramente promover a descoberta dos resultados e posteriormente buscar uma justificação rigorosa para os mesmos, ao invés de apresentá-los diretamente de maneira axiomática que Do Carmo afirma que o espírito de Arquimedes se mostra muito mais adequado à Matemática atual do que o de Euclides. Ainda em direção a

esta forma de trabalho em que as descobertas intuitivas antecedem as justificativas dos conteúdos trabalhados, Lakoff & Núñez (1997) afirmam que as definições rigorosas nada mais são do que metáforas daquelas noções obtidas de maneira mais natural por meio de atividades nas quais a intuição é que exerce o papel principal.

Neste sentido de que, no ensino da Matemática, uma abordagem mais intuitiva, com um nível menos elevado de rigor, deve sempre preceder a justificação rigorosa dos conteúdos que estão sendo estudados, Perminov (1988), citado por Reis (2001, p. 203), identifica dois movimentos que, de maneira inter-relacionada, devem estar presentes no trabalho em sala de aula: a intuicionalização, identificada como um processo de “estabelecimento de raciocínios plausíveis (às vezes verdadeiros, às vezes falsos)” e a rigorização, identificada como um processo “de conceptualização de intuições”.

Outro ponto bastante controverso em se tratando de um ensino rigoroso de Cálculo diz respeito ao papel e a ênfase dada às demonstrações em tal disciplina. Reis (2001, p. 165) nos alerta que não podemos ser reducionistas e identificarmos um ensino rigoroso como sendo “um ensino unicamente caracterizado pela primazia das demonstrações, mas certamente esta é uma característica sintomática de um ensino rigorizado, especialmente no Cálculo” ministrado segundo uma abordagem formalista. Ainda segundo este autor, na Análise as provas rigorosas são consideradas pontos nevrálgicos, enquanto que no Cálculo muitos as consideram como pontos questionáveis. Há aqueles que defendem, por exemplo, que nesta disciplina, não necessariamente as “provas” precisam atingir um nível de rigor que as classifiquem como “demonstrações”; podem ser apenas “idéias de demonstrações”. Esta visão vai ao encontro da idéia proposta por Grattan-Guinness (1997), para o qual o rigor se dá em níveis.

Baldino questiona a necessidade e a utilidade de se demonstrar formalmente aqueles resultados que os alunos conseguem compreender e aceitar intuitivamente e alerta que o professor de Cálculo deve sempre refletir se a problemática envolvida em tais demonstrações fará sentido para os alunos. Geralmente, conforme destaca Reis (2001), os professores associam o rigor às definições e demonstrações e a intuição aos exemplos, mas acreditamos que a intuição pode sim colaborar para que sejam apresentadas, com um nível de rigor adequado para o contexto no qual estão sendo feitas, idéias de demonstrações ou justificativas de resultados. Segundo Rezende (2003, p. 8-9) é necessário refletir não somente a respeito do que pode e o que deve ser demonstrado no curso de Cálculo, mas também a respeito de qual o nível de rigor aceitável neste contexto, já que, muitas vezes, o que se observa é um pseudo-rigor na apresentação dos conteúdos dessa disciplina, com alguns resultados sendo assumidos apenas com base em suas evidências empíricas e intuitivas enquanto que outros são

demonstrados com alto nível de rigor. O autor afirma que é preciso definir qual o papel exato das demonstrações na construção dos conceitos básicos em um curso inicial de Cálculo e com que intensidade estas demonstrações devem ser feitas.

Na maioria das vezes, o que se percebe, no entanto, é que o profissional que Baldino (1998) chama de *matemático-professor* (que o autor define como sendo o professor de Matemática do ensino superior que não deixa de lado o “ranço matemático”) privilegia, em seus cursos de Cálculo, o significado lógico dos resultados e não seus sentidos. Reproduz, na lousa, uma série de demonstrações acreditando que com a realização destas o cerne do resultado estará garantido, não percebendo que, muitas vezes, tal procedimento é desnecessário e inútil. Rezende (2003, p. 392) alerta que o professor de Cálculo deve ter em mente que “não é “simplesmente” demonstrando um teorema/proposição - ou o que é pior: apenas assistindo a sua demonstração - que se constrói a sua rede de significações. Muitas vezes a simples interpretação do resultado faz muito mais sentido para o aluno do que a sua demonstração”. Para este autor, a maneira como normalmente se trabalha em um curso de Cálculo, apelando quase sempre a uma sistematização exacerbada, acaba provocando uma “desmaterialização” dos conceitos e resultados básicos da disciplina.

Para Barufi (1999, p. 161-162), as exigências de um curso de Cálculo no qual “a dedução e o formalismo são preponderantes, tornando-se um dos aspectos mais importantes da abordagem realizada, senão o mais importante, não condiz com o nível de maturidade matemática do aluno ingressante na universidade”. Esta reflexão da autora, demonstrando a importância de o professor levar em consideração a maturidade do aluno que irá cursar a disciplina de Cálculo ao planejar o estilo de abordagem que adotará na mesma, parece vir ao encontro das idéias de Tall (1991) citadas por Miranda (2004), para o qual uma das causas das dificuldades enfrentadas pelos alunos no curso de Cálculo reside no fato de alguns professores entenderem como intuitivos conceitos que, para os estudantes que acabaram de ingressar no ensino superior, na verdade, não são nada intuitivos. De acordo com Miranda (2004, p. 27), “Tall (1991) observa que o “intuitivo” está sempre atrelado ao desenvolvimento cognitivo e às experiências prévias do aluno. Ou seja, o que torna algo intuitivo ou não são as próprias experiências e conceitos anteriores adquiridos”. Assim, Tall previne que “não há razão para exigir dos estudantes novatos as mesmas intuições e *insights* dos matemáticos profissionais” (TALL apud MIRANDA, 2004, p. 27).

Reis (2001, p. 156) destaca a existência de um paradoxo envolvendo o rigor e uma orientação essencialmente formalista de ensino: enquanto no campo científico a rigorização das idéias fundamentais do ramo que atualmente se chama Cálculo foi de suma importância

para a “estabilização do terreno” no qual se encontram inúmeros problemas com aplicações físicas e, conseqüentemente, para a aproximação da Matemática com outras áreas de conhecimento, no campo pedagógico este mesmo processo acabou contribuindo para que se estabelecesse um distanciamento entre esta ciência e o mundo real. Nesta mesma direção, Barufi se manifesta da seguinte forma:

Enfocando o Cálculo sistematizado, como um ramo do conhecimento, temos, diante de nós, uma sucessão de conceitos, propriedades, técnicas operatórias, com inúmeras aplicações práticas. Trata-se, sem dúvida, de um todo logicamente bem estruturado, formalmente correto. Entretanto, o quanto é importante para os estudantes, o quanto é significativo? (Barufi, 1999, p. 151).

Da mesma forma que um ensino centrado apenas em demonstrações e formalizações não conduz o aluno ao verdadeiro significado dos princípios do Cálculo, de acordo com David & Machado (1996), a ênfase apenas em regras e algoritmos isolados dos conceitos subjacentes a eles também não é adequada, principalmente porque não contribui para que o aluno adquira um pensamento matemático flexível. De acordo com David & Lopes (1998) citado por Reis (2003, p. 87), podem ser consideradas como formas de manifestação do pensamento flexível as seguintes habilidades, disposições e atitudes dos alunos: pensar de forma criativa e autônoma, procurar generalizar e provar determinado padrão que observa em alguma situação, dar sentido aos problemas que estão sendo resolvidos ao invés de recorrer a regras ou algoritmos anteriormente memorizados e ser criativo, buscando, por exemplo, soluções diferentes para questões propostas.

Analizando diversos aspectos tradicionalmente presentes no ensino de Cálculo, Reis (2001, p. 88), traz uma reflexão relevante de que, muitas vezes, na prática pedagógica, deparamo-nos com situações nas quais a relação entre procedimento e conceito não é muito bem compreendida ou percebida pelos professores. Para exemplificar o que está sendo dito, o autor recorre ao seguinte questionamento: a manipulação dos ϵ s e δ s na definição de limite, muito presente nos cursos de Cálculo de determinadas épocas, é uma atividade que privilegia o conceito de limite ou o procedimento de como, dado um ϵ , encontrar um δ corresponde? Percebe-se, portanto, que muitas vezes os professores de Cálculo acabam privilegiando atividades que, para eles valorizam o conceito, quando na verdade elas valorizam o procedimento. O autor chama a atenção para a impossibilidade de associar a intuição ao conhecimento procedimental e o rigor ao conceptual, já que, mesmo este último pode estar intimamente relacionado com a intuição.

Destaca ainda que diversos livros didáticos de Cálculo apresentam propostas predominantemente procedimental e formalista. Mesmo naqueles que defendem um “enfoque clássico intuitivo”, o que se percebe, de acordo com o autor, é que tal enfoque é “disfarçado sob a máscara de umas poucas figuras e gráficos que rapidamente perdem espaço para uma sequência de teoremas e propriedades, os quais, obviamente, devem ser demonstrados ou têm sua demonstração deixada a cargo do leitor” (p. 195-196). O pesquisador destaca então que, é necessário que o professor, ao adotar livros com esta orientação como referência para suas disciplinas, reflita sobre a melhor forma de utilizá-los, já que, tais manuais raramente exploram exemplos, contra-exemplos, ilustrações e situações-problema que podem possibilitar que, tanto os aspectos intuitivos dos conhecimentos procedimentais quanto dos conceituais, sejam explorados durante o processo de construção de conhecimento, contribuindo para que haja uma maior produção de significados e uma melhor compreensão dos conceitos trabalhados. Conforme destaca Lages Lima, é preciso que haja um equilíbrio entre as componentes de ensino em um curso de Cálculo; por exemplo, trabalhar com as aplicações, não significa desprezar os conceitos.

Todos os professores entrevistados por Reis (2001) se mostraram insatisfeitos com a abordagem rigorosa e formalista tradicionalmente empregada no ensino de Cálculo no Brasil e o autor conclui que a tentativa de solucionar os problemas presentes no ensino desta disciplina exige, principalmente, que ela seja trabalhada de maneira problematizadora e que os múltiplos significados e representações de suas idéias principais sejam explorados. Isto pode ser feito por meio de metodologias centradas na resolução de problemas, pelo trabalho com projetos de ensino, pela utilização adequada das novas tecnologias, etc. Reis (2001, p. 200) destaca ainda que o rigor e a intuição são interdependentes e que ambos devem estar presentes tanto no ensino do Cálculo quanto da Análise, cumprindo papéis complementares na construção do conhecimento e na formação do pensamento diferencial, integral e analítico. Mesmo naquelas situações em que o pêndulo entre intuição e rigor pender mais para o lado da intuição, deve haver algum tipo de rigor, de preferência não-formal.

Rezende (2003) defende que haja uma inversão de polaridade entre a sistematização e a construção dos conceitos; primeiramente é necessário que o aluno o construa, para que, posteriormente, o sistematize. E, para que se inicie tal inversão, é preciso que os professores explicitem claramente o que pensam e o que pretendem com um curso inicial de Cálculo.

Segundo Reis (2001, p. 154), o principal legado do processo de Aritmetização da Análise ao ensino foi seu modelo de rigor. No entanto, afirma que, atualmente, é preciso reconhecer que existem diferentes níveis de rigor, conforme defende Grattan-Guinness (1997),

e que, portanto, o “rigor acadêmico”, presente nos trabalhos científicos, não pode ser diretamente transposto, de maneira simplista e mecânica, para as salas de aula dos cursos de graduação. É necessário que esta transposição proporcione aos alunos uma exploração múltipla e flexível dos conceitos, segundo concepção de Llinares & Sánchez (1996) citada por Reis (2001), de tal forma que estes possam se tornar intuitivamente compreensíveis e significativos e que o nível de rigor adotado no tratamento dos mesmos seja compatível ao contexto de ensino, isto é, ao conhecimento prévio dos alunos, ao curso no qual a disciplina em questão está inserida, ao perfil profissional desejado para o egresso daquele curso, etc. Conforme é consenso entre todos os depoentes de Reis, é preciso haver, no ensino de qualquer disciplina, em particular do Cálculo, uma flexibilização do rigor.

Da mesma maneira que fizemos para estudar e fundamentar as diversas visões de rigor na Matemática, procedemos para tratar das preocupações didáticas. Com relação a este assunto, buscamos e selecionamos textos que pudemos dividir em duas categorias: i) aqueles tratando de questões didáticas relacionadas ao ensino superior em geral e discutindo a respeito do surgimento deste tipo de preocupações neste nível de ensino e ii) aqueles tratando particularmente do ensino universitário de Matemática e, em especial, de Cálculo e de Análise e discutindo alguns dos pontos nevrálgicos presentes no trabalho com estes conteúdos em sala de aula. De posse das informações obtidas em uma seleção bastante extensa de artigos lidos, optamos por sintetizá-las e colocá-las em diálogo por meio de um texto próprio que, dividido em duas partes – uma tratando do ensino superior em geral e outra do ensino universitário de Matemática – será apresentado em seguida e utilizado como embasamento teórico no momento das análises a serem feitas no decorrer do capítulo.

5.1.2 - O início das reflexões de caráter didático no Ensino Superior e as tendências atuais

As preocupações com os aspectos didáticos e metodológicos da docência no Ensino Superior são, de certa forma, recentes. Conforme já destacamos nos capítulos 1 e 2, durante muito tempo acreditou-se que ao ingressar na universidade, o estudante não necessitaria mais de qualquer preocupação didática por parte do professor; bastaria que este apresentasse o conteúdo e que aquele estudasse para que se desse o aprendizado. Afinal de contas, ao optar por um curso superior, o estudante provavelmente escolheria algo relacionado àquela área de conhecimento para a qual tivesse maior habilidade e, além disso, enquanto que na educação básica era “forçado” a frequentar as aulas e estudar diversos conteúdos que possivelmente não lhe agradassem, na universidade, como já havia optado por algo de seu interesse, já estaria

suficientemente motivado para aprender aquilo que seria ensinado. Em razão desta crença, durante muitos anos não houve preocupações com o fato de o professor universitário possuir ou não conhecimentos pedagógicos; dele, de acordo com Cunha (2004, p. 527), esperava-se “um conhecimento do campo científico de sua área, alicerçado nos rigores da ciência e um exercício profissional que legitime esse saber no espaço da prática”. A este respeito, Masetto (1998) afirma que:

Em nenhum momento, por exemplo, perguntava-se se o professor tinha transmitido bem a matéria, se havia sido claro em suas explicações, se estabelecera uma boa comunicação com o aluno, se o programa estava adaptado às necessidades e aos interesses dos alunos, se o professor dominava minimamente as técnicas de comunicação. Isso tudo, aliás, era percebido como supérfluo, porque, para ensinar, era suficiente que o professor dominasse muito bem apenas o conteúdo da matéria a ser transmitida. (MASETTO, 1998, p. 12).

Segundo Pachane (2007, p. 106), apoiada nas considerações de Ariza & Toscano (2000, p. 36), de maneira geral, os processos de ensino e aprendizagem que embasavam os aspectos pedagógicos do ensino superior caracterizavam-se por um excesso de simplificação, manifestada, dentre outros, pelos seguintes fatores:

- Tendência a converter diretamente os conteúdos disciplinares em conteúdos curriculares, como se entre eles não existissem diferenças epistemológicas, psicológicas e didáticas;
- Uma visão dos conceitos curriculares exclusivamente conceitual e acumulativa, que ignora as atitudes e os procedimentos implicados no ensino das diferentes disciplinas;
- Por uma tendência a considerar os alunos como receptores passivos da informação, destituídos de significados próprios sobre as temáticas que se trabalham na escola;
- Por uma separação reducionista que se dá entre conteúdos e metodologias, (...) como se entre os processos de produção de significados e os significados mesmos não houvesse relações de interdependência. (PACHANE, 2007, p. 106-107).

Com o passar do tempo, no entanto, começou-se a refletir a respeito de dois paradigmas, que Fischer (2009), mais apropriadamente, chama de dois equívocos, comumente aceitos no ensino superior: i) o de que a universidade é freqüentada por adultos que, portanto, sabem o que querem e, conseqüentemente, o professor pode abrir mão de aspectos pedagógicos e ii) o de que, para ministrar uma aula na universidade, basta o docente dominar o conteúdo e possuir uma boa comunicação. Fisher se contrapõe a estas idéias afirmando que, em primeiro lugar, embora haja adultos nas classes do ensino superior, são os jovens que dominam este nível educacional e, além disso, mesmo que o público das universidades fosse

majoritariamente formado por adultos, “ainda assim não se justificaria que um professor menosprezasse a dimensão pedagógica, inerente a qualquer processo de ensino, independentemente do nível em que ele atue” (FISCHER, 2009, p. 312). Em segundo lugar, a autora pontua que:

Quando alguém afirma que, para ser professor universitário basta dominar o conteúdo e saber transmiti-lo, está partindo de um pressuposto sobre “conhecimento” hoje inteiramente questionável, tendo em vista os resultados de investigações acerca de como se processa o ato de conhecer/aprender. Em outras palavras, mudou a concepção hegemônica que se tinha (...) sobre o que seja o *processo de conhecimento*. Conhecimento não é acúmulo de informações, conhecimento não está concentrado somente num lugar, esperando “passar” para outro lugar”. (FISCHER, 2009, p. 312).

Ainda de acordo com a autora, a concepção de conhecimento que passou a ser mais aceita com o decorrer dos anos leva em consideração a relação entre sujeito (aluno) e objeto a ser conhecido (conteúdo) que é dinâmica, permanente e pode sempre ser enriquecida pela mediação do professor. Rejeita-se, portanto, a idéia de conhecimento como sendo algo definitivamente acabado que está a espera para ser transmitido de alguém que “sabe” para alguém que “não sabe”. Desta forma, o tal domínio do conteúdo e a capacidade de transmiti-lo, considerados como sendo suficientes para que alguém exercesse a docência universitária passaram a ser vistos como duplamente questionáveis, já que, nem o conhecimento é “um produto acabado, aguardando ser passado adiante, nem o processo de transmiti-lo assegura aprendizagem efetiva, uma vez que esta só se processa quando o sujeito toma parte ativa, envolvendo-se inteiramente com o objeto de conhecimento” (Ibid., p. 312).

Barufi (1999) também apresenta alguns argumentos contrários a esta idéia de que para ser docente universitário basta dominar o conteúdo. No caso específico da Matemática, a autora afirma que não necessariamente um matemático profissional competente seja um professor eficiente e vice e versa. Estes dois profissionais – o matemático e o professor de Matemática – exercem trabalhos completamente diferentes, com objetivos distintos e, por esta razão, não podem ser confundidos, embora, logicamente, possam existir pessoas com habilidades para exercer ambos muito bem. É preciso que se tenha consciência de que, enquanto o matemático profissional busca a construção do conhecimento matemático, o professor se preocupa com a construção de tal conhecimento por parte de outras pessoas: os seus alunos:

Há uma grande diferença que é fundamental: o matemático que produz Matemática, realiza pesquisa num campo restrito e profundo, descobre novos resultados,

reorganiza-os da maneira mais geral possível, descontextualizada, despersonalizada, atemporal. (...) Estabelece comunicação com uma comunidade restrita, dentro da qual os resultados que encontrou são reconhecidos e, portanto validados. (...) Por outro lado, o professor de Matemática executa uma tarefa muito diferente, na medida em que ele precisa recontextualizar e repersonalizar o conhecimento que seus alunos necessitam articular, isto é, realiza um processo que é contrário, em certo sentido, ao dos matemáticos que produziram o conhecimento. Para isso, precisa encontrar situações significativas e motivadoras, com problemas interessantes, a fim de que seus alunos, tentando dar respostas adequadas a esses problemas, consigam estabelecer significados para o conhecimento desejado, compreendendo e, portanto, articulando-o. (BONOMI, 1999, p. 28-30).

Outro aspecto a ser levado em consideração ao refletirmos a respeito das razões para as mudanças ocorridas, ao longo do tempo, no processo de ensino e aprendizagem no nível universitário é que o próprio caráter da universidade se transformou. Inicialmente, de acordo com Prandi (2009, p. 139), ela era privilégio de poucos e tinha um caráter mais humanístico; os estudantes que nela ingressavam buscavam, mais do que uma profissão, um “aprimoramento pessoal”. No entanto, paulatinamente, a importância dada à ciência, tecnologia e comunicação provocaram grandes transformações na sociedade em geral e, conseqüentemente, também modificaram substancialmente o ensino superior brasileiro. Houve então um processo de expansão das universidades, acompanhado pela ampliação do número de vagas e pela mudança do perfil da população atendida, ocasionando, de acordo com Franco (2008, p. 54), “a construção de alternativas metodológicas e organizativas desta etapa educacional do país”. A esta reflexão a respeito das mudanças no caráter e perfil das universidades, Fischer acrescenta que:

No passado o aluno aspirava tanto chegar ao espaço universitário que, ao conseguir atingi-lo, bebia sofregamente os saberes advindos daqueles mestres, a ponto de dispor-se a ouvi-los com reverência e admiração. Hoje (...) a postura do aluno é outra. Mudaram os alunos, mudaram os mestres, mudou a vida. (FISCHER, 2009, p. 312).

Talvez por estas razões destacadas por Fischer, embora sempre tenha havido estudantes que enfrentassem dificuldades com a aprendizagem nas universidades, até a algum tempo estes, provavelmente, não se achavam no direito de questionar os procedimentos didáticos de seus professores do ensino superior, que, em sua grande maioria, eram profissionais dotados de grande respeito em suas áreas de atuação. Desta forma, não se queixavam das aulas que assistiam e nem de serem, eventualmente, reprovados; procuravam, a todo custo, estudar e, sozinhos, sanar suas dificuldades. Aos poucos, no entanto, com as transformações vivenciadas pela sociedade em geral e com as mudanças ocorridas na educação básica, as dificuldades enfrentadas pelos alunos ao ingressarem na universidade

foram se agravando e muitos acabavam desistindo da graduação por não conseguirem acompanhar as disciplinas presentes no currículo do curso que haviam escolhido, principalmente no primeiro ano. Então, pouco a pouco, as grandes taxas de evasão e as pressões dos próprios estudantes para que fossem tomadas medidas que tornassem os conteúdos do ensino superior mais acessível para aqueles que estavam ingressando neste nível educacional, passaram a suscitar discussões a respeito dos processos de ensino e aprendizagem na universidade.

Na medida em que tais discussões avançavam, de acordo com Debalde (2003), começou a ficar cada vez mais difícil aceitar os argumentos daqueles que atribuíam todos os possíveis insucessos na tarefa de ensinar na universidade unicamente aos estudantes; afinal, estas dificuldades são, no mínimo, frutos de um processo envolvendo também os professores, já que alguém ensinou para alguém aprender. Começou-se a perceber, segundo o mesmo autor, que o docente dominar o conteúdo não bastava para que as aulas universitárias cumprissem seu papel de maneira eficiente; deveriam ser levados também em consideração, conforme destacam Salinas & Alanís (2009, p. 355), aspectos cognitivos (relacionados à como se aprende), didáticos (relativos à como ensinar) e epistemológicos (que dizem respeito à maneira como se concebe o saber a ensinar e aprender). Constatou-se que, muitas vezes, o professor “tem domínio sobre a temática, mas não consegue encontrar uma forma adequada de abordá-la, possibilitando a aprendizagem” (DEBALD, 2003, p. 24). Pouco a pouco, tornou-se claro que era preciso que o professor, além de ter habilidades com o conteúdo que fosse ministrar, deveria proporcionar situações de aprendizagem a seus alunos; afinal, de acordo com Fischer (2009, p. 314), “ensinar supõe provocar situações que levem o aluno a estabelecer o máximo de relações possíveis envolvendo o objeto em estudo”. De qualquer forma, é importante sempre termos em mente que esta tomada de consciência de que apenas o domínio do conteúdo não bastava ao professor universitário e que era preciso que houvesse também preocupações com aspectos didáticos e pedagógicos é algo, de certa maneira, bastante recente. Por esta razão, conforme nos alerta, Labegallini (2009, p. 15), “muitos procedimentos que, hoje, consideramos “absurdos pedagógicos” fizeram parte de um contexto que os consideravam o correto a ser feito no ato de ensinar”. Foi um processo longo até que se começasse a perceber que:

Ensinar é, certamente, provocar o crescimento intelectual e isso não se faz através de aulas onde, ao longo do semestre, só o professor fala e/ou faz demonstrações no quadro. Aprender não significa acumular informações memorizadas e sem sentido. Aprender, efetivamente, significa que o aluno, diante de situações novas, é capaz de buscar alternativas argumentando teoricamente em favor de suas escolhas. Portanto,

estimular intelectualmente o aluno exige fazê-lo romper com explicações dos outros, supõe provocá-lo para que ele busque as suas próprias, ou seja, supõe desafiá-lo à autonomia de pensamento. (FISCHER, 2009, p. 315).

Na mesma linha destas idéias de Fischer, Coll (1991, p. 35), destaca a importância de a aprendizagem ser vista como um “processo ativo de elaboração”, ao longo do qual podem ocorrer, muitas vezes, assimilações parciais ou mesmo “defeituosas” do conteúdo que são, no entanto, necessárias para que a continuidade do processo tenha êxito; “o ensino deve se realizar de tal modo que favoreça as múltiplas interações entre o aluno e os conteúdos”. É preciso então que, conforme afirma Debal (2003), ocorra uma modificação no processo de ensino, passando de um modelo que transmite conhecimentos para outro no qual os conhecimentos são construídos. O processo pedagógico deve ser pautado pela mediação entre o docente e o estudante, que deve ser estimulado a fazer análises ao invés de resumos. Conforme destaca Pachane (2007, p. 109), estas idéias começaram a ser postas em prática pelas universidades a partir da década de 1970, quando as atividades de pesquisa, voltadas para a produção de ciência, tecnologia e cultura, sobrepuseram-se às atividades de ensino que, até então, eram o foco destas instituições. Neste momento, houve uma mudança na identidade da universidade brasileira: embora ela não tenha deixado de ser uma instituição de ensino, após a aprovação da Lei 5.540/68 (Lei da Reforma Universitária), passou a priorizar a pesquisa ⁹⁹. Segundo Dias Sobrinho (1994), citado pela autora, “as universidades deveriam formar pessoas não só para a difusão do conhecimento, mas também para a crítica e para a criação do novo”. (DIAS SOBRINHO, 1994, p. 133).

Para Pimenta e Anastasiou (2002, p. 151-153), foi neste momento em que começou a se estabelecer a idéia de que deveria haver uma relação de parceria entre professores e estudantes visando à construção do conhecimento; passou-se a levar em conta que não deveria prevalecer a figura do professor transmissor; ao invés do professor existir para o aluno, ambos deveriam existir para a ciência. Por outro lado, conforme destaca Prandi (2009, p. 140), mesmo atualmente, da forma como estão estruturadas, muitas instituições de ensino universitário não estimulam e até mesmo dificultam as práticas inovadoras, já que “são raros os espaços cedidos aos docentes, para que eles possam ter encontros periódicos com seus pares, a fim de refletirem sobre o trabalho que desenvolvem”. Convém explicitarmos que, assim como Lucarelli (2000):

⁹⁹ E esta prioridade era explicitada já no Art. 1º de tal lei, a saber, “O ensino superior tem por objetivo a pesquisa, o desenvolvimento das ciências, letras e artes e a formação de profissionais de nível universitário”. Fonte: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/15540.htm - último acesso em 11 de maio de 2011.

Quando nos referimos à inovação, fazemo-lo em associação a práticas de ensino que alterem, de algum modo, o sistema unidirecional de relações que caracteriza o ensino tradicional. Em outras palavras, o sistema de relações centrado apenas na transmissão de informação – emitida pelo docente, presente em um impresso ou veiculada por qualquer meio tecnológico mais sofisticado, como o que se produz pela comunicação virtual. Uma inovação na aula supõe sempre uma ruptura com o estilo didático imposto pela epistemologia positivista, o qual comunica um conhecimento fechado, acabado, conducente a uma didática da transmissão que, regida pela racionalidade técnica, reduz o estudante a um sujeito destinado a receber passivamente esse conhecimento. (LUCARELLI, 2000, p. 63).

Ao realizar tais inovações é preciso que o professor, conforme alerta Franco (2010), tenha a consciência de que, para que a diversificação metodológica tenha chances de ser bem sucedida, ela deve ser acompanhada de mudanças na forma de avaliação da aprendizagem, de transformações na relação professor-aluno e de critérios que permitam fazer uma seleção dos conteúdos a serem trabalhados. Especificamente com relação a este último aspecto, afirma que “à tarefa de selecionar conteúdos cabe o estabelecimento de alguns critérios, a exemplo de significado, validade, interesse, adequação, exequibilidade, ajustamento à capacidade dos alunos” (p. 23-24). Em resumo, destaca que é necessário que o professor possua um escopo teórico e prático que o auxilie em uma atuação reflexiva.

Outro ponto que ainda precisa ser alvo de reflexões mais aprofundadas por partes dos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem nas universidades é, de acordo com Cunha (2004), Prandi (2009) e Labegalini (2009), o fato de, atualmente, observar-se uma tendência do professor deste nível ensinar como foi ensinado, “mantendo-se cativo aos conhecimentos que construiu durante toda sua “vida de aluno”” (PRANDI, 2009, p. 140) e, de acordo com Cunha (2004, p. 528-529) embasada por Cortesão (2000, p. 40), “garantindo, pela sua prática, uma transmissão mais ou menos eficiente de saberes e uma socialização idêntica àquela de que eles próprios foram objeto”. O problema desta prática, segundo Prandi (2009, p. 140), é que este conhecimento que o docente adquiriu quando aluno pode tornar-se estático e dogmático, “levando-o a reprimir a sua criatividade e não ousar adentrar por novos caminhos, apoiando-se num caráter repetitivo e mecânico nas suas ações”. Além disso, especificamente no caso da Matemática, conforme destaca Barufi (1999, p. 28) citando Bass (1997, p. 19), “a experiência de um matemático quando aprendiz pode não ser o melhor modelo para a aprendizagem de seu/sua estudante”.

Há também aqueles professores que, utilizando como ponto de partida suas experiências como alunos, procuram não repetir, como docentes, o que vivenciaram enquanto discentes e, com relação a estas duas posturas distintas, Labegalini (2009) afirma que:

Há sempre um contexto a ser pensado, tendências pedagógicas que estiveram vigorando enquanto seus professores foram alunos ou professorandos e as tendências pedagógicas do momento presente. É preciso que o professor analise as situações de sala de aula com olhar docente, que pense no que viveu enquanto discente para enxergar-se no lugar do seu antigo professor, buscando conhecer os elementos que o levaram a agir da maneira como agiu. Corre-se o risco de decepcionar-se: perceber que nossos professores inesquecíveis adotaram práticas nem sempre tão boas quando analisadas com olhar pedagógico. (LABEGALINI, 2009, p. 15).

Segundo Prandi (2009, p. 141), para atender as atribuições do ensino superior atual, espera-se que o professor universitário seja um profissional competente no âmbito de sua disciplina, crítico, responsável e reflexivo; “precisa ter capacidade para exercer a docência e realizar atividades de investigação. A aprendizagem deve estar voltada para o aluno, utilizando métodos que contribuam para o entendimento do que está sendo ensinado”. Também a respeito de como deve ser o trabalho docente na universidade atual, Masetto (2003, p. 82-83) afirma que é necessário substituir a ênfase no ensino pela ênfase na aprendizagem, o que exige o desenvolvimento de algumas ações na prática pedagógica, como transferir o foco do professor para o aluno, tornando este último o sujeito central no exercício das ações necessárias para que ocorra sua própria aprendizagem. É preciso também que a idéia de professor como agente de transmissão de informações seja substituída pela idéia de professor como mediador pedagógico ou orientador do processo de aprendizagem de seus alunos. Ainda neste sentido, Althaus (2004, p. 102) aponta que o décimo artigo da Declaração Mundial sobre Educação Superior no Século XXI, de 1998, destaca que é necessário que se estimule a inovação constante dos currículos e dos métodos de ensino e aprendizagem das universidades. No entanto, conforme comenta Fischer (2009), apesar de, atualmente, muitos professores universitários já terem despertado para a importância das preocupações didáticas também neste nível de ensino, muitas vezes a forma como as aulas são conduzidas e as tarefas propostas aos estudantes, ao invés de os incentivarem a produzir conhecimento, têm contribuído mais para que haja um desencanto destes em relação aos conteúdos trabalhados. Segundo a autora:

Com raríssimas exceções, à medida que os estudantes somam anos de escolaridade diminuem a curiosidade, o gosto por desafios intelectuais e, o que é pior, a criatividade latente. A universidade não deveria ser o *locus* privilegiado para despertar criatividade adormecidas ao longo da trajetória escolar? Não seria a etapa da graduação um tempo em que o estudante poderia se defrontar com desafios instigantes? (...) Não seria a universidade um dos espaços mais adequados para discussões coletivas, problematizações e busca de soluções originais para o campo profissional e para a sociedade em geral? (FISCHER, 2009, p. 311).

Ainda de acordo com a autora, ao refletirmos a respeito dos aspectos pedagógicos do trabalho docente universitário não podemos nos restringir apenas a pensamentos didáticos restritos e equivocados, do tipo “como elaborar um roteiro de aula”. Para pensar o trabalho docente de acordo com uma perspectiva pedagógica é necessário, antes de tudo, que se redimensione o contexto da sala de aula a partir de, pelo menos, três aspectos: o *filosófico/ético/político*, buscando refletir a respeito do sentido do que se faz na universidade e do compromisso e finalidades deste tipo de instituição na sociedade atual; o *epistemológico/curricular/didático*, que envolve reflexões específicas com relação ao curso em que o docente está atuando, aos critérios mais adequados para definir os conteúdos a serem trabalhados e os procedimentos a serem adotados e engloba ainda reflexões com relação à própria concepção do que se entende por conhecimento e pelo ato de aprender; e o *psicológico*, tratando de questões específicas das possibilidades e possíveis restrições dos sujeitos envolvidos no cenário de ensino e aprendizagem em sala de aula, das relações interpessoais, do jeito de ser de cada estudante e de suas subjetividades. Além disso, destaca que:

Nos dias atuais, a orientação pedagógica recomenda que o professor substitua os pontos finais de sua aula por pontos de interrogação, de preferência pontuando tais questionamentos a partir de elementos concretos, encontrados na vida e no campo de ação do futuro profissional que ali está iniciando sua formação. Para tanto, não basta que o professor “domine o conteúdo e saiba transmiti-lo”, é também imprescindível que ele reflita – de preferência com seus pares e, de vez em quando, por que não com seus alunos – (...) sem, entretanto, incidir num problema que tem se constatado na nossa realidade: tentando *modernizar* suas técnicas didáticas, há professores que maquilam procedimentos. Neste caso, mudanças são realizadas sem terem sido precedidas de fundamentação teórica que as justifiquem, ocasionando com isso consequências nefastas, muitas vezes irreversíveis. (...) Numa perspectiva crítica, isto é, acompanhada de constante reflexão sobre seu próprio trabalho docente, o que todo professor poderia fazer a cada aula, resume-se no seguinte: a) provocar questionamentos concretos (problematizar); b) colocar à disposição fontes e materiais (não esquecendo de que ele, professor, é uma fonte importante); c) interagir com as idéias dos alunos (devolvendo questões, apontando alternativas, propondo novas relações). (Ibid., p. 314-315).

Complementando estas considerações de Fischer sobre as exigências que se colocam atualmente para o professor universitário, Zabalza (2004) afirma que o docente do ensino superior precisa ser um profissional criativo, inovador e que trate os conteúdos de uma forma que seja coerente com seus objetivos. Além disso, de acordo com Prandi (2009, p. 139), é importante que o professor estabeleça, logo ao iniciar seu trabalho com determinada disciplina, o que o estudante deverá ser capaz de fazer ao final do aprendizado daquele assunto. Para Labegalinini (2009), não poderemos falar verdadeiramente em ensino superior

enquanto “nossos alunos não aprenderem a construir seus conhecimentos, a desenvolver pesquisas (...), a pensar a respeito dos assuntos de sua área de modo que se construam como profissionais” (p. 16) e, para que estes objetivos sejam atingidos, os professores precisam planejar adequadamente as disciplinas que irão ministrar, refletindo a respeito de cada aula (com relação a sua duração, a seu público-alvo, ao conteúdo que será trabalhado, aos objetivos que deverão ser atingidos, as metodologias a serem empregadas, a avaliação do conhecimento ultrapassando o conceito de provas, etc.) e tendo sempre a consciência de que a disciplina em questão é parte integrante de um *corpus* de estudos e não algo isolado. De acordo com Debalde (2003, p. 24), “está mais do que na hora de rever a prática pedagógica universitária para que os futuros profissionais não sejam rotulados como “geração xerox”, que cursou a faculdade reproduzindo o saber existente, sem acrescentar nada de novo”.

Outro ponto que deve ser levado em consideração é a formação pedagógica do docente universitário. Antigamente, conforme o leitor já deve ter percebido pelo que foi exposto nesta seção, esta quase nunca era discutida. De uns tempos para cá, no entanto, parece ter começado a haver uma tomada de consciência, por parte das pessoas envolvidas no processo de ensino e aprendizagem de algumas universidades, a respeito da influência didática e pedagógica exercida pelos professores universitários sobre seus alunos e, conseqüentemente, passou-se a repensar a formação profissional daqueles, principalmente em relação aos aspectos pedagógicos. De acordo com Labegallini (2009, p. 12), a maioria dos professores que atuam nas faculdades e universidades são bacharéis que possuem sólidos conhecimentos específicos referentes à suas áreas de atuação. Tais conhecimentos devem sim ser valorizados, mas, no entanto, o ideal seria que estes docentes se apropriassem também de conhecimentos que os auxiliassem em sala de aula e fundamentassem teoricamente suas práticas didático-pedagógicas, já que “a docência no ensino universitário requer formação didática, conhecimentos pedagógicos que fundamentem a ação, conhecimento de teorias educacionais e até mesmo psicológicas, norteadoras da prática” (p. 11). Para Vasconcelos (1996), “ministrar aulas envolve o domínio de técnicas específicas e um tipo de competência profissional, a pedagógica, que deve ser aprendida e desenvolvida como qualquer outra competência e não simplesmente ser considerada como um “dom””. (VASCONCELOS, 1996, p. 1).

Nesta direção de complementar a formação dos futuros professores universitários, diversas instituições têm incorporado em seus currículos a disciplina Didática do Ensino Superior, na qual são realizados estudos didáticos relativos a aspectos do ensino e da instrução. Conforme destaca Labegallini (2009, p. 14), “não se trata de um receituário sobre “como ensinar”, mas sim de valorização e respeito por uma ciência que vê a educação, em

qualquer curso de graduação, como algo que necessita de um “saber fazer””. De acordo com Pachane (2007, p. 110) diversos aspectos influenciam a ampliação do consenso relativo à importância da formação pedagógica do professor universitário, dentre os quais estão: a expansão do ensino superior, a mudança no perfil dos estudantes ingressantes nas universidades, a mudanças no perfil esperado do egresso dos cursos superiores, as mudanças no paradigma científico e pedagógico e a crescente conscientização dos próprios docentes quanto à necessidade de uma formação específica para atuarem como professores universitários. A autora afirma ainda que “a formação pedagógica dos professores universitários poderá, em breve, constituir-se como critério obrigatório para o ingresso no magistério superior, seguindo-se ao que ocorreu historicamente com a formação dos professores para o ensino fundamental e médio” (p. 111). Afinal, conforme pontua Labegalini (2009, p. 17), “pensar na docência universitária como algo que requer conhecimentos específicos, habilidades e competências também específicas, é um grande passo na busca pela qualidade do ensino universitário e pela valorização das universidades”.

Agora que já tratamos das origens das preocupações de caráter didático no ensino superior em geral e das tendências atuais relativas a este aspecto, faremos algumas considerações específicas relativas ao ensino universitário de Matemática, em especial de Cálculo e de Análise.

5.1.3 - As preocupações didáticas no ensino de Cálculo e de Análise

Na seção anterior discutimos a respeito da tomada de consciência, ocorrida com o passar do tempo, de que, mesmo no ensino superior, é preciso, de acordo com os autores citados, que haja algum tipo de preocupação didática por parte do docente no momento de preparar e conduzir suas aulas. Com relação especificamente aos cursos de Cálculo, tais preocupações são perfeitamente justificáveis, já que, conforme bem destacam Marcolini & Perales (2005, p. 27) a respeito deste conteúdo, os “vínculos que guarda, tanto com a matemática elementar quanto com a avançada, assim como o papel que desempenha nas outras ciências, o transformam em um conjunto de saberes com grande valor teórico e empírico, indispensável para o ensino superior”. Além disso, como afirmam Salinas & Alanís (2009, p. 359), o paradigma tradicional de ensino desta disciplina tem deixado muito a desejar, com elevados índices de reprovação, falta de compreensão dos conteúdos ensinados e atitude negativa em relação à aprendizagem da Matemática. Ríos (1998) destaca que muitos dos problemas enfrentados pelos estudantes no início de suas graduações na área de Ciências Exatas provêm do que se ensina nos cursos de Cálculo. Para Olimpio Junior (2007), é

provável que nos cursos de graduação em Matemática, seja de Licenciatura ou Bacharelado, os problemas sejam até maiores, já que, em tais cursos, a orientação posta em prática no ensino do Cálculo “tende muitas vezes a privilegiar abordagens menos procedurais e mais teórica (uma configuração pouco usual para o neófito), embora nem sempre necessariamente com o objetivo de estimular a compreensão conceitual” (p. 40).

Ríos (1998) defende que, independentemente do ensino desta disciplina ter sido feito de maneira tida como adequada e do aluno se empenhar em seus estudos, certamente haverá algum tipo de dificuldade na aprendizagem deste conteúdo, já que algumas destas são inerentes aos próprios conceitos desta área de conhecimento. Afinal, conforme destaca Cantoral (1993),

A diferença entre o Cálculo e a matemática escolar anterior a ele é que este incorpora idéias novas como taxas de variação, variação instantânea, os processos infinitos e as situações limite. Ele também estende a matemática à realidade, enriquecendo os modelos. Isto traz consigo a introdução de novos símbolos, os quais, eventualmente, podem modificar o campo semântico de alguns objetos já conhecidos da matemática, como é o caso da igualdade (=). Neste sentido, o estudante se encontra diante de idéias que também necessitam de novos símbolos, estratégias e concepções. (CANTORAL, 1993, p. 3 – tradução nossa).

Aliás, convém observar que a questão da igualdade, levantada por Cantoral na citação acima é também discutida por Artigue (1998) ao tratar de um dos tipos de dificuldades enfrentadas pelos estudantes que iniciam seus estudos no ramo da Análise Matemática: a necessária ruptura com o pensamento algébrico. A pesquisadora afirma que neste processo uma das etapas necessárias para que o estudante se torne um analista eficaz é que ele “enriqueça sua visão a respeito da noção de igualdade e desenvolva novos métodos para provar igualdades” (p. 56 - tradução nossa). Percebe-se, portanto, que, “a entrada no mundo da Análise obriga também os estudantes a reconstruir objetos matemáticos já familiares, porém em outros mundos” (idem). Talvez seja neste sentido que Olimpio Junior (2007) afirma que “ao ingressar no primeiro ano de um curso de Matemática o aluno entra em contato com um mundo matemático “novo”, às vezes familiar e às vezes bastante estranho” (p. 41). O mesmo autor destaca ainda que “a iniciação à matemática universitária implica em forte, porém necessária, desestabilização” (p. 44).

As investigações a respeito da Didática do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Matemática ganharam, de acordo com Giménez & Machín (2003), fôlego especial a partir de 1985, com a formação, durante um dos congressos do PME (Psychology of Mathematics Education), de um grupo de trabalho com o objetivo de estudar o chamado *Pensamento Matemático Avançado* e, mais especificamente, aprofundar as investigações cognitivas a

respeito dos processos de ensino e aprendizagem do Cálculo. Segundo Cantoral (1993, p. 8), por meio destas investigações se busca a maior quantidade possível de informações empíricas referentes a aspectos próprios da aprendizagem do Cálculo, tentando-se, em particular, explicar a natureza das dificuldades dos estudantes. “O problema central consiste em localizar as dificuldades para entender as causas e explorar possíveis tratamentos” (tradução nossa). Com relação, especificamente, aos processos cognitivos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado, Giménez & Machín (2003) os definem como “uma série de processos matematicos entre os quais se destaca o processo de abstração que consiste na substituição de fenômenos concretos por conceitos confinados na mente” (p. 136 – tradução nossa). Alertam, por outro lado, que não podemos dizer que a abstração seja uma característica exclusiva da Matemática de nível superior, da mesma forma que não o são outros processos, tais como analisar, categorizar, conjecturar, generalizar, sintetizar, definir, demonstrar e formalizar. No entanto, “é evidente que estes três últimos adquirem maior importância nos cursos superiores: a progressiva matematização implica na necessidade de abstrair, definir, demonstrar e formalizar” (Ibid.). Aliás, de acordo com os mesmos autores, o ato de definir é um dos aspectos que diferenciam a Matemática Elementar e a Matemática Avançada, já que, enquanto na primeira os objetos são descritos, na segunda eles são definidos. Estando ciente disto, é preciso então que:

Se eduque progressivamente os hábitos dos estudantes, sobretudo daqueles que vão realizar estudos de Matemática não elementar, de forma que as definições façam parte de suas experiências e, portanto, de seus esquemas conceituais. (...) No campo (...) da Análise Matemática, as definições desempenham um papel muito importante na realização de tarefas cognitivas e, conseqüentemente, na formação dos esquemas conceituais. Daí a necessidade de se planejar situações didáticas adequadas, nas quais as definições sejam imprescindíveis para que as tarefas sejam realizadas de maneira correta. (GIMÉNEZ & MACHÍN, 2003, p. 141-142 – tradução nossa).

Da mesma forma que o estabelecimento deste grupo de trabalho referente ao Pensamento Matemático Avançado foi marcante na trajetória das pesquisas a respeito do processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise Matemática, a atuação do grupo de trabalho *As dificuldades dos estudantes em Cálculo* no ICME 7, realizado em 1992, também contribuiu para reflexões referentes a este assunto. Seus participantes - pesquisadores e docentes de diversos países - reuniram-se com o objetivo de tentar responder a algumas questões agrupadas em três categorias principais:

- Objetivos e conteúdos: Quais são os objetivos de um curso de Cálculo? Qual é seu papel no currículo de Matemática? Quais são as relações entre os aspectos conceituais e os aspectos técnicos dos conteúdos do curso?
- Dificuldades de ensino e aprendizagem: Quais são as dificuldades comuns a todos os aspectos do Cálculo? Quais são as dificuldades específicas de alguns aspectos? Quais são as razões de tais dificuldades?
- Concepções do Cálculo e de seu ensino que fundamentam as diferentes experiências: Quais os problemas que surgem no momento de implementar sequências de ensino? Quais tem sido os resultados das experiências? Os resultados obtidos estão de acordo com os resultados esperados? É possível explicar as divergências entre os resultados esperados e os obtidos? (ARTTGUE & ERVYNCK, 1993 apud GIMÉNEZ & MACHÍN, 2003, p. 142 – tradução nossa).

Segundo Giménez & Machín (2003), muitas destas perguntas ainda não foram totalmente respondidas e se constituem como questões mais gerais que têm dirigido as investigações neste ramo. Artigue (1998, p. 42) destaca que as pesquisas normalmente têm agrupado as dificuldades relativas ao processo de ensino e aprendizagem de Cálculo e Análise em três categorias principais, a saber: i) *as dificuldades ligadas a complexidade matemática dos objetos básicos deste campo conceitual*; ii) *as dificuldades ligadas à conceitualização da noção de limite* e iii) *as dificuldades ligadas a necessário ruptura com modos característicos do pensamento algébrico*. De acordo com Giménez & Machín (2003), há ainda dificuldades com os processos infinitos presentes nos conceitos básicos de derivada e integral, além de outras questões referentes ao estudo de funções, ao conceito de infinito e aos diversos tipos de representações semióticas inevitavelmente presentes na abordagem destas áreas da Matemática.

Durante muito tempo, o foco dos cursos de Cálculo foi a apresentação formal e rigorosa do conteúdo matemático, em uma abordagem centrada nela mesma. Segundo Gascón (2009, p. 281), o matemático norteamericano Thurston (1994) chama de *modelo popular* esta organização didática caracterizada pela sequência *definição – explicação – teorema - prova*. De acordo com Salinas & Alanís (2009, p. 362), este tipo de apresentação se vincula àquela estratégia de ensino tradicional, na qual o professor “se limita a exibir (ensinar) a estrutura, pois pressupõe que é desta maneira que se dará a aprendizagem” (tradução nossa). Atualmente, no entanto, segundo Cantoral, Cordero, Farfán & Imaz (1990), a premissa mais importante a ser levada em consideração no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo é a de que uma abordagem excessivamente formal e teórica é a menos adequada para comunicar as idéias fundamentais deste campo de conhecimento. Afinal, conforme destaca Cantoral (1993):

A didática clássica da matemática que vai da definição ao teorema, do teorema à demonstração e deste à aplicação, mostra a matemática apenas como produto do pensamento, mas não como uma forma de pensar, como uma atividade humana; em outras palavras, a estrutura lógica com que se apresenta a matemática não é a maneira mais propícia para permitir o desenvolvimento do pensamento matemático. Estamos ensinando os resultados da matemática e não os processos mediante aos quais se obtiveram estes resultados. (CANTORAL, 1993, p. 17-18 – tradução nossa).

Conforme alerta Cordero (2005, p. 269), a opção didática que privilegia os aspectos formais do Cálculo, deixando em segundo plano os aspectos epistemológicos e cognitivos, acaba gerando uma “cultura” na qual o estudante aprende a definir, a dizer o que é, por exemplo, uma integral ou uma derivada sem, no entanto, obter uma compreensão efetiva de tais conteúdos que o permita, por exemplo, estudar fenômenos de variação contínua.

Por outro lado, Cantoral, Cordero, Farfán & Imaz (1990) afirmam que o foco do curso também não deve ser nas técnicas; deve-se é proporcionar ao estudante uma visão mais ampla dos assuntos estudados, dando-lhe condições, por exemplo, de, mais do que apenas calcular limites e derivadas, perceber quando um problema exige o cálculo de uma derivada ou de uma integral. Apresentando apenas as técnicas, os alunos acabam concebendo o Cálculo como:

Uma ferramenta que os provém de algoritmos eficientes, aos quais, posteriormente, buscarão algumas aplicações. (...) Esta concepção, na melhor das possibilidades, provoca um bom desenvolvimento dos procedimentos analíticos dos conceitos. (...) No entanto, muitas vezes, acabam ficando com a impressão de que aqueles procedimentos substituem qualquer outro (...) como os intuitivos e os visuais, já que esta orientação favorece a consideração dos conceitos matemáticos como objetos já prontos, não levando em consideração que estes podem ser construídos pelos estudantes, de maneira funcional, para que trabalhem com diversos tipos de situações. (CORDERO, 2005, p. 269 – tradução nossa).

De acordo com Ríos (1998), muitos professores, conscientes das dificuldades acarretadas por uma abordagem excessivamente formal do Cálculo, organizada com níveis elevados de rigor e que ignora quase que totalmente as questões que estiveram envolvidas na origem do desenvolvimento dos mesmos, com o objetivo de minimizar tais dificuldades, têm feito uma escolha didática equivocada: reduzir o ensino dessa disciplina a algoritmos e técnicas, oferecendo aos estudantes cursos que Cantoral (1993, p. 4) classifica como “de pouco ganho cognitivo”. Percebe-se então, conforme assinalam Salinas & Alanís (2009, p. 361), uma tendência nas instituições de ensino superior em se estabelecer um “*modelo docente tecnicista*” em substituição a um “*modelo docente teoricista*”. A respeito destas duas orientações distintas para o Cálculo – a teórica e a técnica - Artigue (1995, p. 97) destaca que muitas pesquisas evidenciam o quanto é problemático o processo de ensino e aprendizagem

dos conceitos fundamentais desta área; se, por um lado, os estudos mostram que é possível ensinar, mesmo que de forma mecânica, a obtenção de derivadas e integrais de algumas funções e a resolver alguns tipos de problemas padrões do Cálculo, por outro apontam as grandes dificuldades enfrentadas por aqueles professores que buscam de seus alunos uma compreensão efetiva dos conceitos e métodos centrais deste ramo da Matemática.

Estes estudos mostram, também de maneira clara, que, frente às dificuldades encontradas, o ensino tradicional (...) tende a centrar-se em uma prática algorítmica e algebrizada do cálculo e a avaliar essencialmente as competências adquiridas neste domínio. Este fenômeno se transforma em um círculo vicioso: para se obter níveis aceitáveis de êxito, os professores avaliam aquilo que os estudantes podem fazer melhor e estes, por sua vez, consideram esses aspectos cobrados como sendo os essenciais, já que são os que serão avaliados. (ARTIGUE, 1995, p. 97 – tradução nossa).

Segundo Marcolini & Perales (2005, p. 25), é preciso que se perceba que as dificuldades na aprendizagem de Matemática enfrentadas pelos alunos das universidades não se devem somente a aspectos pedagógicos, técnicos ou àqueles inerentes aos próprios conceitos a serem ensinados; muitas destas são oriundas da maneira como se seleciona, articula e organiza o saber matemático com fins didáticos. Salinas & Alanís (2009) afirmam que as propostas para modificar o modelo tradicional de ensino de Cálculo se dividem, basicamente, em duas vertentes: aquelas que defendem transformações no modo de se ensinar e aquelas que proclamam que deve haver mudanças no que é ensinado, isto é, no conteúdo que é abordado nos cursos.

Ríos (1998) é um dos autores para os quais é necessário rever o que se pretende ensinar nos cursos de Cálculo. De acordo com ele, dificilmente, apenas por meio de modificações no esquema tradicional de ensino e aprendizagem, o aluno conseguirá apropriar-se melhor dos elementos da área em questão, já que, muitas das dificuldades encontradas pelo estudante no processo de construção dos conhecimentos específicos deste campo são inerentes aos próprios conceitos. Seria necessário então, segundo este autor, analisar o que realmente deve ser trabalhado e qual o momento mais adequado para que este trabalho seja feito.

Com relação aos questionamentos a respeito de como ensinar Cálculo, Artigue (1998, p. 41), afirma que é preciso “encontrar uma forma de introduzir o aluno neste campo conceitual que seja, ao mesmo tempo, rica em significado e acessível” (tradução nossa). A mesma autora cita ainda as proposições sobre o ensino de Análise, estabelecidas em 1981, por uma comissão formada por representantes dos IREMs¹⁰⁰; dentre as quais estão:

¹⁰⁰ Institutos de Pesquisa Sobre o Ensino da Matemática.

- Modificar as relações entre teoria e aplicações e organizar os programas em torno da resolução de problemas de grande alcance e representativos da epistemologia do campo, tais como problemas de aproximação e otimização; (...)
- Dar maior importância a exemplos simples e típicos que possam servir de referência e evitar todo o interesse demasiadamente precoce por situações patológicas;
- Teorizar unicamente o necessário, com níveis de formalização reduzidos e acessíveis aos estudantes. (ARTIGUE, 1998, p. 49 – tradução nossa).

Zhang (2003) destaca que, nos cursos tradicionais, o professor ‘transmite’ o conhecimento por meio de exposições formais que são assistidas pelos alunos, que ouvem e tomam nota. Conforme afirma Cantoral (1993), “neste esquema didático o professor enuncia verdades em aula e espera que o estudante as tome como suas e se comporte então como um ‘mini professor’, mas a prática tem mostrado que isto não ocorre desta maneira” (p. 16 – tradução nossa). Zhang (2003) afirma que estratégias de ensino como esta, centradas no professor, não permitem um processo de aprendizagem ativa e, conseqüentemente, o interesse do estudante diminui, o ensino obtido se torna superficial e baseado na memorização e na reprodução do que foi feito pelo docente; por estas razões, postula estratégias de ensino centradas no aluno. Afinal, conforme salienta Cantoral (1993, p. 16), cada vez mais se fortalece a idéia de que, para conhecer, o aluno primeiramente precisa construir seus próprios instrumentos de conhecimento.

Para Salinas & Alanís (2009, p. 366), “o papel a ser desempenhado pelo Cálculo no currículo deve ser o de meio ou ferramenta que permita ao estudante entender a realidade de outras áreas do conhecimento; é neste contexto que deveríamos estudar as dificuldades de aprendizagem”. É necessário reconstruir os conhecimentos matemáticos levando em consideração seus aspectos didáticos e as características fundamentais do ensino superior. Os autores questionam também a respeito da necessidade de submeter os alunos que estão aprendendo Cálculo pela primeira vez a uma abordagem excessivamente rigorosa e formal:

Até que ponto isso é necessário quando o estudante já adquiriu um significado para eles [noções e procedimentos do Cálculo] e, com ele, a credibilidade da sua utilidade para resolver um problema (...)? Não seria esta uma preocupação apenas de quem aprendeu matemática em um (...) sistema logicamente estruturado? (SALINAS & ALANÍS, 2009, p. 378 – tradução nossa).

Frente a tais dificuldades, observa-se, segundo Giménez & Machín (2003), uma tendência mundial em introduzir os alunos ao Cálculo e à Análise Matemática de uma forma mais intuitiva e experimental, incorporando ao ensino, sempre que possível, o uso de novas

tecnologias. Procura-se reduzir substancialmente a formalização e a sequência de abordagem tradicional, baseada no tratamento formal da noção de limite para então definir continuidade e derivada, “tem sido substituída por uma abordagem intuitiva da noção de limite com o objetivo de embasar o conceito de derivada, (...) noção essencial do Cálculo” (GIMÉNEZ & MACHÍN, 2003, p. 143). Para Marcolini & Perales (2005, p. 29), é preciso que os professores busquem trabalhar com os significados inerentes àquilo que está sendo ensinado e valorizem a intuição dos estudantes, já que é ela que os fará ter acesso ao conceito em questão. Os autores afirmam que os professores, ao invés de se preocuparem em discutir maneiras de levar o aluno “a um discurso teórico imóvel, caracterizado por rigor e formalismo excessivos, devem buscar formas diferentes de abordar o saber a ser ensinado, tomando por base as idéias intuitivas que deram origem aos diversos conceitos do Cálculo” (p. 29 – tradução nossa).

Artigue (1998) destaca, no entanto, que é preciso ter cautela ao trabalhar com estas abordagens intuitivas para que “as facilidades percebidas em um primeiro contato [dos alunos com a área de Cálculo ou Análise] não criem sérios obstáculos para aprendizagens posteriores” (p. 52 – tradução nossa). Além disso, Olimpio Junior chama a atenção para que, ao invés de condenarmos qualquer tentativa de abordagem mais formal do Cálculo, devemos ter a consciência de que:

Embora seja verdade que uma definição matemática formal tem, em geral, grandes chances de ser estéril para um neófito, os níveis de abstração e de esterilidade percebidos dependerão sempre da existência e da articulação de pelo menos três fatores cruciais: contexto adequado, exploração sistemática de suas potencialidades e significados construídos compatíveis com o conceito definido. (...) No Ensino Superior (...) os conceitos devem ser exercitados e explorados em suas potencialidades, sob pena de se dificultar o descondicionamento e a evolução da maturidade matemática do aluno. Não resta dúvida de que há, portanto, ambiente para que o conceito e sua (...) definição formal (...) sejam explorados. Enfraquecer ou até desestimular o seu uso pode também enfraquecer o arsenal do aluno para abordar com menos atrito a maior parte dos conceitos subsequentes (não apenas no Cálculo!) e dificultar sua lida com a matemática universitária. (OLIMPIO JUNIOR, 2007, p. 56).

O último aspecto a ser levado em consideração na organização didática das disciplinas do ensino superior, especialmente daquelas que o aluno cursará imediatamente após ingressar na universidade, que gostaríamos de destacar neste trabalho é a questão das dificuldades normalmente enfrentadas pelos estudantes na transição do ensino secundário para o superior; segundo Gascón (2009, p. 278), neste momento se tornam explícitas as descontinuidades existentes entre a Matemática possível de ser estudada na Educação Básica e aquela que deve ser aprendida na universidade. Tais descontinuidades, de acordo com o autor, dizem respeito

tanto quanto a maneira de organizar as questões matemáticas que serão estudadas, quanto aos processos utilizados para o estudo das mesmas.

Com relação às diferenças na maneira de organizar o estudo da Matemática ao deixar o ensino secundário e ingressar no superior, Gascón (2009, p. 290 - 292) destaca que as mais sentidas pelos alunos são:

- *Mudanças na distribuição das responsabilidades:* no ensino secundário, o contrato didático vigente direciona a responsabilidade pelo aprendizado dos alunos quase que exclusivamente ao professor, que deve explicar claramente ao estudante o que ele deve fazer para aprender. Até mesmo o interesse do aluno pela Matemática e sua motivação para o estudo desta ciência é de responsabilidade do docente. Na universidade, no entanto, a responsabilidade matemática do estudante é muito maior; o processo de estudo não se encerra ao terminar a aula. Espera-se do aluno atitudes com as quais ele não estava habituado como, por exemplo, refletir a respeito da maneira mais eficiente de organizar seu estudo, sobre a forma de utilizar os materiais de apoio e as notas de aula, sobre quais livros deve consultar. O estudante precisará ainda resolver problemas que não foram e, provavelmente, nem serão resolvidos em sala pelo professor e que, portanto, não terão um raciocínio pronto para que possam “imitar” nas questões subsequentes. Enfim, o contrato didático da universidade estabelece que o aluno seja o “diretor” dos próprios estudos.
- *Mudanças em relação às funções do “trabalho técnico” nas atividades matemáticas:* no ensino secundário as aulas normalmente se organizam em torno de uma classe pequena de problemas matemáticos bastante estereotipados que, para serem solucionados, não exigem muito mais do que a aplicação de algumas técnicas algorítmicas. Na universidade, no entanto, há uma maior exigência por criatividade, mas, ao mesmo tempo, dada a maneira como os conteúdos são normalmente trabalhados – ou de forma muito técnica, na qual o aluno deve apenas recorrer a algoritmos, ou de forma muito teórica – não se oferece aos estudantes os meios necessários para que consigam, de fato, exercer uma atividade matemática verdadeiramente criativa.
- *Mudanças em relação à forma de avaliar o processo de ensino:* nas avaliações às quais os estudantes são submetidos na universidade, exige-se deles um grau maior de elaboração nas respostas; precisam, de certa forma, demonstrar uma interpretação global do conteúdo que está sendo avaliado, algo que, no ensino secundário, não é cobrado. Consequentemente, as avaliações nas universidades requerem um estudo

mais sistemático dos alunos. Além disso, ao contrário do que acontece no secundário, as atividades cobradas nas provas, em geral, são diferentes daquelas abordadas em sala de aula.

Já a respeito das diferenças entre a organização escolar das questões matemáticas que se estudam no secundário e as que se estudam na universidade, Gascón (2009, p. 292 -296) destaca, dentre outras, as seguintes:

- *Dependência da nomenclatura associada à uma técnica matemática*: no ensino universitário, as “nomenclaturas” dos objetos que estão sendo estudados são consideradas irrelevantes e uma modificação nos símbolos adotados, feita para facilitar a aplicação de determinada técnica, não representa nenhuma alteração importante do ponto de vista matemático. No entanto, no ensino secundário, a grande rigidez presente na atividade matemática acaba levando alguns alunos a identificar e, até mesmo a confundir, a técnica com aqueles símbolos, gráficos e palavras que lhe dão suporte.
- *No ensino secundário não se exige uma interpretação do resultado obtido ao se aplicar uma técnica*: neste nível de ensino, o professor se dá por satisfeito se o aluno aplica corretamente determinada técnica; não exige dele qualquer interpretação para o resultado obtido. Na universidade, no entanto, a necessidade desta interpretação já é tida como subentendida.
- *Não reversão das técnicas matemáticas*: outro aspecto característico da rigidez da atividade matemática no ensino secundário é a não reversão das técnicas matemáticas. Desta forma, quando há duas tarefas inversas entre si as técnicas de resolução de ambas são tratadas como se fossem independentes. No ensino superior, no entanto, o estudante precisa ser capaz relacionar as técnicas aplicadas com suas respectivas inversas.
- *Ausência de situações abertas que requerem um trabalho de modelagem*: os problemas escolares, tanto no secundário quanto na universidade, geralmente são apresentados de uma maneira bastante fechada e trazendo apenas os dados que os estudantes, de fato, precisarão para resolvê-los. Raramente são apresentadas situações abertas, nas quais o aluno é quem deve perceber quais os dados necessários para a resolução daquilo que está sendo proposto. Esta ausência institucional de técnicas de modelagem provoca algumas dificuldades no ensino secundário e outras ainda maiores na universidade, quando o aluno se depara com disciplinas nas quais o cerne do

trabalho é exatamente a relação entre o sistema a ser modelado e seu respectivo modelo matemático.

- *Mudança no papel das definições: de “descritivas” a “construtivas”*: no ensino superior ocorre uma mudança radical em relação ao papel das definições matemáticas. Enquanto que no ensino secundário elas têm um papel essencialmente descritivo, com a finalidade de explicitar de maneira precisa as características de objetos já supostamente conhecidos, na universidade servem para construir objetos novos.
- *Mudança de uma matemática “mostrativa” para uma matemática “demonstrativa”*: as funções das demonstrações também mudam completamente no ensino superior. Enquanto que no secundário elas têm um papel meramente “decorativo”, já que as propriedades e os resultados podem ser percebidos, de maneira intuitiva, por meio de exemplos, ilustrações, etc, na universidade tais argumentações ostensivas, por meio de exemplos particulares ilustrando uma propriedade, perdem seu valor demonstrativo. É preciso que se faça demonstrações, de fato.
- *Do estudo de funções isoladas para famílias e espaços de funções*: enquanto no ensino secundário o aluno estuda essencialmente as propriedades de funções isoladas, na universidade passa rapidamente a estudar e relacionar diversos tipos deste ente matemático, podendo chegar, inclusive, aos espaços de funções.

Por meio destas duas últimas seções, procuramos fundamentar teoricamente a crescente necessidade dos docentes universitários buscarem alternativas didáticas para abordar os conteúdos presentes nas disciplinas dos cursos de graduação, em especial, no caso desta pesquisa, do Cálculo Diferencial e Integral. Antes de passarmos para as próximas seções, na quais discutiremos os níveis de rigor e as preocupações didáticas observadas nos cursos de Cálculo por nós analisados e nos livros didáticos que lhes serviram de referência, retomaremos algumas idéias presentes na pesquisa de Barufi (1999, p. 43) que, a nosso ver, de certa forma, resumem as considerações apresentadas neste capítulo até este momento. Para a pesquisadora, o professor verdadeiramente preocupado em definir e escolher mecanismos que, de fato, possam contribuir para que o estudante se aproprie dos significados daquilo que está sendo ensinado, deve estar consciente de que a construção do conhecimento por parte do aluno não se dará por meio de uma simples exposição ou imposição do conteúdo por parte do docente. É preciso que este último, para que possa interagir com seus alunos, seja aberto e flexível, e que esteja atento para a possível necessidade de mudanças no enfoque do curso que está ministrando.

Na próxima seção passaremos a discutir os níveis de rigor observados nos cursos de Análise (entre 1934 e 1963) e de Cálculo (entre 1964 e 1994) ministrados aos alunos da graduação em Matemática da Universidade de São Paulo, como esse rigor se modificou ao longo do tempo e quais foram as principais razões para estas mudanças. Simultaneamente, discutiremos quando os professores começaram a demonstrar, de maneira mais explícita, algum tipo de preocupação didática na abordagem dos conteúdos que estavam ministrando, quais foram tais preocupações e as possíveis razões para tais.

5.2 – Os níveis de rigor e as preocupações didáticas observadas nos cursos analisados e nos livros adotados como referências nos mesmos

Conforme destacamos no capítulo 4, na gênese da disciplina de Cálculo ministrada aos alunos do curso de Matemática da USP está a disciplina Análise, que foi implantada na instituição pelo matemático italiano Fantappiè no momento de sua fundação e da criação do curso de graduação em questão nesta pesquisa. Fantappiè trouxe para o ensino superior brasileiro o modelo que estava em vigor, na época, nas universidades italianas que eram consideradas bastante avançadas e conceituadas na área de Matemática, principalmente pelo alto nível de rigor com que organizavam os conceitos deste campo. Segundo D'Ambrosio, foi Fantappiè, por meio deste curso de Análise implantado na FFCL, quem introduziu o rigor nas disciplinas de Cálculo e de Análise ministradas no Brasil:

No curso lecionado por Fantappiè se viam as transformações nos cursos básicos de matemática que estavam ocorrendo na Europa, principalmente no Cálculo Diferencial e Integral. Os analistas italianos se destacavam pela modernização dos cursos de Cálculo, criando um estilo novo, rigoroso e extremamente elegante. Ao introduzir esse curso na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, a partir de 1934, Fantappiè criou um novo estilo na matemática brasileira. (D'AMBROSIO, 1999).

De acordo com Táboas (2005, p. 53-54), tal matemático “mudou o ensino do Cálculo, trocou uma orientação ainda um tanto calcada na intuição pelo rigor formal dos *épsilon*s e *deltas*”. Por meio deste comentário, percebemos que Táboas concebe intuição e rigor como sendo antagônicos e não dialéticos, como estaria mais de acordo com as pesquisas atuais, de autores como Tall (1991), Reis (2001), Bicudo (1992) e Kline (1998), a respeito do ensino de Cálculo, Análise ou qualquer outro conteúdo matemático. De qualquer forma, de fato, Fantappiè trouxe para o Brasil uma abordagem da Análise Matemática totalmente baseada no rigor formal e que não demonstrava, ao menos explicitamente, preocupações em trabalhar e/ou desenvolver também a intuição dos alunos, dando a impressão de que ele próprio

também não considerava que rigor e intuição deveriam desempenhar papéis complementares no ensino.

Analisando as notas de aula do curso de Fantappiè, a impressão que nos fica é a de que o matemático, conforme era usual na época, parece não conceber a existência de níveis de rigor e a possibilidade deste variar em função do contexto no qual se está trabalhando e em função da maturidade dos estudantes de determinada disciplina, orientações estas postuladas por Grattan-Guinness (1997), Reis (2001) e Do Carmo (1974). Parece-nos que, para Fantappiè, o rigor era uma condição prévia para a atividade matemática e não um efeito desta última, como, de acordo com Carvalho (1990), seria o mais conveniente. O rigor aceito naquele momento, fosse em trabalhos acadêmicos ou em aulas ministradas aos alunos que estavam ingressando na universidade, era o formal. No entanto, em diversos momentos de suas notas, percebemos uma preocupação com a maneira de transpor o rigor acadêmico (aquele dos trabalhos dos matemáticos profissionais) para aquela disciplina de Análise ministrada no curso de graduação, demonstrando que, ao menos em alguns aspectos, ao contrário do que, de acordo com Pachane (2007) e Ariza e Toscano (2000), era usual na época, procurava, de alguma forma, conforme recomendam Grattan-Guinness (1997) e Reis (2001), não transpor o rigor científico diretamente para as aulas da graduação. Notamos, por exemplo, em vários trechos do material a preocupação de Fantappiè em apresentar longos textos explicativos em linguagem natural (ao invés de simplesmente apresentar os conceitos de maneira simbólica), em discutir os significados das notações empregadas, em fazer alguns comentários a respeito de questões relacionadas ao processo histórico de rigorização do Cálculo e em iniciar a abordagem de alguns conceitos, mesmo que já de maneira rigorosa, de forma a tornar mais claro para o leitor aquilo que, na sequência, seria apresentado por meio de uma definição sintética e carregada de símbolos. Enfim, percebemos certas tentativas de tornar aquela apresentação rigorosa mais palatável para os leitores. A seguir, vejamos alguns exemplos destas preocupações didáticas presentes nas notas de aula de Fantappiè.

Inicialmente, destacamos a forma escolhida pelo matemático para introduzir o conceito de limite. Conforme pode ser percebido pela citação presente na terceira seção do capítulo anterior, ao invés de iniciar a apresentação de tal ente matemático diretamente por meio dos epsilons e deltas, Fantappiè opta por fazer, inicialmente, uma abordagem topológica desta noção, por meio da idéia de entorno, o que, a nosso ver, pode contribuir para que haja uma compreensão maior, por parte dos alunos, dos significados dos epsilons, deltas e das desigualdades modulares presentes na definição de Weierstrass para tal conceito. Não podemos dizer que havia, inicialmente, uma abordagem intuitiva do conteúdo que estava

sendo trabalhado, já que, a idéia de entorno é tão rigorosa e formal quanto a própria idéia de limite segundo a concepção weierstrassiana, mas a noção de entorno talvez fosse mais palpável e fornecesse maiores condições para uma visualização geométrica daquilo que estava sendo definido.

Ainda na abordagem do conceito de limite, há outra observação feita por Fantappiè que merece destaque por sua importância didática. O matemático discute o porquê da condição $x \neq a$ ser essencial na definição de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, afirmando que:

Há muitos casos em que, embora a pertença ao campo $\underline{\mathbb{C}}$, o limite de $f(x)$ para $x \rightarrow a$ é diferente de $f(a)$; seja por exemplo, $f(x) = 1$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$; o campo $\underline{\mathbb{C}}$ é aqui o campo real, de que 0 é ponto de acumulação. Ora, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, temos, para $x \neq 0$,

$$|f(x) - 1| < \varepsilon$$

e portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

ao passo que, pela definição, $f(0) = 0$.

(FANTAPPIÈ, sem numeração de páginas, 1934 – grifos do autor).

Este é um comentário bastante importante e que, infelizmente, de uns tempos para cá, deixou de fazer parte de muitos cursos de Cálculo, principalmente daqueles que optam por trabalhar apenas com as técnicas e com funções em que o cálculo de limites pode ser feito por meio daquela famosa e errônea ‘receita’ apresentada pelos professores: “para calcular $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ basta substituir o valor de x por a ”. Em tais cursos, muito provavelmente, a condição $x \neq a$ esteja presente na definição de limite, mas, como os professores não trabalham com nenhum exemplo no qual ela assume papel fundamental, acaba sendo apenas mais um símbolo dentre tantos que, no momento dos cálculos, não exerce qualquer influência e não precisa ser levado em consideração pelos estudantes. Percebe-se, portanto, que mesmo o curso de Fantappiè tendo uma orientação provavelmente não muito adequada para um aluno de primeiro ano dos cursos superiores atuais, há aspectos deste tipo de abordagem que precisam ser retomados, como, por exemplo, esta preocupação em discutir o porquê de alguns detalhes presentes nas definições dos objetos matemáticos; tenham estas definições sido trabalhadas de maneiras mais intuitivas ou mais formais.

Outro aspecto a ser destacado nas notas de aula de Fantappiè é sua preocupação com as notações empregadas. Ao definir função derivada, por exemplo, de certa forma, resume aquelas utilizadas, até a época em que seu manual foi escrito, para tratar deste conceito:

Consideremos o conjunto $\overline{C}$ dos pontos de C em que $f(x)$ tem derivada (vê-se facilmente que $\overline{C}$ faz parte do conjunto C' derivado de C). A cada ponto x_0 de $\overline{C}$ corresponde assim um número bem determinado $f'(x_0)$. Temos aqui, portanto uma nova função de x , monódroma, definida no campo parcial $\overline{C}$ de C , que se chama função derivada de $f(x)$. Esta função se indica, indiferentemente, com uma qualquer das notações:

$$y' = f'(x) \text{ (Lagrange)}$$

$$Dy = Df(x) \text{ (Cauchy)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \text{ (Leibniz)}$$

$$y = \dot{f}(x) \text{ (Newton) (atualmente usada só em Mecânica Racional, quando a}$$

variável independente indica o tempo). (Ibid., sem numeração de páginas).

Para fornecermos mais um exemplo desta preocupação de Fantappiè com relação aos significados das notações, vejamos um comentário do matemático a respeito das variáveis envolvidas na integral definida $\int_a^b f(x)dx$:

Nos parágrafos anteriores definimos a integral $\int_a^b f(x)dx$, quando existe, como um número bem determinado, que não depende mais da variável x que nela aparece, pois esta letra pode ser substituída por qualquer outra, o que não altera o valor da integral:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

Diz-se por isso que na expressão da integral $\int_a^b f(x)dx$, x é uma variável aparente. Mas esta expressão depende evidentemente da natureza da função $f(x)$: a cada função $f(x)$ definida e integrável no intervalo $[a, b]$ corresponde um número bem determinado, que é a sua integral estendida no mesmo intervalo. Esta dependência se exprime dizendo que a integral é um funcional da função $f(x)$. Esta é uma generalização do conceito de função: o ente variável em vez de um número é uma função, ente de natureza muito complexa.

No presente parágrafo examinaremos outra dependência, que tem importância fundamental para todo o Cálculo Integral. Seja $f(x)$ uma função integrável em todo o intervalo $[a, b]$; sabemos que neste caso dado qualquer ponto x do intervalo $[a, b]$ está perfeitamente determinada a integral

$$(1) \quad \int_a^x f(t)dt = F(x)$$

em que para maior clareza designamos com t a variável de integração. $F(x)$ é portanto uma função monódroma definida em todo o intervalo $[a, b]$. Por definição (§ 4, (3)) esta função se anula para $x = a$, isto é, $F(a) = 0$. (Ibid., sem numeração de páginas, 1934 - grifos do autor).

Este cuidado de Fantappiè em esclarecer os significados das notações empregadas, a nosso ver, poderia contribuir para minimizar aquela dificuldade enfrentada pelos estudantes na transição da educação básica para o ensino superior que Gascón (2009) chama de *dependência da nomenclatura associada à uma técnica matemática*, já discutida na seção anterior.

Destacamos ainda dois comentários de Fantappiè que mostram que, mesmo de maneira indireta, havia também em suas notas discussões referentes a alguns aspectos do processo histórico de rigorização do Cálculo. O primeiro comentário diz respeito às diferenças entre os métodos de Newton e Leibniz para a construção do Cálculo Diferencial:

A construção do Cálculo Diferencial, como é universalmente aceita atualmente, baseia-se no método de Newton, que introduziu a derivada de uma função como limite da relação entre o acréscimo da função e o da variável independente, quando este último tende a zero. A concepção de Leibniz, que hoje está inteiramente abandonada, baseia-se na sua teoria filosófica – a Monadologia. Segundo essa teoria, toda curva seria formada de uma quantidade infinitamente grande de segmentos retilíneos, cujas projeções sobre os eixos seriam designadas com dx e dy sendo o coeficiente angular dy/dx de cada um de tais segmentos a derivada da função $y = f(x)$ que representa a curva. Do método de Leibniz se conservou o algoritmo, por ser de manejo mais fácil, mas as quantidades dx e dy correspondem a conceitos inteiramente diferentes: dx é o acréscimo arbitrário da variável independente e dy é o produto desse acréscimo pela derivada y' . (Ibid., sem numeração de páginas).

O segundo é uma nota histórica a respeito da noção de integral:

No presente capítulo vamos introduzir um conceito que tem importância fundamental em toda a análise matemática: o conceito de integral de uma função. Essa noção é, pode-se dizer muito mais antiga que a de derivada, pois tem origem no método de exaustão utilizado por Archimedes para o cálculo de certas áreas. Todavia, só no século dezessete, logo depois da criação do cálculo diferencial é que o cálculo integral conseguiu um algoritmo manejável com relativa facilidade, que foi deste logo aplicado a uma enorme quantidade de problemas teóricos e práticos. Mas o conceito de integral, segundo os criadores desse cálculo, era muito restricto e cedo depararam os matemáticos com problemas que necessitavam de uma revisão completa da definição adotada. Essa revisão foi iniciada por Cauchy, sendo que a definição hoje adotada na maioria dos compêndios é a Riemann, com as modificações introduzidas por Darboux, Pasch, Jordan, etc. É esta também a que vamos expor. (Ibid., sem numeração de páginas).

Percebe-se então a intenção de Fantappiè em discutir alguns detalhes teóricos diretamente relacionados com o nível de rigor aceito no Cálculo e na Análise pelos matemáticos naquele momento. No primeiro comentário, por exemplo, vê-se que a formalização da idéia de limite é que deveria ser tomada como pilar de sustentação para o

desenvolvimento de toda a disciplina, enquanto que métodos embasados em idéias que não haviam sido definidas de maneira rigorosa, como os infinitamente pequenos, não deviam mais ser considerados válidos, o que é uma consequência imediata do processo de rigorização do Cálculo e/ou de aritmetização da Análise. E essa busca por bases mais rigorosas para estes campos de conhecimento também é explicitada no segundo comentário, a respeito da necessidade, ao longo da história da Matemática, de um refinamento e mesmo de uma redefinição da noção de integral. Tais comentários, a nosso ver, parecem tentar mostrar, indiretamente, a necessidade de ser rigoroso na fundamentação de uma teoria matemática.

Outro ponto a ser destacado é que, no caso específico da derivada, havia a preocupação em discutir algumas aplicações do conceito, tais como, a derivada na abscissa de um ponto vista como sendo o coeficiente angular da reta tangente à curva em tal ponto dado e ainda aplicações físicas nas idéias de velocidade e aceleração.

Em resumo, podemos afirmar que, conforme era esperado para a época, de acordo com o que pudemos perceber nas notas de aula de Fantappiè, em seu curso não havia nenhuma preocupação com o processo que Perminov (1988) chama de intuicionalização; a ênfase estava sempre no que o mesmo autor chama de rigorização, que também não era visto como um processo de conceptualização de intuições. Tudo já era apresentado aos alunos de maneira formal e rigorosa; não havia um processo de descoberta, mais intuitivo, seguido de um processo de formalização; tudo era formalizado desde o princípio. No entanto, havia, ao menos em certos momentos, o cuidado de fazer alguns comentários que talvez pudessem auxiliar na compreensão daquilo que estava sendo apresentado de maneira tão sintética.

Convém destacar que, em 1934, época em que Fantappiè foi contratado como catedrático de Análise Matemática na recém-criada FFCL da USP, não houve qualquer tipo de preocupação, por parte daqueles que estavam selecionando professores para a universidade que estava sendo fundada, com relação à formação didático-pedagógica de tal docente; o que importava era sua excelente formação matemática e sua respeitabilidade como cientista. Conforme já discutimos nas seções iniciais do capítulo, naquela época, para ser professor universitário, acreditava-se que bastava o domínio do conteúdo e isto, indiscutivelmente, Fantappiè possuía. Por outro lado, dados presentes na biografia do matemático, disponível nos anexos deste trabalho, nos informam que ele, durante sua trajetória escolar, passou por formações específicas para o ensino, na Escola Normal Superior de Pisa. Tal preparação, talvez, tenha contribuído para a condução de suas aulas no ensino superior, já que a análise de suas notas - conforme deve ter ficado claro pelo que foi apresentado nos parágrafos anteriores - evidencia, em diversos momentos, que ele, ao organizar o conteúdo a ser ensinado, já

manifestava algumas preocupações didáticas que, de acordo com diversos autores estudados, não eram usuais para a época. Além disso, depoimentos de alguns de seus ex-alunos também nos dão conta de suas habilidades didáticas. Para exemplificar, vamos citar o comentário feito por Milton Vargas, ex-professor da Escola Politécnica da USP e ex-aluno de Fantappiè, em entrevista concedida ao professor Cláudio Possani no ano de 2000 e citada por Táboas (2005) em sua tese de doutorado: Vargas comentou que as aulas de Fantappiè eram dadas em italiano, mas ele era tão bom professor que “a gente entendia melhor as aulas em italiano do que as aulas em português dos outros brasileiros. (...) a gente pegou uma mania de falar italiano, entre nós (...) por causa da perfeição que eram aquelas aulas, a gente não estava acostumado com aulas tão boas” (TÁBOAS, 2005, p. 57).

Depois de analisar as notas de aula do curso de Fantappiè e constatar diversos tipos de cuidados didáticos nas mesmas, destacamos um pequeno trecho do trabalho de Lima (2006, p. 81) que parece descrever, de maneira sintética e bastante eficiente, as preocupações manifestadas pelo docente: a pesquisadora afirma que, o matemático, além de ter ministrado um curso bastante rigoroso, também se preocupou com que o ensino estivesse “prioritariamente fundamentado na exposição de seus conteúdos, através da interação da linguagem natural com a linguagem matemática” e que fizesse “uso da história matemática para tentar mostrar como os conceitos (...) foram construídos e trabalhados ao longo dos anos”.

Por outro lado, apesar das preocupações didáticas já destacadas, não há como negar que o curso de Fantappiè se assemelhava àquela tendência de ensino classificada por Fiorentini (1995) como formalista, já que a ênfase estava na Matemática pela Matemática, seus aspectos estruturais e suas definições. Havia grande preocupação com a linguagem, com a precisão, com o rigor e com o uso correto dos símbolos, mas não era dada tanta atenção aos processos que originaram aos conceitos que estavam sendo trabalhados. O curso era todo conduzido de acordo com o que Thurston (1994) chama de *modelo popular* (definição – explicação – teorema – prova), no qual, de acordo com Salinas & Alanís (2009), o professor se limita a exhibir o conteúdo para o estudante.

Depois de Fantappiè retornar à Itália em 1939, Catunda foi quem se tornou o responsável pela cátedra de Análise Matemática. Tal docente é sempre descrito por seus ex-alunos como um excelente professor, mesmo não sendo um bom didata, comprovando, realmente que, conforme foi discutido na primeira seção deste capítulo, durante muito tempo, para alguém ser considerado um bom docente universitário não necessariamente precisasse

possuir habilidades didáticas; bastava o domínio do conteúdo. E esta idéia é explicitada por meio do seguinte comentário de Gomide, que foi sua aluna em 1951:

[Catunda] tinha uma cultura matemática muito grande, (...) perfeita e transmitia isso muito bem para quem conseguisse acompanhar suas aulas. (...) Realmente ele não era considerado um bom didata; não era um bom professor no sentido do desembaraço; faltava a ele uma facilidade de expressão, de falar continuamente, sem parar para pensar. Mas, fora isso, era um excelente professor. O conteúdo de suas aulas era perfeito, muito bom mesmo. Eu aprendi demais com ele. (GOMIDE, entrevista, 2008).

D'Ambrósio, em entrevista concedida à Lima (2006), também comenta a respeito da excelência de Catunda como professor, apesar de suas limitações didáticas:

Catunda era um excelente professor, não pela qualidade e clareza de suas aulas. Essas eram muito cansativas (...). Mas a disponibilidade (...) em responder às questões dos alunos, em aula e fora dela, compensavam. Catunda era extremamente dedicado, atencioso e paciente, um professor exemplar. (D'AMBROSIO APUD LIMA, 2006, p. 123).

Lima destaca que, na opinião de Arlete Cerqueira Lima, outra ex-aluna de Catunda entrevistada por ela em sua dissertação de mestrado, um dos motivos de sua falta de didática:

Era porque ele não utilizava conexões de um período para o outro, elas ficavam subentendidas. Em outras palavras, (...) Catunda não conseguia traduzir em palavras para a maioria dos seus alunos a lógica matemática existente no seu pensamento, por mais que tentasse, pois não estava, de acordo com ela, na sua natureza a característica de ser um bom didata. Isso, na sua opinião, tornava-o na maioria das vezes muito hermético. (LIMA, 2006, p. 125).

Na primeira seção do capítulo, ao tratarmos do início das reflexões didáticas no ensino superior, citamos um trecho do trabalho de Fischer (2009) no qual a pesquisadora destaca que, antigamente, este tipo de preocupação não era exigido ou questionado pelo aluno porque, naquela época, a universidade era uma instituição muito respeitada na qual o estudante desejava tanto ingressar que, ao atingir tal objetivo, nem lhe passava pela cabeça questionar os métodos de ensino de seus professores; estava sempre disposto a ouvi-los e a tentar, a todo custo, aprender aqueles saberes por eles transmitidos muitas vezes de maneira não tão acessível. As palavras de Pedro Morettin, também ex-aluno de Catunda, a respeito do curso de Análise ministrado por este docente ilustram bem esta postura:

O professor Catunda dava aulas de Análise Matemática, um curso muito difícil [...] Interessante que quando ele dava aulas, praticamente não escrevia na lousa, ficava falando, falando, mais parecia um professor de Filosofia do que de Matemática. Lembro que no começo do ano éramos em média 60 alunos, mas no fim passavam

uns 5; nas provas, a maioria era reprovada. Era um excelente professor (MORETTIN APUD SILVA, 2000, p.14).

Conforme destaca Fischer, hoje os tempos são outros e, dificilmente, um aluno classificaria como excelente um professor que ministrasse um curso com as características deste de Catunda citado por Morettin; a postura do estudante que, atualmente, ingressa no ensino superior, é outra. Por outro lado, como nos alerta Labegalini (2009) e conforme comprovam estes trechos de depoimentos de ex-alunos de Catunda aqui citados, não podemos, com nossa concepção atual de ensino e aprendizagem, considerar como inadequados, do ponto de vista pedagógico, os procedimentos adotados por aquele professor. No contexto daquela época, os mesmos eram considerados como sendo os mais adequados no ato de ensinar. A participação dos alunos em aula, por exemplo, não era algo comum naquela época; de acordo com Gomide, “o hábito de discutir com os alunos (...) veio muito mais tarde. Naquele tempo, ficávamos quietos ouvindo e tomando nota”¹⁰¹.

Outro aspecto do curso de Catunda abordado por Gomide foi o alto nível de rigor com que a disciplina continuou sendo ministrada. De acordo com ela, apesar do curso de Análise ser um dos primeiros que os alunos faziam ao ingressar na Universidade, as aulas eram bastante rigorosas e carregadas de demonstrações complexas. No entanto, Lima (2006) destaca que uma peculiaridade fundamental no curso de Catunda, um tipo de preocupação didática – dentre algumas que estavam presentes em seu curso apesar do docente não ser considerado um bom didata - que até então ainda não havia se manifestado, ao menos de maneira explícita, no ensino de Análise da FFCL: ele procurava recorrer, sempre que possível, a intuição geométrica para definir de forma rigorosa um determinado conceito:

A escolha de Catunda se remete ao fato de que ele, além de entender a matemática como uma ciência dedutiva, considerava-a também um fenômeno social. Assim, sempre quando era possível, conduzia o seu *Curso de Análise Matemática* fazendo correlações dos conteúdos ali ensinados com a compreensão da natureza e com a sua aplicabilidade, não deixando em segundo plano a noção de percepção, desde que fosse mantido o rigor da teoria em questão. (LIMA, 2006, p. 101)

O constante apelo à intuição geométrica dos alunos foi, inclusive, uma das características das aulas de Catunda destacadas por Gomide: “ele era um excelente conhecedor do conteúdo que ministrava, tinha uma grande intuição geométrica e forçava muito esse lado”¹⁰².

Percebe-se, portanto que, o docente, apesar de fundamentar todo seu curso no rigor formal, já tinha consciência da importância desempenhada também pela intuição durante o

¹⁰¹ GOMIDE (2008).

¹⁰² GOMIDE (2008).

processo de ensino e aprendizagem da Matemática. É a primeira vez, na trajetória da disciplina, que começamos a observar a presença da intuição convivendo simultaneamente com o rigor. Pelas palavras de Lima, podemos perceber que Catunda tinha clareza de que era possível recorrer, sem deixar de lado o rigor, à intuição dos alunos e à visualização geométrica do que estava sendo trabalhado. Esta, no entanto, não era uma postura usual naquela época, quando muitos professores de Matemática viam, de acordo com a mesma autora, com desconfiança a idéia de utilizar noções intuitivas durante a explicação de conceitos matemáticos. De acordo com o próprio Catunda (1957), a origem desta desconfiança está ligada ao próprio processo de desenvolvimento das primeiras idéias do Cálculo, quando os cientistas recorriam demais à intuição para resolver problemas, o que acabou gerando erros graves, como o cometido por Duhamel que acreditou ter demonstrado, a partir da noção intuitiva, que toda função contínua é derivável. Desta forma, o processo de fundamentação rigorosa do Cálculo e de aritmetização da Análise acabou levando a maioria dos matemáticos a um exagero no rigor e ao abandono da intuição, o que, é claro, acabou se refletindo também no ensino. Eis aí, talvez, a principal razão para que, até hoje, seja complicado para muitos matemáticos, conforme podemos perceber pelos comentários feitos na primeira seção do capítulo, conceber intuição e rigor como sendo elementos complementares no ensino desta ciência.

Analisando as apostilas escritas por Catunda e que começaram a ser editadas em 1952, podemos perceber que apelar para a intuição nas aulas de Análise, sem, que com isso, houvesse prejuízo no rigor, foi uma de suas principais preocupações ao longo do período em que ficou à frente do ensino deste conteúdo. Otero-Garcia (2011) baseando-se no trabalho de Silva (2006), também salienta este aspecto do curso de Catunda, afirmando que a partir do momento em que tal docente assumiu a cátedra de Análise Matemática, “os conteúdos passam a ser apresentados inicialmente de uma maneira intuitivo-geométrica para depois serem tratados com maior rigor” (OTERO-GARCIA, 2011, p. 55). Isto pode ser comprovado pelo prefácio do primeiro volume dessas apostilas, no qual o autor afirma que: “preocupou-se, particularmente, em simplificar as demonstrações, sem sacrifício do rigor matemático, e ao mesmo tempo em manter a constante aproximação da Análise com a intuição geométrica” (CATUNDA, 1952, 1º volume) para que, desta forma, o curso adquirisse um caráter não tão abstrato quanto aquele imposto por Fantappiè. Esta afirmação de Catunda, a nosso ver, nos permite conjecturar que, conforme foi adquirindo experiência no ensino do assunto – já que tais apostilas começaram a ser editadas somente treze anos após ele ter assumido a cátedra de Análise – talvez tenha percebido que existem diferentes níveis de rigor e que o professor deve

procurar aquele mais adequado para o contexto do curso que está ministrando e para o nível de desenvolvimento matemático dos seus alunos, idéia semelhante àquela postulada por Grattan-Guinness (1997). Desta forma, se é possível apresentar as demonstrações de maneira mais simples, ainda de forma rigorosa, mas com nível de rigor mais adequado para alunos iniciantes no ensino superior, por que não fazê-lo? E ainda, se é possível, em determinados momentos, apelar à intuição geométrica dos alunos, por que ignorar esta possibilidade? Por outro lado, é preciso que se destaque que, apesar desta preocupação em valorizar a intuição, o curso de Catunda, assim como o de Fantappiè, continuava tendo uma orientação formalista (FIORENTINI, 1995), na qual o foco era a Matemática pela Matemática e a sistematização de seus conceitos por meio de definições e teoremas, sempre acompanhados de suas respectivas demonstrações.

A impressão que nos fica é a de Catunda, com o passar dos anos em que estava a frente da cátedra, pode ter começado a levar em conta este tipo de questionamento, o que, provavelmente, tenha ocorrido a partir do momento em que Gomide, que ainda como assistente do catedrático, passou a ministrar as aulas teóricas de Análise para os alunos do primeiro ano, passou a questionar se era mesmo adequado ensinar diretamente Análise Matemática aos alunos ingressantes na Universidade ou se estes deveriam, inicialmente, cursar Cálculo Diferencial e Integral, no qual os conceitos fundamentais seriam vistos de forma mais manipulativa e menos crítica para, posteriormente, aí sim na disciplina de Análise, serem revistos com mais detalhes em uma abordagem mais crítica. Possivelmente, estas reflexões de Gomide tenham influenciado no nível de rigor adotado por Catunda ao redigir suas apostilas e nas preocupações didáticas nelas manifestadas, já que, de acordo com D'Ambrosio, anteriormente o curso ministrado por este docente era tão rigoroso quanto o de Fantappiè: “o Catunda dava o curso no modelo do Fantappiè e já começava com todo o rigor (...), era complicado. Então eles tomaram essa decisão de quebrar o curso em uma parte que seria a introdução cobrindo tudo e outra parte que seria a Análise vista sob um ponto de vista mais rigoroso”¹⁰³. Ainda neste capítulo apresentaremos mais alguns detalhes a respeito da abordagem proposta nestas apostilas de Catunda.

Uma dos motivos que levaram Gomide a defender que, primeiramente, os alunos deveriam estudar Cálculo para depois estudar Análise foi sua própria experiência discente. De acordo com ela, ao ingressar na Universidade de São Paulo, o primeiro assunto que estudou na disciplina de Análise ministrada por Catunda foi a construção dos números reais via noção

¹⁰³ D'AMBROSIO (2009).

de cortes de Dedekind, e este conteúdo, além de não ser compreendido pela grande maioria dos alunos, também não era motivador a eles naquele primeiro contato com os conceitos do Cálculo, já que ainda não possuíam a maturidade matemática necessária para compreender verdadeiramente os detalhes e refinamentos teóricos envolvidos naquela construção. Desta forma, a disciplina só começava a interessar quando o professor chegava às idéias de diferenciação e integração e, conseqüentemente, às situações que davam maiores possibilidades aos alunos de manipularem os conceitos que estavam sendo estudados. Quando se tornou professora, Gomide passou então a defender que, para compreenderem os detalhes teóricos e a rigorização dos conceitos, os alunos deveriam, inicialmente, passar por um curso no qual os conceitos fossem apresentados e no qual pudessem manipulá-los. Por meio desta sua idéia, podemos perceber que tal docente já concebia a idéia de que o rigor não é absoluto, que pode variar de acordo com o contexto em que se está trabalhando e também com a maturidade matemática dos alunos, idéias que coadunam com aquelas de Grattan-Guinness (1997) e Bonomi (1999) apresentadas na primeira seção deste capítulo. Desta forma, não lhe parecia adequado ministrar um curso com um nível de rigor tão alto para um aluno que, por estar acabando de ingressar na Universidade, não tinha desenvolvimento matemático suficiente para aproveitá-lo integralmente.

Estas foram as razões que levaram Gomide a, logo que começou a dar aulas teóricas para o primeiro ano, de acordo com o depoimento dela própria, iniciar um redirecionamento do curso inicial de Análise, visando deixá-lo mais próximo do Cálculo. Conforme já pudemos perceber no capítulo anterior, estas modificações não foram tão imediatas como a docente afirma; foi um processo lento e gradual. Inicialmente, seu curso continuava tendo uma abordagem muito mais próxima da Análise do que do Cálculo. No entanto, de acordo com D'Ambrosio, o nível de rigor presente nas aulas de Gomide já era mais moderado do que aquele observado na disciplina conduzida por Catunda: “eu percebia que ela havia sido aluna do Catunda, não tem dúvida; a linguagem era a mesma. A diferença (...) é que o nível de rigor do curso de dona Elza era mais moderado”¹⁰⁴. A intenção era “primeiro fazer um curso mais rápido, menos pesado no rigor, mas que servisse de introdução para o curso pesado de Análise”¹⁰⁵. Convém destacar, no entanto, que, em momento algum, Gomide defendeu a substituição de um modelo Teoricista para outro Tecnicista (Salinas & Alanís, 2009). O foco da disciplina continuava sendo a teoria que, no entanto, deveria ser trabalhada de forma mais acessível aos alunos ingressantes na universidade, deixando para um momento posterior do

¹⁰⁴ D'AMBROSIO (2009).

¹⁰⁵ D'AMBROSIO (2009).

curso alguns refinamentos. Por outro lado, as técnicas de cálculos de limites, derivadas e integrais que, até então não tinham qualquer espaço no curso inicial de Análise Matemática, deveriam sim ser incorporadas à disciplina, não como sua parte central, mas como ferramentas que possibilitassem ao estudante manipular aqueles conteúdos que haviam estudado, o que também é importante em um primeiro contato com os mesmos.

Analisando as fichas referentes ao curso de Gomide produzidas por D'Ambrosio e já comentadas no capítulo anterior, percebemos que a abordagem da disciplina continuava, de fato, bastante rigorosa e com orientação formalista. Notamos, no entanto, que o tratamento dos conteúdos apresentados era bem mais sintético do que aquele presente, por exemplo, nas notas de aula de Fantappiè, que inicialmente também orientavam o trabalho de Catunda. Os conceitos eram apresentados de maneira mais rápida, sem tantos detalhes e nem todos os resultados eram demonstrados; alguns eram apenas enunciados. Talvez, seja neste sentido que D'Ambrosio afirme que o nível de rigor do curso de Gomide era mais moderado do que aquele presente nos materiais de Fantappiè e nos primeiros anos em que Catunda esteve a frente daquela disciplina. O modelo didático continuava sendo aquele considerado como o mais adequado para a época: todo o conteúdo era apresentado, de maneira já sistematizada e formal, pela docente por meio da sequência definição – teorema - demonstração, não havendo espaço para o momento de intuicionização (PERMINOV, 1998), no qual os estudantes, inicialmente, trabalhariam com os conceitos de forma intuitiva para, posteriormente, no momento da rigorização, formalizá-los. A própria Gomide, em entrevista a Vianna (2000), comentou a respeito da maneira como encaminhava, em seus primeiros anos de atuação profissional, os cursos de Cálculo/Análise que ministrava e algumas das modificações que faria se fosse ministrá-los atualmente:

Tenho hoje outras idéias sobre a melhor maneira de encaminhar as coisas. Eu fazia parte de uma tradição – que eu achava muito boa – da Análise da escola italiana. Agora gosto mais de pensar em aplicações, em história... Não que eu ache que seja essencial a gente contar história, não é tanto isso. É agradável a gente contar um pouco a história do assunto, mas agora que eu sei um pouco mais da história da matemática, ela serve de instrumento de reflexão. Você pode perceber qual é o caminho melhor para abrir o assunto aos alunos pensando a maneira como as coisas se desenvolveram. Então hoje seguiria outros caminhos, mas não acho que aqueles estivessem errados. (VIANNA, 2000, p. 45).

De acordo com D'Ambrosio, Gomide era uma excelente professora, sempre preocupada em apresentar o conteúdo de maneira muito organizada e bem feita, equilibrando teoria e situações mostrando como funcionava aquilo que estava sendo ensinado, embora, é preciso que se diga, ao menos nas fichas analisadas, referentes ao curso de 1951, os exemplos

sejam bastante raros. Como já era de se esperar para aquela época, havia a preocupação de ilustrar como os conceitos estudados poderiam ser aplicados na própria Matemática, mas não em outras áreas do conhecimento: “quando você está demonstrando um teorema, é importante ver um exemplo mostrando a importância daquele resultado. Isso era mostrado. (...) A preocupação de mostrar: (...) isso serve para a Física, etc (...) não existia” ¹⁰⁶. Ainda com relação às qualidades didático-pedagógicas de Gomide, destaca que ela estava sempre disponível para atender os alunos, tirar dúvidas. Não havia, sequer, um horário oficial de atendimento; os alunos podiam procurá-la quando precisassem. Também dava liberdade para que os estudantes fizessem questionamentos durante as aulas: “não sei se era típico da nossa classe, mas não me lembro dela, de algum modo, ter desencorajado alguém interromper a aula e fazer perguntas” ¹⁰⁷.

Gomide foi uma influência bastante positiva na formação acadêmica e profissional de D’Ambrosio, segundo ele próprio nos afirmou: “o que aprendi devo muito a ela; quando você chega à universidade, o primeiro curso, o mais importante, o curso central é a Análise e, então, se tiver um bom professor, você começa bem. Eu tenho as melhores lembranças dela” ¹⁰⁸. Destacou também que, ao se tornar professor, se espelhou no estilo de aulas de Gomide e chegou, inclusive, “a escrever um livro de Cálculo e introdução à Análise que é, até certo ponto, inspirado pelo curso dela” ¹⁰⁹. Deixou claro ainda o quanto se orgulha quando alguém percebe a influência de Gomide em sua forma de ministrar aulas: “eu recebi um grande elogio uma vez na vida quando um aluno me disse que minhas aulas tinham o estilo das da dona Elza” ¹¹⁰. Vale ressaltar que, nesta pesquisa este é o primeiro exemplo explícito, dentre vários outros que apareceram no decorrer de nossas investigações, de um professor que, depois de formado, disse seguir, em suas aulas, o mesmo esquema adotado por seus antigos docentes, tendência bastante comum no ensino superior, de acordo com Cortesão (2000), Cunha (2004), Prandi (2009) e Labegalini (2009).

Um dos textos utilizados por Gomide como referência na disciplina de Análise era *A Course of Pure Mathematics*, de autoria de G. H. Hardy. Tal manual adota um nível de rigor bastante alto, assim como acontecia nos textos de Fantappiè, mas, no entanto, a forma escolhida por Hardy para trabalhar com os conteúdos, utilizando predominantemente a linguagem natural e estabelecendo uma conversa com o leitor, nos deixou com a impressão de

¹⁰⁶ D’AMBROSIO (2009).

¹⁰⁷ D’AMBROSIO (2009).

¹⁰⁸ D’AMBROSIO (2009).

¹⁰⁹ D’AMBROSIO (2009).

¹¹⁰ D’AMBROSIO (2009).

que, talvez, a transmissão das informações, com o auxílio deste livro, pudesse acontecer de maneira mais eficiente do que se apelando a manuais excessivamente formais. No prefácio da obra, o autor afirma que ela foi concebida para ser utilizada, essencialmente, por alunos do primeiro ano da universidade, o que, a nosso ver, dá indícios de que, ao concebê-la, Hardy levou em consideração a maturidade matemática dos seus leitores em potencial e procurou adotar um nível de rigor adequado para iniciantes no ensino superior. Além disso, ao afirmar que o manual foi escrito para matemáticos e que, em momento algum, houve a preocupação de tentar satisfazer as necessidades dos estudantes de engenharia ou de qualquer outro curso cujo interesse principal não fosse a matemática, o autor deixa transparecer que, em sua concepção, o rigor adotado depende do contexto, dos objetivos da disciplina que está sendo ministrada e do curso de graduação no qual ela está inserida: a abordagem mais adequada para alunos que, depois de formados, serão matemáticos é diferente daquela mais indicada para os futuros engenheiros ou futuros físicos, por exemplo. Desta forma, o rigor adotado no livro é aquele necessário para a formação de matemáticos. Estas idéias manifestadas por Hardy em seu manual parecem ir ao encontro daquilo que propõem autores como Do Carmo (1974), Grattan-Guinness (1997), Rezende (2003), Baldino e Lages Lima, estes dois últimos em entrevista a Reis (2001), cujas concepções foram apresentadas na primeira seção deste capítulo.

Uma primeira preocupação didática de Hardy que destacamos é o cuidado em esclarecer ao leitor quais são as características, de fato, essenciais a um conceito e que, por esta razão, devem estar presentes nas definições dos mesmos. O melhor exemplo para ilustrar esta preocupação está presente no início da abordagem do conceito de função, quando Hardy destaca que os leitores verão inúmeros exemplos de função ao longo do capítulo, mas que antes de prosseguir, é necessário salientar que os casos mais simples de tal objeto matemático possuem três características que não necessariamente estão presentes na idéia geral do conceito em questão. São elas:

- (1) y é determinado para *todo* valor de x ;
- (2) para cada valor de x para os quais y é dado, corresponde *um e somente um* valor de y ;¹¹¹
- (3) a relação entre x e y é expressa por meio de *uma fórmula analítica*, a partir da qual o valor de y correspondente a um determinado valor de x pode ser calculado pela substituição direta do último.

¹¹¹ Atualmente, se a característica (2) não for satisfeita, dizemos que entre as variáveis x e y há uma *relação*, mas não uma função. Na época em que o livro de Hardy foi escrito, no entanto, relações que não satisfizessem (2) também eram consideradas funções, porém de um tipo especial; eram as *funções polídromas*.

É verdade que muitas das funções mais importantes possuem essas características especiais. No entanto, os exemplos seguintes deixarão claro que elas não são essenciais na idéia de função. O essencial é que deve haver alguma relação entre x e y tal que para alguns valores de x , de qualquer modo, correspondam valores de y .

(HARDY, 1955, p. 40-41 – tradução nossa).

Para justificar e ilustrar esse comentário apresenta exemplos de funções que não possuem uma ou mais destas características, como por exemplo, a função $y^2 = x$, que satisfaz (3), mas não satisfaz (1) e nem (2) e o caso em que y é definido como sendo o maior fator primo de x , ou seja, uma função que não possui a característica (1); possui (2), mas não possui (3), já que não há uma fórmula simples que expresse y em termos de x . Do ponto de vista didático, essa preocupação do autor é interessante, já que as características destacadas são típicas dos exemplos mais comumente trabalhados na maioria dos cursos de Cálculo. Desta forma, ao omitir comentários como estes, o professor corre o risco de deixar o aluno com uma concepção equivocada da idéia de função, pensando que a definição de tal objeto matemático deve contemplar aspectos que, na realidade, não são intrínsecos a ele.

Ainda com relação às definições, Hardy se preocupa em diferenciá-las das aplicações dos conceitos, o que se torna bastante evidente em um comentário feito pelo autor antes da apresentação da definição formal de derivada:

Apresentamos a noção de derivada ou coeficiente diferencial por meio de considerações geométricas. Mas, no conceito propriamente dito, não há nada geométrico. A derivada $\phi'(x)$ de uma função $\phi(x)$ pode ser definida, sem referência a qualquer tipo de representação geométrica de $\phi(x)$, pela equação

$$\phi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h};$$

e $\phi(x)$ tem ou não derivada, para um valor qualquer de x , de acordo com a existência ou não desse limite. A geometria das curvas é apenas uma das muitas áreas da matemática na qual a idéia de derivada encontra aplicação. (Ibid., p. 213).

Em nossa opinião, esta preocupação manifestada por Hardy é bastante relevante, uma vez que a confusão entre aplicação e definição é algo comum nos cursos de Cálculo. Muitos alunos definem integral como área, quando, na verdade, o cálculo de áreas é somente uma das aplicações do conceito de integral; da mesma forma, diversos estudantes definem a derivada de uma função como sendo o coeficiente angular da reta tangente à curva dessa função quando, na verdade, esta não é uma definição de tal ente matemático, e sim uma interpretação geométrica para o mesmo.

Antes de apresentar a definição formal dos conteúdos, Hardy procura sempre trabalhar com as noções de maneira intuitiva, utilizando, para isto, grandes textos em linguagem natural, discutindo as idéias. Somente após o leitor estar familiarizado com o assunto que está sendo trabalhado é que as noções formais e seus simbolismos são apresentados. Ao abordar, por exemplo, o conceito de limite, ao invés de iniciar o trabalho diretamente por meio da definição formal deste ente matemático, opta por introduzir tal idéia discutindo, inicialmente, a questão dos limites de sequências, começando por meio de uma longa explicação, em linguagem natural, a respeito dos significados da frase “*n tende ao infinito*”. Após esta explicação, o autor discute o comportamento da função $\phi(n) = \frac{1}{n}$ quando n tende ao infinito

e conclui que: $\frac{1}{n}$ é pequeno quando n é grande ou, de forma equivalente, $\frac{1}{n}$ tende a zero quando n tende ao infinito. É neste momento que os símbolos envolvidos na definição rigorosa de limite começam a ser introduzidos na obra como uma consequência natural da discussão feita, como outra maneira, mais sintética e precisa, de dizer aquilo que havia sido dito por meio da linguagem natural. O autor destaca então que afirmar que $\frac{1}{n}$ tende a zero quando n tende ao infinito, é equivalente a uma outra afirmação mais formal, a saber: “se δ é um número positivo qualquer, no entanto pequeno, então podemos encontrar um número n_0 tal que $1/n < \delta$ para todos os valores de n maiores ou iguais a n_0 ”. Além disso, chama a atenção para o fato de que o número n_0 é uma função de δ e que, por esta razão, algumas vezes é adotada a notação $n_0(\delta)$. Após essa observação, explica que esse comportamento da função $1/n$ pode ser resumido pela afirmação: “o limite de $1/n$ quando n tende ao infinito é zero” que, simbolicamente, é indicada por $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Depois de apresentar mais alguns exemplos de comportamentos de outras sequências quando n tende ao infinito, o autor afirma que o leitor já está em condições de compreender a noção geral de limite deste tipo de função. E novamente, ao invés de simplesmente apresentar tal noção, retoma as discussões feitas visando relacioná-las com a definição rigorosa a ser apresentada em seguida. Comenta, então, que poderíamos dizer que $\phi(n)$ tende para um limite l quando n tende ao infinito se $\phi(n)$ é quase igual a l quando n é grande, mas que, embora o significado desta declaração esteja suficientemente claro após as explicações anteriores, ela não é suficientemente precisa para servir como definição matemática rigorosa.

Afirma que essa declaração é, na verdade, equivalente a outras do tipo: para valores suficientemente grandes de n , $\phi(n)$ difere de l por valores menores que δ . E isso tem que ser verdade para $\delta = 0,01$, $\delta = 0,0001$ ou qualquer número positivo. Além disso, para qualquer valor dado de δ , a afirmação tem de ser válida para todo n a partir de um determinado valor denotado por $n_0(\delta)$. E então, conclui dizendo que toda esta idéia pode ser resumida pela seguinte definição formal:

Dizemos que a função $\phi(n)$ tende para o limite l quando n tende ao ∞ , se, dado um pequeno número positivo δ , a diferença entre $\phi(n)$ e l for menor que δ para valores suficientemente grandes de n ; e isso quer dizer que, dado um pequeno número positivo δ , podemos determinar um número $n_0(\delta)$ correspondente a δ , tal que a diferença entre $\phi(n)$ e l seja menor que δ para todos os valores de n maiores ou iguais a $n_0(\delta)$. [E denotando a diferença entre $\phi(n)$ e l , tomada positivamente, por $|\phi(n) - l|$ (...)] a definição pode ser escrita mais resumidamente, da seguinte maneira: se, dado qualquer número positivo pequeno δ , pudermos encontrar $n_0(\delta)$ tal que $|\phi(n) - l| < \delta$ quando $n \geq n_0(\delta)$, então dizemos que $\phi(n)$ tende para o limite l quando n tende ao ∞ e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n) = l.$$

(HARDY, 1955, p. 120-121 – tradução nossa).

O fato de Hardy retomar as discussões apresentadas a respeito do comportamento de uma sequência quando n tende ao infinito e dizer que as afirmações feitas até então não são suficientemente precisas para serem consideradas como definições rigorosas, ao invés de simplesmente apresentar a definição desvinculada de tudo o que havia sido feito anteriormente, a nosso ver, pode contribuir para que o leitor de sua obra comece a refletir a respeito da necessidade e do papel do rigor na Matemática. Além disso, apresentando a definição formal como consequência direta de uma discussão, digamos, mais intuitiva, a formalização acaba parecendo mais natural ao aluno, que, provavelmente, terá condições de vê-la como uma maneira elegante de expressar em uma linguagem sintética, precisa, rigorosa e universalmente aceita aquilo que até então estava sendo indicado por meio da língua natural. É uma forma de abordagem que se aproxima da idéia defendida por Lakoff & Núnes (1997), para os quais as definições rigorosas devem ser apresentadas ao estudante de forma que este as veja simplesmente como metáforas daquelas noções obtidas, inicialmente, de maneira mais natural por meio de discussões nas quais a intuição exerça o papel principal.

Percebemos também que Hardy demonstra preocupação em esclarecer para o leitor os significados dos símbolos utilizados nas definições formais, para que possíveis dificuldades

intrínsecas da linguagem própria da Matemática não prejudiquem o entendimento de tais definições. Para exemplificar tal preocupação podemos citar um trecho da obra no qual são discutidos os significados matemáticos de alguns elementos envolvidos na notação usual de derivada:

Já havíamos dito que a derivada também é chamada de coeficiente diferencial. No entanto, além dessa diferença de nomenclatura há também uma notação diferente que é bastante utilizada; a derivada da função $y = \phi(x)$ é frequentemente denotada por uma dessas expressões:

$$D_x y, \frac{dy}{dx}.$$

Dessas, a última é a mais usual e conveniente, mas, no entanto, o leitor deve ter o cuidado de lembrar que $\frac{dy}{dx}$ não significa um certo número dy dividido por outro número dx ; representa o resultado de uma certa operação D_x ou d/dx aplicada a função $y = \phi(x)$; operação que consiste em avaliar o limite do quociente $\{\phi(x+h) - \phi(x)\}/h$ quando $h \rightarrow 0$. O dx e o dy que aparecem na notação não podem ser separados, porque, por si só, eles não significam nada; dx e dy não representam os limites dos incrementos de x (δx) e de y (δy), pois esses dois limites são nulos. (Ibid., p. 219).

Outro aspecto didático a ser destacado no manual de Hardy é a maneira escolhida pelo autor para introduzir a idéia de integral que, a nosso ver, parece ser bastante eficiente para deixar explícito ao leitor que a diferenciação e a integração são operações inversas, idéia central do Teorema Fundamental do Cálculo. O autor inicia a abordagem de tal conceito por meio do seguinte comentário:

Vimos anteriormente de que maneira podemos encontrar a derivada de uma dada função $\phi(x)$ em uma grande variedade de casos, incluindo aqueles de ocorrência mais comum. É natural, então, considerarmos a questão inversa: *a determinação de uma função cuja derivada é uma dada função*. (Ibid., p. 245).

Afirma então que irá supor a função $\psi(x)$ dada e que seu objetivo é determinar uma função tal que $\phi'(x) = \psi(x)$. Comenta que essa questão pode ser analisada em três partes:

- (1) Em primeiro lugar, queremos saber se essa função do tipo de $\phi(x)$ existe. E é necessário distinguir essa questão de outra que é a seguinte: supondo que existe tal função, é possível determinar uma fórmula simples para expressá-la?
- (2) Gostaríamos também de saber se é possível que exista mais de uma função $\phi(x)$ que satisfaça o que queremos, ou seja, se o problema tem ou não solução única. E se não tiver, existe uma relação simples entre as soluções? É possível escrever todas elas em termos de uma em particular?

(3) E se houver uma solução para esse problema, como encontrar uma expressão para ela?
(Ibid., p. 245-246).

E que tais partes podem ser comparadas com as três questões que se colocam com relação à diferenciação de funções.

Para a primeira dessas questões, afirma que há funções para as quais as derivadas existem em todos os pontos, há outras em que existem em alguns pontos e não existem em outros e há também funções para as quais a derivada não existe em nenhum ponto. De qualquer forma, a questão “ $\phi(x)$ tem uma derivada $\phi'(x)$?” precisa ser respondida de modo diferente em diferentes circunstâncias. Portanto, podemos esperar que a questão “há uma função $\phi(x)$ da qual $\psi(x)$ é a derivada?” também possua diferentes respostas em casos diferentes; há casos em que a resposta é não e casos em que a resposta é sim. O autor apresenta então o resultado que afirma que se $\psi(x)$ é contínua então sempre existe uma função $\phi(x)$ tal que $\phi'(x) = \psi(x)$.

Com relação à segunda questão, afirma que, para o caso da diferenciação, ela não apresenta dificuldades, pois a própria definição de derivada já deixa claro, desde o início, que ela é única. Para o caso da integração, a resposta é quase que igualmente tão simples: se $\phi(x)$ é uma solução do problema, então $\phi(x) + C$ é outra, sendo C uma constante qualquer. E assim, todas as possibilidades de solução estão compreendidas na expressão $\phi(x) + C$. Hardy justifica essa afirmação ao leitor, lembrando-o de um resultado visto em um tópico anterior: se $\phi'(x) = \psi'(x)$ em um intervalo, então as funções $\phi(x)$ e $\psi(x)$ diferem, nesse intervalo, apenas por uma constante.

A terceira questão, no caso da derivação – encontrar $\phi'(x)$ – é, segundo o autor, bastante simples quando a função $\phi(x)$ é uma combinação finita de funções ordinárias. Já o problema inverso, ou seja, o problema pensado no caso da integração é, de acordo com Hardy, muito mais difícil e a natureza destas dificuldades irá aparecer mais claramente no decorrer do estudo desse assunto.

Feitos esses comentários, apresenta a definição de integral:

Se $\psi(x)$ é a derivada de $\phi(x)$, então chamamos $\phi(x)$ de integral ou função integral de $\psi(x)$. A operação de obter $\phi(x)$ a partir de $\psi(x)$ é chamada de integração. Vamos usar a seguinte notação:

$$\phi(x) = \int \psi(x) dx.$$

(Ibid., p. 247).

Há ainda mais um comentário de Hardy que gostaríamos de destacar e que, em nossa opinião, poderia servir para ilustrar sua preocupação didática em abordar os conceitos de maneira rigorosa e, ao mesmo tempo, acessível aos leitores. Tal comentário diz respeito à relação existente entre a integral definida e a integral indefinida. A intenção do autor é deixar claro que, na verdade, o que existe de fato, é o conceito de integral, independente de ser definida ou indefinida; estas são apenas nomenclaturas dadas para indicar casos particulares da operação de integração. Fazer tal observação, que como pudemos observar em nossas análises não aparece na maioria dos manuais, não deixa de ser um cuidado com o rigor, com a precisão nas conceitualizações. No entanto, se esta idéia fosse apenas citada no texto, provavelmente, não seria compreendida pela maioria dos leitores e, então, Hardy opta por explicá-la detalhadamente por meio da seguinte observação:

A distinção entre a integral definida e a integral indefinida é apenas um ponto de vista. A integral definida $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ é uma função de b , e pode ser considerada como uma função integral particular de $f(b)$. Por outro lado, a integral indefinida $F(x)$ pode sempre ser expressa por meio de uma integral definida, já que

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

Quando consideramos integrais indefinidas ou funções integrais, normalmente pensamos na relação entre as duas funções (a função integrando e a função integral), em virtude de uma ser a derivada da outra. Já quando consideramos uma integral definida, não temos o hábito de nos preocuparmos com uma eventual variação dos limites. (Ibid., p. 315-316).

Em resumo, a escolha do livro de Hardy por Gomide nos pareceu ter sido adequada, já que este manual propõe trabalhar com um nível de rigor interessante para uma disciplina na qual os conceitos fundamentais do Cálculo serão apresentados aos alunos no primeiro ano do ensino superior. A abordagem presente em tal livro parece ir ao encontro da idéia daquela professora de ministrar um curso cada vez mais próximo do Cálculo do que da Análise e, de acordo com D'Ambrosio, com um nível de rigor mais moderado do que o adotado anteriormente nas aulas conduzidas por Fantappiè e nos primeiros cursos ministrados por Catunda.

Conforme já destacamos, no início da década de 1950, quando Gomide já estava ministrando a disciplina de Análise para os alunos do primeiro ano começaram a ser editadas

apostilas deste conteúdo escritas por Catunda. Também já chamamos atenção, neste capítulo e no capítulo anterior, de que esse material parece ter sido elaborado levando em consideração a idéia de que, ao contrário do que era feito até então, os alunos deveriam, inicialmente, cursar uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral para posteriormente estudarem Análise Matemática. Destacamos anteriormente que uma das principais preocupações de Catunda ao redigir suas apostilas – expressa, inclusive, no prefácio das mesmas – foi aproximar, tanto quanto possível, a Análise da intuição geométrica, tomando o cuidado para que isto não acarretasse em um sacrifício do rigor. Ainda neste mesmo prefácio, há outra consideração que julgamos pertinente e que, a nosso ver, demonstra uma preocupação do docente em relação ao aprendizado efetivo de seus alunos: Catunda afirma que a ordem com que os conceitos são apresentados na apostila não é a mesma seguida em seus cursos da FFCL. Segundo ele: “esta alteração da ordem foi reconhecida absolutamente necessária, dada a falta de amadurecimento com que os estudantes se apresentam às escolas superiores”. Este comentário traz em seu bojo a idéia, já bastante discutida na primeira seção do capítulo, com base nas afirmações de Grattan-Guinness (1997), de que era preciso adequar o conteúdo à maturidade matemática dos ingressantes no ensino superior e uma das etapas desta adequação, provavelmente, consistia em iniciar a disciplina com um nível menor de rigor e com a abordagem de conceitos que permitissem maior manipulação por parte dos alunos, para que, posteriormente, já com uma bagagem matemática maior, pudessem acompanhar uma apresentação com nível mais alto de rigor daqueles temas já vistos e de outros mais analíticos e menos manipulativos. A impressão que nos fica é a de que, apesar de Catunda ter escrito suas apostilas de acordo com a organização proposta por Fantappiè para a apresentação da Análise, percebeu que, na prática, ela não funcionava tão bem; era uma abordagem bastante adequada para um texto científico sintetizando os conceitos principais daquele campo de conhecimento, mas que, para o trabalho em sala de aula, com os alunos do primeiro ano, exigia algumas adaptações referentes ao nível de rigor e a ordem com que os conceitos eram abordados.

Um dos cuidados didáticos percebidos durante a análise destas apostilas é que Catunda procura, em diversos momentos, explicitar o porquê de se estudar determinados tópicos, qual a utilidade dos mesmos dentro da própria Matemática e do Cálculo. Um primeiro exemplo deste tipo de preocupação pode ser encontrado na introdução da idéia de incremento, quando o autor afirma que:

Em muitos problemas de cálculo é necessário estudar o comportamento dessa função somente nas vizinhanças de um ponto x_0 desse intervalo. Para isso, estuda-

se diretamente o acrécimo ou incremento $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ dessa função, correspondente ao acréscimo $\Delta x = x - x_0$ da variável independente. (CATUNDA, 1952, II parte, p. 37)

Tal comentário, além de justificar a finalidade do conceito que estava sendo introduzido, também é importante porque traz em seu bojo a informação de que a idéia de variação é um dos pilares centrais do conceito de derivada e, conseqüentemente, do Cálculo, algo nem sempre explicitado nos cursos desta disciplina.

Outro exemplo desta preocupação de Catunda em justificar a utilidade dos conceitos trabalhados pode ser encontrado logo após a introdução da idéia de integral definida, quando o autor destaca uma das aplicações para tal ente matemático, o cálculo de áreas:

Este resultado mostra a grande aplicação do Cálculo Integral para o cálculo de áreas de figuras planas. Sendo conhecida uma primitiva particular $G(x)$ da função $f(x)$, a área compreendida entre a curva, o eixo Ox e as ordenadas extremas a e b é dada pela fórmula 1 $\left(\int_a^b f(x) \cdot dx = G(b) - G(a) \right)$. Para o cálculo dessa área, portanto, o primeiro passo é a determinação de uma primitiva de $f(x)$. Por essa razão, a integração tem também o nome de quadratura. (CATUNDA, 1954, III parte, p. 4 – grifo do autor.)

Outro aspecto que observamos, ainda diretamente relacionado a esta sua idéia de valorizar as aplicações dos conceitos vistos, foi sua preocupação em refinar, com relação ao que era feito nas notas de aula de Fantappiè, as interpretações geométricas e mecânicas da derivada. No caso da geométrica, além de abordar o problema da determinação da tangente da forma como é feita no curso de Fantappiè, considera a mesma situação só que com a curva dada em equações paramétricas. Afirma que, desta maneira, o problema estaria “numa forma mais simétrica e elegante”. Na interpretação mecânica, acrescenta um dado histórico, relacionando o conceito com o problema que lhe deu origem: afirma que “a noção de velocidade num instante dado, foi que levou Newton, no século XVII, a introduzir na Matemática o conceito de derivada” (p. 41).

Além desta nota histórica relacionando o conceito de derivada com um dos problemas que estava presente em sua gênese, há outro comentário neste sentido no início da abordagem de integral de Riemann, quando Catunda procura fornecer ao leitor de suas apostilas um rápido panorama da evolução de tal objeto matemático, desde suas origens no método da

Exaustão, na Grécia Antiga, até formalizações e generalizações realizadas no início do século vinte como, por exemplo, a do matemático Lebesgue:

Até aqui, temos considerado a integração como operação inversa da diferenciação, mostrando as regras mais importantes para o Cálculo das integrais das funções. (...) Vimos como a integral definida, que é o incremento de uma primitiva entre os extremos de um intervalo, pode ser interpretada como a área de uma figura plana. O conceito de integral como área é muito mais antigo que o de derivada, pois tem origem no método da exaustão utilizado por Arquimedes para o cálculo das áreas do círculo e do setor da parábola. No entanto, a apresentação rigorosa desse conceito, não baseada na noção intuitiva de área, só foi dada por Cauchy e mais tarde por Riemann, em meados do século passado. No início do século vinte houve então grande progresso na Análise Matemática com a definição de integral de Lebesgue, e depois por várias outras definições dadas por outros matemáticos. (CATUNDA, 1954, parte III, p. 36).

Em 1962 Catunda lançou o primeiro volume do livro *Um Curso de Cálculo* e, de acordo com o prefácio, uma de suas preocupações na redação deste manual continuou sendo, como já havia explicitado nas apostilas, simplificar as demonstrações, apresentando algumas vezes mais de uma forma de demonstrar determinado resultado, sem que, com isso, houvesse sacrifício do rigor matemático e tentando manter a aproximação da Análise com a intuição geométrica. O mesmo prefácio destaca que a principal diferença entre as apostilas e o livro é que, na redação deste último, o autor se preocupou, principalmente, em introduzir algumas modificações na parte conceitual, dando a ela uma feição mais simples e mais próxima da teoria das estruturas. Além disso, em seu manual, Catunda afirma que: “procurou também evitar notações muito complicadas, que às vezes simplificam a exposição, mas dificultam a consulta, obrigando o leitor a recorrer constantemente às páginas onde são introduzidos os símbolos” (CATUNDA, 1962 - prefácio). Este comentário referente às notações, a nosso ver, explicita uma preocupação didática do autor com relação à maneira mais apropriada de adaptar o rigor científico para outro que seja adequado para a sala de aula, adaptação esta que, de acordo com Grattan-Guinness (1997) e Reis (2001), deve ser objeto de reflexão de qualquer professor. Catunda demonstra ter consciência de que, em muitos casos, o excesso de formalismo e de simbolismos pode tornar a apresentação mais sintética, mas ao mesmo tempo, também mais hermética para o aluno e que, portanto, é necessário que o professor e/ou autor de livros se atentem a este fato, simplificando tanto quanto possível o uso de tais notações

Com relação à abordagem dos conceitos fundamentais do Cálculo, o primeiro aspecto que gostaríamos de destacar no livro de Catunda é a nota histórica apresentada por ele antes da introdução do conceito de limite. Nela, o autor explica brevemente ao leitor um pouco da

evolução desta noção desde seu surgimento na Grécia antiga, por meio dos trabalhos de Eudoxo e Arquimedes, até sua formalização no século XIX:

Vamos introduzir agora o conceito fundamental da Análise Matemática, que é o de limite. Esta noção tem origem na matemática grega, quando Eudoxo e depois Arquimedes, calcularam o comprimento da circunferência e as áreas do círculo e do segmento de parábola, pelo método chamado de “exaustão”. Assim, por exemplo, dado um círculo K de raio R , consideremos os polígonos regulares P_n , de n lados, inscritos em K . Cada polígono tem um certo perímetro C_n e uma área A_n , que são funções do número n . Quando n aumenta, prova-se facilmente que tanto o perímetro como a área aumentam, aproximando-se de certos números fixos, C e A , os quais são proporcionais a $2R$ e R^2 , sendo o fator de proporcionalidade o número $\pi = 3,14159...$. Estabelecido esse fato teoricamente, resta encontrar um procedimento simples para o cálculo de C e de A , ou, o que dá no mesmo, para o cálculo de π . É o que faz o método da exaustão – no caso do círculo, o chamado “método dos perímetros” – que parte do quadrado ou do hexágono regular inscritos no círculo e permite calcular por fórmulas simples, os perímetros e as áreas dos polígonos regulares que se obtém dobrando sucessivamente o número de lados. A noção de limite foi retomada no século XVII, com o cálculo de séries e sucessões, e, de uma maneira um tanto obscura e pouco rigorosa, pelos criadores do Cálculo Infinitesimal – Cavalieri, Wallis, Newton, Leibniz, etc. Pode-se mesmo dizer que durante perto de dois séculos os matemáticos lidaram com a noção de limite e suas aplicações de maneira mais ou menos intuitiva, pois só com Cauchy e Bolzano, no século XIX, essa noção adquiriu o caráter rigorosamente matemático. (CATUNDA, 1962, p. 95-96)

Percebe-se embutida em tal nota a idéia de que, na história da Matemática, muitas vezes, as noções são criadas e/ou trabalhadas primeiramente de forma intuitiva para, posteriormente, serem formalizadas de maneira rigorosa. No entanto, conforme destacamos no capítulo anterior, inicialmente o curso de Matemática da USP seguia uma orientação na disciplina de Análise que ia na contramão da história do desenvolvimento da Análise e do Cálculo como áreas de conhecimento: ao invés dos conceitos serem apresentados primeiramente de maneira mais intuitiva, com um nível mais baixo de rigor, em uma disciplina de Cálculo, já eram abordados com alto nível de rigor e formalização em uma disciplina de Análise. Também já frisamos que na época em que o livro e mesmo as apostilas de Catunda foram lançadas, estava começando a haver uma discussão para que esta situação fosse modificada; que se começasse pelo Cálculo, com um rigor mais adequado para o aluno ingressante na universidade, para então se chegar à Análise, vista como uma crítica do Cálculo. Neste sentido, essa nota histórica presente no manual de Catunda merece destaque por, mesmo que de maneira indireta, fornecer indícios que permitissem ao leitor começar a perceber como se deu, historicamente, o desenvolvimento e a formalização do conceito de limite, um dos pontos centrais da disciplina que estava sendo estudada.

Ao optar por iniciar a apresentação de limite de forma intuitiva procurando, a princípio, dar condições para que o leitor compreendesse a idéia geral envolvida no conceito, sem recorrer de imediato às notações e formalizações, Catunda, mais uma vez, explicita sua preocupação com aspectos didáticos. Tal apresentação é feita da seguinte forma:

Intuitivamente, pode-se definir o limite de uma função $y = f(x)$ qualquer, definida em um campo C com ponto de acumulação a , da seguinte maneira: dizemos que $f(x)$ tem limite b , ou que, $f(x)$ tende a b ($f(x) \rightarrow b$) para x tendendo a a ($x \rightarrow a$) se, quando x varia aproximando-se de a , o valor de y torna-se cada vez mais próximo de b . (Ibid., p. 96).

Depois de apresentar essa definição intuitiva, introduz a definição topológica de limite de uma maneira bastante didática, que, em nossa opinião, tem potencial para possibilitar que o leitor perceba que esta última nada mais é do que a primeira escrita de forma precisa matematicamente. É um primeiro passo para que se possa compreender a definição rigorosa envolvendo os epsilons e deltas que será apresentada mais adiante e a relação entre esta e a noção intuitiva:

Ora, como dissemos atrás, a noção um pouco vaga de proximidade, ou aproximação, pode-se tornar mais rigorosa e mais geral quando se usa a noção de vizinhança. Nas condições anteriores, devemos então assegurar que y está numa vizinhança de b , dada arbitrariamente, desde que x esteja suficientemente próximo de a , isto é, numa vizinhança conveniente de a .

(...)

A função $y = f(x)$ tem limite b para x tendendo a a , se a cada vizinhança β de b corresponde uma vizinhança α de a , tal que para todo ponto $x \neq a$ do campo C , pertencente à vizinhança α , o valor de y está na vizinhança β . (Ibid., p. 96)

Na seqüência, de forma análoga a encontrada no curso de Fantappiè e em suas próprias apostilas apresenta a definição de limite seguindo as idéias de Weierstrass. Uma diferença percebida é que, ao invés de utilizar o termo entorno, como fazia nas apostilas, em seu livro Catunda usa vizinhança. Aliás, o comentário feito por ele após introduzir esta idéia também merece destaque por sua importância didática, por dar condições para que o leitor compreenda o papel e o significado de alguns termos e elementos utilizados em muitas das definições presentes no curso de Cálculo ou Análise:

A noção de vizinhança serve principalmente para substituir a noção pouco vaga de “proximidade”: em quase todas as aplicações, essa noção intervém em frases como: “dada uma vizinhança arbitrária de um ponto...”, ou então “existe uma vizinhança

conveniente...”. No caso de vizinhanças simétricas (1), essas frases equivalem, respectivamente, a: “dado um número ε positivo arbitrário...”, ou “existe um $\varepsilon > 0$ conveniente...”. Às vezes, para dar maior ênfase, diremos também: “dado o número positivo arbitrariamente pequeno ε ou “existe um número $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno...”. (Ibid., p. 77)

Ao destacarmos, há alguns parágrafos, as preocupações didáticas manifestadas por Catunda na redação de suas apostilas, um dos aspectos indicados foi seu cuidado de, em diversos momentos, relacionar um objeto matemático com aquele problema que, historicamente, esteve na sua gênese. Além disso, observamos que, em várias ocasiões, o autor procurava explicitar ao leitor o porquê de se estudar determinados conceitos. Em seu livro, tais preocupações voltam a se manifestar e, na apresentação da noção de derivada, aparecem associadas em uma nota histórica a respeito do problema do traçado de tangentes:

Um dos problemas que mais preocuparam os matemáticos até o século XVII foi o traçado de tangentes. Nesse século foram descobertos vários processos relativos a curvas particulares, que se acrescentaram aos que eram conhecidos desde a antiguidade; mas depois da invenção da Geometria Analítica, por Descartes, preocuparam-se os matemáticos em encontrar um processo geral, válido para qualquer curva, da qual se conhecesse a equação. Tal processo foi apenas indicado por Fermat, mas foram Newton e Leibniz que resolveram o problema de modo completo, criando um algoritmo para escrever a equação da tangente. O problema do traçado de tangente torna-se assim apenas um aspecto de outro muito mais geral, que é o estudo de uma função nas vizinhanças de um ponto. (Ibid., p. 179)

Conforme comentamos em um dos parágrafos anteriores, em suas apostilas Catunda trabalhava detalhadamente com as interpretações da derivada no âmbito da geometria e da mecânica, mostrando aplicações deste conceito na própria Matemática e também na Física. Em seu livro, além de continuar apresentando tais interpretações, traz também um comentário referente à aplicação da noção de derivada em outras ciências:

A noção de derivada tem enorme aplicação não só na Física e Mecânica, mas também, hoje em dia, em todas as ciências, como a Biologia, a Sociologia, a Psicologia, etc. Nestas, como em geral em todas as questões de Estatística, quando aparecem grandezas representadas por números inteiros, costuma-se tratar a variável N como se fosse um número real, considerando-se o acréscimo ΔN , a razão incremental $\Delta N/\Delta t$ e o limite desta, dN/dt , para $\Delta t \rightarrow 0$ (t sendo a variável independente, que muitas vezes é o tempo). É claro que este procedimento só se justifica quando se trata de números grandes, em que o erro permitido é da ordem de várias unidades. Assim, por exemplo, se em um cidade a taxa de natalidade é n e a de falecimento é f (isto é, se em cada mil habitantes nascem por ano n e morrem f), podemos dizer que, desprezados outros fatores, chamando N a população, o aumento desta em Δt anos é dado por

$$\Delta N = \frac{N(n - f)\Delta t}{1000}$$

e portanto o acréscimo de população em cada instante pode ser avaliado pela derivada. (Ibid., p. 185)

Convém destacar que este tipo de preocupação em explicitar ao leitor que determinada variável, apesar de ser discreta, está sendo tratada como se fosse contínua, é algo pouco comum nos livros atuais e, conforme demonstra a última citação estava presente no manual de Catunda.

Com base na análise feita, pudemos perceber que o livro de Catunda é bastante rigoroso, mas com um nível de rigor mais acessível a alunos do primeiro ano do curso superior do que aquele presente nas notas de aula de Fantappiè. Em nossa opinião, essa maior acessibilidade provém do encadeamento adotado por Catunda para introduzir os conceitos, apelando, sempre que possível, primeiramente, às idéias intuitivas e apresentando, em diversos momentos, comentários explicativos a respeito dos símbolos, notações e termos presentes nas definições formais. Da forma como os conteúdos estão estruturados na obra, ao apresentar determinado ente matemático em sua forma mais rigorosa, esta acaba parecendo ao leitor como uma maneira natural de escrever, de forma precisa do ponto de vista matemático, aquilo que havia sido discutido intuitivamente. Esta organização proposta pelo autor em seu manual, a nosso ver, demonstra que, aos poucos, começou-se a levar em consideração que o rigor com que determinado assunto é tratado deve ser adequado ao contexto no qual este tratamento está sendo realizado. A impressão que nos fica é que, paulatinamente, passou-se a perceber que não fazia sentido apresentar os conceitos do Cálculo e da Análise ao leitor/estudante que está ingressando na universidade da mesma forma com que se apresentaria para um matemático profissional.

Podemos dizer que as reflexões de Gomide a respeito da necessidade de haver um curso de Cálculo antecedendo o de Análise e a publicação das apostilas e do livro de Catunda que, em diversos aspectos, parecem já ter incorporado esta idéia, foram que colocaram definitivamente em pauta, nos cursos de graduação em Matemática do país, as preocupações referentes ao processo de ensino e aprendizagem destas disciplinas, isto porque, embora tais acontecimentos tenham se passado na USP, conforme afirmamos nos capítulos anteriores, durante muito tempo, o que se fazia em tal universidade servia de modelo para a maioria das outras instituições de ensino superior do país. Além disso, conforme já discutimos no capítulo 4, o material de Catunda exerceu, durante muito tempo, grande influência no ensino universitário brasileiro por, além de ser muito respeitado em razão da forma como o conteúdo era abordado, ser a única opção em língua portuguesa disponível naquela época para o ensino de Análise.

O ano de 1962, além do lançamento do livro de Catunda, marca também a aposentadoria do docente da FFCL. A partir de então passou a não haver mais a figura de um catedrático a frente da disciplina de Análise, que começou a ser ministrada em anos diferentes, por professores diferentes. Em 1964 a cadeira Análise Matemática passou a se chamar Cálculo Infinitesimal e a primeira disciplina oferecida àqueles alunos que estavam ingressando na universidade passou a ser chamada de Cálculo I.

O primeiro curso de uma disciplina, de fato, chamada Cálculo I da história da graduação em Matemática da USP foi ministrada em 1964, em conjunto para os alunos da Matemática e da Física, pelo professor Lyra. De acordo com Zanetic, que foi seu aluno neste curso, o rigor era algo muito presente em suas aulas e como os alunos, além das aulas teóricas que assistiam com ele, tinham também aulas de exercícios com outro docente, então, na apresentação da teoria, Lyra se preocupava mais com o rigor e com o formalismo do que com exercícios de aplicações e de cálculo: “O rigor era (...) muito presente (...); sempre tentava fazer com que entendêssemos as demonstrações rigorosas dos teoremas do Cálculo. (...) Essa preocupação com o rigor era imensa.”¹¹². Percebe-se embutida nestas palavras de Zanetic uma tendência bastante comum entre professores e alunos: a de associar o rigor às demonstrações, quando, na verdade, nem só por demonstrações se caracteriza um ensino rigoroso e nem só as demonstrações devem ser rigorosas; toda a abordagem de determinado conteúdo matemático deve ser feita desta forma. A questão a ser colocada não é se o ensino de Cálculo ou de qualquer outra disciplina da graduação em Matemática deve ser rigoroso ou não; o rigor é inerente à Ciência e, por esta razão, deve sim estar presente em seu ensino. O que precisa ser avaliado é qual o nível de rigor mais adequado para cada situação e como colocá-lo em prática sem, para isto, precisar recorrer a um formalismo exacerbado.

E foi exatamente a preocupação em trabalhar com os conceitos de forma rigorosa que mais marcou Zanetic nesta disciplina ministrada por Lyra: “o que me marcou foi a profundidade da abordagem dele, (...) essa preocupação com (...) o conhecimento, com o rigor teórico da disciplina”¹¹³. E é interessante destacar que, na época em que nosso entrevistado ingressou na universidade, o nível de rigor presente nas disciplinas não ocasionava tanto estranhamento aos alunos, em razão da abordagem usualmente feita na educação básica, naquele momento, também ser bastante diferenciada: “não tínhamos tantas dificuldades. A

¹¹² ZANETIC (2009).

¹¹³ ZANETIC (2009).

Matemática vista no ensino médio era bastante sofisticada. Lembro-me, inclusive, de ter aprendido algo sobre limites e derivadas no antigo curso científico” ¹¹⁴.

Zanetic deixou transparecer em seu depoimento o quanto gostava das aulas de Lyra: “eram brilhantes (...) realmente valiam a pena serem assistidas” ¹¹⁵. E vale lembrar que o foco de interesse de Zanetic era a Física e não a Matemática e, desta forma, o fato dele se entusiasmar tanto por uma disciplina tão rigorosa, repleta de demonstrações, nos dá pistas de quão interessante deveriam ser os cursos de Cálculo ministrados pelo professor Lyra, cursos esses que, ao que tudo indica, conseguiam cativar até mesmo aquelas pessoas cujo interesse principal não fosse a Matemática e seus fundamentos. Zanetic comenta que se lembra de muitos resultados teóricos que aprendeu nesta disciplina, apesar de nunca ter precisado trabalhar com os mesmos em sua trajetória profissional “até hoje me lembro do Teorema de Heine-Borel, dos detalhamentos, do simplesmente conexo, enfim, coisas que eu nunca usei na Física, mas que me lembro dos termos” ¹¹⁶. Tal fato nos leva a crer que Lyra proporcionava aos alunos de seus cursos um aprendizado real, efetivo, dos conceitos estudados e não somente um conhecimento efêmero que lhes permitiria apenas serem aprovados na disciplina em questão.

Uma das características didáticas de Lyra recordadas por nosso entrevistado foi que “ele escrevia muito na lousa (...) e para quem chegava mais tarde, às vezes a lousa parecia um pouco confusa, mas se você seguisse as anotações desde o início, veria que era uma apresentação muito bem encadeada” ¹¹⁷. Para a professora Coelho, que também foi aluna de Lyra em algumas disciplinas de Cálculo que cursou durante seu bacharelado em Matemática, entre os anos de 1967 e 1970, “as aulas dele não tinham essa coisa muito escolar; e não é que ele fosse desorganizado. Mas você precisava ficar muito ligado para entender aquilo que estava sendo trabalhado” ¹¹⁸.

Outra característica marcante nas aulas de tal docente e não muito comum nos cursos atuais, segundo Zanetic, é que:

Ele conversava muito sobre o que estava sendo trabalhado em aula; não se preocupava apenas com o algoritmo, com o aspecto formal das representações matemáticas. É claro que explorava também esses aspectos formais, mas havia uma grande preocupação em dissertar sobre o tema da aula. E isso não é muito comum até hoje nas aulas de Cálculo ou mesmo de Física; o mais comum é ficar nas

¹¹⁴ ZANETIC (2009).

¹¹⁵ ZANETIC (2009).

¹¹⁶ ZANETIC (2009).

¹¹⁷ ZANETIC (2009).

¹¹⁸ COELHO (2009).

expressões. Eu, às vezes, apago a lousa de um colega que me antecedeu e observo somente fórmulas e algoritmos, tanto em aulas de Física como de Matemática. E esse não era o caso dele: ele escrevia o nome dos indivíduos, falava a respeito dos personagens (envolvidos no desenvolvimento do conceito matemático trabalhado naquela aula). (ZANETIC, entrevista, 2009).

Nosso entrevistado destacou também outro ponto relativo à didática de Lyra e que diz respeito aos exemplos apresentados por ele durante as aulas: “o que era marcante nas aulas dele e uma preocupação muito clara que ele tinha é que procurava dar exemplos que atendessem aos dois públicos: aos físicos e aos matemáticos. Lembro-me tanto de aplicações na parte mais elementar de derivadas quanto de integrações e integrações duplas, triplas”¹¹⁹. Tal preocupação didática realmente merece destaque, uma vez que era algo inovador um matemático apresentar, já naquela época, cuidados como este. Nem mesmo nas décadas posteriores observou-se preocupação semelhante. Outro recurso didático adotado algumas vezes pelo docente era a visualização geométrica: “ele desenhava figuras a respeito daquilo que estava sendo discutido, procurava fazer esboços dos epsilons e dos deltas, etc.”¹²⁰.

Coelho destacou ainda outro aspecto interessante, do ponto de vista do ensino e aprendizagem, presente nas aulas de Lyra (possivelmente com maior frequência nos cursos de Cálculo mais avançados ministrados por ele):

[Ele utilizava, em alguns momentos, aquele livro do Robert Bartle chamado Elementos de Análise Real e esse livro] traz na parte de exercícios algo que o autor chama de Project, que são umas questões mais ambiciosas de se propor para os alunos e o Lyra nos propunha alguns desses Projects, nos ajudava a resolver. Eram problemas que hoje chamaríamos de problemas abertos; não é aquele tipo de exercício em que você tem todos os números, todos os dados e, com base neles, deve chegar a algum resultado; precisávamos ir montado, era quase que modelar o problema.. (COELHO, entrevista, 2009).

Por meio dos comentários de Zanetic e Coelho, percebemos que, embora em linhas gerais, no curso de Lyra, o Cálculo continuasse sendo trabalhado de acordo com uma orientação formalista (FIORENTINI, 1995), em que o foco era a apresentação da Matemática pela Matemática, por meio de seus conceitos e estruturas, sempre de maneira muito rigorosa e precisa, parece ter começado a haver algumas preocupações no sentido de não somente apresentar os conteúdos, mas também informar os alunos a respeito dos processos que levaram à formulação daquelas noções que estavam sendo apresentadas, de exemplificar o assunto abordado por meio de situações das áreas de interesse dos estudantes e de propor algumas situações nas quais eles precisassem refletir a respeito do que havia sido trabalhado

¹¹⁹ ZANETIC (2009).

¹²⁰ ZANETIC (2009).

para modelá-las. Percebe-se, portanto, que, embora pertencente a uma geração para a qual, para ser um bom professor universitário, bastava dominar o conteúdo a ser ensinado, Lyra demonstrava ter diversos tipos de preocupações didáticas, de cuidados para que seus alunos, de fato, aprendessem aquilo que estava sendo abordado. Tais cuidados, em nossa opinião, refletem o comprometimento de Lyra com seu trabalho docente, aspecto também destacado por nossos depoentes. “Eu não me lembro do Lyra ter faltado em nenhuma aula e ele ficava o horário todo da aula dando matéria. As aulas dele eram muito densas, com uma grande quantidade de conteúdo.”¹²¹. Segundo Coelho:

O Lyra gostava muito de dar aulas, de estudar. Eu me lembro de tê-lo ouvido dizer, em determinada ocasião, que não poderia fazer algo em certo horário porque aquele era o horário em que ele estudava. E eu lembro também - e isso me marcou muito - que fui assistir uma comunicação dele e ele começou a comunicação dizendo: este trabalho nasceu da minha vontade de entender esse outro. Os cursos dele eram difíceis, mas bem estimulantes. (COELHO, entrevista, 2009).

A referência bibliográfica principal adotada neste curso de Lyra foi o manual *Calculus with Analytic Geometry – A First Course* de Protter & Morrey. Esta obra, de acordo com seu prefácio, foi elaborada visando auxiliar àqueles leitores que estivessem cursando uma primeira disciplina de Cálculo e, por esta razão, foi escrita com um nível de rigor adequado a este público. Ainda no prefácio, os autores destacam que também escreveram um livro para aqueles que já tivessem passado por um curso inicial de Cálculo e que precisassem de uma abordagem mais detalhada do conteúdo e com um nível mais alto de rigor, demonstrando, explicitamente, que, assim como Grattan-Guinness (1997) e Reis (2001), também concebem o rigor como sendo variável de acordo com o contexto e com a maturidade matemática dos leitores e que, como Salinas & Alanís (2009), acreditam que não haja necessidade de submeter aqueles que estão aprendendo Cálculo pela primeira vez a uma abordagem excessivamente rigorosa e formal.

Uma preocupação didática bastante presente no livro de Protter & Morrey é a de trabalhar com os conceitos, primeiramente, de forma intuitiva, antes de apresentá-los de maneira formal; há, inclusive, um capítulo todo na obra, chamado *Preview of the Calculus*, escrito com esta finalidade. Nele, os conceitos de limite, derivada e integral são apresentados aos leitores de maneira informal para que, desde o princípio, eles possam conhecer os processos elementares do Cálculo que serão formalizados ao longo do texto. Neste sentido, os autores parecem seguir um caminho semelhante aquele proposto por Rezende (2003), para o

¹²¹ ZANETIC (2009).

qual o estudante deve, inicialmente, compreender as noções que estão sendo abordadas para, em um segundo momento, sistematizá-las, já que, apresentar os conceitos diretamente de maneira rigorosa pode, conforme pontua Ávila em entrevista a Reis (2001), dificultar a apreensão das idéias principais envolvidas nos mesmos. Assim como Perminov (1998), Protter & Morrey parecem considerar necessário que, antes da rigorização, os estudantes passem pelo momento da intuicionalização.

O exemplo que melhor ilustra essa idéia de primeiro abordar intuitivamente os conceitos é a forma escolhida pelos autores para introduzir a noção de limite. A idéia fundamental presente em tal ente matemático é apresentada por meio de uma interpretação geométrica: os autores consideram uma determinada função da variável x e um valor a particular para esta variável; esboçam o gráfico de tal função e, em seguida, vão construindo retângulos no gráfico com intervalos cada vez menores envolvendo o ponto a escolhido. Destacam então que, como as larguras dos retângulos vão se tornando mais estreitas, as alturas também vão diminuindo de tamanho. E concluem que, como x vai se aproximando do valor a , $f(x)$ vai se aproximando de um valor L , isto é, os retângulos que rodeiam a têm larguras cada vez mais estreitas e alturas também cada vez menores e mais próximas de L . Destacam então que a afirmação $f(x)$ se aproxima de L quando x se aproxima de a pode ser abreviada por $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Em seguida, logo após escrever essa definição intuitiva de limite de maneira mais organizada, os autores começam a preparar o leitor para a formalização desta idéia, destacando que, nesta abordagem informal, alguns termos utilizados, como, por exemplo, mais perto, mais próximo, mais estreito, etc, são imprecisos e devem ser substituídos por elementos consistentes do ponto de vista matemático. A nosso ver, esta é uma maneira de começar a deixar claro ao leitor a necessidade de se apresentar uma abordagem rigorosa para o ente matemático em questão.

No momento de apresentar, em outro capítulo, a formalização do conceito de limite, todo esse trabalho com a noção intuitiva, feito no capítulo *Preview of the Calculus* é retomado e, então, os autores chamam a atenção do leitor para a presença, neste tratamento inicial, de muitas expressões “não-matemáticas”, que variam de pessoa para pessoa, como “intervalos se tornando pequenos”, “números se aproximando”, “quantias aproximadamente nulas”, e que, por esta razão, não podem ser utilizadas para estabelecer uma definição formal de um conceito matemático. É então que, como uma maneira de tornar precisas estas idéias da noção intuitiva, ou, como diria Perminov (1998), conceitualizar as intuições, entram em jogo os simbolismos e as notações envolvidas no tratamento formal do ente matemático em questão. E para que os papéis desempenhados por tais símbolos e notações se tornem claros para o

leitor, os autores apresentam uma ilustração geométrica da idéia principal envolvida na definição, considerando uma função, seu gráfico e analisando que, quando a variável assume valores que estão entre as retas $a - \delta$, $a + \delta$, os valores correspondentes da função ficam limitados pelas retas $L - \varepsilon$, $L + \varepsilon$. A nosso ver, esta ilustração pode possibilitar que o aluno relacione mais facilmente a definição formal com a definição intuitiva e, além disso, uma discussão topológica, como esta apresentada por Protter & Morrey, é importante porque, por meio dela, evita-se a monotonicidade, que, na abordagem intuitiva, pode, muitas vezes, parecer ao aluno como sendo intrínseca a noção de limite.

O equilíbrio entre intuição e rigor na apresentação dos conteúdos abordados no manual pode ser claramente notado também na forma escolhida pelos autores para trabalhar com a relação entre integral e derivada no capítulo *Preview of the Calculus*. Conforme pode ser percebido pelo que foi apresentado no capítulo anterior, Protter & Morrey optam por tratar desta relação privilegiando a linguagem natural ao invés da linguagem simbólica e recorrendo a argumentos geométricos. Desta forma, fazem com que o leitor perceba que o processo de encontrar a área abaixo de uma curva $y = f(x)$ e o processo de diferenciação são um o inverso do outro, resultado que será retomado de maneira formal e com maior nível de rigor em um dos capítulos seguintes do livro. De certa forma, podemos dizer que os autores recorrem à intuição naqueles momentos em que os leitores irão interiorizar os conceitos e ao rigor quando é necessário formalizá-los, demonstrando que, de fato, conforme postula Reis (2001), é possível trabalhar com o Cálculo de maneira rigorosa sem, no entanto, ser formalista, iniciando a abordagem dos conceitos de maneira intuitiva, permitindo inicialmente que os estudantes descubram e compreendam seus aspectos fundamentais para, em um momento posterior a este de descoberta e intuição, justificá-los rigorosamente.

Encerrando nossas considerações a respeito desse manual, destacamos que, em diversos momentos do texto, percebemos o cuidado dos autores em explicar detalhadamente alguns aspectos mais delicados das notações empregadas, provavelmente para que o simbolismo envolvido em uma abordagem rigorosa do Cálculo não prejudicasse a compreensão dos leitores. Esse tipo de preocupação pode ser ilustrado, dentre outros, por meio do seguinte trecho do livro:

É necessário dizer algumas palavras referentes a essa notação: o dx é justamente uma justaposição de letras que são consideradas inseparáveis. Da maneira como foi definida a “integral (...)”, o valor de L [o resultado da integral] depende somente de f e de a e b . Desta forma, a escolha da letra x não tem nenhum significado particular na notação acima; poderíamos ter usado qualquer símbolo. Por exemplo,

se tivéssemos a mesma função f mas tivéssemos usado t como variável independente, a expressão $\int_a^b f(t)dt$ teria exatamente o mesmo significado e o valor de L não seria alterado. O dt , neste caso, simplesmente identifica a variável que está sendo usada no trabalho de avaliação da função. (PROTTER & MORREY, 1962, p. 90-91).

A adoção deste livro de Protter & Morrey pelos professores Lyra e Botelho nos anos de 1964 e 1967, respectivamente, nos pareceu bastante coerente com a idéia que, desde o início da década de 1950, ganhava força na Seção de Matemática da FFCL: a de que o aluno ingressante no ensino superior deveria, inicialmente, cursar uma disciplina de Cálculo, ministrada com um nível de rigor mais adequado à sua maturidade matemática naquele momento, dando maior ênfase às idéias fundamentais deste campo de conhecimento e às manipulações de limites, derivadas e integrais do que à formalização dos conteúdos nela abordados. Uma abordagem mais formal, crítica e com nível de rigor mais elevado deveria ser deixada para as disciplinas de Análise que os estudantes cursariam posteriormente, em outros momentos de suas graduações. E Protter & Morrey dão indícios ao longo de todo o manual, especialmente no prefácio, de que também consideravam esta como sendo a forma mais adequada de se trabalhar com os conteúdos do Cálculo e da Análise, tendo, inclusive, escrito obras pensadas especialmente para cada um destes momentos da formação do aluno.

No ano de 1966, o curso inicial de Cálculo foi conduzido pelas professoras Gomide – responsável pelas aulas teóricas – e Botelho – responsável pelas aulas de exercícios. Conforme já destacamos no capítulo 4, de acordo com De Souza e Bonomi, que foram alunas deste curso, os conceitos eram tratados, desde o início, já com alto nível de rigor e havia a preocupação de apresentar, detalhadamente, as demonstrações dos resultados trabalhados; demonstrações estas que seriam posteriormente cobradas dos alunos nas avaliações. Além disso, enfatizava alguns aspectos que, atualmente, são trabalhados com maiores detalhes na disciplina de Análise, como, por exemplo, a definição formal de limite.

Com relação às possíveis preocupações didáticas de Gomide e Botelho manifestadas durante as aulas, nossas depoentes disseram não ter observado nada de especial: era um curso tradicional seguindo aquele modelo didático que Thurston (1994) denomina de *popular*, no qual o professor se limita a apresentar o conteúdo na lousa de acordo com a sequência definição – explicação - teorema – demonstração. De Souza, ao ser questionada se eram ou não trabalhadas noções intuitivas dos conceitos, disse que não e que isso não incomodava a ela ou a seus colegas, talvez porque ” já vínhamos de uma formação que não era muito

intuitiva; No ginásio e no colegial não havia muita preocupação com essa parte intuitiva” ¹²². No que diz respeito à participação dos alunos nas aulas, De Souza disse que era inexistente. Bonomi, por sua vez, comentou que “era aquele modelo em que você está assiste à aula, toma nota e depois vai para casa, estudar e fazer exercícios” ¹²³. Os alunos não tinham grande preocupação em esclarecer, em aula, algo que não tivessem compreendido; tinham uma postura mais passiva: “naquela época, eu acho que nós alunos aceitávamos mais, éramos mais tranquilo; se não entendíamos na hora, íamos para a casa estudar e tratar de entender. Hoje em dia as coisas estão um pouco diferentes” ¹²⁴. Para De Souza, naquela época, os próprios estudantes traziam consigo a idéia de que “a função do aluno não era perguntar; era se virar sozinho; o professor jogava as idéias e íamos atrás” ¹²⁵. Tais comentários de Bonomi e De Souza trazem a tona, mais uma vez, a questão levantada por Franco (2008) e Fischer (2009) e já discutida na primeira seção deste capítulo de que foram as mudanças na universidade, no papel desta instituição na sociedade e no perfil dos estudantes que nela ingressavam que ocasionaram a busca por alternativas metodológicas para a abordagem dos conteúdos presentes nas disciplinas ministradas em tal nível de ensino. Se a postura dos alunos daquela época, muito bem descrita pelas depoentes em suas últimas falas citadas, era a de se adequar ao estilo de ensino universitário, os professores acabavam não vendo necessidade em repensar profundamente a respeito de suas escolhas didático-metodológicas e, desta forma, muitos cursos acabavam mantendo orientações como estas adotadas por Gomide e Botelho em 1966. Com o passar dos anos, no entanto, os alunos foram se tornando cada vez mais questionadores em relação a abordagens semelhantes a esta e os professores passaram a ter que buscar novas alternativas didáticas.

Outro ponto referente a este curso, que já destacamos no capítulo anterior, mas que achamos pertinente retomar aqui é o fato de, naquela época, já ter começado a ocorrer algo que se vê com frequência nos cursos atuais da disciplina: as aulas eram conduzidas de acordo com uma orientação formalista, na qual os conceitos eram apresentados diretamente de maneira rigorosa, sem preocupações com os processos que deram origem aos objetos que estavam sendo estudados, ao mesmo tempo em que, nos exercícios e na maioria das questões cobradas nas avaliações, era dada uma ênfase exagerada às técnicas de cálculo, deixando em segundo plano situações que possibilitassem a discussão dos significados dos conteúdos que haviam sido abordados. As docentes recomendavam que os alunos fizessem muitos exercícios

¹²² DE SOUZA (2009).

¹²³ BONOMI (2009).

¹²⁴ BONOMI (2009).

¹²⁵ DE SOUZA (2009).

de técnicas por que, segundo elas, era somente desta forma que aprenderiam Cálculo. De Souza destaca que calcular de fato ela aprendeu, mas os significados dos objetos matemáticos vistos e daqueles cálculos feitos, estes não ficaram tão claros, o que ela só percebeu quando se formou e precisou ensinar aqueles conteúdos. Este, a nosso ver, é um exemplo bastante expressivo de que, conforme destacam Cantoral, Cordero, Farfán & Imaz (1990), nem uma abordagem, em aula, excessivamente formal é a mais adequada para comunicar as idéias fundamentais do Cálculo e seus significados, já que, de acordo com Cantoral (1993), em tal orientação se ensina os resultados, mas não os processos segundo o qual estes foram obtidos, e nem o foco nas técnicas, durante os exercícios, proporciona aos estudantes uma visão mais ampla do que está sendo estudado e nem o desenvolvimento de um pensamento matemático flexível, idéia que já foi discutida na primeira seção do capítulo. É preciso que se busque uma estratégia didático-metodológica que consiga, nas aulas e nos exercícios a serem trabalhados pelos alunos, aliar intuição, formalização, técnica e os significados daquilo que está sendo ensinado.

Os manuais adotados nesta disciplina ministrada por Gomide e Botelho, principalmente nas aulas de exercícios, eram o de Piskunov e o de Demidovitch. O segundo é uma coletânea de exercícios e problemas de Cálculo e Análise e não traz nenhuma apresentação da teoria; já no primeiro, a parte teórica é apresentada de maneira bastante resumida, mas há alguns pontos a serem destacados. É isto que faremos em seguida.

O primeiro aspecto a ser destacado referente ao livro *Calcul Différentiel et Integral* de Piskunov é um comentário feito pelo autor no prefácio da obra: ele afirma que, por meio de sua experiência pedagógica, percebeu que a maneira mais adequada de apresentar o conteúdo tradicionalmente visto no curso inicial de Cálculo era chegar, o quanto antes, ao estudo das derivadas e que, por esta razão, os dois primeiros capítulos do manual, que tratam, respectivamente, de número/variável/função e limite/continuidade de funções, foram escritos de forma mais breve possível, deixando para outros momentos o tratamento de alguns problemas normalmente vistos nesses tópicos. Esta idéia vai ao encontro daquela defendida por Gomide desde o início da década de 1950: que o curso só começava, de fato, a interessar aos alunos quando chegava à idéia de diferenciação, que é uma parte mais manipulativa da disciplina. Uma abordagem formal para os números reais, baseada na noção de cortes, não era compreendida por não fazer sentido ao aluno que havia acabado de ingressar na universidade; era preciso que este conteúdo fosse apresentado quando o estudante já tivesse adquirido uma maior maturidade matemática. Não é de se espantar, portanto, que Gomide tenha optado, em determinado momento, por adotar este livro em suas aulas.

Uma característica bastante marcante em tal manual é a quase que total inexistência de exploração das noções intuitivas dos conceitos, que já são apresentados, na maioria das vezes, de maneira formal. Na abordagem da idéia de limite, por exemplo, o leitor, sem qualquer preparação, já precisa compreender a linguagem sintética da Análise, com seus epsilons e deltas, introduzidos sem nenhum comentário a respeito de seus significados e de seus papéis naquela definição formal. Em alguns momentos, no entanto, percebemos alguma preocupação do autor em explicar ao leitor o significado das notações utilizadas, possivelmente para que o tratamento formal, com sua linguagem simbólica característica, não prejudicasse o entendimento daqueles que estivessem estudando pelo manual. Para exemplificar este tipo de cuidado, citaremos dois trechos do texto; no primeiro, o autor explica como deve ser interpretada a letra f presente na definição de função: “a letra f que aparece na notação simbólica de uma dependência funcional $y = f(x)$ significa que realizaremos certas operações com o valor de x para obter o valor de y ” (PISKUNOV, 1969, p. 14 – tradução nossa). Já no segundo, destaca ao leitor que ele deve observar que a integral definida depende somente da função integrando $f(x)$ e dos limites de integração. Não depende da variável de integração, que pode ser indicada por qualquer letra. Por essa razão, podemos, sem alterar o valor da integral definida, substituir a letra x por qualquer outra: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$. Há ainda outro comentário referente às integrais que, a nosso ver, também pode ser considerado como uma preocupação do autor em esclarecer detalhes, presentes na abordagem rigorosa e formal de certos conteúdos, que muitas vezes passam despercebidos em muitos livros. Ao trabalhar com as integrais indefinidas, o autor destaca que a primitiva de uma função não é única; há infinitas para uma mesma função que diferem apenas por uma constante. O leitor então poderia/deveria questionar porque a existência de infinitas primitivas não é levada em conta, ao menos explicitamente, no cálculo de integrais definidas. E Piskunov explica este fato apresentando a fórmula $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ e comentando que a diferença que aparece no lado direito dessa fórmula não depende da escolha da função primitiva F porque a constante que diferencia as possíveis primitivas desaparece na subtração.

Outro aspecto que, do ponto de vista didático, talvez mereça ser destacado no manual de Piskunov é a preocupação do autor em apresentar uma interpretação geométrica para a idéia de integral indefinida, algo nem sempre presente nos textos de Cálculo. Isto é feito da seguinte forma:

O significado geométrico da integral indefinida é um conjunto (uma família) de curvas, em que cada uma delas é obtida deslocando-se uma curva dada, paralelamente a si mesma, para cima ou para baixo. Isto é, são obtidas mediante o deslocamento de uma curva ao longo do eixo y . (PISKUNOV, 1969, p. 374 – tradução nossa).

Gostaríamos ainda de pontuar em tal livro a presença de uma nota interessante a respeito da importância do Teorema Fundamental do Cálculo – ou Fórmula de Newton-Leibniz como aparece no manual – para o desenvolvimento do conceito de integral definida e de suas aplicações em outras áreas:

A fórmula de Newton-Leibniz fornece um método muito prático para o cálculo de integrais definidas quando se conhece a função primitiva do integrando. E foi, exatamente, o descobrimento dessa fórmula que deu a integral definida a importância que ela tem na matemática atual. Ainda que operações análogas ao cálculo da integral definida como limite de uma soma integral fossem conhecidas desde a antiguidade (Arquimedes), as aplicações desse método se limitavam aos casos mais simples, quando o limite da soma integral podia ser calculado diretamente. A fórmula de Newton-Leibniz ampliou consideravelmente o campo de aplicação da integral definida, já que os matemáticos obtiveram um método geral que permite solucionar diferentes problemas particulares. Essa fórmula ampliou também a esfera das aplicações da integral definida nas tecnologias, mecânica, astronomia, etc.
(Ibid., p. 445 – tradução nossa).

Em resumo, por meio da análise feita, podemos dizer que o livro de Piskunov: apresenta a teoria de maneira bastante resumida; é rigoroso no tratamento dos conceitos trabalhados e traz as demonstrações da maioria dos teoremas enunciados; há um predomínio da linguagem simbólica em detrimento da linguagem natural; sempre que possível cada definição ou teorema é seguido de um exemplo visando ilustrar aquilo que foi apresentado e ao final de cada capítulo, uma grande quantidade de exercícios é proposta ao leitor, sendo que a maioria deles envolve cálculos e aplicação direta dos conceitos.

Com relação ao livro *Problems in Mathematical Analysis* de Demidovitch, destacamos que sua escolha pelas docentes responsáveis pela disciplina também reflete a preocupação de, inicialmente, ministrar um curso com um nível de rigor um pouco mais baixo do que aquele observado, anteriormente, na disciplina de Análise. No curso inicial de Cálculo, a ênfase deveria estar na manipulação, por parte dos alunos, dos conceitos fundamentais da disciplina, como, por exemplo, as técnicas de diferenciação e integração. E, de acordo com o prefácio do manual de Demidovitch, percebemos que tal obra também foi concebida com esta orientação, já que o autor afirma ter dedicado atenção especial àqueles capítulos que exigem maior prática (determinação de limites, técnica de diferenciação de funções, construção de gráficos de funções, integração de funções, resolução de equações diferenciais, etc.).

Analisando este material, notamos que a maior parte dos exercícios realmente é de cálculo, de aplicação direta dos resultados vistos na teoria. No entanto, em todos os capítulos, percebe-se que o autor se preocupou em não se restringir apenas ao trabalho com técnicas; para cada assunto abordado, são propostos também exercícios teóricos, nos quais os leitores precisam refletir a respeito dos conceitos trabalhados e utilizá-los de maneira formal e rigorosa para produzir demonstrações de alguns fatos. Ao longo do manual não observamos qualquer preocupação em introduzir os conceitos inicialmente de maneira informal e com nível de rigor mais baixo; durante todo o texto, a linguagem simbólica é predominante, e como o próprio autor comenta no prefácio, as definições são escritas de maneira sintética. Deve-se destacar, no entanto, que este tipo de preocupação sequer é esperado nesta obra, já que Demidovitch explicita que, por se tratar de uma coletânea de exercícios, pequenos trechos de exposição da teoria estão ali presentes apenas a título de recordação para o leitor, que já deve ter tido contato, de maneira detalhada, com aqueles conceitos nas aulas teóricas da disciplina.

Em 1967, Botelho foi a docente responsável pelas aulas teóricas de Cálculo I ministradas para uma turma grande, que reunia alunos da Matemática e da Física e, segundo Hellmeister, que foi sua aluna nesta ocasião, do ponto de vista didático não havia nada de especial em tal curso. As aulas eram tradicionais, expositivas: “Eu me lembro que gostava das aulas, mas não tenho nenhuma memória de uma coisa muito especial, que tenha me marcado. Acho que ela explicava normalmente”¹²⁶. Por meio de um comentário feito por Hellmeister e de outro feito por Coelho, que também foi aluno de Botelho neste curso de 1967, percebemos que o fato da turma ser muito numerosa acabava trazendo algumas complicações do ponto de vista didático, algo também bastante comum em muitos dos cursos de Cálculo atuais. Hellmeister destacou, por exemplo, que no curso de Cálculo II que fez com o professor Lyra no segundo ano, a turma era menor e então os estudantes podiam discutir detalhes teóricos importantes juntos com o professor, algo que ela não se recorda de ter sido feito no curso do primeiro ano, na turma grande. Mesmo o esclarecimento de dúvidas durante as aulas se tornava complicado em uma turma tão numerosa; era necessário que as questões fossem levantadas, após o término da aula, individualmente ou em grupos menores de alunos. A mesma depoente também falou a esse respeito: “eu me lembro que eu ficava muito no final da aula para tirar dúvida. Íamos para a lousa e ficávamos em grupinhos pequenos, porque durante a aula, como era uma turma grande no anfiteatro, não havia muitas chances para

¹²⁶ HELLMEISTER (2009).

perguntas.”¹²⁷. Coelho destacou outra limitação imposta pelo tamanho da turma: “as aulas eram muito pouco interativas, inclusive porque era inviável serem interativas, já que a classe era enorme”¹²⁸.

De acordo com nossas entrevistadas, a disciplina foi conduzida com um alto nível de rigor e de formalismo, bem próximo daquele empregado, atualmente, no curso de Análise. Segundo Coelho, os conteúdos continuavam sendo apresentados segundo o esquema padrão ou popular (THURSTON, 1994): definição, proposição, exemplo e exercício. A cada aula, uma grande quantidade de resultados teóricos era trabalhada e os alunos até brincavam com esse fato: “eu me lembro, inclusive, que um aluno da física copiava – imagine os físicos numa aula dessas - e falava: teorema mil e tal, porque ela realmente dava muitos teoremas”¹²⁹. De acordo com a depoente, a maioria dos estudantes apenas copiava a parte teórica e depois a ignorava; se preocupavam apenas em aprender a calcular limites, derivadas e integrais, isto é, a manipular com as técnicas de cálculo. Afinal, eram questões deste tipo que seriam cobradas nas avaliações; nestas a parte teórico-formal da disciplina era pouco explorada. Esse comportamento dos alunos perante a teoria trabalhada durante as aulas e que foi descrito pela entrevistada, a nosso ver, dá indícios de que aquela abordagem inicial do Cálculo feita por Botelho de maneira formal e com um nível elevado de rigor, não era compreendida pela maioria dos estudantes naquele momento em que estavam ingressando na universidade e que, portanto, ainda não possuíam a maturidade matemática necessária para interiorizar determinados refinamentos teóricos. Aliás, um comentário feito por Coelho nos levou a conjecturar que a própria Botelho, apesar de conduzir suas aulas com um nível bastante alto de rigor e formalismo, parecia ter consciência de que alguns aspectos presentes em uma abordagem como esta não seriam compreendidos pelos alunos naquele momento. O comentário de nossa entrevistada que nos levou a esta conclusão foi o seguinte: a ex-aluna de Botelho destacou que, em certas ocasiões, alguns detalhes teóricos não eram discutidos profundamente. Segundo ela, a impressão que dava era que a docente acreditava que a compreensão daqueles detalhes viria com a maturidade matemática dos alunos e que, portanto, não havia necessidade de discutir aquilo naquele momento. Para ilustrar, Coelho citou o seguinte episódio:

E eu me lembro de uma situação que era assim: era uma questão do menor e do menor igual: ela estava, talvez, fazendo um limite, sei lá e, no final, dava 2 que é

¹²⁷ HELLMEISTER (2009).

¹²⁸ COELHO (2009).

¹²⁹ COELHO (2009).

menor que 3 e então era verdade. Daí ela foi lá e escreveu 2 menor ou igual a 3 e os alunos questionaram o porquê de se colocar *menor ou igual* se 2 era menor que 3; ninguém entendia. E ela nos disse: menor também é menor igual; vocês irão aprender isso depois. Então havia algumas coisas que ela não desenvolvia; achava – é uma dedução minha – que isso não era tão importante e que os alunos perceberiam com a maturidade. (COELHO, entrevista, 2009).

Conforme já destacamos no capítulo anterior, a maneira como o conteúdo era apresentado por Botelho durante as aulas era bastante semelhante ao que estava feito no livro indicado como referência principal do curso, o mesmo manual de Protter & Morrey adotado por Lyra em 1964. Segundo as entrevistadas, não se notava nenhuma preocupação em realizar discussões referentes à história do desenvolvimento daquilo que estava sendo visto e, além disso, a questão de introduzir os conceitos primeiramente por meio de noções intuitivas só aparecia no curso quando a apresentação do livro também era feita dessa forma: “Se havia a parte intuitiva era porque o livro estava colocando; era o ponto de vista do livro e não o dela”¹³⁰. Hellmeister comentou também que, na época, ainda não havia a preocupação com a contextualização do que estava sendo estudado, com as aplicações do conceito que não fossem intrínsecas à própria matemática: “essa preocupação de contextualização não existia na época (...) nem mesmo nos livros”¹³¹ e, de acordo com Coelho, “era feito o que estava no livro, não tinha nada muito diferente. Tanto é que, depois que assistíamos às aulas, íamos ler o livro e era quase que exatamente a mesma coisa”¹³².

Embora, de acordo com Coelho, a transição entre a educação básica e a universidade, no que diz respeito à Matemática, naquela época não fosse tão complicada quanto atualmente, já que, no antigo colegial¹³³, ainda se dava mais ênfase ao estudo de argumentações e demonstrações, principalmente no campo da Geometria Euclidiana, já havia, de acordo com Hellmeister, uma grande dificuldade nesta passagem e os altos níveis de rigor e formalismo presentes no Cálculo eram uma de suas causas principais:

O grande choque para nós que estávamos ingressando na universidade eram as demonstrações com epsilons e deltas. Naquela época, todos os teoremas de limites e derivadas eram demonstrados e, pelo que eu me lembre, não houve nenhuma transição para adaptar os alunos a esse tipo de demonstração mais formal. Eu (...) me choquei bastante, embora tivesse visto demonstrações ao longo de meu curso colegial; eu me lembro, por exemplo, de ter demonstrado todos os teoremas de geometria plana e geometria espacial; naquela época ainda trabalhava-se com a teoria axiomática e, então, demonstrar teoremas não era algo estranho para mim; isso fazia parte da minha formação. Mas os aspectos, os tipos de demonstrações que

¹³⁰ COELHO (2009).

¹³¹ HELLMEISTER (2009).

¹³² COELHO (2009).

¹³³ Atual Ensino Médio.

precisávamos fazer no Cálculo eram diferentes. (...) Tínhamos, por exemplo, que provar que algo é zero é provar que este algo é menor que qualquer positivo... E este tipo de raciocínio, de abordagem é que era nova; isso você não via no ensino médio da época. (HELLMEISTER, entrevista, 2009).

Este comentário de Hellmeister sobre a forma de demonstrar, no Cálculo e na Análise, que algo é zero, traz à tona uma questão bastante importante de ser levada em consideração ao introduzir o estudante nestas áreas: alguns objetos matemáticos já conhecidos pelo mesmo, como, por exemplo, as igualdades, sofrem modificações em seus significados (CANTORAL (1993), ARTIGUE (1998)). Demonstrar que $a = b$ no Cálculo ou na Análise equivale a provar que $\lim|a - b| = 0$, o que envolve idéias e processos distintos daqueles envolvidos em uma tarefa aparentemente semelhante na Álgebra ou na Geometria; são necessárias novas estratégias e novas concepções e, para isto, é necessária uma ruptura com modelos característicos do pensamento algébrico. No caso deste curso de Botelho, não havia qualquer preparação para esta ruptura, para estas novas estratégias de demonstração; os alunos deveriam realizá-las, mas sem ter passado por qualquer discussão ou orientação a este respeito. Não havia uma preocupação em, durante as aulas, primeiramente trabalhar de maneira intuitiva com as idéias envolvidas nos resultados matemáticos e em suas demonstrações. Tudo já era apresentado desde o início de maneira formal e com um nível de rigor elevado, sem preocupações em explicar aos alunos os papéis e os significados dos elementos e símbolos envolvidos nas definições e demonstrações trabalhadas e, desta forma, torná-los significativos, o que, conforme atesta Hellmeister, trazia complicações para os alunos que estavam ingressando no ensino superior naquele momento. A postura da docente coincidia com aquela adotada pelos profissionais aos quais Baldino (1998) se refere por matemático-professor, que reproduz na lousa uma série de demonstrações acreditando que com isto os pontos centrais dos resultados estavam garantidos, privilegiando os significados lógicos dos resultados do Cálculo e não seus sentidos. Por outro lado, estes alunos poderiam ter a seu favor a referência bibliográfica indicada no curso, o livro de Protter & Morrey, que conforme já destacamos neste mesmo capítulo, em diversos momentos, tentava dar significado aos elementos presentes nas definições formais e nas demonstrações apresentadas ao longo do texto.

Hellmeister foi a primeira de nossas entrevistadas a relatar dificuldade com a questão do rigor na transição do ensino médio para a universidade, mas no seu caso especificamente, esta dificuldade não foi descrita como algo traumático em sua formação. Muito pelo contrário; entender essa abordagem rigorosa do Cálculo e as demonstrações apresentadas se

tornou um desafio para ela e seus colegas de turma, algo que os motivava a se organizarem em grupos para estudar, discutir e tentar compreender todos aqueles aspectos próprios da linguagem analítica. E se envolveram tanto neste desafio que, conforme destacou Coelho, ela, Hellmeister e outros colegas de turma montaram um grupo de estudos e procuraram o professor Antonio Gilioli “para que ele nos indicasse um texto de Cálculo que fizesse uma abordagem um pouco mais avançada, mais formal, para que pudéssemos estudar” ¹³⁴. E ele os indicou o livro *Principle of Mathematical Analysis* de Rudin. “Estudávamos e depois íamos esclarecer as dúvidas com ele” ¹³⁵. É preciso destacar que, embora no caso específico de Hellmeister, Coelho e mais alguns de seus companheiros de turma, a dificuldade inicial com esse tratamento rigoroso do Cálculo tenha servido como motivação para que buscassem estudos complementares, as pesquisas nos mostram que, na maioria das vezes, acontece o contrário: a dificuldade em lidar com conceitos apresentados, diretamente, com níveis elevados de rigor, acaba desestimulando os alunos dos cursos iniciais de Cálculo que, muitas vezes, são reprovados nesta disciplina e/ou abandonam a graduação em Matemática. É preciso, portanto, que o professor esteja sempre atento a esta questão e em constante busca por uma abordagem que seja rigorosa, mas que, ao mesmo tempo, seja significativa, adequada à maturidade matemática de seus alunos naquele momento e possibilite o desenvolvimento do pensamento matemático flexível (DAVID & LOPES, 1998) nos mesmos.

Este equilíbrio entre rigor, intuição, técnica e significado parece ter sido uma das preocupações de Zimbarg Sobrinho, que deu aulas de Cálculo I no ano de 1972. De acordo com Abud, ex-aluna deste curso, o nível de rigor com que a disciplina foi conduzida nesta ocasião era adequado para um aluno ingressante no ensino superior. O docente não procurava ministrar um curso de Análise; ensinava Cálculo mesmo, mas de maneira bem cuidada, procurando desenvolver o espírito crítico do aluno, sem reduzir a disciplina a um conjunto de regras a serem memorizadas ou a um conjunto de demonstrações de teoremas. Segundo nossa entrevistada, este curso de Cálculo ministrado por Zimbarg Sobrinho foi perfeito, um dos melhores que ela vivenciou em sua trajetória de estudante.

Abud descreveu o professor como excelente, grande conhecedor do conteúdo que ensinava e um dos melhores docentes que já teve. Foi alguém que serviu de modelo para ela e para todos os seus colegas de turma, que o viam como um exemplo a ser seguido quando se tornassem professores, demonstrando, mais uma vez, que, conforme discutimos na primeira

¹³⁴ COELHO (2009).

¹³⁵ COELHO (2009).

seção do capítulo, é bastante comum o futuro professor se espelhar naqueles docentes que o marcaram durante seu processo de formação.

O curso era totalmente baseado em aulas expositivas e segundo as palavras de nossa depoente, Zimbarg Sobrinho era um ótimo didata: “Ele era extremamente claro para explicar, não nos poupava: dava a parte prática dos exercícios, mas também dava a parte teórica; explicava de maneira clara, simples, direta; fazia as demonstrações, sempre se dirigia aos alunos com questionamentos, etc”¹³⁶. Do ponto de vista didático, uma característica marcante de suas aulas é que ele fazia questão de trabalhar com as dificuldades intrínsecas aos conteúdos do Cálculo; não achava que as questões difíceis deveriam ser evitadas, muito pelo contrário:

Ele não escondia as dificuldades, explicitava-as e as resolvia e, então, fomos nos acostumando a ver a Matemática como ela realmente é: muito bonita, mas cheia de questões interessantes e difíceis e que o fato de uma questão ser difícil, não significa que ela não deve ser feita ou encarada; essa foi uma coisa boa que ele nos ensinou. (ABUD, entrevista, 2009).

Esta questão das dificuldades era levada em conta também no momento das demonstrações, quando, de acordo com nossa entrevistada, o professor apontava aos alunos quais eram os pontos mais delicados. Esta idéia de não evitar os aspectos mais difíceis do Cálculo de certa forma vai ao encontro da concepção de Olimpio Junior (2007), para o qual os aspectos formais da disciplina, embora não devam ser o foco de um curso inicial, não podem ser totalmente ignorados, já que fazem parte do ensino superior e da própria evolução matemática do estudante. Segundo Abud, o docente também tinha o hábito de propor determinados exercícios que deixavam claro se o aluno havia, de fato, compreendido determinado assunto: “Às vezes, pensávamos que estávamos entendendo determinada coisa e ele nos dava um exercício que deixava claro que não estávamos entendendo; ele sabia onde é que podiam aparecer as dificuldades, onde poderíamos nos enganar”¹³⁷.

Abud destacou também que, embora as aulas de Zimbarg Sobrinho não apresentassem qualquer menção ao desenvolvimento histórico dos conceitos trabalhados e nem manifestassem preocupação em apresentar contextualizações dos conceitos fora da Matemática, nem por isso elas eram menos fascinantes. De acordo com ela, isso era consequência do grande conhecimento matemático do professor: “ele sabia tanto, que a motivação que encontrava para dar uma aula de Matemática era dentro da própria

¹³⁶ ABUD (2009).

¹³⁷ ABUD (2009).

Matemática, ou seja, as perguntas que ele fazia para nos motivar eram perguntas de Matemática”¹³⁸.

O docente também fazia questão que os alunos participassem das aulas, esclarecendo dúvidas e respondendo às perguntas que ele propunha, o que demonstra que, embora ainda optasse por um estilo de aula que, a primeira vista, poderia parecer tradicional, tal professor já percebia que de pouco adiantava os alunos apenas assistirem suas exposições teóricas; era preciso que eles interagissem de alguma forma com aquele conteúdo que estava sendo apresentado. Segundo nossa depoente, “nunca se esquivou de responder uma dúvida dos alunos; pelo contrário, ele não só respondia como fazia perguntas que nos levavam a pensar, a questionar”¹³⁹. Abud encerrou a entrevista que nos concedeu com algumas palavras que descreveram muito bem sua impressão a respeito do curso de Cálculo que vivenciou e de seu professor nesta disciplina:

Eu acho que o que tenho a comentar é a postura do professor: o que é importante para um professor dar uma boa aula? Um dos pontos importantes é que ele deve saber muito. Sabendo muito (...) tem uma boa visão do horizonte, tem boas perguntas para serem feitas, tem clareza sobre as respostas, tem noção de quais as dificuldades que podem aparecer, etc. E ele era um ótimo professor; foi realmente um modelo para todos nós. (Ibid.).

É interessante destacar que, pela forma como Abud descreveu as aulas de Zimbarg Sobrinho, este “saber muito” que ela coloca como sendo fundamental para que alguém seja um bom professor universitário não se resume a um conhecimento profundo apenas do conteúdo a ser ensinado, conforme se acreditava até bem pouco tempo atrás. Isto fica bastante explícito na última fala citada de nossa depoente, na qual ela destaca que o bom docente deve saber formular boas questões, ter clareza nas respostas a estas questões formuladas e ter consciência das dificuldades que podem surgir no processo de ensino e aprendizagem de determinado conteúdo. Ou seja, mesmo que de maneira indireta, nossa depoente está afirmando que, além do conhecimento do conteúdo, são necessários também conhecimentos didático-pedagógicos aos professores das universidades; além de dominar a temática, é necessário que o professor encontre uma maneira adequada de abordá-la e, desta forma, possibilitar a aprendizagem de seus alunos, visão esta que coaduna com aquelas defendidas por Debald (2003) e Salinas & Alanís (2009).

¹³⁸ ABUD (2009).

¹³⁹ ABUD (2009).

Em 1973, Hellmeister que havia concluído a graduação em 1970 e sido imediatamente contratada como professora do IME foi a responsável pelo curso de Cálculo I da Matemática. Conforme já destacamos, na época em que foi aluna da USP, Hellmeister vivenciou uma disciplina de Cálculo conduzida com altos níveis de rigor e formalismo e, embora tenha sentido dificuldades no início, acabou se adaptando e tomando gosto por este tipo de tratamento da Matemática, tanto que, junto com outros colegas e auxiliada pelo professor Gilioli, foi em busca de textos que abordavam aquele conteúdo de forma ainda mais rigorosa e, depois de formada, especializou-se em Análise, tendo feito mestrado e doutorado nesta área. Era de se esperar, portanto, que ao se tornar professora de Cálculo, a docente ministrasse cursos em que a ênfase fosse a apresentação formal e rigorosa do conteúdo; foi exatamente isto que aconteceu, como ficará claro ao longo dos próximos parágrafos.

De acordo com o depoimento de Marcos, ex-aluno de Hellmeister nesta disciplina de Cálculo ministrada em 1973, a docente foi uma influência muito grande para seus alunos. Além de ter dado um excelente curso, sempre foi uma “pessoa muito humilde, que sempre se colocou ao lado dos alunos e não acima deles, sempre amiga e disposta a ajudar”¹⁴⁰. Comentou também que achava interessante Hellmeister deixar transparecer o ser humano por trás da professora de Cálculo e isso foi algo que, segundo ele, serviu de lição aos alunos dela:

Eu acho que a Ana passou para todo mundo que, por trás da professora de Cálculo, havia um ser humano com suas dificuldades; ela, mesmo sem ser igual aos alunos, era muito próxima deles. Às vezes, na universidade, temos alguns professores que são tão distantes que nem parecem pessoas como nós; olhamos para eles e pensamos, por exemplo, que ele é tão diferente que nem precisa se alimentar! A Ana nunca nos passou isso e foi muito interessante para nós sabermos que um ser humano comum, com inteligência e muito trabalho, pode acabar se tornando um grande matemático. Essa foi uma influência muito positiva da parte dela sobre nós alunos. (MARCOS, entrevista, 2009).

Esse comentário de Marcos traz em seu bojo uma questão bastante pertinente: os estudantes que assistem às aulas de Cálculo I estão acabando de ingressar na universidade e estão tendo seus primeiros contatos com matemáticos. Se esses últimos lhes receberem com uma postura arrogante, se colocando como pessoas diferenciadas e que estão acima deles, podem criar uma barreira que, inevitavelmente, irá atrapalhar o aprendizado desses alunos e, além disso, ser uma influência negativa a esses futuros professores que, ao iniciarem suas carreiras profissionais no ensino superior poderão vir a reproduzir, conforme destacam Prandi (2009), Cunha (2004), Labegalini (2009) e Cortesão (2000), o modelo que vivenciaram como alunos, criando um ciclo vicioso bastante indesejado.

¹⁴⁰ MARCOS (2009).

Segundo Marcos, Hellmeister era bastante didática e o curso foi muito bem dado. Ele não se recorda se havia comentários referentes à história do desenvolvimento dos conceitos que estavam sendo trabalhados e afirmou que, naquela época, os alunos ainda não tinham muita preocupação com as possíveis aplicações, fora do âmbito da Matemática, dos conteúdos que estudavam; “nos preocupávamos em saber se aquilo tinha aplicação dentro da Matemática - e isto é uma aplicação interessante” ¹⁴¹. Marcos nos disse, inclusive, que, em sua opinião, os professores de Cálculo deveriam explicitar para seus alunos essas aplicações, dentro da própria Matemática, dos resultados vistos.

De acordo com nosso depoente, os exemplos também estavam muito presentes nesse curso de Cálculo I. Destacou que, principalmente na parte de Cálculo Diferencial, Hellmeister costumava trabalhar com alguns problemas que os norte-americanos chamam de “Word Problems”. Eram problemas com palavras, com enunciados que o aluno deveria modelar matematicamente. “a Ana Catarina, preparava listas de exercícios extras para trabalhar com este tipo de problemas” ¹⁴². Convém destacar que esta idéia de Hellmeister em trabalhar com situações que, de certa forma, exigiam dos alunos atividades de modelagem, vai ao encontro do que defende Gascón (2009), para o qual a ausência de atividades deste tipo – na educação básica e na universidade - é um dos aspectos que dificultam o processo de transição do estudante para o ensino superior.

Para Hellmeister, a grande inovação desse curso de Cálculo ministrado por ela foi o livro adotado como referência, o texto de Moise, que trazia uma abordagem em espiral para o conteúdo trabalhado:

Já era um curso um pouco diferenciado porque daí nós, os professores mais jovens [recém-contratados do IME], já começamos a discutir alguns aspectos; tanto é que adotamos um livro completamente diferente. Mas ainda era um curso tradicional; fazíamos todas as demonstrações, cobrávamos em prova as demonstrações de teoremas... Mas tinha uma motivação inicial, a gente tentava [primeiramente] dar as idéias, já teve uma mudança nesse aspecto. (...) O Moise (...) primeiro dá a idéia (...), uma coisa informal - e isso eu achava muito interessante. Você dava a idéia do que iria fazer e, depois, fazia uma coisa mais formal, aprofundada. Então eu acho que já foi diferente; embora fosse ainda um curso bem clássico, já tinha um aspecto inovador. (HELLMEISTER, entrevista, 2009).

Por este comentário de Hellmeister, percebe-se que, nesta época, esses professores que estavam iniciando suas carreiras profissionais no IME já começaram a questionar alguns aspectos didáticos dos cursos de Cálculo que estavam sendo ministrados e a se preocuparem

¹⁴¹ MARCOS (2009).

¹⁴² MARCOS (2009).

em, primeiramente, trabalhar com os conceitos de forma mais intuitiva, em inicialmente apresentar as idéias fundamentais envolvidas nos mesmos, deixando a formalização – que continuava sim fazendo parte do curso inicial de Cálculo – para um momento posterior. Esta idéia ainda era algo sutil, mas que começava a ganhar força dentre aqueles docentes; além disso, era favorecida pela utilização do manual do Moise que também ia nesta mesma direção.

Com relação à utilização do livro de Moise, da forma como os conteúdos são abordados pelo autor e a maneira como os mesmos eram trabalhados em sala de aula, Marcos, destacou que, no momento em que ele e os colegas estavam vivenciando o curso de Cálculo, essa forma em espiral de apresentar os conteúdos parecia um pouco confusa, “quando o curso terminou, ficou claro para mim que a abordagem do Moise havia funcionado e que os conceitos haviam ficado bem sedimentados, porque, no final das contas, víamos cada um deles mais que uma vez”¹⁴³.

Com relação ao nível de rigor adotado por Hellmeister na condução da disciplina, Marcos destacou que era bastante alto, se assemelhando aquele exigido atualmente em um curso de Análise do Bacharelado. Durante as aulas, todos os resultados apresentados eram demonstrados de maneira formal e com grande rigor e os exercícios que predominavam também eram aqueles nos quais os alunos precisavam fazer demonstrações e discussões a respeito de detalhes teóricos, trabalhando com a linguagem sintética, rigorosa e formal da Análise. Hellmeister, durante a entrevista que nos concedeu, fez alguns comentários a respeito da dificuldade de ministrar um curso de Cálculo tão rigoroso, teórico e formal, logo após ter concluído sua graduação:

Comecei a dar aula imediatamente depois de formada; era muito novinha, tinha 22 anos, e já estava dando aula para os que haviam acabado de entrar. E eu me lembro que, na época, no curso de Cálculo nós demonstrávamos todos os teoremas e me recordo dos bons alunos pelas perguntas que eles faziam relativas às demonstrações. Sabe quando você prepara uma aula e pensa: esse cara vai perguntar isto aqui, naquele ponto sutil em que você também não está muito firme, muito seguro? Era exatamente assim, porque eu era muito novinha e sabia os pontos problemáticos; e meu curso de Cálculo I era super teórico. (HELLMEISTER, entrevista, 2009).

Marcos destacou como era, na sua época de estudante, a transição da educação básica para o ensino superior e afirmou que vivenciar um curso de Cálculo tão rigoroso logo ao ingressar na universidade não foi um grande choque; o que se via no Cálculo era apenas mais rigoroso, mais difícil, muito mais trabalhoso. Segundo ele, o conteúdo visto no ensino médio

¹⁴³ MARCOS (2009).

naquela época o embasou para esta disciplina que cursou no primeiro semestre de sua graduação:

Naquela época, por incrível que pareça, no terceiro ano do colegial¹⁴⁴ eu aprendi Cálculo sem nenhuma demonstração. Então, quando eu entrei na universidade, sabia fazer gráficos de funções, sabia calcular algumas derivadas, tinha decorado um monte de fórmulas de derivadas e sabia usá-las para interpretar gráficos, o que é uma parte meio central do curso de Cálculo I. (...) Eu tive ainda tanto no colégio quanto no ginásio (...) bastante demonstração. (MARCOS, 2009, entrevista).

Essa experiência vivenciada por Marcos, para o qual o choque ao ingressar na universidade e cursar uma disciplina de Cálculo tão rigorosa não foi muito grande para ele pelo fato de já ter tido contato com alguns dos conceitos fundamentais deste ramo durante o último ano do curso colegial, hoje chamado de Ensino Médio, nos dá mais um indício de que uma apresentação do Cálculo com altos níveis de rigor e formalismo tem chances maiores de ser bem compreendida se os alunos que a estão acompanhando já tiverem sido apresentados ao Cálculo e já tiverem tido a oportunidade de manipular com alguns conteúdos desta disciplina, já que, desta maneira, aquilo que está sendo apresentado passa a ser a formalização – ou crítica, como diria a professora Gomide – de algo que, ao menos em alguns aspectos, os estudantes já dominam ou, pelo menos, conhecem, ainda que superficialmente.

Conforme destacamos no capítulo 4, a grande inovação deste curso de Hellmeister foi o livro adotado: *Cálculo: um curso universitário vol.1* de Moise que propunha uma abordagem em espiral para o conteúdo. Façamos então alguns comentários a respeito deste livro com relação ao nível de rigor com que os conceitos são nele apresentados e as preocupações didáticas percebidas ao longo do texto.

O livro foi lançado originalmente em 1967 e ganhou tradução para a língua portuguesa em 1972. Os tradutores foram Dorival A. Mello e Renate G. Watanabe sob coordenação da professora Gomide, que também assina o breve prefácio da edição brasileira. Neste prefácio, faz um comentário que revela que, na época em que o manual de Moise foi publicado, o ensino de Cálculo estava passando, mundialmente, por uma reformulação que, como consequência, acabou dando origem a uma série de novos textos didáticos da disciplina: “nestes últimos anos aumentou sensivelmente o número de publicações de textos de Cálculo destinados aos cursos de universidade, devendo-se isto principalmente à evolução que houve no modo de ensinar a matéria” (MOISE, 1972 – prefácio da edição brasileira). Dentre estas publicações, Gomide destaca o texto de Moise por apresentar “uma rara combinação de

¹⁴⁴ Atual ensino médio.

qualidade didática e qualidade de conteúdo matemático” (Ibid.). A nosso ver, esta “qualidade de conteúdo matemático”, citada por Gomide, provavelmente se refira ao alto nível de rigor e precisão com que os conceitos são abordados no manual, aspecto ainda muito valorizado pelos professores universitários daquela época e comum nos livros até então. No entanto, conforme fica bastante explícito pelo comentário de Gomide, o que, em sua opinião, diferencia o manual de Moise dos demais é que este autor conseguiu encontrar uma maneira bastante didática de fazer esta abordagem rigorosa do Cálculo, uma forma de apresentar os conceitos de maneira inteligível ao leitor, sem, para isto, precisar abrir mão do rigor intrínseco a eles.

No prefácio original da obra, Moise afirma que, ao redigi-la, procurou apresentar o conteúdo normalmente trabalhado nos cursos introdutórios de Cálculo com mais detalhes do que costumava ser feito nos livros publicados até então. Em nossa visão, essa preocupação com um maior detalhamento do conteúdo, na prática, se traduz por meio da apresentação das idéias fundamentais do Cálculo “em uma série de formas diferentes, em ordem crescente de dificuldade, generalidade e exatidão” (MOISE, 1972 – prefácio), o que, por sua vez, caracteriza também a organização em espiral do conteúdo proposta pelo autor. E conforme pudemos perceber ainda pelos comentários presentes no prefácio do livro, esta opção por uma abordagem em espiral dos conceitos está intimamente relacionada com a forma e o momento considerados por Moise como sendo os mais adequados para um tratamento formal e com alto nível de rigor dos entes matemáticos trabalhados no texto. De acordo com ele, não se pode ter a ilusão de que o aluno, ao iniciar um curso de Cálculo, terá condições de compreender as idéias fundamentais da disciplina diretamente da forma como um matemático as enxerga: “os conceitos centrais (...) são profundos. Não se espera que possam ser aprendidos todos de uma vez, nas formas pelas quais um matemático moderno pensa a respeito deles” (Ibid.). Ao adotar o tratamento em espiral, que se caracteriza pelo fato das idéias serem apresentadas de várias maneiras diferentes conforme a explanação teórica vai se desenvolvendo, o autor afirma que sua intenção é facilitar o aprendizado dos conceitos por parte dos leitores, mas que há ainda outro propósito tão importante quanto: ensinar “os processos pelos quais idéias especiais são generalizadas e idéias heurísticas se tornam concretas e exatas” (Ibid.), demonstrando conceber intuição e rigor como elementos complementares no ensino e dando igual valor aos processos de intuicionização e rigorização, citados por Perminov (1988) e Reis (2001).

Outro aspecto importante do ponto de vista didático que ganha destaque no prefácio da obra é a questão da motivação. O autor destaca que, independente de seu nível de maturidade, o estudante tem o desejo de resolver enigmas interessantes e isto deve ser sempre levado em

consideração pelo professor no momento de introduzir novos conceitos. Além disso, as novas idéias “devem ser motivadas por um sentimento de força e pela luz que possam lançar sobre as idéias já consideradas significativas” (Ibid.). Para exemplificar esta questão da importância de, no momento de introduzir um conceito novo, de motivar para o estudante a apresentação de um novo tópico, se valorizar a idéia de que os conteúdos matemáticos são ferramentas poderosas para a resolução de problemas, o autor faz alguns comentários a respeito da maneira com que opta por introduzir em seu livro o conceito de limite. Afirma que:

O problema de motivar a idéia de limite de uma função envolve uma dificuldade peculiar. Os únicos casos em que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ é fácil de se calcular são aqueles em que f é uma função contínua, dada por uma fórmula simples. Nestes casos, a fórmula funciona para $x = a$ tão bem como para os outros valores de x ; na prática acontece que o limite é $f(a)$; e o estudante é, provavelmente, levado à idéia de que a expressão $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ é simplesmente uma descrição desonesta e pretensiosa de $f(a)$. Se evitarmos esta dúvida partindo de casos significativos tais como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$$

então as dificuldades técnicas são formidáveis e é difícil conseguir material para problemas acessíveis. Se escolhermos, ao invés disso, discutir limites de sequências então abandonamos o problema por mudar de assunto: no cálculo diferencial, o que necessitamos é de limite de funções.

Más há uma quarta alternativa: podemos introduzir a idéia de limite não como um tópico por direito próprio, mas como um artifício para resolver um problema. Na Secção 2.7 [O Problema das Tangentes] mencionamos limites pela primeira vez, ao calcular o limite de uma função *linear*. Para passar ao limite, neste caso, simplesmente fechamos o buraco de uma reta perfurada. Este processo não tem nenhum significado intrínseco. Mas no contexto da Secção 2.7, tem um significado extrínseco, porque é usado para resolver um problema não trivial, a saber, o problema de achar a inclinação da tangente a uma parábola. (...) As idéias são introduzidas, em formas simples, em conexão com uma discussão de outros assuntos (Ibid.).

Moise destaca também que o aluno não aprenderá os conceitos do Cálculo apenas ouvindo o professor mencioná-los uma única vez, por mais elegante que seja esta apresentação. Para apropriar-se dos mesmos, precisará “conviver com eles e usá-los” (Ibid.). E o mesmo vale para os teoremas principais vistos na disciplina; mais do que apresentá-los na sequência enunciado/demonstração, o professor precisa dar condições ao aluno para que este perceba a utilidade de tal resultado para a solução de determinados problemas. É por esta razão que:

Neste livro, certos teoremas extremamente poderosos foram demonstrados muito antes de serem enunciados. Ou seja, a demonstração foi apresentada sob forma de um método para resolver uma certa classe de problemas; e depois que o estudante aprendeu a idéia, usando-a em muitos problemas, resumimos a situação enunciando o teorema geral que a demonstração demonstra. (MOISE, 1972 - prefácio).

O autor destaca ainda que, ao contrário do que possa parecer à primeira vista, este tipo de trabalho em espiral, abordando os conceitos do Cálculo de maneiras diferentes em um mesmo curso, aumentando paulatinamente os níveis de rigor e formalismo, em curto prazo, não ocupa muito mais tempo do professor do que se optasse por uma abordagem na qual apenas os processos algorítmicos fossem privilegiados. E, em longo prazo, é possível que este esquema acabe ocasionando uma economia de tempo. Afinal,

Se permitirmos que receitas tomem o lugar de idéias, em um primeiro curso, então as idéias precisam ser ensinadas outra vez, completamente, mais tarde; e a segunda tentativa pode ser mais difícil porque a motivação de resolver problemas, para estas idéias particulares, já foi usada. (Ibid).

Da mesma forma que não considera adequada uma abordagem do Cálculo na qual as técnicas suplantem as idéias, Moise também se mostra contrário à idéia de introduzir os conceitos diretamente de maneira formal e com nível elevado de rigor. Em sua opinião, entender, mesmo que de maneira intuitiva, a idéia fundamental envolvida no conceito e saber utilizá-la nas situações em que for necessário é muito mais importante do que ter visto tal conteúdo uma única vez, de maneira rigorosa, e não tê-lo compreendido: "se tivermos de escolher, é melhor dominar uma idéia por uma forma heurística, usando-a repetidamente, que ouvir uma vez uma rigorosa exposição e então esquecê-la" (Ibid.). Levando em conta estas suas considerações, não é surpresa o fato de percebermos que todos os conceitos apresentados no manual são explorados, inicialmente, por meio de suas noções intuitivas.

Ainda no prefácio, Moise faz alguns comentários a respeito dos problemas que se encontram propostos no manual. A este respeito comenta que:

Os problemas representam a vida que o estudante leva enquanto faz o curso; e quaisquer idéias que não apareçam em forma de problemas têm pouca probabilidade de serem aprendidas, não importa quantas preleções possam ter sido dedicadas a elas. Neste livro uma variedade de problemas é usada para uma variedade de propósitos. Estes são:

- (1) Problemas técnicos.
- (2) Problemas teóricos, alguns fáceis, outros difíceis.
- (3) Problemas tipo quebra-cabeça.
- (4) Exercícios gráficos, nos quais o estudante é levado a passar de idéias analíticas a imagens visuais e vice-versa.
- (5) Problemas de descoberta, que antecipam, em casos especiais, idéias que serão exploradas mais tarde no texto (Ibid.).

De maneira geral, analisando o livro e os problemas nele propostos, podemos afirmar que a maioria dos exercícios não exige que os alunos façam cálculos; as questões privilegiam reflexões a respeito dos conceitos que foram trabalhados. Além disso, em diversos momentos,

percebemos que Moise procura, durante os exercícios, levar os alunos a refletirem a respeito de algumas idéias que serão apresentadas posteriormente no manual dando, desta forma, condições de o estudante participar mais ativamente do processo de construção de seu próprio conhecimento. Por exemplo: em uma das seções do capítulo que trata de derivadas, na coletânea de exercícios propostos, é pedido que o leitor calcule a derivada de algumas funções dadas e o autor faz uma observação dizendo que a maior parte desses cálculos pode ser feita diretamente pelas fórmulas que acabaram de serem deduzidas, mas que há também alguns casos em que será necessário recorrer à definição de derivada de uma função em um ponto, trabalhar com ela e usar estratégias algébricas para encontrar a resposta procurada. Tais questões envolvendo a definição irão, na verdade, obrigar os leitores a deduzir alguns resultados que serão vistos com maiores detalhes na seção seguinte, especialmente as regras para o cálculo de derivadas de funções envolvendo raízes e a regra da cadeia para potências de funções. Esta idéia, bastante característica da abordagem em espiral, se aproxima daquilo que postulam Fischer (2009), para o qual o aluno precisa ser estimulado a buscar suas próprias explicações, e Coll (1991), para o qual ao longo da aprendizagem podem – e devem – ocorrer assimilações parciais – e até mesmo ‘defeituosas’ dos conteúdos – essenciais para o êxito do processo de ensino e aprendizagem. É preciso que os livros didáticos e os professores provoquem o crescimento intelectual dos estudantes. Percebe-se que, na época em que este manual foi lançado, havia começado a ganhar força no cenário educacional, a idéia destacada por Debaldo (2003), de que o modelo de ensino que transmitia conhecimentos precisava ser substituído por outros nos quais o conhecimento fosse construído.

Notamos que uma das grandes preocupações do autor ao trabalhar com teoremas importantes - e que, em nossa opinião, demonstra um cuidado de sua parte em abordar aqueles aspectos do Cálculo que, normalmente, são apresentados com um nível maior de rigor e formalismo, de uma maneira que faça mais sentido e seja mais compreensível para o leitor - é propor exercícios que o obriguem a refletir a respeito dos conceitos e resultados apresentados. Ao trabalhar a possível relação entre integrais definidas e áreas abaixo de curvas, por exemplo, propõe uma série de exercícios visando mostrar que os teoremas apresentados no decorrer da exposição teórica falham se algumas de suas hipóteses não forem satisfeitas. Da mesma forma, ao tratar da idéia de integral como limite de somas, traz uma série de problemas abordando questões a respeito das hipóteses assumidas nos teoremas demonstrados na parte teórica; os leitores devem, por exemplo, determinar se dada função é ou não integrável, se satisfaz as hipóteses necessárias para que isto aconteça. Outra preocupação recorrente ao longo da obra e que, de certa forma, também pode ser vista com um esforço do

autor para que o leitor adquira traquejo em trabalhar com aspectos mais formais e rigorosos do Cálculo, é propor exercícios nos quais este último precisa utilizar os teoremas apresentados para demonstrar outros resultados. Tais teoremas não são tratados no manual, portanto, apenas como ferramentas úteis para a resolução de questões de técnicas de cálculo; são vistos também como fundamentais para o estabelecimento de outras proposições e outros resultados teóricos.

Percebemos ainda que o autor procura, na medida em que vai apresentando ao leitor um mesmo conceito diversas vezes e de diferentes maneiras, cada vez mais ampliadas, ir dando a ele condições de compreender que a definição rigorosa nada mais é do que uma maneira científica e, portanto, precisa, de estabelecer as regras de funcionamento daquela ferramenta. Além disso, busca, na maioria das vezes, como exemplificaremos alguns parágrafos adiante, deixar claro para o leitor o porquê de alguns detalhes que aparecerão, posteriormente, na apresentação formal daquele ente matemático, escrita com um maior nível de rigor.

Conforme comentamos em um dos parágrafos anteriores, ao tratarmos da questão da motivação que deve ser dada ao se iniciar o estudo de novos conceitos, a noção de limite aparece pela primeira vez no manual, como uma ferramenta necessária para estabelecer uma definição de reta tangente. Trabalhando com o gráfico de $y = x^2$, o autor discute qual deve ser a definição de reta tangente e como ela deve funcionar:

Partimos do ponto (1,1), no qual queremos achar a inclinação da tangente. Para todo outro ponto (x, x^2) da curva, consideramos a secante L_x por (1,1) e (x, x^2) . (Note que L_x é determinada por x .) Então a inclinação de L_x é

$$m_x = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (x \neq 1).$$

Aqui, a restrição algébrica $x \neq 1$ reflete o fato geométrico que é preciso dois pontos distintos para determinar uma reta. Refere-se, também, evidentemente, ao fato que frações com denominador 0 não tem sentido.

Traçaremos agora o gráfico de $y = m_x$ ($x \neq 1$). Temos

$$y = m_x = x + 1 \quad (x \neq 1).$$

O gráfico é uma reta da qual um ponto foi suprimido. Para $x = 1$, não existe nada parecido com a reta secante por (1,1) e (1,1²); para $x = 1$, não existe a fração $m_1 = 0/0$. Mas isto não causa nenhuma dúvida porque é fácil ver que m_x está próximo de 2 quando x está próximo de 1. Expressamos isto escrevendo

$$\lim_{x \rightarrow 1} m_x = 2.$$

Leia-se: “o limite de m_x , quando x se aproxima de 1, é igual a 2”. Ao explicar o que isto significa, usamos o termo *próximo*, bastante não matemático, cujo significado parece um pouco vago. Você pode ser capaz de pensar num modo mais exato de expressar esta idéia. Por enquanto, usaremos a idéia como base para nossa definição de tangente:

DEFINIÇÃO: A tangente ao gráfico de

$$y = ax^2 + bx + c,$$

no ponto (x_0, y_0) , do gráfico, é a reta por (x_0, y_0) com inclinação

$$I_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} m_x,$$

onde m_x é a inclinação da reta secante pelos pontos (x_0, y_0) e $(x, ax^2 + bx + c)$ ($x \neq x_0$). (Ibid, p. 44-46).

Na segunda vez em que apela à idéia de limite, o autor a utiliza, agora considerando uma sequência e não mais uma função, como uma ferramenta para encontrar a área de um setor parabólico. E ainda na seção que trata do problema do cálculo de áreas deste tipo de região, propõe diversos exercícios que, na realidade, irão começar a preparar os leitores para uma definição rigorosa de tal conceito, a lhes fornecer alguns indícios para que possam caminhar em direção a uma compreensão efetiva dos elementos envolvidos na definição formal. São questões nas quais, sem utilizar essa linguagem, o autor fornece um determinado epsilon e pede que o aluno calcule um delta para que o limite de uma dada função seja determinado valor.

É somente depois de já ter trabalhado nestas duas situações, de maneira informal, com a idéia de limite que o autor, no capítulo seguinte, irá formalizá-la. E, para isso, recorre à noção intuitiva de derivada, apresentada algumas páginas antes:

Dada uma função

$$f: A \rightarrow \mathbb{R},$$

Definimos a derivada f' pela condição que para cada x_0 para o qual o gráfico de f tem uma tangente em $(x_0, f(x_0))$, o valor $f'(x_0)$ de f' é a inclinação da tangente. Desde que a inclinação da tangente é o limite das inclinações das secantes, a derivada é um limite. A inclinação da reta secante pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ é:

$$m_x = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Segue que

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

desde que, evidentemente, tal limite exista. Para calcular derivadas, portanto, precisamos saber alguma coisa sobre limites.

Como uma diretriz para o tipo de coisas que teremos necessidade de saber, observemos que quando começamos a calcular a derivada, num ponto particular x_0 , a inclinação da secante é uma função. Seus valores são dados pela fórmula

$$m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x \neq x_0).$$

(...) Aqui escrevemos $m(x)$ em lugar de m_x porque estamos olhando m como uma função e assim devemos usar a notação adequada. (...) Toda vez que calculamos a derivada de uma função f , em um ponto x_0 , precisamos encontrar o *limite* de outra função m definida por uma expressão do tipo acima. Lembre-se que para cada ponto x_0 no domínio de f temos uma função diferente m .

(...)

Existe uma falha no domínio de m , no exato valor de x que estamos interessados: desejamos encontrar o limite para x se aproximando de x_0 , mas não existe $m(x_0)$. Portanto, é melhor levarmos em conta este caso em nossa definição de limite.

(...)

Definiremos limites de tal modo que nossa definição se aplique ao caso que surge quando começamos calcular derivadas. Assim, começamos com uma definição da frase

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} m(x) = L,$$

para casos como cada um dos seguintes: (...) [1º] x_0 não está no domínio de m , de modo que não existe $m(x_0)$, [2º] x_0 está no domínio de f . (Ibid, p. 75-77).

É interessante destacar que este trecho do manual exemplifica um daqueles momentos citados anteriormente, nos quais o autor se preocupa em esclarecer ao leitor o significado de alguns elementos presentes nas definições escritas de forma rigorosa. Neste caso, especificamente, procura discutir, de maneira contextualizada por meio da determinação da reta tangente a uma curva, o porquê de, na definição formal de limite, estabelecermos que a função $f(x)$ não precisa estar definida no ponto x_0 para que calculemos o $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Para, de fato, formalizar a noção de limite, o autor recorre à idéia de *caixa para um gráfico centrada em um ponto*, conceito já trabalhado ao longo do manual. Segundo Moise, uma caixa para um gráfico centrada em um ponto

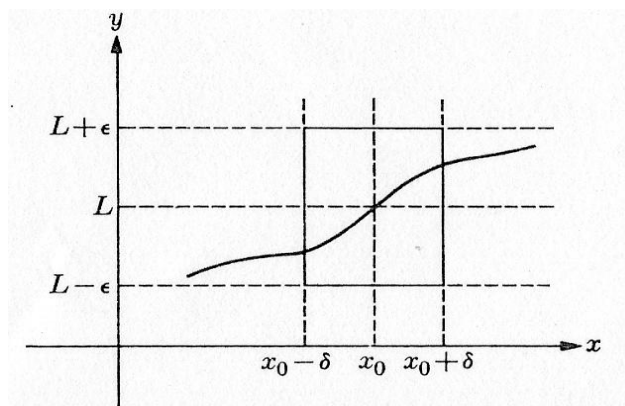
É uma região retangular, com centro no ponto dado e lados paralelos aos eixos coordenados, tal que as faixas verticais infinitas, abaixo e acima, não contenham ponto do gráfico. Se ε é metade da altura da caixa e δ é metade de largura, então (...) a região retangular é descrita pela condição

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad \text{e} \quad L - \varepsilon < y < L + \varepsilon.$$

Quando dizemos que esta região é uma caixa para f no ponto (x_0, L) queremos dizer que

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad \text{e} \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Se estas condições se verificam para algum $\delta > 0$, então dizemos abreviadamente que f possui uma ε -caixa no ponto (x_0, L) .



(Ibid., p. 77)

E relaciona esta idéia com o conceito de limite da seguinte forma:

Seja f uma função, (a, b) um intervalo aberto e x_0 um ponto em (a, b) . Suponha que o domínio de f contenha todos os pontos de (a, b) exceto talvez x_0 . Se o gráfico de f possui caixas de todas alturas positivas possíveis, centradas em (x_0, L) , então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

(...)

Suponha que para todo número positivo ε o gráfico de f tenha uma ε -caixa em (x_0, L) . Então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

(Ibid, p. 77).

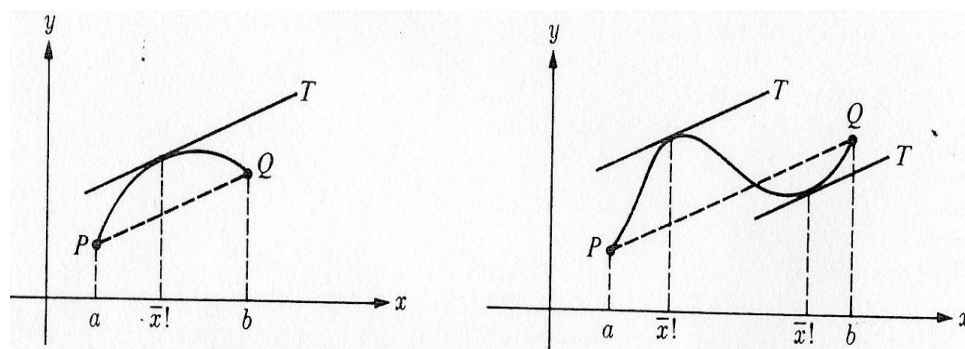
Optamos por destacar esta idéia de caixa para um gráfico centrada em um ponto, escolhida pelo autor para auxiliá-lo na apresentação do conceito de limite, porque ela, a nosso ver, tem a vantagem de trazer em seu bojo, de maneira natural, a questão da visualização gráfica dos epsilons, deltas e, conseqüentemente, das vizinhanças, elementos fundamentais para a compressão da definição weierstrassiana de limite e que, na maioria das vezes, é tratada apenas de maneira abstrata. A impressão que nos fica é que uma abordagem como esta feita por Moise, provavelmente, possibilite uma melhor compreensão de tal definição por parte dos alunos. É uma maneira, em nossa opinião, de dar maiores significados aos elementos e símbolos presentes nesta forma mais rigorosa de trabalhar com a noção de limite.

Do mesmo modo que, conforme já comentamos anteriormente, em diversas ocasiões, antes de enunciar alguns teoremas de maneira formal, o autor trabalha com as demonstrações destes como ferramentas para resolver determinados tipos de problemas, há aqueles resultados, cujo enunciado é de fundamental importância para o desenvolvimento do curso, mas que sua demonstração, de acordo com o rigor formal, ainda é demasiadamente complicada para aqueles leitores que estejam iniciando seus estudos em Cálculo e, por esta razão, ainda não possuem ferramentas matemáticas suficientes. Um exemplo deste tipo de resultado é o Teorema do Valor Médio e, a respeito dele, o autor faz o seguinte comentário:

A situação no que diz respeito a este teorema é muito incômoda. Ele é geometricamente plausível. Também é importante: precisaremos dele logo e muito. Por outro lado, uma demonstração matemática do teorema é muito difícil e envolve idéias cuja posição natural é a parte final de um curso de cálculo. Adiaremos, portanto, a demonstração, por uns tempos, mas usaremos o teorema, por enquanto, sempre que precisemos dele. (Ibid, p. 73).

Moise opta então por, ao invés de apresentar de maneira formal o teorema e, em seguida, demonstrá-lo, inicialmente enunciá-lo recorrendo a entes geométricos e ilustrá-lo graficamente. Faz isto da seguinte maneira:

TEOREMA DO VALOR MÉDIO: Toda corda de uma função diferenciável é paralela à tangente em algum ponto intermediário.



(Ibid., p. 72).

Essa maneira escolhida para introduzir o Teorema do Valor Médio nos dá indícios de que Moise, assim como diversos autores citados no início do capítulo, concebe o rigor como sendo algo variável com o contexto em que se está trabalhando. Ou seja, se em determinado momento da evolução matemática do aluno um teorema pode ser justificado, de maneira significativa para ele, apenas por meios geométricos, por que insistir em apresentar uma demonstração formal, com altos níveis de rigor para aquele resultado se esta não fará sentido para tal aluno naquele momento? Não é mais importante que o aluno compreenda, mesmo que por meios geométricos e intuitivos, a idéia básica presente naquele resultado e saiba, em um primeiro momento, manipular com tal teorema? Moise parece, por meio de seu manual, defender exatamente este tipo de trabalho, o mesmo sugerido pela professora Gomide logo que ela assumiu as aulas teóricas de Análise ministradas para os alunos do primeiro ano. Outro exemplo desta forma de abordagem, valorizando, inicialmente, as aplicações dos teoremas e não sua demonstração formal, pode ser encontrado no tratamento do Teorema Fundamental do Cálculo (embora esta nomenclatura não seja citada pelo autor) proposto por Moise. Ao enunciar o teorema que diz que se f é contínua num intervalo contendo a então $D_x \int_a^x f(t)dt = f(x)$ em cada ponto x do intervalo, comenta que o resultado, de fato, é verdadeiro “e pode ser provado com um uso mais cuidadoso das idéias que temos descrito até aqui de um modo informal. [No entanto] Deixaremos a demonstração para depois e, enquanto isso, veremos para que o teorema serve. Ele se presta para muitas coisas” (p. 105).

Outro exemplo explicitando a posição do autor em só apresentar o tratamento rigoroso e formal dos conceitos no momento em que estes puderem fazer sentido para o leitor é a forma adotada por ele para abordar a noção de integral como limite de somas. Moise opta por fazer este tratamento apenas no capítulo 7 do manual, depois de já ter, ao longo do texto, trabalhado com praticamente todos os aspectos relativos à integração. E justifica esta escolha, já no prefácio da obra, afirmando que optou por postergar o caso das somas de Riemann até aquele ponto do livro porque elas ainda não fariam sentido se aparecessem anteriormente. É

exatamente no capítulo 7 que uma de suas utilidades se torna clara para o leitor: o cálculo de comprimentos de arcos: “se apresentamos as somas de Riemann, com toda generalidade, muito antes de lidarmos com problemas nos quais elas são necessárias, não é razoável esperar que o estudante domine suas dificuldades” (Ibid., prefácio). Esta idéia de integral definida utilizando limite de somas é abordada, então, da seguinte forma:

Até agora nesse livro, definimos a integral definida em termos de área, sendo as áreas acima do eixo x contadas positivamente e as abaixo, negativamente. Uma pequena dificuldade com esse esquema é que ele se baseia num conceito intuitivo (de área) e não numa teoria exata. Assim temos, no mínimo, algo inacabado. Mas existe uma objeção muito mais importante ao conceito de integral como área: ele é muito especial e dá ênfase às idéias erradas. Na maior parte do tempo quando calculamos uma integral definida, fazemos isso não para achar a área de uma região plana, mas sim para achar o limite de uma soma amostral. O primeiro exemplo disso foi dado na seção 7.1.: é verdade que o comprimento do gráfico de f é a área sob o gráfico de $g = \sqrt{1 + f'^2}$, mas a idéia crucial foi:

$$\lim_{|N| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\bar{x}_i) \cdot \Delta x_i = L.$$

(Ibid, p. 303).

Este comentário do autor presente na última citação, a nosso ver, é importante porque contribui para evitar um engano, uma concepção equivocada presente em muitos cursos de Cálculo: a de que integral é sinônimo de área. Moise deixa bastante claro que, na maioria das vezes, ao calcularmos uma integral não estamos determinando uma área. É algo que, a nosso ver, deveria aparecer, explicitamente e com bastante ênfase, em toda disciplina inicial de Cálculo.

Conforme destacamos no capítulo 4, enquanto que, nas turmas da Matemática, o curso inicial de Cálculo, no início da década de 1970, continuava sendo conduzido por meio, principalmente, de aulas expositivas, embora já com um aspecto inovador, que era a utilização do livro do Moise, que propunha um direcionamento diferente para a abordagem dos conceitos, nas turmas da Física, nesta época, os docentes também estavam utilizando o manual de Moise, mas associado à outra metodologia de aula. A disciplina toda era conduzida por meio de trabalhos em grupo, orientados por roteiros de estudos. Embora o foco desta pesquisa seja o ensino do Cálculo no curso de Matemática, faremos alguns comentários referentes a esta experiência ocorrida na Física pelo fato de, posteriormente, ela ter sido adaptada e posta em prática também na Matemática.

Esta forma de trabalho baseada em roteiros e trabalhos em grupo chegou ao IME no ano de 1970, quando a professora Martin Bund retornou dos Estados Unidos, onde estava cursando o doutorado em Matemática. Esse seu retorno acabou trazendo consequências

importantes para a história do ensino do Cálculo nos cursos de Física e de Matemática da USP. De acordo com a entrevista concedida pela professora De Souza, logo ao chegar ao Brasil, Martin Bund começou a questionar a maneira como os professores de Cálculo preparavam e conduziam suas aulas e passou a propor que se fizesse algo diferenciado: “ela dizia assim: lá nos Estados Unidos nós apresentamos um gráfico e perguntamos aos alunos de que função aquele gráfico é a derivada e questionamentos deste tipo de, para nós do IME, eram uma novidade imensa”¹⁴⁵. A mesma entrevistada comentou que, naquela época o ensino de Cálculo nos Estados Unidos funcionava da seguinte forma: os alunos assistiam às aulas teóricas em turmas grandes e, depois, eram separados em turmas menores que ficavam sob a responsabilidade de assistentes dos professores da teoria (*teacher assistants*). Nestas turmas menores era feito um trabalho mais dirigido, com auxílio de roteiros elaborados com base nos livros adotados como referência nos cursos. Martin Bund, enquanto fazia seu doutorado, era uma teacher assistant e, ao retornar ao Brasil, propôs que fosse adotado no IME um esquema de trabalho parecido com esse, com a diferença de que, ao invés de trabalhar a teoria primeiramente em turmas grandes de forma tradicional, trabalhá-la também com base em roteiros. Convém assinalar ainda que a própria idéia de utilizar o livro do Moise nas aulas de Cálculo foi trazida por Martin Bund dos EUA.

Com relação à maneira como os professores do IME receberam esta sugestão de Martin Bund, De Souza destacou que alguns mais tradicionais, talvez por suas próprias formações, não acreditaram muito no tipo de trabalho que a docente estava querendo implantar e, a princípio, as pessoas que se engajaram nesta tentativa de mudança do ensino do Cálculo foram duas professoras recém-formadas: a própria De Souza e sua colega de turma na graduação, a nossa também depoente Coelho. As mudanças foram colocadas em prática ainda em 1970, quando Martin Bund assumiu, com De Souza e Coelho como monitoras, as turmas iniciais de Cálculo do curso de Física. Eram três turmas e cada professora ficou responsável por conduzir o trabalho em uma delas. Passaram a adotar o esquema de aula que, naquela época, chamaram de *dinâmica de grupo* que, de acordo com De Souza, funcionava da seguinte maneira:

Elaborávamos roteiros baseados em um livro e então dizíamos ao aluno: leia a página tal, responda tal coisa, etc.; cada aluno era responsável por uma tarefa. Os alunos se reuniam em círculos no início da aula para discutirmos um pouco as idéias; em seguida, esses alunos eram divididos em grupos para que fizessem as tarefas propostas para aquele dia. Havia uma série de perguntas que eles deveriam responder em grupos e nós, professores, ficávamos apenas tirando as dúvidas. Ao

¹⁴⁵ DE SOUZA (2009).

final das duas horas de aula, de novo fazíamos o que chamávamos de dinâmica de grupo. [os alunos voltavam a se reunir em círculo para comentar sobre a realização da tarefa daquele dia: o que haviam aprendido, quais tinham sido as dificuldades de cada um, os erros de cada um, as dúvidas]. (DE SOUZA, entrevista, 2009).

A entrevistada destacou que esse esquema de dinâmica de grupo (note que, aparentemente, o que as professoras chamavam por este nome, naquela época, eram aqueles momentos iniciais e finais das aulas, nos quais os alunos sentavam-se em círculos para, individualmente, expressarem suas idéias e sensações para o grupo) era algo baseado em idéias de psicologia: “a idéia da dinâmica de grupo se misturava um pouco com questões de psicologia já que os alunos deveriam colocar suas dúvidas, angústias e questionamentos”¹⁴⁶. E isso acabou desagradando alguns alunos, que se sentiam mal por terem que expor suas angústias, suas dúvidas e seus erros para todo o grupo. Na opinião da depoente, talvez tenha faltado um pouco de experiência por parte dela, de Coelho e de Martin Bund para este tipo de trabalho: “lidar com estes aspectos de psicologia, mexer com o ego da pessoa, fazer com que ela exponha suas dúvidas e seus erros, sem ter experiência nesse assunto, pode ser complicado”¹⁴⁷. Em 1971, ao trabalharem com outras turmas da Física, resolveram, então, excluir esses momentos que De Souza, em seu depoimento, chamou de “lavagem de alma”. Chamaram esse novo esquema, que englobava apenas as discussões em grupo e a institucionalização do que havia sido trabalhado naquele dia, de *estudo dirigido*. Na turma de 1972, fizeram algo um pouco diferente:

Fazíamos o fechamento do que havíamos trabalhado, parávamos a aula uns cinco minutinhos antes do final e entregávamos a cada aluno um pedacinho de papel no qual eles precisavam escrever o que haviam aprendido de novo naquele dia; é aquilo o que os americanos chamavam e continuam chamando de *one minute paper*. Então, além dos trabalhos individuais que cada aluno entregava, precisávamos ler também esses papéis. E trazíamos tudo isso para discussão na aula seguinte. (Ibid.).

Conforme já comentamos, os roteiros eram preparados com base em livros e De Souza disse se lembrar de ter trabalhado muito com o Moise. No entanto, a versão em português deste livro só foi publicada em 1972 e a experiência com os roteiros começou a ser feita, como já foi dito, em 1970. Por esta razão, segundo a entrevistada, os roteiros elaborados para os cursos de 1970 e 1971, provavelmente ainda não se baseavam neste manual; talvez Martin Bund até tivesse trazido o livro original, em inglês, dos Estados Unidos, mas, de qualquer

¹⁴⁶ DE SOUZA (2009).

¹⁴⁷ DE SOUZA (2009).

forma, como os alunos ainda não tinham acesso a esta obra, ela não era utilizada nas aulas e os roteiros também não faziam referência a ela:

Em 1970 e 1971, eu acho que fazíamos os roteiros, não ficávamos nos baseando no livro ainda. Escrevíamos no mimeógrafo as coisas que considerávamos importantes, colocávamos os gráficos (...). Em 1972, como já tínhamos o Moise traduzido, (...) fazíamos os roteiros com base nele. (Ibid.).

As professoras envolvidas no projeto se reuniam semanalmente para discutir o que havia acontecido durante as aulas da semana e, com base nestas discussões, elaboravam o material que seria utilizado nas aulas da semana seguinte. De acordo com Coelho, nessas reuniões era analisado também se as três turmas envolvidas na experiência estavam mais ou menos no mesmo ponto ou não; a sincronia de andamento das turmas era importante porque a prova era única para todas elas. De Souza destaca que embora tivessem essa liberdade de planejar as próximas aulas de acordo com os resultados das anteriores, havia um programa a ser seguido e um cronograma rígido de tarefas, elaborado no início de cada semestre, que deveria ser cumprido. Segundo Coelho, “pegávamos todo o assunto que seria visto no Cálculo I, dividíamos em temas e para cada tema criávamos uns textos meio interativos”¹⁴⁸. A depoente destacou também que havia temas para os quais ela e De Souza é que deveriam elaborar as propostas de trabalho: “a Iracema também delegava uns temas para que nós, monitores, preparássemos sozinhos os textos que depois seriam corrigidos por ela”¹⁴⁹.

A partir do momento em que os alunos passaram a ter acesso ao Moise, o esquema de elaboração e aplicação dos roteiros, de acordo com De Souza, ficou da seguinte forma:

Nos reuníamos semanalmente, víamos o que o livro propunha e daí fazíamos roteiros nos quais pedíamos para os alunos lerem determinadas páginas, determinadas definições. Então dividíamos os alunos em grupos de três ou quatro. (...) No final de toda aula, os alunos entregavam os roteiros com as coisas que tinham feito e nós corrigíamos; a dinâmica só funcionava porque corrigíamos e na aula seguinte, para podermos continuar, devolvíamos os materiais entregues pelos alunos na aula anterior; era, realmente, um curso bem dinâmico mesmo. (...) Ao final de cada aula, sempre fazíamos, ao invés da tal dinâmica de grupo (...), o que nós aqui na Educação Matemática chamamos de institucionalização: o professor ia para a lousa e fechava. (Ibid.).

De Souza destacou que, no momento em que trabalhavam com os roteiros, os alunos utilizavam efetivamente o livro do Moise em sala de aula; tinham tarefas para resolver com o auxílio do mesmo. E a própria metodologia adotada pelo autor de tal manual – a apresentação

¹⁴⁸ COELHO (2009).

¹⁴⁹ COELHO (2009).

em espiral dos conteúdos – também era empregada nos roteiros: “o Moise faz os exercícios e, de repente, faz uma pergunta referente a coisas que irá abordar lá na frente. E colocávamos isso para os alunos também; perguntávamos: e aí, vocês acham que isso tem a ver...”¹⁵⁰. Na opinião de nossa entrevistada, o texto do Moise era mais acessível aos alunos do que os dos livros adotados nos cursos de Cálculo até então: “já havia uma preocupação na forma de apresentar as coisas, que era matemática, mas dizia: olha, faça a ligação disto com aquilo. (...) Era mais acessível do que aqueles livros antigos que traziam: teoria, proposição, demonstração, exercícios...”¹⁵¹. Essa questão do uso do livro durante as aulas, no entanto, não nos ficou muito clara por meio das entrevistas que realizamos, pois, enquanto De Souza afirma se lembrar de que, a partir do momento em que o manual do Moise se tornou acessível aos alunos, ele passou a ser efetivamente utilizado em sala de aula, no momento de resolução dos roteiros, Coelho afirma que, durante as aulas, os alunos não usavam o livro; utilizavam apenas os roteiros e, segundo ela, esse talvez tenha sido um dos aspectos negativos desta experiência:

Acho até que esse foi um efeito perverso desses cursos com textinhos: a questão do livro foi sendo abandonada, porque o roteiro tem leitura mais fácil; o objetivo dele é esse: tornar a teoria mais assimilável. Então, como o livro é algo mais pesado, o aluno acaba o abandonando. Na realidade, o que acontecia é que nós, professores, usávamos os livros para preparar os roteiros. (...) Os roteiros acabavam funcionando como intermediário entre os livros e os alunos. (COELHO, entrevista, 2009).

Neste momento, pela primeira vez em nosso trabalho, nos deparamos com lembranças distintas relacionadas a um mesmo fato, algo que, de acordo com os teóricos da História Oral, é bastante comum ao se utilizar esta metodologia de pesquisa. Assim como recomendam tais autores, não atribuímos o caráter de verdade a uma versão em detrimento da outra; optamos por apresentar ambas e chamar a atenção do leitor deste relatório de pesquisa para este fato. Uma conjectura que talvez possamos levantar é a de que, como Coelho e De Souza trabalhavam com turmas diferentes, a postura de cada uma destas com relação à utilização do livro pode ter sido diferente e transmitido sensações distintas para cada uma das docentes.

Embora essa experiência de trabalhos com roteiros tenha sido desenvolvida por Martin Bund, De Souza e Coelho em cursos ministrados para alunos da Física, o público-alvo não era levado em consideração no momento em que planejavam os materiais:

¹⁵⁰ DE SOUZA (2009).

¹⁵¹ DE SOUZA (2009).

Isso não era levado em conta; era um curso de Matemática, embora eu ache que o Moise se preste bem a cursos de Física porque ele não é um livro que segue uma linha tradicional de livro de Matemática; já tem algumas idéias diferentes. Acho que o livro se encaixou muito nas idéias que tínhamos para escrever os roteiros, mas olhávamos do ponto de vista da Matemática; não nos preocupávamos com a questão da Física. (DE SOUZA, entrevista, 2009).

Nossas depoentes afirmaram que a abordagem da disciplina continuava sendo bastante rigorosa, com a apresentação das demonstrações de muitos teoremas e os limites sendo trabalhados por meio da simbologia dos epsilons e deltas. Apesar disto, Coelho destaca que o nível de rigor já era diferente do presente nos cursos anteriores: “Já havia menos demonstrações, já tinha uma enxugada neste sentido e o próprio Moise já tem uma visão diferenciada em relação a isso” ¹⁵². As demonstrações também eram trabalhadas, primeiramente, por meio dos roteiros e depois institucionalizadas: “encaminhávamos as demonstrações [nos roteiros] e depois (...) fazíamos o que a gente chama de fechamento dizendo: olha a demonstração é essa, a idéia é essa e tal” ¹⁵³. Coelho novamente pontua que, com relação à presença das demonstrações, o curso também trazia alterações: “A Iracema não tirava todas as demonstrações; algumas eram feitas e outras não. Já tinha começado esse saneamento das demonstrações” ¹⁵⁴. De Souza não se recorda se as demonstrações eram cobradas nas avaliações: “quando nós, professores que trabalhávamos desta forma, ficamos mais independentes, com cada um pegando sua turma, eu acho que nunca mais cobre as demonstrações do livro” ¹⁵⁵. Naquele curso coordenado por Martin Bund, no entanto, Coelho diz que as demonstrações eram sim cobradas: “não cobrávamos demonstrações de teoremas, proposições, nada disso; cobrávamos algo mais algébrico, como demonstrações de desigualdades” ¹⁵⁶. Percebe-se, portanto, que, na Física, esta introdução dos roteiros foi acompanhada, de acordo com nossas entrevistadas, por certa moderação no nível de formalismo do curso; começou-se a buscar o rigor considerado mais adequado para uma abordagem inicial dos conceitos que estavam sendo trabalhados.

Outro aspecto importante referente a esta experiência a ser destacado é que, de acordo com De Souza, os roteiros entregues pelos alunos ao final de cada aula eram levados em consideração no momento da atribuição da nota final a cada aluno: “já era uma avaliação continuada” ¹⁵⁷; cada professor tinha uma folha com as notas dos alunos nos trabalhos de cada

¹⁵² COELHO (2009).

¹⁵³ DE SOUZA (2009).

¹⁵⁴ COELHO (2009).

¹⁵⁵ DE SOUZA (2009).

¹⁵⁶ COELHO (2009).

¹⁵⁷ DE SOUZA (2009).

aula e, no final do semestre, os professores participantes do projeto se reuniam e transformavam todas aquelas notas em uma média final. A entrevistada afirmou também que esse trabalho foi muito bem visto pelos alunos e pelo que pode perceber na época, baseada nas conversas que tinha com os estudantes, foi a de que o aproveitamento havia sido bastante bom.

Essa metodologia de aulas de Cálculo baseadas em roteiros de estudos e trabalhos em grupo foi adaptada e levada para a Matemática, pela professora Bonomi, em 1975 e aplicada até o final de 1977. Antes de tratarmos especificamente de como tal metodologia foi colocada em prática no curso de nosso interesse, nos próximos parágrafos vamos tecer alguns comentários a respeito de como Bonomi começou a dar aulas na USP, quais foram suas inspirações teóricas para realizar aquele trabalho que desenvolveria posteriormente, como tal bagagem teórica a tornou, de certa forma, líder neste processo de reformulação na maneira como o Cálculo era trabalhado com os alunos, quais as contribuições trazidas por Druck, outra docente envolvida nesta experiência e quais foram as razões que as levaram, juntamente com uma equipe de professores, a proporem tal reformulação.

Em 1971, Bonomi, que havia concluído o curso de Licenciatura em Matemática pela USP em 1969, voltou à instituição como aluna da pós-graduação e como auxiliar de ensino, ministrando aulas de exercícios de Cálculo, atrelada à outra professora, responsável pelas aulas teóricas. Nesse primeiro momento, continuou seguindo o modelo vigente, com aulas tradicionais e expositivas nas quais o aluno tinha participação reduzida. No entanto, logo ao chegar à instituição, ela, juntamente com uma equipe de professores, começou a questionar o modelo de ensino adotado e passou a defender que aquele tipo de trabalho que estava sendo feito nas turmas da Física, baseado em discussões em grupo com auxílio de roteiros de estudo dirigido, fosse levado também para a Matemática.

Ao ser contratada, Bonomi trouxe consigo argumentos teóricos favoráveis à implantação de metodologias de ensino como aquela desenvolvida por Martin Bund nas turmas de Cálculo da Física. Antes de começar a lecionar na USP, ela era docente em uma escola de ensino fundamental – um Colégio Pluricurricular Experimental, em São Paulo – na qual eram promovidas diversas discussões referentes a questões pedagógicas. Por esta razão, teve a oportunidade de participar de palestras e debates com nomes que, na época, eram bastante conceituados no cenário nacional da educação como, por exemplo, Terezinha Fran¹⁵⁸

¹⁵⁸ Pedagoga e responsável pela implantação do principal Colégio Experimental de São Paulo, o Caetano de Campos, do qual foi também diretora.

e Joel Martins¹⁵⁹. Nesta mesma escola, participou de um curso chamado *Dinâmica de Grupo* ministrado por Lauro de Oliveira Lima¹⁶⁰. Todas essas experiências vivenciadas por ela neste Colégio Experimental foram levadas em consideração no momento em que começou a atuar no ensino superior: “na minha cabeça essas preocupações com o ensino já estavam bastante presentes e, embora estivesse em outro nível [na USP], eu achava que na universidade as coisas também poderiam ser mudadas.”¹⁶¹.

O conhecimento teórico de Bonomi a respeito dos aspectos pedagógicos, de psicologia educacional e de dinâmica de grupo foi destacado por outros docentes envolvidos no processo de adaptação, para as turmas da Matemática, daquele trabalho com roteiros feito na Física. E talvez tenha sido exatamente essa base teórica que tenha feito de Bonomi a líder deste trabalho. Segundo Druck, que começou a dar aula na USP em 1970 e também participou dessa experiência com os roteiros na Matemática, sendo responsável, dentre outras, por uma das turmas de Cálculo de 1976,

A Cristina era uma das grandes lideranças desse grupo porque ela tinha feito licenciatura, havia trabalhado na Escola Experimental da Lapa; ela tinha uma formação pedagógica, uma informação um pouco mais aprofundada do que a maioria dos outros envolvidos (...). No nosso caso foi a Cristina Bonomi quem trouxe essas leituras. Fizemos também algumas discussões teóricas; o trabalho não foi feito apenas na base do “achismo”. (DRUCK, entrevista, 2009).

Este comentário de Druck é mais um exemplo do quanto é importante o professor universitário, além de possuir os conhecimentos referentes aos conteúdos de sua área de atuação, também possuir uma formação pedagógica, algo que, de acordo com diversos autores citados na primeira seção do capítulo, demorou muito para ser valorizado e mesmo atualmente ainda encontra certa resistência por parte de alguns docentes do ensino superior.

Druck, apesar de não ter formação teórica na área de licenciatura, trouxe para o projeto as experiências que havia vivenciado como aluna no Colégio de Aplicação da Faculdade de Filosofia no Rio Grande do Sul. De acordo com ela, nessa escola os alunos sempre trabalhavam em grupo e ela sempre gostou deste tipo de trabalho. Na entrevista que nos concedeu, afirmou que sempre teve a convicção do papel da participação do aluno em sua

¹⁵⁹ Pedagogo, com pós-doutorado em Psicologia Educacional. Foi professor de universidades como a USP, a UNICAMP e a PUC e Supervisor de Pesquisa no Ginásio Estadual Pluricurricular Experimental; foi também responsável pela organização e instalação dos Programas de Pós-Graduação da PUC-SP. Desenvolveu estudos aprofundados relativos a questões postas e explicadas pelas teorias cognitivas.

¹⁶⁰ Pedagogo cearense, estudioso da Microsociologia. Defendia a idéia de que não é possível observar o ser humano fora das relações de interações, que nada mais são do que dinâmicas de grupo. Para Lima, a importância de tal dinâmica para o desenvolvimento intelectual do ser humano é proporcional à inserção dos indivíduos no processo de interação social.

¹⁶¹ BONOMI (2009).

aprendizagem; afinal, ela havia visto na prática a importância dessa vivência na construção de seu próprio conhecimento. “Acho que a grande coisa que eu aprendi naquela escola foi o quanto podem ser produtivos a discussão e o trabalho em grupo para a aprendizagem das pessoas” ¹⁶². Por este motivo, comentou que sua motivação em aderir e participar de um projeto que propunha a utilização de trabalhos em grupos durante as aulas de Cálculo foi natural. “eu podia contribuir com minha experiência prática, pessoal, já que eu havia feito bacharelado e não conhecia nenhuma teorização sobre isso, mas tinha vivenciado uma escola em que muitos experimentos haviam sido feitos” ¹⁶³.

A docente comentou também que as discussões para a implantação dessa metodologia de ensino diferenciada começaram por volta de 1973:

Deram-me a coordenação da equipe do Cálculo I e Cálculo II e aí começou a surgir esse movimento dos roteiros, só que não me lembro exatamente quem foi que sugeriu, mas, enfim, estávamos: eu, a Cristina Bonomi, o Seiji Hariki, o Francisco Miraglia, a Maria Ignez de Souza Vieira Diniz, a Maria Elisa Esteves Lopes Galvão, a Célia Contin Góes, a Carmem Cardassi. (Ibid.).

As razões que levaram essa equipe de professores a reformularem a metodologia adotada no ensino do Cálculo na Matemática foram, de acordo com Druck, as seguintes:

Começamos a querer fazer um trabalho diferente, porque achávamos que as pessoas não aprendiam Cálculo direito, não estávamos satisfeitos em usar o Moise do começo ao fim – na Poli era assim e aqui na Matemática também – e então propusemos ao departamento a realização de um trabalho diferenciado. Queríamos que os alunos aprendessem os epsilons e os deltas e então começamos a descobrir que tínhamos que ter objetivo, tinha que ter avaliação, que era importante a participação dos alunos. (Ibid.).

Diante dessas constatações, “queríamos fazer um curso baseado no trabalho dos alunos e optamos então por aquele esquema de roteiros, auto-avaliação... ¹⁶⁴ e este trabalho começou a ser posto em prática por volta de 1975.

Os roteiros eram preparados em reuniões com todos os professores envolvidos no projeto; algum professor propunha alguma coisa e todos discutiam juntos. De acordo com Druck o tipo de atividades que elaboravam na época já está totalmente ultrapassado porque não valorizavam a criatividade do aluno; era um roteiro de estudo dirigido:

¹⁶² DRUCK (2009)

¹⁶³ DRUCK (2009).

¹⁶⁴ DRUCK (2009)

Os alunos precisavam preencher coisas, era quase um roteiro de instrução programada. As atividades não abriam muito o leque para a criatividade do aluno, era mais para, não só treinar, mas entender e daí sim treinar as definições; não era nada assim tão criativo. A grande diferença – e isto é algo que percebo hoje, porque na época não sabia nada disso – era a metodologia de fazer o aluno trabalhar, ter uma participação ativa e não passiva durante as aulas. Fazíamos com que ele produzisse, discutisse, pensasse no que estava fazendo, avaliasse... (Ibid.).

Como podemos perceber pela fala de Druck, o grande diferencial desse trabalho foi a transformação do papel do aluno no seu aprendizado: sua função não era mais apenas ouvir a explicação do professor e tomar nota da aula; ele precisaria se envolver, participar ativamente, discutir, pensar, avaliar. Havia, inclusive, um questionário de auto-avaliação que o aluno deveria preencher ao final de cada roteiro, dizendo como tinha sido sua participação naquele trabalho. Também para Bonomi, essa questão da participação dos alunos foi o que mais diferenciou o trabalho com roteiros do que era feito até então:

Se você me perguntar se os cursos que dávamos já eram mais “fáceis”, eu te diria que não. Não acho que era fácil; continuávamos, por exemplo, fazendo limite formalmente, mas acho que, nesta época, já fazíamos os alunos trabalharem em sala de aula, diferentemente de ficarem somente copiando como acontecia até então. (BONOMI, entrevista, 2009).

Cândido, que foi aluna de Bonomi em 1976, também comentou a este respeito, afirmando que, neste curso, a metodologia empregada fazia com que a participação dos alunos fosse fundamental: se os mesmos não participassem, não havia aula, já que o trabalho em classe era inteiramente desenvolvido por eles.

Com a implantação dessa nova metodologia, o critério de avaliação adotado nestes cursos também passou por alterações bastante significativas:

Até então, o critério de avaliação adotado (...) levava em conta apenas as notas das provas. Trabalhos e exercícios eram apenas para os alunos estudarem, não eram considerados como algo para constar na avaliação. Elaboramos então um critério de avaliação todo complicado em que entravam nota de auto-avaliação, nota de avaliação do grupo, etc. A média final era uma média ponderada – não me lembro as ponderações - entre as notas das provas e as notas dos trabalhos em grupo. Chamávamos as provas da época de trabalho individual e as outras atividades de trabalhos em grupo. A prova era o momento de cada aluno verificar o que ele, sozinho, havia aprendido depois de todo o trabalho desenvolvido. (DRUCK, entrevista, 2009).

Ainda de acordo com Druck, esse novo critério de avaliação repercutiu positivamente entre os alunos e a postura deles nos dias de prova mudou totalmente:

O contraste foi espetacular (...): [percebemos] no momento da avaliação individual a maneira como os alunos haviam embarcado na proposta. Não existia cola em classe nenhuma; e não porque estivessemos controlando, mas porque eles assumiram (...) estavam se dedicando e que aquele era o momento de verem o que haviam aprendido. Ficavam mais tranquilos porque a aprovação não dependeria apenas da nota daquela prova. No entanto, havia uma restrição: as notas dos trabalhos em grupo só seriam levadas em consideração no cálculo da média final se a média das provas fosse maior ou igual a cinco. Os alunos não seriam aprovados se não obtivessem aprovação na forma “tradicional” de avaliação das demais turmas de Cálculo I. Mas, eu particularmente fiquei espantada porque estava vindo da Poli e lá era um horror: em dia de prova você tinha que bancar a policial; eu cheguei um dia a sair correndo de um anfiteatro atrás de um aluno que saiu com uma prova na mão. (Ibid).

Ao contrário do que aconteceu na Física, em que a introdução dos roteiros marcou o início da busca por um nível de rigor mais adequado para aquela disciplina, na Matemática, de acordo com Druck, a princípio, não houve tal preocupação; muito pelo contrário: como já deve ter ficado claro pelas declarações da docente transcritas nos parágrafos anteriores, a intenção dos professores era exatamente dar maiores condições para que os alunos compreendessem aquela abordagem rigorosa do conteúdo que lhes estava sendo apresentado. Percebemos, portanto, que a preocupação não foi diminuir o nível de rigor e formalismo do curso e torná-lo mais adequado para alunos ingressantes e sim tentar, por meio de uma metodologia diferente da que era adotada até então, fazer com que esta abordagem rigorosa e formal do Cálculo fosse mais bem compreendida e tivesse mais significado para eles. Para isso, mesmo as demonstrações eram inicialmente discutidas por meio dos roteiros, de forma mais intuitiva, com cuidado de evidenciar para os alunos a parte lógica nelas envolvidas para, então, em um segundo momento, formalizá-las. A respeito deste trabalho com as demonstrações, Cândido, que foi aluna de Bonomi em 1976, disse o seguinte:

Era tudo [trabalhado] na base de discussões como: o que é que (...) acontece se tivermos tais e tais hipóteses? Daí, manipulávamos estas hipóteses, trabalhávamos um pouco e, depois, ela ia e amarrava na lousa, demonstrando de fato. Eu me lembro que ela sempre fazia as demonstrações como fazemos na vida real quando temos que demonstrar algo que não sabemos: eu quero chegar nisso, tenho isso. Isso implica aquilo, aquilo implica aquilo outro e então concluímos isto, etc. Ela ia fazendo todas essas ligações e, depois, dizia: agora vamos passar isso a limpo, porque a demonstração não vai ser feita de trás para frente. (...) Este cuidado de nos mostrar a parte lógica era muito grande. (CÂNDIDO, 2009, entrevista).

Pelo depoimento de Cândido, pudemos perceber que havia grande preocupação por parte dos professores destes cursos baseados nesta metodologia de trabalho diferenciada em discutir, inicialmente de maneira intuitiva por meio das reflexões desencadeadas pelos roteiros, detalhes conceituais que poderiam despertar maiores dificuldades nos alunos e que,

posteriormente, e com base nestas discussões, seriam institucionalizados e formalizados por meio de uma linguagem simbólica e rigorosa, dando condições para que, desta forma, tais detalhes pudessem ser mais bem compreendidos pelos estudantes. A depoente destacou, por exemplo, o modo como era trabalhado, na disciplina dada por Bonomi em 1976, o conceito de limite, comparando com a abordagem mais comum nos cursos e livros atuais:

Por exemplo, limite, atualmente, o pessoal faz assim: tem esses livros, modernos, americanos, como o Stewart¹⁶⁵, que parece que foi um sucesso, que ficam páginas e páginas com umas tabelas enormes: x perto de 1; 0,8; 0,9; 0,999, etc. De repente, dado ε existe um δ tal que se x pertence ao domínio de f , $0 < |x - p| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$... Não cola! E uma das coisas que não colam é a questão do módulo; o módulo é um nó. Então, como que foi que aprendemos nesse curso de Cálculo I? (...) Não tinha nada de módulo por um tempão. Ficávamos trabalhando muito tempo com a idéia: o que é chegar perto? É a distância ir ficando pequenininha. O limite de $f(x)$ quando x tende a p ; essa formalização, esse *lim* demorou um tempão para aparecer. Era proposta uma função e pedido: ache os x tais que, para uma distância dada igual a $1/2$, você encontre as imagens $f(x)$ a uma distância menor que $1/2$ de um determinado L . Começávamos então a perceber: parece que quando x chega perto de não sei quanto, $f(x)$ chega perto desse L ... Fomos indo assim; não aparecia o módulo... Na verdade, nos davam o ε , e nos pediam para achar o δ , mas

indiretamente. Essas coisas que são mais chatas como $\lim_{x \rightarrow p} \sqrt{x} = \sqrt{p}$ para $p > 0$ e para $p = 0$, também foram trabalhadas desta forma; percebíamos que só poderíamos chegar perto por um lado e que, como o gráfico não era uma reta, tínhamos o ε dado e na hora que fôssemos achar o δ , rebateríamos no gráfico e encontraríamos um intervalo que não era um intervalo “legalzinho” com centro no ponto p . Precisaríamos então pensar no δ como sendo o mínimo e tal... Tudo isso aparecia assim, no trabalho em grupo; percebíamos que o δ grandão não podia ser porque para ele teria elementos na imagem que cairiam fora, mas se pegássemos o menor tudo bem, porque daí todos os elementos cairiam dentro, os $f(x)$ cairiam dentro do intervalinho... (Ibid.).

Segundo a entrevistada, sendo os pontos mais delicados dos conceitos e das definições discutidos, primeiramente, por meio dos roteiros, “no momento em que ela ia para a lousa [institucionalizar o que havia sido trabalhado] e dava lá o “gran finale”, ficava claro: (...) Tem que ser isso mesmo! Não era aquela estranheza; era como se nós tivéssemos elaborado a definição ali.”¹⁶⁶. A impressão que nos fica então é que, nestes cursos, o tratamento rigoroso e formal das idéias fundamentais do Cálculo acabava parecendo aos alunos, como uma consequência natural de todo o trabalho que havia sido feito anteriormente, indo ao encontro daquilo defendido por Lakoff & Núnes (1997) e apresentado na primeira seção do capítulo, e não como algo artificial que o professor expunha e o estudante deveria aceitar. E esta nossa impressão coaduna com o que nos disse Cerri, que foi aluna de Cardassi em 1977 em um curso de Cálculo que também adotava esta metodologia dos roteiros, a respeito de qual era a

¹⁶⁵ STEWART, James. **Cálculo**: tradução de Cyro C. Patarra. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

¹⁶⁶ CÂNDIDO (2009).

principal preocupação daquela equipe de docentes que havia optado por trabalhar desta forma: “o grupo de professores daquela época tinha uma preocupação com nosso aprendizado. Queriam que nós interiorizássemos tudo aquilo e não, apenas, reproduzíssemos.” ¹⁶⁷. Os próprios fascículos de Cálculo escritos por diversos professores do IME e adotados como referências nestes cursos baseados nos roteiros já demonstram uma preocupação de caráter didático por parte dos professores envolvidos no ensino da disciplina nesta época, já que, de acordo com Guidorizzi, autor de um destes materiais, os mesmos começaram a ser redigidos, em meados da década de 1970, porque os docentes “não estavam satisfeitos com os livros textos disponíveis na época, daí surgiu a idéia dos fascículos, o fascículo 1 serviria de texto para o Cálculo I, o fascículo 2 para o Cálculo II e assim por diante” ¹⁶⁸. Guidorizzi destaca ainda o quanto este processo de elaboração dos fascículos foi importante em sua formação profissional: “ter participado do grupo que escreveu os fascículos foi muito importante tanto na minha formação como professor quanto como pesquisador. Foi um trabalho muito envolvente” ¹⁶⁹.

Embora nestes cursos baseados em roteiros houvesse essa evidente inovação metodológica, em alguns aspectos eles continuavam bastante semelhantes a maioria daqueles ministrados anteriormente: não havia, por exemplo, a preocupação em trabalhar aplicações dos conceitos vistos que não fossem intrínsecas à própria Matemática e também não eram discutidos aspectos ligados à história do desenvolvimento dos conceitos que estavam sendo abordados. A própria Druck fez comentários a este respeito, afirmando que a preocupação dos professores não era em contextualizar aquilo que estava sendo apresentado ou dar condições para que os estudantes percebessem como havia sido o processo histórico de estabelecimento de determinado conceito ou resultado do Cálculo. Preocupavam-se com que os mesmos efetivamente compreendessem a formalização do conteúdo trabalhado e que fossem capazes de fazer as demonstrações com epsilons e deltas.

Conforme já deve ter ficado claro por um de nossos comentários anteriores, além de Bonomi e Druck, que ministraram cursos de Cálculo baseados em roteiros em 1976, outra professora que recorreu a esta metodologia em suas aulas foi Cardassi, no ano de 1977, quando Cerri e Chalom foram suas alunas. Esta última destacou que, durante as aulas, ficava evidente a grande preocupação didática da docente e que as discussões em grupo desenvolvidas com o auxílio dos roteiros, de fato, eram utilizadas como ferramentas na

¹⁶⁷ CERRI (2009).

¹⁶⁸ GUIDORIZZI (2010).

¹⁶⁹ GUIDORIZZI (2010).

tentativa de promover um aprendizado efetivo do conteúdo. Comentou também que, apesar de, na época, ter tido muita dificuldade com o curso, atualmente ela percebe que o trabalho de Cardassi “era muito bom, os roteiros eram (...) bem feitos, bem pensados. (...) O material do curso era muito cuidadoso. (...) A Carmen nos fazia umas perguntas realmente boas”¹⁷⁰.

Um aspecto a ser observado nesta experiência dos roteiros é o seguinte: sempre que se colocam em pauta questões referentes a realizar inovações didático-pedagógicas em sala de aula, imediatamente vem à tona a dificuldade de conciliar tais inovações – que demandam tempo para serem aplicadas – com o apertado cronograma das disciplinas, que estabelecem uma grande quantidade de conteúdo para ser trabalhado em um curto período de tempo. Esta experiência realizada na USP, no entanto, é um exemplo de que, se houver um bom planejamento, é sim possível cumprir o programa da disciplina e, ao mesmo tempo, realizar atividades diferenciadas. De acordo com Cândido:

Em 1976, a Cristina cobriu o programa inteiro com os roteiros: derivação, todas as aplicações, máximos e mínimos, integração, integral de Riemann – motivada pela área - cálculo de áreas, a amarração de tudo com o Teorema Fundamental do Cálculo e, depois, algumas técnicas de integração. Quer dizer, dá tempo e fica legal! (Ibid.).

É importante notarmos também que mesmo com a utilização dessa metodologia diferenciada, os alunos continuavam enfrentando dificuldades na transição da educação básica para a universidade. Para Chalom, o problema maior não era o fato de ser feita uma abordagem rigorosa do conteúdo, de as demonstrações serem cobradas. Afinal, naquela época, mesmo na educação básica o tratamento dado aos conceitos era mais rigoroso e os alunos precisavam demonstrar diversos resultados; já estando, portanto, de certa forma, acostumados com este tipo de trabalho. A grande questão era o estranhamento provocado pela simbologia, pela linguagem e pelos raciocínios específicos do Cálculo: “era muito chocante: não pelo rigor, porque eu realmente tinha essa formação (...) de que tudo tem que provar, mas, (...), mesmo assim, a gente não era capaz de provar”¹⁷¹. Cerri comentou que, em seu caso, especificamente, não houve esse choque na chegada à universidade, mas que percebia que muitos colegas tinham dificuldades nessa transição e que, atualmente, como professora, percebe que um dos pontos-chaves dessa questão é a primeira avaliação a que o aluno é submetido na graduação; é nesta ocasião que ele, de fato, irá perceber qual é o nível de rigor que esperam dele no ensino superior:

¹⁷⁰ CHALOM (2009).

¹⁷¹ CHALOM (2009)

Na época, havia mais rigor no ensino médio e no ensino básico; víamos os teoremas e as demonstrações. Então, quando eu cheguei aqui na universidade, já estava acostumada com aquele enfoque rigoroso e (...) por esta razão, para mim não foi um choque. Mas, para alguns alunos da minha turma, eu via que realmente era difícil. E eu acho que o que era difícil - e hoje como professora também vejo isso - era a (...) primeira avaliação que fazíamos na universidade; ela é que era um choque, porque, apesar de você ver o rigor na sala, no roteiro, no trabalho que você faz e é corrigido, a prova - e geralmente Cálculo I é a primeira prova que você faz no curso - é aquele susto com relação ao rigor que é esperado de você. Eu me lembro que na primeira prova de Cálculo I, que acho que foi também minha primeira prova na faculdade, tirei 5,5. Para mim aquela era uma nota baixa; eu nunca havia tirado menos que 10 ou 9,5. No entanto, aquela minha nota foi uma das melhores da sala; todos os bons alunos em Matemática estavam, de repente, tirando 1,5 ou 2. Foi um susto! E isso continua sendo um pouco assim até hoje. (CERRI, entrevista, 2009).

Este comentário a respeito dos problemas enfrentados pelos alunos na primeira avaliação que fazem no curso de Cálculo - e também nas demais disciplinas que cursam logo ao ingressarem na universidade - está diretamente relacionado a uma daquelas dificuldades enfrentadas pelos estudantes na transição entre a educação básica e o ensino superior apontadas por Gascón (2009). Mais precisamente, diz respeito àquela que o autor denomina de *mudanças em relação à forma de avaliar o processo de estudo* que, conforme já destacamos na primeira seção deste capítulo, diz respeito ao maior nível de rigor esperado dos alunos, nas respostas dadas por eles nas avaliações, em relação ao que se esperava dos mesmos até o Ensino Médio, à necessidade deles demonstrarem que compreenderam e que são capazes de interpretar de maneira global o conteúdo abordado pelo professor e que está sendo avaliado naquele momento e ao fato de, na universidade, em geral, serem cobradas nas provas questões diferentes daquelas já trabalhadas em sala de aula, o que, em geral, não ocorre na educação básica.

De acordo com Cerri e Chalom, os alunos que participaram desta experiência de aulas baseadas em roteiros e atividades em grupo, ao menos em 1977, tinham consciência de que estavam participando de um trabalho diferenciado, do ponto de vista pedagógico. Segundo Cerri, “tínhamos noção que era algo diferente, porque era diferente das outras disciplinas”¹⁷². Chalom, por sua vez, comentou que, em certa ocasião, a própria Cardassi chegou a discutir com os alunos a respeito da experiência que estava sendo feita:

Chegou um momento em todos os alunos estavam indo muito mal e a Carmem abriu uma discussão, uma oportunidade para conversarmos e, então, ela nos falou que os professores haviam optado por este trabalho com roteiros individuais e roteiros em grupo, porque o curso de Cálculo vinha já, há algum tempo, sendo considerado

¹⁷² CERRI (2009)

muito difícil pelos alunos. Os professores acharam, portanto, que deveriam experimentar outros processos de abordagem dos conteúdos da disciplina. (CHALOM, entrevista, 2009).

Como podemos perceber por esta última fala de Chalom, mesmo com esta metodologia diferenciada sendo adotada, muitos alunos continuavam enfrentando problemas durante a aprendizagem do Cálculo. A entrevistada comentou que ela mesma teve muitas dificuldades nesta disciplina, tanto que acabou não a concluindo. Além disso, é importante destacar que este esquema de aula baseado em roteiros não agradou a todos. De acordo com Cerri, a metodologia adotada tornava o curso bastante trabalhoso e esse excesso de trabalho – que ela e um grupo de colegas que sempre estudavam juntos viam como algo positivo, que os fazia refletir sobre o que estava sendo abordado – desagradava a muitos alunos. Esta forma de conduzir a disciplina chegou, inclusive, a enfrentar resistências por parte dos estudantes na primeira vez em que foi adotada. De acordo com De Souza:

Na primeira turma com a qual ela [Bonomi] trabalhou com os roteiros, houve muita briga. Os alunos não estavam acostumados com isso; o aluno estava acostumado aulas teóricas e eu me lembro que (...) eles diziam para a Cristina: mas a senhora não faz nada, fica só tirando dúvidas; a senhora tem que ir lá para a lousa e dar aulas. (DE SOUZA, entrevista, 2009).

Essa citação traz a tona às idéias de Brousseau, para o qual a ruptura do *contrato didático* é sempre conflituosa. Segundo Silva (2010), “a relação professor aluno está subordinada a muitas regras e convenções, que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato” (p. 49) e neste sentido é que Brousseau (1986) define contrato didático como sendo “o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor” (BROUSSEAU apud SILVA, 2010, p. 50). De acordo com o autor, tais regras quase nunca são explícitas, mas se revelam, sobretudo, naqueles momentos em que são transgredidas por um dos parceiros da relação didática. Aulas como estas que foram dadas na USP em meados da década de 1970, conduzidas por meio de roteiros e discussões em grupo, ocasionaram uma ruptura do modelo didático vigente até aquele momento, baseado totalmente em aulas expositivas, nas quais o estudante tinha um papel passivo no processo de aprendizagem. Era de se esperar, portanto, que tal ruptura ocasionasse conflitos, já que, “os alunos, em geral, encontram muita dificuldade em se adaptarem a uma mudança de contrato” (SILVA, 2010, p. 61).

Cândido também comentou a respeito do desagrado de alguns de seus colegas – coisa que ela só tomou conhecimento posteriormente - com o estilo de aula de Bonomi e se mostrou bastante espantada com a opinião deles; para ela o curso que vivenciaram havia sido perfeito:

Eu achava que estavam todos gostando muito, mas depois de vários anos, estávamos todos nós daquela turma reunidos e começaram os comentários: “que horror aquele curso de Cálculo! Eu não entendia nada!” Então eu perguntei: “mas, como assim você não entendia nada? Nós discutimos tanto em grupo, fizemos tudo em grupo...”. É claro que não eram todos que estavam dizendo “eu não entendia nada”, mas muitos diziam: “para mim era muito difícil e não sei o quê...”. E eu disse: “não gente! Nós fomos tão bem!”. E um deles me falou: “É? Mas, qual era a letra que escrevia em todos os roteiros? Era a sua... Você que escrevia tudo, porque você que entendia.” Aí eu fiquei pensando: que esquisito! Eu achei que havia sido o ensino perfeito. Nós queremos chegar nesse ponto de atingir bastante gente, de ensinar bastante gente, não é? Mas, é muito difícil ensinar, porque o ensinar não é igual ao que você tem do outro lado da linha que é o aprender. O aprender exige algo mais! Mas, o ensinar tem que facilitar o aprender! No mínimo! (CÂNDIDO, entrevista, 2009).

Na opinião dessa depoente, talvez o que tenha causado estranhamento entre alguns alunos tenha sido a questão dos trabalhos em grupo. Ao contrário dela que já estava acostumada com esse formato e gostava de trabalhar desta maneira, algumas pessoas não participavam das discussões, estranhavam ou ficavam muito tímidas o que pode ter prejudicado o aprendizado. Além disso, em aulas nas quais o aluno é quem deve trabalhar por conta própria, é mais fácil de haver dispersão do que naquelas em que ele deve estar o tempo todo atento à exposição do professor, e tal dispersão, em casos de estudantes que tenham maiores dificuldades com o conteúdo, podem acabar sendo um elemento complicador para o acompanhamento do curso. Chalom, que por não ter conseguido concluir o curso dado por Cardassi, precisou cursar também a disciplina ministrada, de maneira tradicional, no ano seguinte, por Fernandes, fez um comentário a respeito deste aspecto:

Acabei não conseguindo acompanhar aquele que olhamos de fora e dizemos ser o melhor e me dei muito bem no outro que, a princípio, não parece tão bom. Não sei qual seria minha visão se eu tivesse me dado melhor no curso da Carmen. (...) O roteiro era muito legal, muito bem preparado, mas exigia que nos focássemos nele, enquanto que na aula tradicional, estava lá a professora falando o tempo inteiro e ou você tomava nota de tudo ou sua mente viajava para qualquer lugar. Então, como havia a influência desse fator externo, para mim o curso tradicional funcionou melhor. (CHALOM, entrevista, 2009).

Apesar deste estilo de ensino adotado por Bonomi, Druck e Cardassi não ter agradado a todos os estudantes, alguns deles afirmaram que a experiência vivenciada nesta disciplina de Cálculo foi decisiva em suas formações pessoal e, principalmente, profissional, tendo reflexos

explícitos, inclusive, em suas práticas atuais em sala de aula. Para Cândido, dentre todas as disciplinas que cursou no Instituto de Matemática, a de Cálculo I, ministrada por Bonomi em 1976, foi a que ela mais gostou, a que mais marcou sua vida escolar:

Era um tipo de aula bem legal; ainda mais para 1976. O curso de Cálculo era muito bom para abrir nossas idéias. Eu havia feito o ensino médio num colégio estadual, mas que era super forte. Então, todo o questionamento que eu tinha, por exemplo, sobre o número real: o que é número real? Com as aulas de Cálculo foi indo e, em poucas semanas, se fechou tudo aquilo que veio cheio de dúvida de lá de trás. (...) O que (...) marcou muito esse curso de Cálculo da Cristina foi que ele foi o mais alegre que eu tive. Era justamente a alegria de descobrir, de ficar alegre porque está aprendendo. Então, disso eu me lembro muito, da vivacidade dela, da maneira como ela nos instigava a pensar no novo não como algo ruim, que você teria que aprender porque iria cair na prova! Não! E isso foi muito bom. (CÂNDIDO, entrevista, 2009).

Cândido destacou ainda que este curso de Cálculo foi tão importante para ela que, naquele momento, decidiu seu futuro profissional: quando ingressou no curso de Matemática, seu pai queria que ela optasse pela modalidade de Computação, que estava bastante em voga naquela época, mas seu encantamento com o curso de Bonomi foi tanto que optou pelo Bacharelado em Matemática: “no Cálculo I eu já decidi que ia fazer Matemática pura; falei: é isso que eu quero para minha vida!”¹⁷³.

A entrevistada afirmou também que a metodologia empregada lhe agradou tanto que, atualmente, em suas aulas, apesar de não utilizar roteiros, procura sempre fazer uma abordagem dos conteúdos semelhante àquela que viu quando era aluna. Cerri também disse ter gostado tanto da forma como Cardassi apresentou o Cálculo a sua turma em 1977 que carrega esta metodologia até hoje em suas aulas, adotando sempre trabalhos em grupo como método de ensino. Em diversos cursos que ministrou, chegou, até mesmo, a adotar roteiros, preparados com base naqueles que havia utilizado na época em que era aluna: “eu, particularmente, gostei muito; tanto é que, quando eu fui contratada e fui ministrar o primeiro curso aqui - de Cálculo I para o noturno - usei o mesmo modelo; adaptei os roteiros, mas acabei os utilizando também”¹⁷⁴. Além disso, Cerri frisou que Cardassi teve papel fundamental em sua escolha profissional: “a Carmem (...) foi uma professora muito importante para mim. Foi por causa dela que eu acabei ficando na universidade e indo para a área de Análise”¹⁷⁵. Chalom também afirmou que, apesar das dificuldades que teve quando aluna, gostou muito da metodologia e também tentou segui-la em alguns dos cursos que ministrou. Estes comentários de nossas entrevistadas citados ao longo deste parágrafo se

¹⁷³ CÂNDIDO (2009).

¹⁷⁴ CERRI (2009).

¹⁷⁵ CERRI (2009).

constituem como mais alguns exemplos da influência exercida pelos professores sobre seus alunos e sobre a maneira como estes conduzirão suas aulas depois de formados, aspecto já discutido na primeira seção deste capítulo por meio das idéias de autores como Cunha (2004), Prandi (2009) e Labegalini (2009).

Por meio de Chalom, tivemos acesso a alguns dos roteiros empregados por Cardassi em 1977; vamos então, na sequência, tecer alguns comentários sobre este material. Optamos por analisar os dois roteiros que apresentam aos alunos o conceito de limite, sendo um individual (o roteiro III) e outro em grupo (o roteiro IV).

Por meio do roteiro III, que era individual e continha cinco questões, é que o aluno teria o primeiro contato com as idéias presentes no conceito de limite de uma função $f(x)$ quando $x \rightarrow x_0$. Nas quatro questões iniciais, trabalhava de forma intuitiva e geométrica com esta noção e com várias situações nela envolvidas para então, na questão 5, tentar formular uma definição que fosse, de fato, rigorosa do ponto de vista matemático. É importante destacar que os alunos não partiam para esta “descoberta” na noção intuitiva sem qualquer informação inicial. Este é, na verdade, a nosso ver, um dos pontos questionáveis e, de certa forma, contraditórios do roteiro: embora os professores que o elaboraram tenham buscado dar condições para que o aluno construísse seu próprio conhecimento, ao mesmo tempo, pelo menos no caso destas atividades referentes à introdução do conceito de limite, já forneciam informações demais a ele; dados que, em nossa opinião, já indicavam diretamente ao estudante o ponto aonde ele deveria chegar. No caso específico desse roteiro III, ao destacar os objetivos do trabalho a ser realizado, os autores já apresentavam claramente aos alunos a noção intuitiva de limite, ao invés de deixá-los que chegassem a ela apenas por meio das reflexões feitas no decorrer das atividades que seriam trabalhadas:

Este roteiro visa dar a idéia geométrica e intuitiva de um dos principais conceitos do Cálculo – limite.

Analisaremos o comportamento de algumas funções, investigando o que acontece com os valores $f(x)$ quando x está próximo de um valor x_0 .

A grosso modo, podemos chamar de limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 ao número real L tal que os valores $f(x)$ estão próximos de L quando x está próximo de x_0 .

A primeira atividade deste roteiro era a seguinte:

1 – Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$.

- a) Faça o gráfico de f e localize o ponto $(1, f(1))$.
- b) Determine o intervalo A de $\mathbb{R}$ tal que para todo x de A , $f(x)$ esteja a uma distância menor do que 2 de $f(1)$.
- c) O intervalo A é simétrico em relação ao ponto 1?
- d) $A = \{x \in \mathbb{R} | |x - 1| < \dots\}$.

- e) Localize no gráfico o conjunto A e $\{f(x) \in \mathbb{R} \mid |f(x) - 5| < 2\}$.
 - f) Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Determine $A' \subset \mathbb{R}$ tal que:
 - i) A' é simétrico em relação a 1.
 - ii) $\forall x \in A', |f(x) - 5| < \varepsilon$.
- Podemos concluir: Os valores da função $f(x) = 2x + 3$ estão arbitrariamente próximos de 5 para valores de x suficientemente próximos de 1.

Era por meio desta questão que o aluno trabalhava pela primeira vez com um raciocínio do tipo: encontrar um intervalo de variação para x , em torno de um ponto, de tal forma que, para todo x neste intervalo, a diferença em módulo, isto é, a distância, entre $f(x)$ e $f(1)$ seja menor do que 2. Pretendia-se que o aluno fosse levado, por meio da análise do gráfico da função, a obter um intervalo particular – o mais evidente era $]0,2[$ – com centro no ponto 1, satisfazendo a desigualdade desejada ($|f(x) - f(1)| < 2$). No item (d), o aluno deveria perceber que todos os números x pertencentes a este intervalo A obtido estão a uma distância menor do que 1 do número 1, ou seja, $|x - 1| < 1$. No item (e), deveria localizar no gráfico o que havia obtido e perceber, de maneira geométrica, que se os valores de x estão numa determinada vizinhança, no eixo x , centrada no ponto 1, os valores correspondentes de $f(x)$ estarão numa vizinhança, no eixo y , centrada no ponto $5 = f(1)$.

A idéia trabalhada entre os itens (a) e (e) desta primeira questão nada mais é do que a definição de limite (L) de $f(x)$ quando $x \rightarrow x_0$, ou seja: dado um $\varepsilon > 0$, encontrar um $\delta > 0$ tal que se $|x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Neste caso, no entanto, tal definição é considerada em um caso particular em que $\varepsilon = 2$, a vizinhança de $x_0 = 1$ é $]0,2[$ e, conseqüentemente, $\delta = 1$. No item (f), o aluno era instigado a generalizar, ainda para esta mesma função, este raciocínio: partia-se da idéia de que, agora, a distância entre $f(x)$ e 5 deveria ser menor que um dado número real positivo arbitrário ε e, então, por meio de manipulações algébricas da desigualdade $|f(x) - 5| < \varepsilon$ e usando o fato de que $f(x) = 2x + 3$, chegava-se a desigualdade $|x - 1| < \varepsilon/2$, isto é, determinava-se a vizinhança $A' = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < \varepsilon/2\}$ de $x_0 = 1$. É importante destacar que, no roteiro, ao menos explicitamente não se chamava a atenção do aluno para o fato de, no caso particular considerado anteriormente, em que $\delta = 1$, também ser satisfeita a relação $\delta = \varepsilon/2$.

Por meio desta sequência de itens, a nosso ver, eram dadas condições ao aluno para que ele construísse, passo a passo, de forma simbólica, rigorosa, precisa do ponto de vista matemático e, principalmente, de maneira significativa para ele, a conclusão presente em linguagem natural no final da questão. Esperava-se que, após o item (f), o aluno estivesse em condições de compreender que tal conclusão poderia ser traduzida, matematicamente, no caso

da função dada, por: dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ (que neste caso, especificamente vale $\varepsilon/2$) tal que, se $|x - 1| < \delta$, então $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

Embora esta primeira questão, de fato, explicita uma preocupação dos professores envolvidos nestes cursos baseados em roteiros, em esclarecer, por meio de reflexões que seriam feitas pelo próprio aluno, os significados dos elementos e símbolos envolvidos na definição rigorosa e formal de determinado ente matemático, como, limite, por exemplo, é preciso destacar também que, já nesta questão, percebemos a diferença entre o que, de fato, propunha o roteiro destinado a introduzir o conceito de limite – em que o módulo e o epsilon já apareciam na primeira questão trabalhada – e o que disse Cândido uma das ex-alunas que participaram desta experiência ao comparar – em trecho citado em um dos parágrafos anteriores - a abordagem de limite mais comum nos cursos e livros atuais com aquela dos roteiros. É preciso, no entanto, que tenhamos em mente que, nesta citação, Cândido estava se referindo às atividades propostas por Bonomi em 1976 e que estes roteiros que estamos analisando são aqueles trabalhados em 1977 por Cardassi. É possível, portanto, que, de fato, a abordagem feita no ano anterior, por outra docente, tenha sido diferente em alguns aspectos desta de 77; talvez, naquele curso, a abordagem da noção de limite tenha sido feita da forma como foi mencionada por Cândido.

Voltando à análise das atividades presentes no roteiro III, a segunda dizia o seguinte:

- 2 – Considere agora a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$
- a) Faça o gráfico de f e localize o ponto $(1/2, f(1/2))$.
 - b) Determine um intervalo A de $\mathbb{R}$ tal que para todo x de A $f(x)$ esteja a uma distância menor do que 2 de $f(1/2)$.
 - c) O intervalo A é simétrico em relação ao ponto $1/2$?
 - d) Localize no gráfico o conjunto A e $\{f(x) \in \mathbb{R} \mid |f(x) - 2| < 2\}$.
 - e) Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Determine $A' \subset \mathbb{R}$ tal que:
 - iii) A' é simétrico em relação a $1/2$.
 - iv) $\forall x \in A', |f(x) - 2| < \varepsilon$.
 - f) O que você pode concluir analisando as respostas de a) a e)?

Essa questão é formalmente bastante semelhante à primeira. A diferença, além do fato da função do exercício 1 ser crescente e a deste ser decrescente, é que nela o aluno obtinha e visualizava no gráfico, primeiramente, um intervalo não simétrico em relação ao ponto $1/2$. No item (e), ao exigir que a distância entre $f(x)$ e 2 fosse menor que um número real positivo ε arbitrário, o aluno precisaria refletir sobre como conseguir um intervalo simétrico em relação a $1/2$. Obtido tal intervalo – $A' = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1/2| < \frac{1}{2} - \frac{1}{2+\varepsilon}\}$ - novamente se depararia com a situação: dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ (neste caso $\delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+\varepsilon}$) tal que, se

$|x - 1/2| < \delta$, então $|f(x) - 2| < \varepsilon$. E, desta forma, deveria chegar à conclusão de que os valores da função $f(x) = \frac{1}{x}$ estão próximos de 2 para valores de x suficientemente próximos de $1/2$. Novamente o objetivo da questão era fazer com que o aluno trabalhasse, ainda de forma bastante visual e até certo ponto intuitiva, com as idéias e elementos centrais presentes naquela definição formal de limite que seria estabelecida no final do roteiro.

O enunciado da atividade 3 era o seguinte:

3 – Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$$

- Faça o gráfico e localize o ponto $(1, f(1))$.
 - Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, é possível escolher um intervalo $A \subset \mathbb{R}$, simétrico em relação a 1, tal que $\forall x \in A$, $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$? Justifique.
 - Existe um intervalo $A \subset \mathbb{R}$, simétrico em relação a 1, tal que $\forall x \in A$, $|f(x) - 2| < \varepsilon$?
 - É possível escolher $A \subset \mathbb{R}$, simétrico em relação a 1, tal que $1 \notin A$ e $\forall x \in A$, $|f(x) - 2| < \varepsilon$?
 - O conjunto A pode ser escrito: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \dots < |x - 1| < \dots\}$
- Observação: Vimos que para todo $\varepsilon > 0$ é possível escolher um $\delta = \dots$ tal que $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$. Ou ainda: os valores $f(x)$ estão arbitrariamente próximos de 2 desde que x esteja suficientemente próximo de 1, mas seja distinto de 1.

É importante destacar que a função escolhida nesta questão e o ponto x_0 do qual os valores de x irão se aproximar se diferenciam dos considerados nas questões anteriores por possibilitar a verificação de que, há casos, como este, por exemplo, em que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ e também por obrigar o aluno a refletir a respeito de como analisar o comportamento de uma função nas proximidades de seu ponto de descontinuidade, uma das aplicações do estudo de limites.

Ao responder o item (b), talvez fosse esperado que o estudante tivesse condições de perceber que, diferentemente do que acontecia nas questões anteriores, neste caso os valores de $f(x)$, quando x assume valores suficientemente próximos de 1, não estão próximos de $f(1)$. Se tais valores estivessem suficientemente próximos de $f(1)$, então seria possível escolher um intervalo $A \subset \mathbb{R}$, simétrico em relação a 1, tal que $\forall x \in A$, $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$. Mas isso não acontece, pois se tomarmos $\varepsilon \leq 3$, então para qualquer intervalo A nessas condições, se tomarmos $x \in A$, tal que $x < 1$, então $f(x) = x + 1 < 2$ e, portanto, $|f(x) - 5| > 3$. Este item da atividade fornecia, portanto, indícios para que o aluno começasse a perceber que nem sempre $x \rightarrow x_0$ implica que $f(x) \rightarrow f(x_0)$.

Nos itens (c) e (d) talvez se esperasse que o aluno percebesse que para ser possível escolher um intervalo $A \subset \mathbb{R}$, simétrico em relação a 1, tal que $\forall x \in A, |f(x) - f(1)| < \varepsilon$, era necessário excluir o ponto $x = 1$ deste intervalo. Se não excluíssemos $x = 1$ de A teríamos o seguinte: para $\varepsilon \leq 3$, $f(1) = 5 \notin]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon[$, isto é, $1 \in A$ não satisfaz à condição $|f(x) - 2| < \varepsilon$. Agora, se $1 \notin A$, então $|f(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow 2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon$. E daí, podemos tomar $A =]1 - \varepsilon, 1[\cup]1, 1 + \varepsilon[$. Percebemos, portanto, que um dos objetivos desta atividade era fazer com que o aluno percebesse, na prática, a necessidade de, na definição de limite, que será apresentada, ou melhor, formalizada ao final das atividades, estabelecer que a distância entre x e o ponto x_0 seja não nula, isto é, que $0 < |x - x_0|$. Desta forma, no item (e), o estudante provavelmente concluiria que poderia tomar $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 < |x - 1| < 1\}$ e, assim, estar em condições de completar a observação colocada no final da questão, a de que para todo $\varepsilon > 0$ é possível escolher um $\delta = \varepsilon$ tal que $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$.

Na atividade 4 era pedido o seguinte:

4 – Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- Faça o gráfico de f .
- Existe um número real L tal que se $x \neq 0$ está próximo de zero, $f(x)$ está próximo de L ? Justifique.
- Mais rigorosamente, existe um número real L tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe um intervalo I centrado em zero satisfazendo: $x \in I - \{0\} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$? Justifique. (Sugestão: você pode considerar $L > 0$, $L = 0$, $L < 0$).

Primeiramente, é importante perceber que a função trabalhada nesta atividade se diferencia da anterior porque, embora ambas sejam descontínuas no ponto considerado, a função presente na questão 3 possui limite em tal ponto e a atual não. Por meio da resolução do item (b), o aluno talvez percebesse que, nesta situação, não existe tal número real L porque quando x se aproxima de zero pela esquerda então $f(x) = -1$ e quando x se aproxima de zero pela direita $f(x) = 1$. Este item, a nosso ver, dava condições para que o aluno percebesse, pela primeira vez, que a existência do limite de uma função quando x se aproxima de x_0 está ligada a condição de que o limite quando $x \rightarrow x_0$ pela esquerda precisa ser igual ao limite quando $x \rightarrow x_0$ pela direita. A inexistência desse número L , que provavelmente havia sido percebida pelo aluno, de forma topológica, no item (b), deveria ser demonstrada por ele, de forma rigorosa no item (c). Ao final desta questão, provavelmente, esperava-se que o

estudante tivesse compreendido, por meio de um exemplo geométrico, algo que seria posteriormente estabelecido por um teorema, a saber, que se os limites de $f(x)$ quando $x \rightarrow x_0$ à esquerda e à direita são diferentes, então o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow x_0$ não existe. Além disso, a situação considerada nesta atividade, em nossa opinião, também possibilitava que o aluno notasse que, embora $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não exista, $f(x_0) = f(0) = 0$, ou seja, esta questão fornecia mais um exemplo de que, nem sempre, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Finalmente, o roteiro trazia uma atividade que, com base em tudo que havia sido trabalhado, pedia que o aluno formulasse uma primeira definição para limite. Essa questão era a seguinte:

5 – Tendo em vista os exemplos anteriores, tente formular uma definição para: L é limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 .

A nosso ver, o roteiro III que acabou de ser apresentado e analisado dá ao leitor deste trabalho uma boa idéia de como os conceitos fundamentais do Cálculo eram abordados nestes cursos da década de 1970 conduzidos de acordo com esta metodologia. Percebemos que, de fato, assim como nos afirmaram os professores e alunos participantes desta experiência, os conceitos eram realmente trabalhados com alto nível de rigor, mas, ao contrário do que acontecia até então, ao aluno não cabia apenas o papel de tomar nota do conteúdo já formalizado e sistematizado que o docente apresentava na lousa; era ele por meio de atividades individuais e em grupos quem ia construindo o conhecimento, partindo de idéias geométricas e de noções intuitivas e, pouco a pouco, também por meio de atividades, formalizando-o de acordo com os níveis de rigor esperados para um aluno de um curso de Matemática. E este processo paulatino de descoberta, visualização, formalização e rigorização de determinado assunto geralmente englobava mais do que um roteiro. No caso dos limites, por exemplo, o trabalho não terminava na quinta questão do roteiro III, na qual os alunos formulavam uma definição provisória de limite com base em todo o estudo feito naquela aula. Na aula seguinte, aquele trabalho seria retomado e rediscutido, outras reflexões – agora em grupos – seriam feitas auxiliadas pelas atividades propostas no roteiro IV, que iremos apresentar e analisar na sequência. É importante destacar que para que essa metodologia funcionasse, era indispensável que o professor analisasse, antes de retornar para a sala de aula, o que os alunos haviam produzido no encontro anterior: “Havia a necessidade de o aluno ter

um retorno, uma resposta rápida porque a atividade teria uma continuação; ele precisava desse ‘feedback’ ” ¹⁷⁶.

Então, depois de analisar o que os alunos haviam respondido nas questões do roteiro III que, como já afirmamos, era individual, Cardassi propunha que eles discutissem, em grupo, as cinco atividades do roteiro IV, que se iniciava com um comentário que deixava claro para eles que o que seria feito naquela aula era uma continuação do trabalho anterior:

Vocês devem ter em mãos o roteiro III. O objetivo agora é extrair do roteiro individual os fatos essenciais e suas aplicações mais imediatas.

A primeira questão pedia o seguinte:

1 – Comparem e discutam as definições de limite que apareceram nos roteiros individuais. Escrevam no relatório a que o grupo julga a melhor.

Nesta atividade, os alunos deveriam analisar, em grupo, a definição que cada um deles havia produzido individualmente na aula anterior. Precisaríamos discutir sobre o conceito de limite, sobre tudo o que havia sido trabalhado nas questões do roteiro III, para, então, julgarem por que a definição elaborada por algum deles estava incorreta, incompleta, não precisa do ponto de vista matemático ou não era geral o bastante para poder ser tomada como uma definição de fato. Enfim, precisaríamos chegar a um consenso a respeito da melhor forma de definir limite.

A segunda atividade dizia o seguinte:

2. Leiam a definição de limite do fascículo (Def. III.01., pag III.1). Estabeleçam uma comparação entre a definição escrita no relatório e a do fascículo.

Nesta questão, os alunos deveriam ir à bibliografia de referência do curso – que, como já dissemos no capítulo 4, era constituída por fascículos de Cálculo Diferencial e Integral escritos por diversos professores do IME – e comparar a definição presente na bibliografia com aquela produzida por eles. Essa atividade ilustra a forma como – eventualmente - era feito o uso de “livro” durante essas aulas baseadas nos roteiros. Do ponto de vista didático, essas duas primeiras questões merecem destaque por possibilitarem uma discussão aprofundada a respeito de uma definição matemática, discussão esta que a nosso ver é importante, porque, por meio dela, os alunos, em grupo, teriam condições de discutir o papel,

¹⁷⁶ CERRI (2009)

o significado e a importância de cada um dos elementos e símbolos presentes na definição rigorosa do conteúdo matemático que estavam estudando, o que, provavelmente, ocasionaria um aprendizado mais efetivo a respeito deste conceito do que se os estudantes somente assistissem à exposição do professor, como acontecia nos cursos ministrados antes dessa estratégia de ensino baseada em roteiros de estudo ter sido implantada. Além disso, ao fazer com o que aluno comparasse definições formuladas por ele com aquelas presentes em obras de referência, o levava, conseqüentemente, a refletir a respeito dos possíveis detalhes teóricos levados em consideração pelo autor do livro e que ele e/ou seus colegas, porventura, não tivessem percebido. Até então, não havíamos percebido este tipo de preocupação em nenhum outro curso analisado; as definições eram simplesmente apresentadas pelos professores e aos alunos cabia apenas aceitá-las, sem maiores questionamentos.

A terceira questão do roteiro IV era:

3 – Considerem as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

a) $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = ax + b$

c) $f(x) = \begin{cases} 5x, & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$

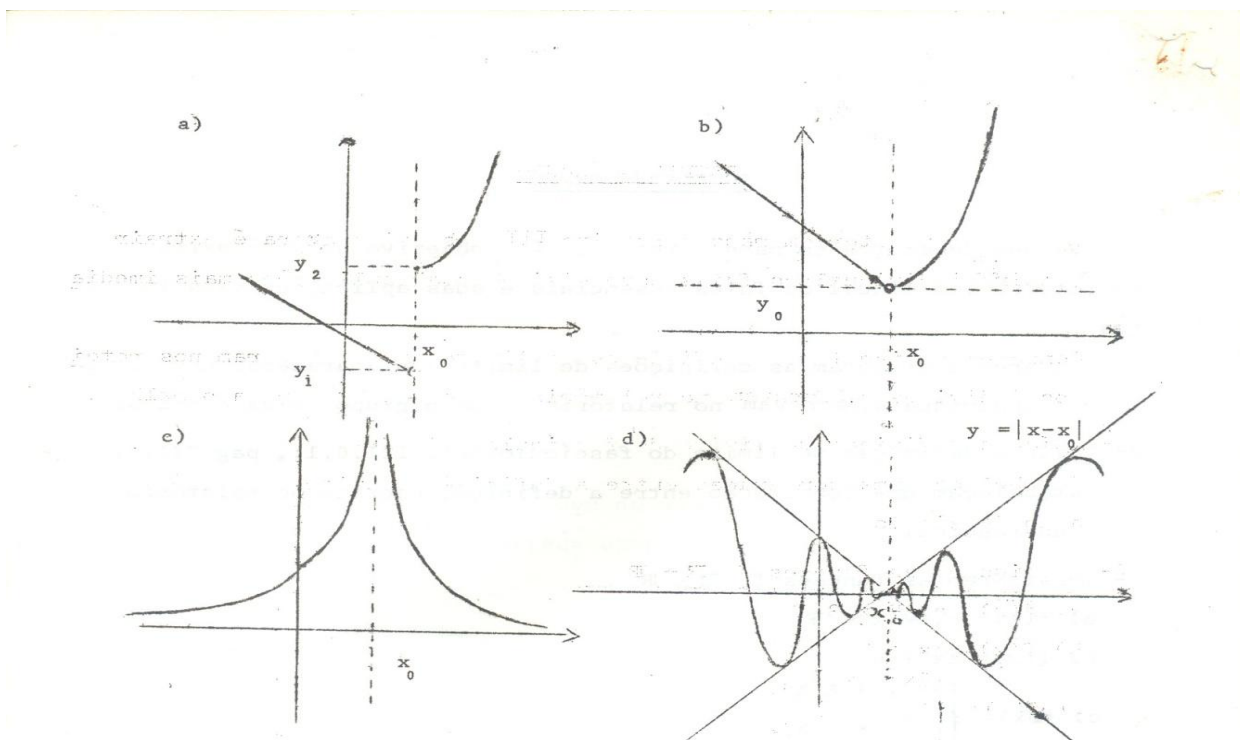
i) Em cada caso, determinem um “candidato” L a limite de f quando x tende a x_0 .

ii) Provem que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, usando a definição.

Nesta questão, o aluno, de alguma forma, deveria perceber o que acontece com os valores da função quando $x \rightarrow x_0$ em cada um dos casos. É preciso destacar que, até este momento, os teoremas sobre limites – que os alunos normalmente memorizam e aplicam – sequer haviam sido citados. Para responder ao item (i), eles provavelmente recorreriam ao mesmo tipo de raciocínio trabalhado no roteiro III, talvez até mesmo considerando um x_0 particular para, em seguida, generalizar para um x_0 genérico. No item (ii), é que trabalhariam, pela primeira vez, com a definição formal de limite; deveriam demonstrar, com o auxílio dos epsilons e deltas, o que haviam percebido, de algum modo provavelmente mais intuitivo ou geométrico, no item (i). Mais uma vez destacamos que, da forma como o assunto era encaminhado pelos roteiros, as demonstrações formais utilizando os epsilons e deltas acabavam, a nosso ver, parecendo aos alunos como uma consequência natural de todo o estudo feito e não como algo artificial, desprovido de significado.

A atividade quatro era a seguinte:

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico é dado abaixo. Em cada caso, digam se existe ou não $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, justificando.



Nesta questão, todos os dados de que os alunos necessitassem para determinar se os limites existem ou não deveriam ser obtidos por meio dos gráficos apresentados. Além disso, para obterem estas informações dos gráficos, precisariam retomar algumas idéias trabalhadas nas atividades discutidas no roteiro número III. No item (a) o aluno deveria recordar a situação trabalhada na quarta questão do roteiro anterior, na qual os limites pela esquerda e pela direita eram diferentes e, portanto, não existia $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Já no item (b), deveria retomar a situação apresentada na terceira questão do roteiro III, na qual, apesar da função não estar definida em x_0 , os limites laterais existem e são iguais. No item (c) trabalharia, pela primeira vez, com o caso de uma função para a qual $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$. E, a nosso ver, a introdução de casos como estes por meio de gráficos talvez, de fato, pudesse favorecer uma melhor compreensão por parte do aluno. E finalmente, no item (d), o estudante trabalharia pela primeira vez com uma função que tem como característica o fato de que, à medida que x tende para x_0 , seus valores se tornam limitados por duas retas – as retas $y = -|x - x_0|$ e $y = |x - x_0|$. Deveria perceber então que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Já a quinta e última questão do roteiro pedia o seguinte:

5 – Dada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x \cos 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

a) Mostrem que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, usando a definição.

b) Observe que na prova de (a) vocês utilizaram o fato de $\left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1$. Se $f(x)$ e $g(x)$ forem tais que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$, como provar, utilizando a definição, que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0 \text{ ?}$$

Podemos perceber que, como era de se esperar, a última questão do roteiro era a mais complicada. Novamente destacamos que, nos cursos conduzidos de acordo com esta estratégia de ensino, ao invés do professor ir para a lousa e apresentar algumas demonstrações ou então deixá-las a cargo dos alunos em uma lista de exercícios que estes deveriam solucionar fora da sala de aula, as demonstrações são entendidas como atividades com potencial para desencadear discussões fundamentais para a compreensão do conceito que está sendo trabalhado. Veja, por exemplo, esta última questão do roteiro IV; didaticamente, ela é importante porque possibilitava que os alunos discutissem, em grupo, a respeito de uma demonstração; eles precisavam encontrar estratégias que os permitissem provar o que estava sendo pedido. E, nesta busca, eram obrigados a refletir a respeito de diversos aspectos intrínsecos ao conceito que estava sendo estudado, a respeito das características das funções envolvidas em cada uma das atividades e também, muito provavelmente, a respeito de detalhes referentes ao rigor e formalismo com que deveriam organizar uma demonstração matemática, sobre o papel de cada elemento que deveria estar presente nesta demonstração.

Além das questões referentes ao conteúdo que estava sendo abordado, cada roteiro trazia também uma ficha de avaliação do trabalho, que deveria ser preenchida, individualmente, por cada integrante do grupo. Era o momento em que cada aluno deveria avaliar a sua própria participação no trabalho realizado. Na sequência, transcrevemos a ficha. É importante destacar que essa avaliação não trazia questões abertas; os alunos deveriam apenas assinalar aquelas cujas respostas fossem afirmativas:

Ficha de Avaliação do Trabalho

1- Nome _____

Grupo: _____

2 – Analise sua própria participação no grupo. Assinale as respostas afirmativas:

- a) Você participou ativamente do trabalho discutindo, expondo suas dúvidas ou procurando solucionar as dúvidas de outros membros do grupo?
- b) Você se preocupou com o isolamento de algum membro do grupo procurando estimular sua participação com perguntas?
- c) Você aprendeu fatos novos ou teve novas idéias depois da discussão em grupo?
- d) Você assumiu integralmente as conclusões do grupo?

- e) As conclusões do grupo são diferentes de sua opinião pessoal, mas você as aceitou por ser a opinião da maioria?
- f) Os objetivos do trabalho estavam claramente definidos para você?
- g) Você acha que o objetivo do trabalho foi atingido?

Em nossa opinião, embora as questões da ficha de avaliação fossem relevantes, a maneira como as respostas eram pedidas, provavelmente, impossibilitava os professores de obterem dados mais esclarecedores e confiáveis, já que, o aluno não precisava tecer nenhuma consideração a respeito de sua resposta. Se fossem pedidas justificativas em cada uma das respostas, o professor poderia ter informações mais precisas e mais ricas a respeito daquilo que estava interessado em saber. Um questionário em que o aluno apenas assinala respostas afirmativas, a nosso ver, não pode ser considerado como uma ferramenta confiável para a obtenção de informações a respeito de uma determinada experiência de ensino.

Estes cursos de Cálculo ministrados em 1976 e 1977 com auxílio dos roteiros são, a nosso ver, exemplos de que, como destaca Reis (2001), é possível fazer uma abordagem rigorosa da disciplina sem, no entanto, ser excessivamente formalista. Embora não possamos dizer que os conceitos fossem introduzidos, de fato, de maneira intuitiva, eles não eram apresentados diretamente por meio da sequência definição/teorema/demonstração/aplicação. Os estudantes, por meio das atividades, é que eram levados a estabelecerem definições, a perceberem possíveis teoremas e, posteriormente, também por meio dos roteiros, demonstrá-los. Somente após este trabalho de descobertas e tentativas de sistematizações é que o conhecimento era institucionalizado pelo docente e, neste momento, em consequência de todo o trabalho desenvolvido, a formalização acabava parecendo aos alunos como algo natural, exatamente o que, de acordo com Lakoff & Núnes (1997), deve ser buscado pelo professor. A maneira como esta metodologia de ensino foi planejada e conduzida mostra ainda que, para buscar o conhecimento significativo do aluno, não é necessário banalizar o curso de Cálculo e afastar dele qualquer vestígio de formalismo e de rigor. Conforme já foi comentado, o objetivo de se implantar este esquema diferenciado de aulas foi exatamente tentar fornecer maiores subsídios ao estudante para que este pudesse, efetivamente, compreender uma abordagem mais formal e com maior nível de rigor da disciplina. Outro ponto positivo desta metodologia é que, em nossa opinião, ela talvez pudesse contribuir, ao menos em parte, para o desenvolvimento daquilo que David & Lopes (1998) chamam de pensamento matemático flexível, que é a capacidade do estudante de pensar de forma criativa e autônoma buscando generalizar e provar padrões observados, dar sentido ao conteúdo que está sendo desenvolvido ao invés de recorrer a regras e algoritmos memorizados e ser criativo nas soluções das

questões que estão sendo trabalhadas. Convém destacar que, embora Druck tenha comentado que, atualmente, percebe que as atividades não davam espaço para a criatividade do aluno, a nosso ver, para o contexto da época, elas foram sim grande avanço neste sentido.

Por outro lado, apesar destes aspectos positivos destacados no último parágrafo, percebemos que a maioria das atividades não fornecia elementos suficientes para que o estudante pudesse, de fato, perceber algo que, para Cantoral, Cordero, Farfán & Imaz (1990), é fundamental: em que situações – matemáticas ou não – aqueles conceitos que estavam sendo estudados deveriam ser utilizados e/ou aplicados. Além disso, conforme fica evidente pelas próprias declarações das docentes envolvidas na experiência a respeito de quais eram suas preocupações básicas ao implantá-la, declarações estas já citadas nos parágrafos anteriores, os roteiros acabavam privilegiando, em geral, os aspectos formais e não os epistemológicos e cognitivos, como, de acordo com Cordero (2005) seria mais indicado em um curso de Cálculo.

De qualquer maneira, no entanto, podemos afirmar que a implantação desta metodologia de aulas baseadas em roteiros e trabalhos em grupo talvez tenha sido a primeira grande inovação didática, no sentido definido por Lucarelli (2000) e apresentado na primeira seção do capítulo, vivenciada pela disciplina de Cálculo da Matemática desde sua origem, no curso de Análise Matemática implantado por Fantappiè em 1934, até os dias atuais. De acordo com Franco (2010), para que uma inovação didática, que muitas vezes traz consigo uma diversificação metodológica, tenha condições de ser bem sucedida, ela precisa vir acompanhada de mudanças nos critérios de avaliação da aprendizagem do estudante e de uma transformação na relação entre professor e aluno. E tudo isto aconteceu nesta experiência com os roteiros, como deve ter ficado claro para o leitor ao longo dos últimos parágrafos. Pela primeira vez na trajetória da disciplina, rompeu-se com a maneira tradicional de se conduzir uma aula e de se avaliar o aprendizado, na qual o professor expõe o conteúdo já formalizado e sistematizado, o aluno toma nota e aceita passivamente aquilo que está sendo exposto e posteriormente reproduz aquele conhecimento nas avaliações – que se resumem, em geral, a duas provas individuais aplicadas na metade e no final do semestre. Isto é, rompeu-se com um sistema baseado na ‘transmissão’ de conhecimentos e foi-se em direção a outro valorizando a avaliação continuada ao longo de toda a disciplina (por meio dos roteiros) e a construção do conhecimento por parte do próprio estudante, algo que, para Cantoral (1993), Rezende (2003), Zhang (2003) e Fischer (2009) é fundamental no processo de aprendizagem do aluno. Convém destacar que as tentativas de se promover esta ruptura provavelmente foram inspiradas por reflexões mais amplas e não apenas locais, já que, de acordo com Dias

Sobrinho (1994) e Pachane (2007), durante a década de 1970 – mesma época em que esta experiência dos roteiros aconteceu na USP – houve uma tendência no ensino superior brasileiro em valorizar o aprendizado por meio da pesquisa e em afastar o estudante do papel de receptor passivo de informações e colocá-lo no centro do processo de ensino e aprendizagem como agente construtor do próprio conhecimento. Nesta época, de acordo com Pimenta & Anastasiou (2002), começou-se a buscar, nas aulas universitárias, uma relação de parceria entre professores e estudantes visando à construção do conhecimento.

Apesar desta experiência de ensinar Cálculo aos alunos do curso de Matemática da USP por meio de uma metodologia baseada em roteiros e discussões em grupo ter sido bastante importante do ponto de vista didático, ela não durou muito tempo. Como já dissemos, tal experimento teve início por volta de 1975 - quando a professora Bonomi resolveu adaptar para a Matemática o trabalho que estava sendo desenvolvido nas turmas da Física pelas professoras Martin Bund, Coelho e De Souza. Na metade de 1976, Bonomi precisou se afastar da Universidade de São Paulo e a equipe de professores envolvidos no projeto sofreu sua primeira baixa. A partir daí, a tentativa de conduzir aquela disciplina de maneira diferenciada durou apenas mais um ano. De acordo com Chalom, em 1978 o Cálculo voltou a ser ministrado de acordo com os moldes tradicionais, com aulas predominantemente expositivas e pouca participação dos alunos.

De acordo com Cerri, esse trabalho com os roteiros foi deixado de lado por ser algo muito laborioso para os professores que dela participavam. Os envolvidos precisavam se dedicar muito; havia um grande volume de material a ser corrigido e de textos a serem escritos. Praticamente em toda aula havia coisas que os professores deveriam levar para casa e corrigir; e essas correções obrigatoriamente teriam de ser feitas antes da aula seguinte já que, para dar continuidade ao trabalho, o aluno precisava de um retorno a respeito daquilo que havia estudado anteriormente.

Druck comentou durante a entrevista que nos concedeu que a maioria dos professores envolvidos neste projeto eram recém-formados que, paralelamente a estes cursos que estavam ministrando, faziam pós-graduação e este trabalho com os roteiros começou a lhes tomar muito tempo: “num certo momento computamos o tempo e verificamos que estávamos trabalhando 30 horas por semana nas atividades da disciplina. Ainda não éramos nem mestres e precisávamos também nos ocupar de nossas próprias carreiras; estávamos todos no programa de mestrado.”¹⁷⁷. Além disso, essas inovações no ensino do Cálculo não eram

¹⁷⁷ DRUCK (2009).

muito valorizadas no Instituto de Matemática: “pelos alunos foi valorizado, mas pelos demais professores não” ¹⁷⁸. Dessa forma, era natural que, com o passar do tempo, esses docentes envolvidos nesse projeto se afastassem e fossem ministrar cursos que lhes ocupassem menos tempo e, conseqüentemente, começasse a haver uma renovação dos professores responsáveis pelo Cálculo na Matemática. Também era de se esperar que, como essa idéia de utilizar a metodologia baseada em roteiros não era um projeto da universidade e nem contava com o apoio de todos os docentes do IME – era uma preocupação específica daquela equipe que estava à frente da disciplina até então - com essa troca de professores a experiência acabasse sendo deixada de lado e que se optasse por um retorno às aulas expositivas.

Cerri resume da seguinte forma o abandono à idéia dos roteiros:

O que eu acho que realmente afastou as pessoas é que você precisaria ter uma equipe dedicada e não dá sempre para os mesmos professores ficarem fazendo isso; um vai fazer doutorado, o outro vai fazer outros projetos... Enfim, a continuidade dependia basicamente da dedicação do professor e por isso que morreu. (CERRI, entrevista, 2009).

Em 1978, findada esta experiência com os roteiros, a disciplina de Cálculo foi ministrada, majoritariamente por meio de aulas tradicionais expositivas, por Fernandes. Segundo Chalom, este curso foi dado com elevado nível de rigor e com ênfase nas demonstrações formais dos resultados trabalhados, todas apresentadas já sistematizadas pela professora. A entrevistada destacou também que Fernandes sempre procurava perceber se os estudantes estavam, de fato, entendendo suas explicações para que, caso fosse necessário, procurar outras formas de tentar transmitir suas idéias. Com relação à participação dos alunos, pela própria metodologia adotada, ela era menos intensa do que nos cursos baseados nos roteiros.

Durante a década de 1980, conforme já comentamos no capítulo anterior, começou a haver no IME uma maior variabilidade em relação ao nível de rigor dos cursos de Cálculo. Em tal período houve desde disciplinas conduzidas com nível de rigor mais alto do que aquele atualmente presente nos cursos de Análise até outras ministradas com uma orientação bem próxima daquilo que é feito, hoje em dia, nos cursos iniciais de Cálculo da maioria das universidades brasileiras; dependia exclusivamente daquilo que era considerado mais adequado pelo docente que estava conduzindo a disciplina em cada ocasião. Faremos então, na sequência, comentários a respeito dos níveis de rigor adotados em alguns destes cursos

¹⁷⁸ DRUCK (2009).

ocorridos nos anos 1980, bem como das preocupações didáticas observadas nos mesmos e nos livros que lhes serviram de referência.

No ano de 1980 a professora Castilla foi a responsável pelo curso inicial de Cálculo da Matemática e, segundo Oliveira, seu ex-aluno e atual professor da USP, o nível de rigor já era mais moderado do que aquele observado em anos anteriores o que, de acordo com ele, pode ser percebido até mesmo pelo manual indicado como referência bibliográfica na disciplina, a saber, *O Cálculo com Geometria Analítica* de Louis Leithold, considerado por ele mais simples do que os livros de Cálculo escritos especificamente para os alunos da Matemática, “apesar dos epsilons e deltas [ainda] estarem presentes”¹⁷⁹. Aliás, a respeito dos tais epsilons e deltas, Oliveira comenta que essa era, sem dúvida, a parte do curso que mais causava dificuldades para os alunos; era a mais difícil de entender: “nós nos matávamos com aquilo, demorávamos a entender e a maior parte dos alunos ficava sem entender mesmo”¹⁸⁰. Isto nos dá indicações de que esta abordagem formal da disciplina – vista por muitos como sendo a parte rigorosa, como se não pudesse haver rigor senão o formal – da maneira como era trabalhada naquela época não parecia ter muito significado para os estudantes. E era exatamente este aprendizado significativo da parte formal do Cálculo que os professores que se envolveram na experiência de ensino baseada em roteiros, alguns anos antes, pareciam buscar. Neste sentido, não há como não destacar que, no início da década de 1980, parece ter havido um retrocesso em relação a algumas reflexões que já haviam sido feitas, em anos anteriores, a respeito do processo de ensino e aprendizagem da disciplina. As demonstrações, por exemplo, que nos roteiros eram discutidas em grupo, auxiliadas por uma sequência de atividades, com um grau crescente de dificuldade, neste curso vivenciado por Oliveira eram diretamente apresentadas aos estudantes durante as aulas ou, em alguns casos, propostas como exercícios, se tornando os grandes obstáculos das listas e das avaliações: “às vezes, aparecia uma demonstração mais simples com epsilons e deltas e a turma toda ia muito mal. (...) Para nós, qualquer demonstração era complicada”¹⁸¹. Não havia um tempo para que, antes de sistematizar, o aluno construísse e/ou interiorizasse aquele conceito que estava sendo trabalhado e seus significados, algo visto por Rezende (2003) como fundamental para a aprendizagem.

De acordo com o depoimento de Oliveira, Castilla era bastante receptiva às perguntas dos estudantes e à participação dos mesmos durante as aulas – embora esta se resumisse ao

¹⁷⁹ OLIVEIRA (2009).

¹⁸⁰ OLIVEIRA (2009).

¹⁸¹ OLIVEIRA (2009).

esclarecimento de dúvidas e à resolução de exercícios. As aulas, conforme já comentamos no capítulo 4, funcionavam de acordo com o seguinte esquema: a docente inicialmente apresentava, na lousa, a parte teórica e, em seguida, pedia que os alunos trabalhassem com questões referentes àquele conteúdo, sendo que as estas eram sempre de cálculos de limites, derivadas e integrais. Para nosso entrevistado, esta idéia de sempre reservar parte das aulas para que os alunos trabalhassem com exercícios relacionados ao conteúdo que havia sido ministrado era algo bastante interessante do ponto de vista didático e que, atualmente, acabou perdendo espaço: “ela reservava sempre um tempo da aula (...) meia hora ou quarenta minutos (...), passava os exercícios, pedia que nós resolvêssemos; (...) e depois (...) ia corrigindo. Algo que, hoje em dia, é difícil de ser visto nos cursos de Cálculo” ¹⁸². Neste curso vivenciado por Oliveira, assim como naqueles baseados nos roteiros, de certa forma a avaliação era continuada, já que a média final da disciplina não era calculada apenas com base no resultado das provas: as notas obtidas pelos alunos nas muitas listas de exercícios que solucionavam ao longo do semestre também eram levadas em consideração.

Oliveira comentou também a respeito das dificuldades enfrentadas na transição da educação básica para o ensino superior. Ao contrário de muitos de nossos entrevistados que ingressaram na universidade antes da década de 1980 e já estavam acostumados com demonstrações, nesta época elas já não eram mais muito trabalhadas no antigo colegial ¹⁸³ e esta foi uma das causas das dificuldades de Oliveira:

O choque ao sair do colegial e fazer um curso de Cálculo, acho que era extremamente semelhante ao de hoje. Eu não estava acostumado com demonstrações e não conhecia argumentos básicos em Matemática, que eram considerados triviais em nível universitário, tais como: princípio de indução finita e demonstração por absurdo. As dificuldades que os alunos têm com os epsilons e deltas, eu também tive muita. Fui um aluno muito bom no nível médio e tirei a primeira nota baixa na universidade, justamente na disciplina de Cálculo. (OLIVEIRA, 2009, entrevista).

Na sequência, destacaremos algumas preocupações didáticas observadas na maneira escolhida por Leithold para trabalhar com os conceitos fundamentais do Cálculo no manual adotado como referência nesse curso ministrado por Castilla e tentaremos perceber com que nível de rigor esta abordagem é feita pelo autor.

O livro *O Cálculo com Geometria Analítica* de Louis Leithold foi lançado em 1968 e em 1977 foi traduzido para o português pelos professores Antonio Paques, Otília Teresinha W. Paques e Sebastião Antonio José Filho. Foi esta versão traduzida que analisamos.

¹⁸² OLIVEIRA (2009).

¹⁸³ Atual Ensino Médio.

No prefácio de seu manual, o autor destaca que “a ampla gama de exemplos e exercícios permite que este livro seja destinado a estudantes de Engenharia, Ciências Físicas, Econômicas ou áreas não técnicas” (LEITHOLD, 1977, prefácio), deixando explícito que não se tratava de um texto escrito especificamente para cursos de Cálculo ministrados a futuros matemáticos ou a futuros professores de Matemática. Comenta ainda que, ao redigi-lo, tentou encontrar um equilíbrio “entre a apresentação formal do cálculo elementar e o enfoque clássico, intuitivo e computacional” e que, como tal livro foi pensado para auxiliar aqueles estudantes que estivessem ingressando no ensino superior, “procurou-se que a exposição estivesse sempre à altura da experiência e maturidade do principiante, sem omitir ou deixar de explicar nenhuma passagem”. Este último comentário do autor nos dá indícios de que, assim como para Grattan-Guinness (1997), também para ele, o rigor se dá em níveis e deve variar de acordo com a maturidade matemática do aluno, idéia que se torna ainda mais explícita quando defende que em um primeiro curso de Cálculo, não necessariamente o professor precisa apresentar as demonstrações formais de todos os resultados trabalhados. Para alguns teoremas, neste momento, pode ser suficiente, e até mesmo mais produtivo para o estudante, que se trabalhe apenas com suas justificativas geométricas e suas aplicações, por meio de amplas discussões mediante figuras e exemplos, tomando o cuidado de “ressaltar que o que se apresenta é uma ilustração do conteúdo dos teoremas e não uma demonstração” (Ibid.).

Uma das principais preocupações didáticas manifestadas pelo autor e que também já é explicitada no prefácio é a de apresentar aplicações do Cálculo em outras áreas do conhecimento que não a Matemática, indo além daquelas tradicionais na Física apresentadas na maioria dos livros já existentes. Leithold afirma que, na redação do seu texto, houve a preocupação de acrescentar “aplicações adicionais do cálculo que incluem algumas nos campos de Economia e da Administração de Empresas”. Os exercícios também foram pensados de forma a atender a esta sua preocupação, sendo incluídas, segundo o autor, questões ilustrando maiores possibilidades de aplicações do Cálculo.

É interessante destacar também que, em uma idéia que coaduna com àquela defendida por Gomide desde o final da década de 1940, o autor comenta, ainda no prefácio, que, no capítulo 1 do manual, em que trata de resultados básicos do sistema dos números reais, evitou “apresentar argumentos sofisticados e enganosos que têm como finalidade demonstrar que algumas das propriedades podem ser deduzidas de outras” (Ibid.). Assim como Gomide, que afirmou que, em sua época de estudante, a idéia de construção dos números reais via noção de cortes não era compreensiva para os alunos ingressantes e, por esta razão, não os interessava naquele momento, Leithold, em sua experiência como professor, percebeu que “poucos

alunos que se iniciam em cálculo são capazes de apreciar tais discussões” (Ibid.). Era necessário que, primeiramente, os estudantes fossem capazes de manipular com os conceitos básicos da disciplina; somente após esta manipulação é que teriam condições de compreender e se interessar por discussões mais críticas referentes a tais elementos. Novamente percebemos manifestada nesta última citação a idéia de que, para Leithold, o tipo de abordagem apresentada deve variar de acordo com a maturidade matemática dos estudantes.

Ainda no prefácio, faz alguns comentários a respeito da maneira como os conceitos de função, limite, derivada e integral serão trabalhados ao longo do texto; comentários estes que nos dão algumas pistas a respeito dos cuidados didáticos manifestados pelo autor e da forma como este irá relacionar intuição e rigor na abordagem de tais conteúdos:

É definido o conceito de função como um conjunto de pares ordenados e é utilizada esta idéia para descartar o conceito de função como uma correspondência entre conjuntos de números reais. À noção de limite de uma função, é dada primeiramente uma motivação passo a passo, a qual leva o leitor a uma discussão intuitiva do processo de limite, até a definição rigorosa que utiliza a simbologia epsilon-delta. Inclui-se um conjunto de exemplos de dificuldade progressiva. Todos os teoremas sobre limites estão enunciados, e se apresentam no texto algumas demonstrações, enquanto que outras se esboçam nos exercícios. (...) Antes de dar a definição formal de uma derivada, é definida a reta tangente a uma curva e a velocidade instantânea no movimento retilíneo para demonstrar, de antemão, que o conceito de uma derivada tem muitas explicações, tanto geométricas como físicas. Os teoremas sobre diferenciação são demonstrados e ilustrados por meio de exemplos. (...) A antiderivada é introduzida no capítulo 5. Utilizo o termo “antidiferenciação” em lugar de integral indefinida, mas conserva-se a notação padrão para não dar ao leitor uma nova notação que tornaria difícil a leitura de referências comuns. Esta notação sugerirá ao aluno que deve existir certa relação entre as integrais definidas (...) e as antiderivadas, mas não vejo nisto nada nocivo sempre e quando se apresente com o ponto de vista teórico apropriado da integral definida como um limite de somas. (...) A introdução da integral indefinida segue a definição da medida da área sob uma curva como um limite de somas. As propriedades elementares da integral definida são deduzidas e o teorema fundamental do cálculo é demonstrado. (...) Também se destaca o fato de que a integral definida não é, de nenhuma maneira, algum tipo especial de antiderivada. No capítulo 7 são dadas diversas aplicações de integrais definidas. A apresentação dá ênfase não somente às técnicas de manejo, mas também aos princípios fundamentais envolvidos. Em cada aplicação, as definições de novos termos estão inteiramente motivadas e explicadas. (Ibid.).

Percebe-se pela última frase da citação que o autor, ao longo do manual, busca trabalhar não apenas com as técnicas de cálculo, mas também com os aspectos teóricos de cada conceito, em motivar a introdução dos novos entes matemáticos que serão estudados e, ao menos em alguns casos, discutir aspectos referentes às notações empregadas. Além disso, este trecho citado nos dá indícios de que Leithold se preocupa em, antes de formalizar os conceitos e trabalhá-los com um nível mais alto de rigor, recorrer às noções intuitivas dos

mesmos, de forma a tornar mais natural para o leitor a definição formal que será apresentada posteriormente.

A abordagem de limite proposta no manual exemplifica este tipo de trabalho desenvolvido com as noções intuitivas. Para introduzir tal conceito, o autor toma a função $f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$ e estuda os valores de $f(x)$ quando x está próximo de 1, mas não é igual a 1. Considera valores de x cada vez mais próximos de 1, porém menores que 1, e monta uma tabela. Da mesma forma, constrói outra tabela considerando valores de x cada vez mais próximos de 1, porém maiores que 1. Conclui, de ambas as tabelas, que, quanto mais próximo x estiver de 1, mais próximo $f(x)$ estará de 5. Em seguida, afirma que é possível analisar a situação de outro modo, fazendo o valor de $f(x)$ se tornar tão próximo de 5 quanto desejarmos, tornando, para isso, x suficientemente próximo de 1. E então, recorrendo predominantemente à linguagem natural, começa a relacionar o trabalho feito com a noção intuitiva de limite com o tratamento formal e o simbolismo intrínseco a ele que começará a ser apresentado a partir deste ponto do manual. O autor destaca então que outra maneira de dizer aquilo que havia acabado de concluir é afirmar que:

Podemos tornar o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e 5 tão pequeno quanto desejarmos, tornando o valor absoluto da diferença entre x e 1 suficientemente pequeno. Isto é, $|f(x) - 5|$ pode ser tão pequeno quanto quisermos fazendo $|x - 1|$ suficientemente pequeno. Uma maneira mais precisa de escrever isto é usando dois símbolos para estas diferenças pequenas. Os símbolos usualmente são ε (epsilon) e δ (delta). Assim afirmamos que $|f(x) - 5|$ será menor que ε sempre que $|x - 1|$ for menor que δ e $|x - 1| \neq 0$ (desde que $x \neq 1$). É interessante perceber que o tamanho do δ depende do tamanho do ε . Ainda uma outra forma de dizer isto é: dado qualquer número positivo ε podemos tomar $|f(x) - 5| < \varepsilon$ tomando $|x - 1|$ suficientemente pequeno, isto é, existe algum número positivo δ suficientemente pequeno, tal que: $|f(x) - 5| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$. (Ibid., p. 63).

Em nossa opinião, este comentário de Leithold é importante porque dá condições para que os alunos comecem a compreender o significado e o papel desempenhado pelos epsilons e deltas na definição formal de limite. Essa forma de encadeamento das idéias escolhida pelo autor para trabalhar com este conceito, a nosso ver, possibilita que os alunos relacionem os elementos que aparecem na definição formal com aqueles que estavam presentes na abordagem intuitiva. E visando reforçar ainda mais o significado dos epsilons e deltas, Leithold recorre a uma interpretação geométrica do exemplo que estava sendo trabalhado:

Vemos que $f(x)$ situa-se sobre o eixo vertical entre $5 - \varepsilon$ e $5 + \varepsilon$ sempre que x estiver situado sobre o eixo horizontal entre $1 - \delta$ e $1 + \delta$, ou
 $|f(x) - 5| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$.

Outra forma de dizer isto é que $f(x)$, no eixo vertical, pode se restringir entre $5 - \varepsilon$ e $5 + \varepsilon$, limitando-se x entre $1 - \delta$ e $1 + \delta$ no eixo horizontal. (Ibid., p. 64).

É importante destacar que, embora Leithold sempre procure valorizar o trabalho com as noções intuitivas, o autor se preocupa também em destacar que, em algumas situações, a intuição pode nos dar uma idéia equivocada a respeito do conceito que está sendo apresentado e que, portanto, é importante que percebamos a necessidade de se introduzir a definição, de fato, de determinado ente matemático. Por exemplo, ao introduzir função, afirma que “intuitivamente, consideramos que uma quantidade y é uma função de outra quantidade x se existir alguma regra por meio da qual é designado um único valor para y para cada valor correspondente de x ” (p. 50). Destaca, no entanto, que, ao contrário do que indica a intuição, para existir uma relação funcional entre x e y , não é necessário que eles estejam relacionados por meio de uma equação; a relação pode, por exemplo, ser dada por meio de uma tabela. Ilustra este comentário considerando, por exemplo, que “se y é o número de centavos no selo de uma carta aérea e se x é o número de gramas no peso da carta, então y é uma função de x ” (p.50) e esta função não é dada, no texto, por nenhuma equação e sim por uma tabela relacionando x e y . É preciso então de algo mais do que a idéia intuitiva; é necessária uma definição formal estabelecendo o que, de fato, caracteriza uma relação funcional.

Um ponto central em cursos de qualquer disciplina matemática do ensino superior é o estudante perceber que em uma definição figuram somente aquelas características que são essenciais a determinado objeto; tudo aquilo que não está explícito na definição dada não pode ser considerado como sendo algo fundamental ao ente em questão. Comentários deste tipo, a nosso ver, são importantes de serem feitos pelos docentes e pelos autores de livros didáticos, já que, de acordo com Giménez & Machín (2003), o ato de definir é exatamente um dos pontos que diferenciam a Matemática Elementar da Matemática Avançada. Observamos, no entanto, que preocupações deste tipo são bastante raras em livros didáticos: de todos aqueles que analisamos neste trabalho apenas o manual de Hardy (1955) e o de Leithold apresentam, em algum momento, este tipo de cuidado. No caso do texto de Leithold, o detectamos também em um comentário feito logo após a apresentação da definição formal de limite, quando o autor explicita que, o estudante deve perceber que, de acordo com a definição, a função f não precisa estar definida em $x = a$ para que se possa calcular $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. O autor afirma que: “é importante percebemos que na definição acima nada é mencionado sobre o valor da função quando $x = a$. Isto é, não é necessário que a função seja definida para $x = a$, a fim de que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ exista” (p.64).

Outra preocupação didática manifestada pelo autor, inclusive no prefácio, conforme já destacamos, é a de apresentar motivações para os conceitos que serão introduzidos. A forma como Leithold aborda a noção de derivada é, a nosso ver, um exemplo bastante representativo deste tipo de cuidado. Em tal abordagem, opta por motivar o estudo deste objeto matemático por meio dos problemas do traçado de retas tangentes e de determinar a velocidade instantânea de um corpo em movimento retilíneo, questões clássicas que estiveram na gênese do conceito, embora estes aspectos referentes ao histórico do desenvolvimento deste ente não sejam sequer citados na obra.

O tratamento dado ao problema do traçado de tangentes é, em nossa opinião, interessante, dentre outros aspectos, porque há a preocupação de, inicialmente, definir para os estudantes, de maneira precisa, o que é uma reta tangente, conceito que, normalmente, na educação básica, é estudado apenas no caso particular em que se deseja construir uma tangente a uma circunferência. Em razão deste estudo apenas de uma situação específica, os alunos acabam ingressando no ensino superior com a idéia equivocada de que uma tangente a uma curva é aquela reta que a intercepta somente em um ponto, algo que não é característico da definição de tal ente matemático. A abordagem da noção de derivada adotada por Leithold se inicia então exatamente deixando isto claro para o estudante e apresentando aquela que, de fato, é a definição de reta tangente a uma curva qualquer. O autor inicia suas considerações afirmando que:

A maioria dos problemas de cálculo podem ser resolvidos se encontrarmos a reta tangente a uma curva, num ponto específico da curva. Se a curva é uma circunferência, sabemos da geometria plana que a reta tangente em um ponto P da circunferência é definida como a reta que intercepta a circunferência somente no ponto P . Esta definição não é suficiente para uma curva em geral. (...) Nesta seção chegamos a uma definição conveniente da reta tangente ao gráfico de uma função, num ponto sobre o gráfico. Devemos ver de que modo definiríamos a inclinação da reta tangente num ponto, pois conhecendo a inclinação de uma reta e um ponto sobre a reta, a reta está determinada. (Ibid., p. 109).

Tomando então o gráfico de f e um ponto $P(x_1, f(x_1))$ sobre esse gráfico, o autor comenta que deseja definir a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em P . Para isso, toma outro ponto sobre o gráfico de f , $Q(x_2, f(x_2))$ e traça uma secante à curva passando por P e Q . Indicando a diferença entre as abscissas de P e Q por Δx , a inclinação da reta secante PQ é dada por:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Considera então o ponto P como sendo fixo e o ponto Q se movendo ao longo da curva na direção de P , ou seja, Q se aproximando de P , que é o mesmo que fazer Δx tender a zero. Afirma então que:

Quando isto ocorre, a reta secante gira sobre o ponto fixo P . Se a reta secante tem uma posição limite, desejamos que esta posição limite seja a reta tangente ao gráfico em P . Assim, queremos que a inclinação da reta tangente ao gráfico em P seja o limite de m_{PQ} quando Δx tende a zero, caso este limite exista. Se $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_{PQ} = \infty$ então como Δx tende a zero, a reta PQ aproxima-se da reta passando por P que é paralela ao eixo y . Neste caso, queremos que a reta tangente ao gráfico em P seja a reta $x = x_1$. (Ibid., p. 110).

E, então, finalmente apresenta a definição de reta tangente ao gráfico de uma função f em um ponto $(x_1, f(x_1))$:

Se a função f é contínua em x_1 , então a *reta tangente* ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ será:

(i) a reta que passa por P , tendo inclinação $m(x_1)$ dada por:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

se este limite existir; ou

(ii) a reta $x = x_1$ se

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \infty.$$

Se nem (i) nem (ii) são válidos, então não existe reta tangente ao gráfico de f , no ponto $P(x_1, f(x_1))$. (Ibid., p. 110).

Convém destacar que, atualmente, a maioria dos autores define reta tangente apenas no caso (i) e nem sequer discute o caso em que o limite é infinito.

Essa necessidade por uma definição de reta tangente que seja válida para qualquer curva que seja gráfico de função e não somente para a circunferência é mais um exemplo de que, conforme destaca Cantoral (1993), ao ingressar no ensino superior e, principalmente, no curso de Cálculo é necessário que o estudante incorpore idéias novas àquela Matemática estudada na educação básica, idéias estas que, muitas vezes, modificam o significado daqueles conceitos que já conheciam ou, ao menos, conheciam em parte.

Concluída essa discussão a respeito do que é uma reta tangente, Leithold passa a apresentar a segunda motivação para a noção de derivada, utilizando a idéia de velocidade instantânea no movimento retilíneo e concluindo que:

Se f é uma função definida pela equação $s = f(t)$ e uma partícula move-se ao longo de uma reta tal que s seja o número de unidades na distância orientada da partícula desde um ponto fixo, em t unidades de tempo, então a *velocidade instantânea* da partícula no instante t_1 será $v(t_1)$ (...) onde

$$v(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} \quad (1)$$

caso este limite exista. (Ibid., p. 114).

Em seguida, tomando $\Delta t = t - t_1$, o autor reescreve a expressão (1) como

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

caso este limite exista.

Finalmente, após motivar a noção de derivada por meio destes dois problemas aqui citados, trabalhar com exemplos e propor exercícios referentes ao cálculo da velocidade instantânea, Leithold afirma que, tanto a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$, quanto a velocidade instantânea no instante t_1 da partícula que se move ao longo de uma reta e cuja distância orientada s desde um ponto fixo é definida por $s = f(t)$, têm, em suas fórmulas um limite que também aparece em outros problemas e tem um nome específico. É então que apresenta a definição de derivada:

A derivada de uma função f é a função indicada por f' , tal que seu valor em qualquer número x no domínio de f seja dado por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se este limite existir. (Ibid., p. 118).

Depois de apresentar tal definição, o autor a relaciona com as questões da reta tangente e da velocidade instantânea trabalhadas anteriormente, afirmando que:

Se x_1 é um número particular no domínio de f , então

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

caso este limite exista. (...) Notamos que a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$ é precisamente a derivada de f calculada em x_1 . Se uma partícula move-se ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento $s = f(t)$ então (...) vemos que $v(t_1)$ na definição da velocidade instantânea da partícula em t_1 , é a derivada de f calculada em t_1 , ou então, a derivada de s em relação a t , calculada em t_1 . (Ibid., p. 118).

Durante todo o texto, observamos a constante preocupação do autor em esclarecer ao leitor o significado dos símbolos e notações empregadas nas definições formais dos conteúdos abordados. Um primeiro exemplo deste tipo de cuidado pode ser encontrado logo na introdução do conceito de função, quando Leithold discute o significado da notação $f(x)$, afirmando que “sendo f a função que tem como domínio valores de x e como imagem valores

de y , o símbolo $f(x)$ (leia-se “ f de x ”) indica o valor particular de y que corresponde ao valor de x ” (p.56). Outro exemplo bastante ilustrativo deste cuidado do autor com a compreensão, por parte dos alunos, dos símbolos, notações e, conseqüentemente, da abordagem rigorosa e formal do Cálculo, está presente na abordagem da idéia de derivada. Ao definir este ente matemático, afirma que: “uma derivada é, às vezes, indicada pela notação dy/dx . Mas evitamos este simbolismo até que tenhamos definido o que significa dy e dx ” (p. 119). Percebe-se, portanto, que, para o autor, mais importante do que simplesmente apresentar uma notação clássica do Cálculo – que na maioria dos textos deste conteúdo é utilizada desde o momento em que o conceito de derivada é introduzido de maneira formal - é o leitor poder compreendê-la. Assim, se os significados de certas notações ainda não podem ser explicados de maneira compreensível, não há porque introduzir tal simbolismo neste momento; é melhor postergar seu uso até que façam sentido para os estudantes.

Mais um exemplo de preocupação com a real compreensão dos símbolos adotados na obra está presente na abordagem do conceito de integral, quando Leithold, introduz e faz uma discussão detalhada a respeito da notação usualmente empregada para indicar uma soma finita de parcelas:

Neste capítulo trabalhamos com a soma de muitos termos e para isso introduzimos uma notação chamada notação sigma para facilitar a expressão dessas somas. Esta notação envolve o uso do símbolo $\sum$, o sigma maiúsculo do alfabeto grego, que corresponde a nossa letra S . (...) Temos, em geral

$$\sum_{i=m}^n F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \dots + F(n).$$

O número m é chamado o *limite inferior* da soma e n é chamado o *limite superior*. O símbolo i é denominado o *índice da soma*. Ele é um símbolo “arbitrário”, pois qualquer outra letra pode ser usada. (Ibid., p. 225).

Ainda no capítulo tratando de integrais, há mais um comentário do autor que exemplifica esse seu cuidado com as notações. Neste, inclusive, pela primeira vez afirma ao leitor que será possível, recorrendo ao Teorema Fundamental do Cálculo – que até então ainda não foi apresentado – calcular uma integral definida obtendo uma antiderivada. Tal comentário é o seguinte:

Na notação para a integral definida $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ é chamado o *integrand*, a é chamado *limite inferior* e b é chamado *limite superior*. O símbolo $\int$ é denominado um *sinal de integração*. O sinal de integração assemelha-se à letra maiúscula S , que é adequado, pois a integral definida é o limite de uma soma. Ele é o mesmo símbolo que usamos no Capítulo 5 para indicar a operação de antidiferenciação. A razão do símbolo comum é que um teorema (...) chamado teorema fundamental do cálculo,

permite-nos calcular uma integral definida encontrando uma antiderivada (também chamada um *integral indefinida*). (Ibid., p. 239).

Outro aspecto interessante de ser destacado e que percebemos no decorrer da análise do manual é que o autor procura, sempre que possível, após apresentar a definição de algum objeto matemático de maneira formal e com os simbolismos que lhe são característicos, explicar em linguagem natural o que aquela definição quer dizer, revelando, mais uma vez, sua preocupação em dar condições para o estudante entender, de fato, aquilo que está sendo apresentado. Tenta, de alguma forma, evitar que o simbolismo matemático dificulte o entendimento do leitor. Um primeiro exemplo deste tipo de cuidado pode ser encontrado logo após a definição formal de limite, quando Leithold traduz, para a linguagem natural, o que tal definição e a simbologia nela envolvida querem dizer:

Traduzindo-se, em palavras, a definição (...) afirma que os valores da função $f(x)$ aproximam-se de um limite L quando x aproxima-se de um número a se o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e L puder ser tão pequeno quanto desejarmos, tomando-se x suficientemente próximo de a , mas não igual a a . (Ibid., p. 64).

Mais um exemplo, neste sentido, está presente no manual logo após a definição de função integrável em um intervalo $[a, b]$, apresentada da seguinte forma pelo autor:

Seja f uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$. Então dizemos que f é *integrável* em $[a, b]$ se existir um número L que satisfaça a condição que, para cada $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - L \right| < \varepsilon$$

para toda partição Δ , para a qual $\|\Delta\| < \delta$, e para qualquer ξ_i no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$; $i = 1, 2, 3, \dots, n$. (Ibid., p. 238).

Tendo apresentado tal definição, de maneira formal e com os simbolismos que lhe são característicos, procura explicar, em linguagem natural, o significado dela ao leitor:

Em palavras, a definição (...) estabelece que para uma dada função f , definida no intervalo fechado $[a, b]$, podemos tornar os valores das somas de Riemann tão próximas de L quanto desejarmos, tomando as normas $\|\Delta\|$ de todas as partições Δ de $[a, b]$ suficientemente pequenas para todas as possíveis escolhas dos números ξ_i para os quais $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. (Ibid., p. 238).

Com relação a acrescentar para o leitor aspectos relativos à História da Matemática e ao desenvolvimento dos conceitos trabalhados, percebemos que esta não é uma preocupação

de Leithold. Um comentário neste sentido aparece na seção que trata do Teorema Fundamental do Cálculo e é o seguinte:

Historicamente os conceitos básicos da integral definida foram usados pelos gregos, muitos anos antes do cálculo diferencial ter sido descoberto. No século dezessete quase simultaneamente, mas trabalhando independentemente, Newton e Leibniz mostraram que o cálculo podia ser usado para determinar a área de uma região limitada por uma curva ou um conjunto de curvas, calculando uma integral definida por antidiferenciação. Este procedimento envolve o que conhecemos como *teorema fundamental do cálculo* (Ibid., p. 256).

Encerrando nossas considerações a respeito do manual de Leithold, gostaríamos de chamar a atenção para um comentário do autor que, em nossa opinião, é bastante rico do ponto de vista didático por trazer uma distinção precisa entre as noções de integral definida e integral indefinida, algo muito importante de ser comentado com os estudantes, mas que nem sempre está presente nos cursos de Cálculo. Este comentário é o seguinte:

Devido à conexão entre integrais definidas e antiderivadas usamos o sinal de integração $\int$ na notação $\int f(x)dx$ para uma antiderivada. Agora dispensamos a terminologia de antiderivadas e antidiferenciação e começamos a chamar $\int f(x)dx$ a *integral indefinida* de “ f de x , dx ”. O processo para calcular uma integral indefinida ou uma integral definida é chamado *integração*. A diferença entre uma integral indefinida e uma integral definida deve ser enfatizada. A integral indefinida $\int f(x)dx$ é definida como uma função g , tal que sua derivada $D_x[g(x)] = f(x)$. Entretanto, a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ é um número cujo valor depende da função f e dos números a e b e é definida como o limite de uma soma de Riemann. A definição da integral definida não faz referência à diferenciação. A integral indefinida geral envolve uma constante arbitrária; por exemplo,

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Esta constante arbitrária C é chamada uma *constante de integração*. Aplicando o teorema fundamental para calcularmos uma integral definida, não precisamos incluir a constante arbitrária C na expressão de $g(x)$, pois o teorema fundamental nos permite selecionar *qualquer* antiderivada, incluindo aquela para a qual $C = 0$. (Ibid., p. 259).

No ano de 1983, Leite foi o professor responsável pelo curso inicial de Cálculo da Matemática e dentre seus alunos estava Cardona, segundo a qual a disciplina foi ministrada com uma orientação bastante formal, que dificultava o aprendizado dela e de seus colegas que estavam acabando de ingressar na universidade. Percebe-se que, naquele ano, não houve uma preocupação por parte do professor responsável pela disciplina em buscar um nível de rigor que fosse mais adequado à maturidade matemática daqueles estudantes. Provavelmente, na época, o rigor aceito pelo docente – e, pelo que relata Cardona, pela maioria dos outros professores que ministravam aulas para a graduação em Matemática – era o formal. A

intuição dos alunos parece ter sido deixada em segundo plano, com os conceitos sendo introduzidos, segundo as lembranças da depoente, diretamente com alto nível de rigor e formalismo. “O curso todo era bem mais rigoroso. Há professores que reclamam que, hoje em dia, o curso de Cálculo está muito facilitado; eu tenho minhas dúvidas: não sei se é muito facilitado ou se está mais palatável”¹⁸⁴.

Esse excesso de formalismo, presente em todas as disciplinas do curso de graduação em Matemática e não somente no Cálculo, gerava, de acordo com nossa entrevistada, muitas dificuldades para os estudantes no momento de transição da educação básica para o ensino superior. A este respeito afirmou que:

Tudo era completamente diferente do que eu havia aprendido de Matemática até então. Eu não tive nenhuma formação no ensino médio que me desse uma idéia do que eu ia encontrar pela frente e, então, ao chegar à universidade, foi um susto! Naquela época, era muito comum no bacharelado – não só no Cálculo, mas em todas as disciplinas que eu cursei – um grande formalismo. (...) A idéia naquele tempo era formalizar o mais rápido possível. (...) O aluno chegava do ensino médio (...) se deparava com um curso extremamente formal e não conseguia entender. (...) Nós nunca tínhamos visto este rigor. O pouco que havíamos visto de rigor e de demonstração foi exatamente na parte de geometria espacial, (...) mas não foi muito; não chegava aos pés do que encontramos ao entrar na universidade. (CARDONA, 2010, entrevista).

Cardona afirmou que as aulas do professor Leite eram sempre expositivas e praticamente não havia participação dos alunos: “não me lembro de participação não; normalmente ficávamos quietinhos assistindo. Eu me lembro também de concordarmos com tudo, com a cabeça, quando o professor falava apesar de, na verdade, não estarmos entendendo nada. (...) Procurávamos ajuda depois”¹⁸⁵. Não havia, segundo a depoente, qualquer preocupação, por parte do docente, em destacar as aplicações, que não as intrínsecas à Matemática, daqueles conceitos que estavam sendo estudados: “acho também que nós não tínhamos muita idéia dessas coisas e por isso não perguntávamos nada a este respeito. Quem tinha perfil para a aplicação já estava procurando coisas por fora, por si mesmo e não chegava ao professor para perguntar”¹⁸⁶. Também não era usual neste curso de Cálculo vivenciado por Cardona em 1983 o professor resolver exercícios em sala de aula, o que obrigava os alunos a buscar auxílio em livros mais elementares, como, por exemplo, os da Coleção Schaum, para tentar perceber como deveriam raciocinar para solucionar questões típicas da disciplina. Em razão de nunca assistirem alguém com experiência resolvendo exercícios “até mesmo (...)

¹⁸⁴ CARDONA (2010).

¹⁸⁵ CARDONA (2010).

¹⁸⁶ CARDONA (2010).

aprender a escrever [em linguagem] matemática era custoso, porque não havia ninguém para (...) ajudar”¹⁸⁷.

Uma consequência importante trazida pela orientação demasiadamente formal com que o curso de Cálculo foi conduzido na época em que nossa entrevistada era estudante é que alguns daqueles elementos fundamentais de serem abordados em um primeiro contato dos alunos com esta disciplina simplesmente foram deixados de lado. Embora o tratamento inicial de tal conteúdo não deva se reduzir às técnicas de diferenciação e de integração é fundamental que aqueles que tenham concluído tal disciplina saibam obter a derivada ou a integral de uma função, e isto, como já destacamos no capítulo 4, não acontecia neste curso vivenciado por ela; o foco estava apenas na apresentação do conteúdo formalizado e com alto nível de rigor. Desta forma, ao final do semestre o aluno era capaz, por exemplo, de definir integral de maneira bastante rigorosa e formal, mas não era capaz de calcular a integral de uma função mais complicada.

Outro aspecto marcante deste curso de Cálculo vivenciado por Cardona diz respeito à forma como os alunos deveriam proceder para solucionar as questões propostas nas avaliações: de acordo com a depoente, nestes momentos não havia liberdade para que os estudantes resolvessem os exercícios propostos por argumentos que não fossem os do Cálculo:

Uma coisa curiosa, que me marcou muito, é que havia exercícios que você conseguia resolver por Geometria; você não precisava apelar para o Cálculo para resolvê-los e, então, eu pensava: dá para resolver por Geometria? Ótimo; então não vou ficar gastando tempo resolvendo por Cálculo! Mas, aí, eu levava um susto porque não podia, você precisava usar o conteúdo que estava sendo trabalhado, apesar de isto nunca ter ficado claro para o aluno, em momento algum. Hoje em dia, se eu quero que meus alunos utilizem aquilo que estou ensinando, então vou pedir exercícios que tenham a ver com aquilo, mas, também, é lógico que se o aluno resolver o que eu pedi – e que eu achava que só dava para fazer pelo conteúdo que eu estava ensinando – por outro caminho, vou achar ótimo, porque ele terá me (...) feito enxergar algo diferente. Mas, naquela época, não era assim. (Ibid.).

Este fato, a nosso ver, é mais um indício de que o único tipo de rigor aceito na disciplina naquele ano era o formal; argumentos geométricos que, provavelmente, possibilitavam que os alunos compreendessem de maneira mais palatável a situação com a qual estavam trabalhando não eram considerados adequados para serem utilizados como justificativas em uma avaliação de Cálculo, mesmo esta se destinando a estudantes que estavam ingressando naquele

¹⁸⁷ CARDONA (2010).

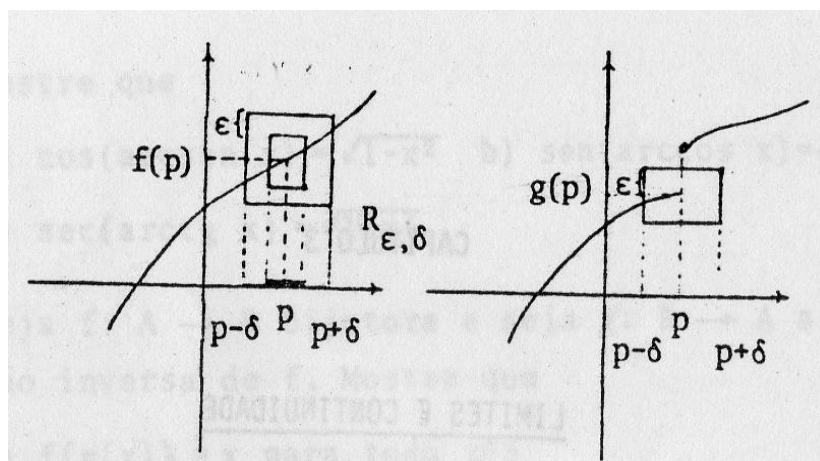
momento no ensino superior e ainda precisavam de maturidade matemática para se apropriar de uma abordagem formal da disciplina.

Façamos então alguns comentários referentes ao nível de rigor e às preocupações didáticas detectadas nas apostilas de Guidorizzi utilizadas como referências nestas aulas de Leite.

Um comentário inicial a ser feito a respeito deste material é que a primeira noção fundamental de um curso de Cálculo – a idéia de função – é apresentada, de maneira formal, já no primeiro parágrafo do capítulo intitulado Funções e Limites, sem qualquer motivação inicial ou comentários a respeito da definição apresentada, que estabelece como sendo função uma terna $(A, B, a \rightarrow b)$ na qual A e B são dois conjuntos e $a \rightarrow b$ é uma regra que permite associar a cada elemento de A um único elemento de B .

A forma escolhida pelo autor para apresentar a noção de limite, baseada na idéia de continuidade, nos parece bastante interessante do ponto de vista didático, por, ao mesmo tempo, fornecer indícios para que o leitor possa compreender os significados daquelas idéias que na definição formal de tais noções matemáticas serão sintetizadas por meio de símbolos específicos, e por permitir que, inicialmente, o leitor visualize graficamente aquilo que, posteriormente, será formalizado. A princípio, afirma que, naquele capítulo, será introduzido “um dos conceitos delicados do Cálculo: o conceito de continuidade” (GUIDORIZZI, 1979, p. 23). Apresenta então os gráficos das funções f e g e afirma que, analisando tais gráficos, o leitor pode perceber que as funções “ f e g se comportam de modo diferente em p ; o gráfico de f não apresenta “salto” em p , ao passo que o de g sim” (p. 23). Comenta que o objetivo do capítulo é “destacar uma propriedade que nos permita distinguir tais comportamentos” (p. 23). E então, introduz uma notação que será utilizada a partir daquele momento do texto e que, ao mesmo tempo em que fornece elementos para que as idéias discutidas anteriormente comecem a ser formalizadas e para que nelas se introduza a simbologia característica, continua favorecendo a ilustração geométrica da mesma, dando, a nosso ver, condições para que o leitor percebesse o significado daqueles símbolos que passaram a ser introduzidos. Tal notação é a seguinte:

No que segue $R_{\varepsilon, \delta}$ indicará um retângulo centrado em $(p, f(p))$ (ou em $(p, g(p))$), de altura 2ε e base 2δ , de lados paralelos aos eixos coordenados.



(GUIDORIZZI, 1979, p. 24)

Destaca então que:

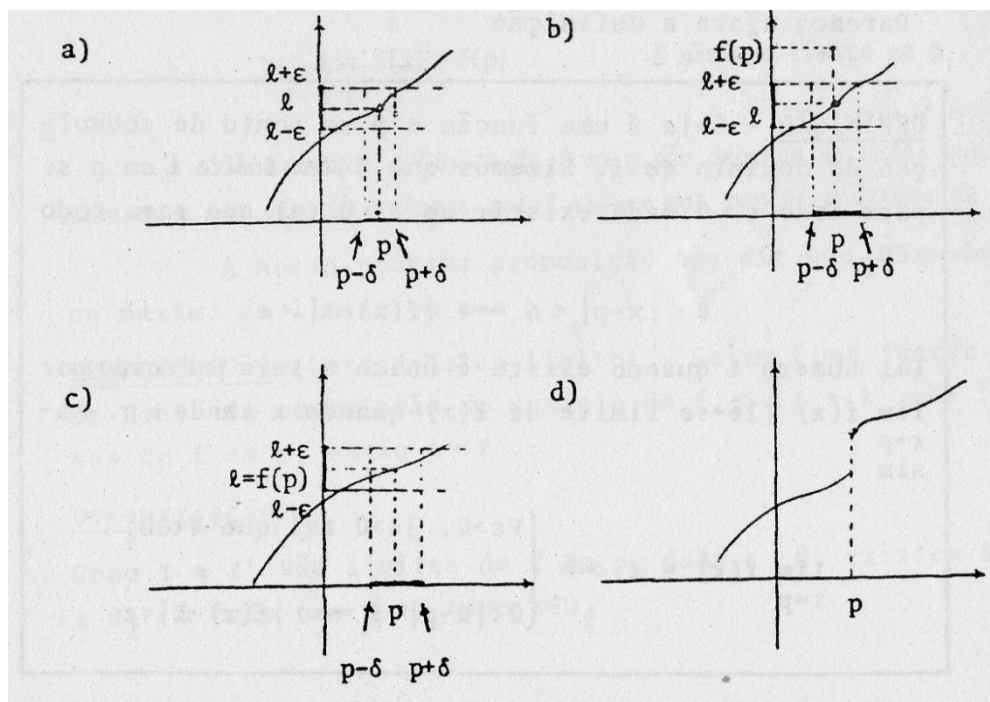
A função f goza da propriedade: para todo $\varepsilon > 0$ (isto é, qualquer que seja a altura 2ε) é possível fabricar um $\delta > 0$ de modo que o ponto $(x, f(x))$ permanece no retângulo $R_{\varepsilon, \delta}$ quando x percorre o intervalo $]p - \delta, p + \delta[$. A função g não goza de tal propriedade. Segue que a propriedade mencionada nos permite distinguir os comportamentos de f e g em p . A propriedade anterior será designada por Propriedade c. (Ibid., p. 24)

Na sequência, apresenta exemplos de funções que satisfazem tal propriedade em um ponto p e de outras que não a satisfazem. Depois de tais exemplos, novamente demonstrando preocupações com a compreensão, por parte do leitor, dos símbolos e notações introduzidas, afirma que a propriedade em questão, apresentada como “para todo $\varepsilon > 0$ é possível fabricar um $\delta > 0$ tal que $x \in]p - \delta, p + \delta[\Rightarrow (x, f(x)) \in R_{\varepsilon, \delta}$ ” (p. 25) é, na verdade, equivalente a “para todo $\varepsilon > 0$ é possível fabricar um $\delta > 0$ de modo que $p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon$ ” (p. 25). Apresenta, então, uma figura ilustrando esta forma equivalente de escrever a Propriedade c e, em seguida, escrevendo de outra maneira as desigualdades que nela estão presentes, Guidorizzi destaca uma terceira possibilidade de redação para a mesma, na qual, finalmente, são introduzidas as desigualdades modulares tão características nas definições de continuidade e limite: “como $p - \delta < x < p + \delta \Leftrightarrow |x - p| < \delta$ e $f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon \Leftrightarrow$ segue que a propriedade acima é equivalente a “para todo $\varepsilon > 0$ é possível fabricar um $\delta > 0$ de modo que $|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$ ” (p. 26). E então, com base em todo o trabalho feito desde o início do capítulo, o autor finalmente apresenta a definição de continuidade: “seja f uma função e $p \in D_f$ [domínio de f]. Dizemos que f é *contínua* em p se para cada $\varepsilon > 0$ dado é possível

fabricar um $\delta > 0$ de modo que para todo x no domínio de f , $|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$ ” (p. 26). Convém destacar que as idéias apresentadas neste parágrafo deixam transparecer que o autor se preocupa em ir apresentando o conteúdo sempre em um nível crescente de dificuldade, manifestando seu cuidado didático em, não deixar de lado uma abordagem rigorosa do Cálculo e, ao mesmo tempo, fornecer condições para que o estudante, de fato, a compreenda, procurando, por exemplo, dentre outros aspectos, dar significado aos símbolos que estão sendo introduzidos.

Depois de trabalhar com exemplos nos quais demonstra se dada função é ou não contínua em um ponto p , propor exercícios deste mesmo tipo e discutir a respeito da continuidade de funções crescentes e decrescentes, o autor dá prosseguimento a sua preparação para a introdução do conceito de limite, discutindo uma idéia que coloca como sendo um pré-requisito para a definição de limite de uma função em um ponto que será dada posteriormente: a noção de ponto de acumulação, que é introduzida por meio do seguinte comentário: “quando definimos continuidade de f em p a única exigência que fizemos sobre p é a de que p pertencesse ao domínio de f . No parágrafo seguinte definiremos limite de uma função em p ; em tal definição exigiremos que p seja um ponto de acumulação de D_f ” (p. 45). E então Guidorizzi define este tipo de ponto da seguinte maneira: “sejam A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e p um número real (p pode pertencer ou não a A). Dizemos que p é *ponto de acumulação* de A se para todo $r > 0$ o intervalo $]p - r, p + r[$ contém pelo menos um ponto $x \in A$, com x distinto de p ” (p. 46). Em seguida, utilizando a linguagem natural, fornece ao leitor uma explicação intuitiva e visual do que tal definição está estabelecendo: “grosso modo, dizer que p é ponto de acumulação de A significa dizer que é possível encontrar pontos de A , *diferentes* de p , que estão tão próximos de p quanto se queira” (p. 46). Apresenta, então, exemplos nos quais ensina o leitor a determinar quais são os pontos de acumulação de um dado conjunto e propõe alguns exercícios utilizando este mesmo raciocínio.

Terminada esta discussão a respeito dos pontos de acumulação, o autor inicia sua abordagem do conceito de limite, inicialmente por meio de exemplos geométricos, bastante semelhantes àqueles presentes nos roteiros trabalhados por Cardassi em 1977. Considera uma função f , um ponto de acumulação p do domínio de f e as seguintes situações dadas graficamente:



(Ibid., p. 47)

Passa então a discutir a respeito de cada uma destas situações:

Na situação a) f não está definida em p , mas existe um número l que satisfaz a propriedade:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$, $p - \delta < x < p + \delta$, $x \neq p \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ (1).

Na situação b) f está definida em p , mas não é contínua em p , entretanto, existe l satisfazendo (1).

Na situação c) f é contínua em p , assim $l = f(p)$ satisfaz (1).

Finalmente, na situação d) não existe l satisfazendo (1) em p .

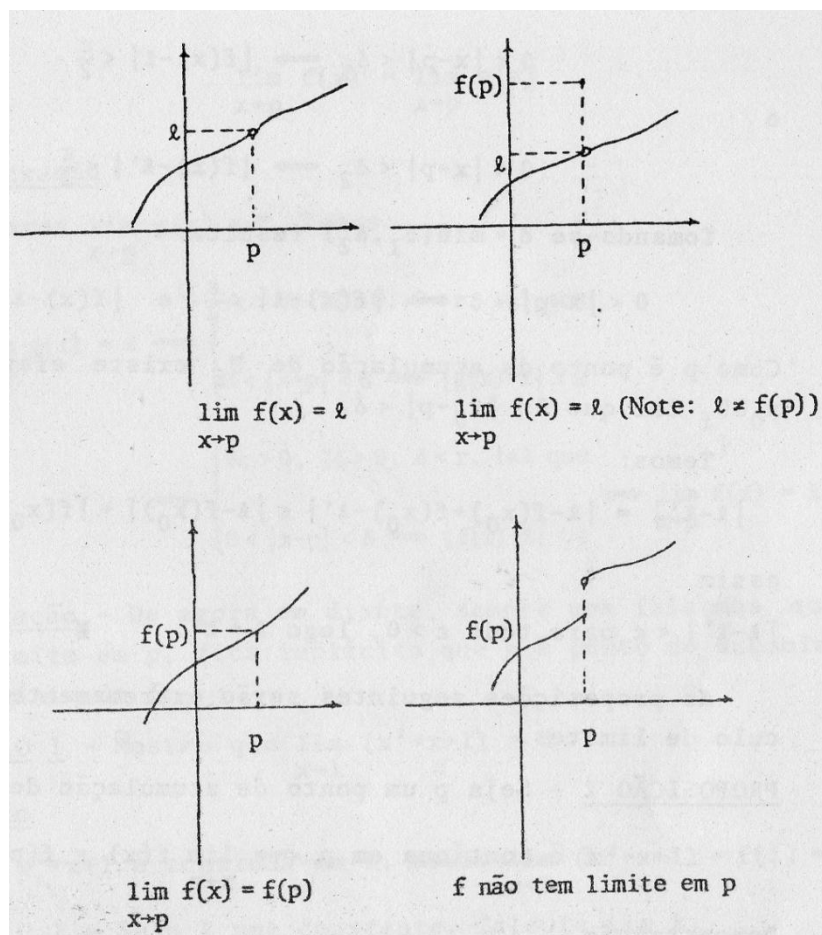
A propriedade (1) é equivalente a:

Para todo $\varepsilon > 0$ dado é possível fabricar um $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. (Ibid., p. 48).

E então, com base nesta discussão, apresenta a definição de limite:

Seja f uma função e p um ponto de acumulação do domínio de f . Dizemos que f tem limite l em p se para todo $\varepsilon > 0$ dado existir um $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Tal número l quando existe é único e será indicado por $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ (lê-se limite de $f(x)$ quando x tende a p). Assim:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \end{cases}$$



(Ibid., p. 48-49).

Depois destes gráficos, o autor novamente faz um comentário bastante importante do ponto de vista didático e, mais uma vez, nem sempre presente nos cursos de Cálculo: salienta ao leitor que é importante observar que “o limite de f em p não depende do valor que f assume em p , mas sim dos valores que f assume nos pontos próximos de p ” (p. 49). Dando prosseguimento a sua abordagem deste conceito matemático, apresenta teoremas sobre limites e exemplos de demonstrações e de cálculos diretos envolvendo tal noção. Os exercícios também se alternam entre aqueles teóricos, envolvendo demonstrações, e aqueles de cálculo. Notamos, no entanto, que na medida em que as discussões teóricas apresentadas no capítulo vão avançando, os exercícios de técnicas de cálculo passam a predominar.

No tratamento dado para a noção de derivada, algo que, em nossa opinião, deve ser destacado é o cuidado em fazer comentários referentes às notações que estão sendo empregadas. Um primeiro exemplo deste tipo de preocupação aparece quando, logo após definir derivada, Guidorizzi destaca que, por propriedades dos limites, a notação $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ é equivalente à $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$. E, para exemplificar os momentos mais

oportunos de se trabalhar com cada uma delas, mostra como calcular, pela definição, $f'(1)$ e $f'(x)$, sendo $f(x) = x^2$. No cálculo de $f'(1)$ utiliza a notação $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ com p sendo 1 e no cálculo de $f'(x)$ emprega a notação $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$ com $p = x$. Outro exemplo explícito desta preocupação com as notações é a presença, também no capítulo tratando do conceito de derivada, de uma seção chamada *Exemplos Diversos*, na qual o autor se propõe exatamente a discutir algumas das notações mais comumente utilizadas em textos tratando deste ente matemático. Afirma que:

Frequentemente usamos expressões do tipo “ $y = f(x)$ ”, “ $s = f(t)$ ” para indicar uma função f . Em $y = f(x)$, y é a *variável dependente* e x a *variável independente*. As notações $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$ ou $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ ou $\frac{d^nf}{dx^n}$ são então usadas para indicar as derivadas de ordem 1, 2, n, em x , da função $y = f(x)$; assim $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = f'(x)$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} = f''(x)$, ... A derivada $f'(x_0)$ é também indicada por $\frac{dy}{dx}(x_0)$ ou $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ (...). Se a função vem dada por $s = f(t)$ usamos então as notações $\frac{ds}{dt} = \frac{df}{dt} = f'(t)$, $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2f}{dt^2} = f''(t)$, etc. (GUIDORIZZI, 1980, p. 49-50).

A nosso ver, do ponto de vista didático, este comentário de Guidorizzi é importante por, dentre outros aspectos, deixar claro algo que nem sempre é compreendido pelos estudantes: que a derivada segunda nada mais é do que a derivada da derivada, o que se torna evidente por meio desta observação citada. Além disso, a mesma parece dar condições para que o significado da notação tradicionalmente empregada nesta situação – o que também, na maioria das vezes, não é algo simples de ser percebido pelo aluno – se torne bastante evidente.

Nesta mesma seção há ainda mais um exemplo explícito do cuidado do autor, manifestado ao longo de todo o texto por meio de comentários explicativos a este respeito, em evitar que as notações utilizadas possam prejudicar o entendimento do conteúdo. Tais comentários aparecem, principalmente, naqueles momentos em que determinado simbolismo é empregado pela primeira vez, como, por exemplo, quando designa por Δx a variação sofrida pela variável x no cálculo, pela definição, da derivada da função $f(x) = x^2 + 2x$. Neste caso, salienta que “o símbolo Δx (delta x) desempenha aqui o mesmo papel que o h em $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ” (Ibid., p. 51). Essa preocupação em explicitar ao estudante que determinadas notações são equivalentes, bastante presente nestas apostilas de Guidorizzi, se figurasse em todos os cursos de Cálculo, talvez pudesse, minimizar uma daquelas dificuldades enfrentadas pelos alunos na transição da educação básica para o ensino superior citadas por

Gascón (2009), a saber, a dependência manifestada pelo estudante em relação à nomenclatura associada a uma técnica matemática.

Dando prosseguimento à análise das apostilas, ainda na seção intitulada *Exemplos Diversos*, gostaríamos de destacar uma situação trabalhada por Guidorizzi que, além de, mais uma vez, discutir a questão das notações, introduz a noção de primitiva de uma função, ainda sem fazer qualquer referência ao conceito de integral. O autor afirma que “uma função F é uma *primitiva* de f se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in D_f$ ” (p. 59) e então exemplifica como encontrar primitivas de algumas funções. Após tais exemplos, introduz a seguinte notação: “uma primitiva de f é usualmente indicada por $\int f(x)$ ou por $\int f(x)dx$, nesta segunda notação “ dx ” não tem significado próprio; assim o símbolo $\int f(x)dx$ indica uma primitiva da função f ”. E então, sem se referir à nomenclatura integral ou ao processo de integração, ilustra a utilização da notação introduzida calculando $\int x^3 dx$, $\int (2x + 3)dx$ e $\int (e^{-t} + 3t)dt$. É interessante destacar que, nos exercícios dessa seção já são propostos problemas de valor inicial e de contorno (embora o autor não introduza esta nomenclatura), nos quais são dadas as derivadas de algumas funções e condições iniciais para que, utilizando-as, o leitor determine a primitiva de cada uma delas.

Outro ponto deste material de Guidorizzi que merece destaque por sua importância didática e por dar pistas do posicionamento do autor em relação aos níveis de rigor que devem ser adotados em um curso inicial de Cálculo é a forma como o Teorema do Valor Médio é trabalhado no capítulo chamado *Estudo da Variação das Funções*. O autor enuncia tal teorema, mas destaca que deixará a demonstração do mesmo para o capítulo seguinte e que, naquele momento seu objetivo é apresentar uma interpretação geométrica e uma interpretação física para tal resultado. Afirma então que:

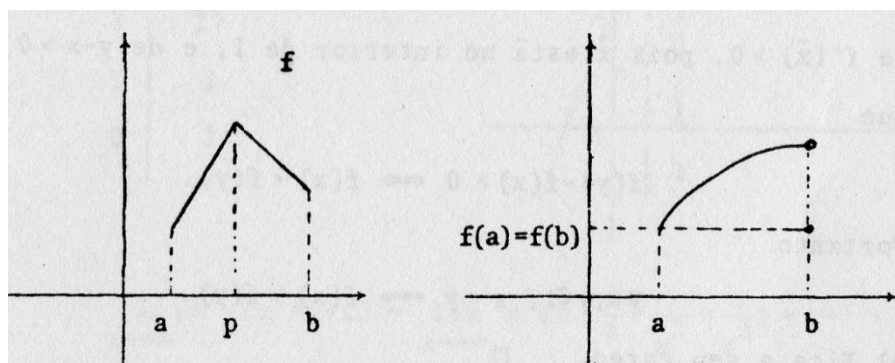
Geometricamente, este teorema nos conta que se s é uma reta passando pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, então existe pelo menos um ponto $(c, f(c))$, com $a < b < c$, tal que a reta tangente ao gráfico de f neste ponto é paralela à reta s ; observe que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é o coeficiente angular de s e $f'(c)$ o de T .

O TVM tem a seguinte interpretação física: suponhamos que $x = f(t)$ é a equação horária do movimento de uma partícula sobre o eixo Ox , assim $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é a velocidade média da partícula entre os instantes a e b , o TVM nos diz então que tal velocidade média é igual à velocidade (instantânea) da partícula em algum instante c entre a e b . (Ibid., p. 70-71)

Nota-se, portanto, a preocupação do autor, antes de apresentar uma demonstração formal do resultado, que é um dos teoremas centrais de um curso inicial de Cálculo, em dar condições para que os estudantes compreendessem o significado do mesmo, na própria

Matemática e também na Física. Ainda nestas considerações a respeito do Teorema do Valor Médio, destacamos a preocupação em discutir, geometricamente, o porquê das hipóteses assumidas em tal resultado serem essenciais para a validade do mesmo. O autor afirma que:

As situações que apresentamos a seguir nos mostram que as hipóteses “ f é contínua em $[a, b]$ e f derivável em $]a, b[$ ” são indispensáveis:



(Ibid., p. 71).

O nível de rigor e formalismo ao longo de todas as apostilas é bastante alto, embora sempre acompanhado de preocupações didáticas, mas isto se torna ainda mais explícito no momento em que o autor trata do conceito de integral. Esta noção é introduzida por meio da idéia de somas de Riemann e durante aproximadamente 30 páginas, todos os exemplos e exercícios são teóricos, envolvendo demonstrações de que determinados conjuntos dados possuem medida nula, questões nas quais os leitores deveriam construir partições adequadas para intervalos dados e calcular integrais definidas via somas de Riemann. Além disso, Guidorizzi opta por apresentar, além do critério de integrabilidade de Riemann, o critério de Lebesgue (que, no entanto, não é demonstrado) e, na sequência, há uma série de exercícios nos quais os leitores devem demonstrar se determinada função é ou não integrável de acordo com estes critérios. Os exercícios envolvendo manipulações algorítmicas só começam a aparecer no momento em que o autor apresenta o que chama de *2º Teorema Fundamental do Cálculo* – que é apresentado antes do primeiro¹⁸⁸ – e estabelece que: “se f for integrável em $[a, b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ” (GUIDORIZZI, 1982, p. 34).

¹⁸⁸ O 1º Teorema Fundamental do Cálculo é enunciado pelo autor como: seja f definida e contínua num intervalo I e seja $a \in I$. A função F dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in I$ é uma primitiva de f em I , isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo x em I .

Na seção seguinte a este 2º Teorema Fundamental do Cálculo, quando o autor relaciona o conceito de integral com a noção de área, encontramos mais um exemplo de sua preocupação em atribuir significado para as notações empregadas:

Seja f integrável em $[a, b]$ com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Definimos a área do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$ por área $A = \int_a^b f(x)dx$. Observe como é sugestiva a notação $\int_a^b f(x)dx$: $f(x)dx$ pode ser pensado como a área de um “retângulo elementar” de altura $f(x)$ e base dx ; a integral $\int_a^b f(x)dx$ é então a “soma” das áreas destes retângulos para x variando de a até b . Você pode pensar um “retângulo elementar” como um retângulo de base suficientemente pequena. (GUIDORIZZI, 1982, p. 39-40 – grifos do autor).

Para encerrar nossas considerações a respeito destas apostilas de Guidorizzi, destacamos um tipo de situação abordada pelo autor, bastante importante do ponto de vista didático, conforme atestam diversas pesquisas referentes ao processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, mas nem sempre trabalhado em sala de aula: o esboço e a análise de gráficos de funções dadas por uma integral. No capítulo intitulado *Integral de Riemann e aplicações*, o autor apresenta exemplos de como esboçar o gráfico de uma função dada por uma integral, propõe exercícios neste mesmo sentido e, após sintetizar algumas informações a respeito da função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in I$, onde f é suposta integrável em todo intervalo $[c, d] \subset I$ e $a \in I$, a saber: “(I) F é contínua em I ; (II) F é derivável nos pontos de continuidade de f e $F'(p) = f(p)$ se f for contínua em p ; (III) Se f for contínua em I , então F será derivável em I e $F'(x) = f(x)$ em I ” (p. 74-75), faz ainda o seguinte alerta ao leitor: “atenção: segue de (I) que o gráfico de uma função dada por uma integral não pode apresentar salto; portanto, se você estiver esboçando o gráfico de uma função dada por uma integral e se o seu gráfico apresentar salto, apague e comece de novo!” (p. 75). Este comentário feito pelo autor é, em nosso ponto de vista, bastante relevante, mas, outra vez, quase nunca presente na maioria dos cursos iniciais de Cálculo.

Em 1986, o curso inicial de Cálculo da Matemática foi ministrado pelo professor Hariki, que adotava como referência bibliografia *Um Curso de Cálculo*, manual escrito por Guidorizzi. De acordo com Hirata, sua aluna nesta ocasião, as aulas eram sempre expositivas e o docente era bastante organizado e caprichoso na apresentação do conteúdo: “o professor era bem didático no sentido de conseguir explicar. (...) Não havia dificuldades de entendê-lo”¹⁸⁹. Por outro lado, Hirata não percebia preocupações por parte de Hariki em motivar a introdução dos novos conceitos, em discutir aspectos históricos referentes ao assunto que

¹⁸⁹ HIRATA (2010).

estava sendo trabalhado e nem em mostrar aos alunos aplicações, que não as intrínsecas à própria Matemática, daquilo que estava sendo estudado: “eu me lembro muito mais de cálculos de limites, derivadas, mas sem muita justificativa a respeito de onde isso tudo seria usado” ¹⁹⁰. Nossa entrevistada declarou também que conseguiu efetivamente compreender a necessidade e os significados daqueles simbolismos característicos de uma abordagem rigorosa e formal do Cálculo, mas não se recorda do mecanismo adotado pelo professor para trabalhar com estes aspectos.

Com relação ao nível de rigor adotado no curso, Hirata destacou que, embora durante a apresentação da teoria, em sala de aula, o professor optasse por uma abordagem bastante formal e com nível elevado de rigor, isso não era cobrado dos alunos, conforme já comentamos no capítulo 4. Nas avaliações o que se cobrava dos estudantes era o domínio das técnicas de cálculo e não a capacidade de demonstrar ou trabalhar com os aspectos formais da disciplina. Como já destacamos na primeira seção deste capítulo, de acordo com Artigue (1995), os professores que optam por cobrar dos estudantes apenas as técnicas, agem de maneira equivocada, pois, desta forma, inevitavelmente, contribuem para a manutenção de um círculo vicioso, no qual o aluno passa a valorizar somente o aspecto procedimental do Cálculo, já que é ele que lhe renderá uma boa nota ao final do curso e os docentes, pressionados para que seus alunos tenham bons rendimentos na disciplina, passam cada vez mais a cobrar apenas técnicas e, conseqüentemente, distanciar aquilo que é apresentado em aula do que é pedido nas avaliações, podendo tornar estas aulas cada vez menos interessantes para os estudantes.

A entrevistada destacou que uma das características deste curso de Hariki que podia ser destacada por ser importante do ponto de vista didático é que o professor procurava sempre resolver exercícios em sala de aula. Em geral essas questões resolvidas não eram escolhidas pelos estudantes dentre aquelas presentes nas listas entregues anteriormente; eram outras selecionadas pelo docente especificamente com este propósito. Outro aspecto a ser comentado é que, segundo a entrevistada, naquela época não era muito comum o estudante fazer perguntas para o professor, nem mesmo nestes momentos de resoluções de exercícios:

Era o professor fazendo e o aluno assistindo. Lembro-me muito pouco de alunos colocando dúvidas ou questionando alguma coisa; geralmente o professor ia expondo e se tivéssemos alguma dúvida específica sobre aquilo que estava sendo apresentado, tudo bem. Mas não me lembro de situações nas quais os alunos chegavam dizendo: eu vi determinado exercício e estou com dúvida, será que o senhor pode resolver? (...) Não tinha isso. (HIRATA, entrevista, 2010).

¹⁹⁰ HIRATA (2010).

Ainda com relação a este fato da participação dos estudantes em aula ser praticamente inexistente, a depoente destacou que esta era uma característica presente em todas as disciplinas e não somente na de Cálculo. Além disso, frisou que a questão é que os alunos realmente não tinham a postura de perguntar; não era o professor que não abria espaço para este tipo de participação: “Não era uma questão do professor dizer: não me interrompam! Isso certamente não existia; se os alunos questionassem, o professor abriria espaço para discutir as coisas, mas difícil, realmente, era o aluno chegar e perguntar alguma coisa”¹⁹¹.

Durante a entrevista que nos concedeu, Hirata falou também sobre as dificuldades que enfrentou na transição da educação básica para o ensino superior, dificuldades estas que ela atribui a formação deficiente que teve nos ensinos fundamental e médio, principalmente em relação àqueles elementos constituintes de uma abordagem formal da Matemática:

Por exemplo, (...) eu nem sabia o que era teorema naquela época, o que significava provar um teorema, um lema ou uma proposição. Não tinha nenhuma informação a respeito do que eram essas coisas todas (...) e, então, para mim foi complicado me adaptar ao estilo do ensino da universidade. (Ibid.).

Como destacamos há alguns parágrafos, o manual adotado como referência nesse curso ministrado por Hariki foi *Um Curso de Cálculo* de Guidorizzi, organizado pelo autor com base nas apostilas que havia escrito anteriormente e que já haviam sido adotadas, dentre outras ocasiões, pelo professor Leite em 1983. Por já termos analisado detalhadamente tais apostilas, seremos mais breves na análise do livro, destacando apenas aquelas preocupações didáticas e maneiras interessantes de se trabalhar com os diferentes níveis de rigor em uma disciplina de Cálculo que, porventura ainda não constavam no material redigido pelo autor anteriormente.

A primeira edição do manual de Guidorizzi foi lançada em 1985, mas, para esse trabalho, a edição que analisamos foi a segunda, com data de 1987. De acordo com o autor, “é possível que o livro seja menos formal que as apostilas porque este só foi concretizado depois de eu ter ministrado Cálculo para vários níveis de alunos e em diversas Faculdades”¹⁹², enquanto que as apostilas haviam sido escritas, especialmente, para os cursos da USP. Este comentário de Guidorizzi nos dá indícios de que, ao redigir seu manual, procurou uma abordagem que parecesse adequada a estudantes de diversos níveis de maturidade matemática e de diferentes cursos e instituições de ensino, ao passo que, ao redigir as apostilas que lhes

¹⁹¹ HIRATA (2010).

¹⁹² GUIDORIZZI (2010).

serviram de base, levou em consideração apenas o que era mais indicado para os alunos da USP, em especial do IME e da POLI.

Já no prefácio da obra, o autor destaca sua preocupação em, sempre que possível, apresentar aplicações do conceito estudado ou introduzir tal estudo de forma contextualizada por meio de problemas: “o curso é desenvolvido de forma que os conceitos e teoremas apresentados venham, sempre que possível, acompanhados de uma motivação ou interpretação geométrica ou física” (GUIDORIZZI, 1987, prefácio – sem numeração de páginas). Comenta ainda que as demonstrações de alguns teoremas foram deixadas para o final da seção ou apresentadas em um apêndice para que, desta forma, o aluno, se quiser, possa, em uma primeira leitura, ter contato apenas com os resultados, omitindo suas respectivas demonstrações, o que mostra, de certa forma, que Guidorizzi já tentava dar uma abordagem diferenciada a seu curso, na qual o estudante, em um primeiro momento entraria em contato com os conceitos fundamentais daquele campo de conhecimento para, apenas em um segundo momento, se preocupar com as justificações e formalizações dos mesmos.

Outro aspecto que merece destaque é o fato do autor, no prefácio da obra, alertar aqueles docentes que estão adotando seu manual como referência, para a questão de que muitos conteúdos do Cálculo são bastante utilizados nas disciplinas de Física e, por esta razão, alguns tópicos presentes no texto precisam ser ensinados o quanto antes aos alunos e, neste sentido, Guidorizzi dá algumas sugestões aos professores:

Muitos problemas, que ocorrem muito cedo na Física, requerem, para suas resoluções, o conhecimento de equações diferenciais; por este motivo, é importante que o aluno entre em contato com elas o mais rápido possível. (...) Para atender ao curso de Física, talvez haja necessidade de o professor ter que antecipar o estudo das integrais; se este for o caso, sugerimos deixar o capítulo sobre o estudo das variações das funções (cap. 9) [que trata de intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, esboço de gráficos e determinação de máximos e mínimos] para ser estudado após o capítulo 13 [que trata de equações diferenciais de 1ª ordem, de variáveis separáveis e lineares]. É o que temos feito, com bons resultados, nos cursos por nós ministrados. (GUIDORIZZI, 1987, prefácio – sem numeração de páginas).

Por meio deste comentário do autor, percebemos que para, ele e consequentemente na abordagem adotada neste manual, o Cálculo é pensado como uma ferramenta para auxiliar estudos em outras áreas. É aquela disciplina da universidade que começará a apresentar aos alunos as ferramentas matemáticas de que ele necessitará ao longo de sua graduação na área de Ciências Exatas.

Com relação aos exemplos e exercícios presentes no manual, o autor faz o seguinte comentário:

Quanto aos exemplos e exercícios, pensamos tê-los colocado em número suficiente para compreensão da matéria. Procuramos dispor os exercícios em ordem crescente de dificuldade. Existem exercícios que apresentam certas sutilezas e que requerem, para suas resoluções, um maior domínio do assunto. (Ibid.).

Ao final do prefácio, Guidorizzi faz um agradecimento que deixa explícito ao leitor que a base para a redação deste livro foram as apostilas de Cálculo escritas por ele e que se tornaram populares entre alunos e professores do IME entre o final da década de 1970 e os primeiros anos da década de 1980: “agradeço ao colega professor Nelson Achcar pelas sugestões e comentários que muito contribuíram para o aprimoramento das apostilas precursoras deste livro” (Ibid.).

Nas apostilas, destacamos a abordagem proposta pelo autor para o trabalho com os conceitos de continuidade e limite; no livro, o aspecto diferente em relação a esta abordagem é que o autor inicialmente apresenta as noções intuitivas de continuidade e limite, trabalha com elas por meio de exemplos e de análise de gráficos e, ainda de forma intuitiva, as relaciona da seguinte forma:

Intuitivamente, é razoável esperar que se f estiver definida em p e for contínua em p , então $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$, e reciprocamente. Veremos que isto realmente acontece, isto é, se f estiver definida em p f é contínua em $p \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$. Veremos ainda que se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ e se f não for contínua em p , então L será aquele valor que f *deveria* ter em p para ser contínua neste ponto. (Ibid., p. 70).

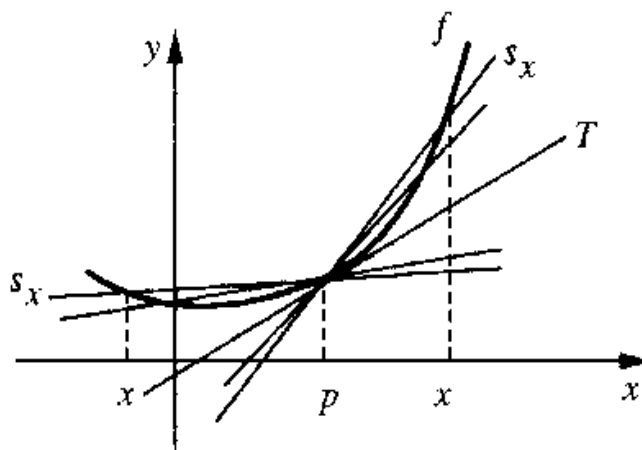
No manual, somente após esta introdução intuitiva é que, de maneira idêntica àquela presente nas apostilas, o autor passa a formalizar as idéias apresentadas.

O quinto capítulo do manual apresenta os teoremas de Bolzano, do Valor Médio e de Weierstrass e a forma como estes resultados são abordados nos dá pistas de qual o nível de rigor considerado pelo autor como sendo o adequado de se adotar em um primeiro curso de Cálculo. Para Guidorizzi, em um primeiro momento, mais importante do que justificar rigorosamente a validade de tais teoremas é mostrar ao leitor algumas aplicações, na própria Matemática, para os mesmos. E o autor explicita esta sua postura na própria introdução do capítulo, quando explica ao leitor qual será sua forma de trabalho, afirmando que seu objetivo naquele momento é apresentar os enunciados destes três teoremas, fundamentais para o desenvolvimento do curso, e fazer aplicações dos mesmos, deixando para o apêndice as demonstrações.

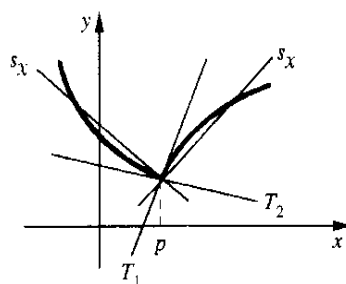
Com relação à abordagem do conceito de derivada, destacamos uma explicação geométrica dada pelo autor para a afirmação de que f não é derivável em p se o gráfico desta

função apresentar um “bico” em $(p, f(p))$, afirmação esta, às vezes, memorizada pelo aluno, mas não compreendida:

Sejam f uma função e $(p, f(p))$ um ponto de seu gráfico. Seja s_x a reta que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$. Se $f'(p)$ existir, então o gráfico de f admitirá reta tangente T em $(p, f(p))$; neste caso, à medida que x se aproxima de p , quer pela direita, quer pela esquerda (só pela direita se f não estiver definida à esquerda de p , só pela esquerda se f não estiver definida à direita de p), a reta s_x tenderá para a posição da reta T .



Por outro lado, se, à medida que x tende a p pela direita, s_x se aproximar da posição de uma reta T_1 e se à medida que x se aproximar de p pela esquerda, s_x se aproximar da posição de uma outra reta T_2 , $T_2 \neq T_1$, então o gráfico de f não admitirá reta tangente em $(p, f(p))$, ou seja, $f'(p)$ não existirá.



f não é derivável em p .
O gráfico de f apresenta “bico” em $(p, f(p))$.

(Ibid., p. 160).

Com relação à abordagem da noção de integral, uma diferença que percebemos é que, enquanto que nas apostilas Guidorizzi optava por introduzir esta idéia por meio das somas de Riemann e das integrais definidas, fazendo inicialmente uma abordagem mais teórica e formal do assunto, em seu manual ele trabalha, primeiramente, com a definição de primitiva e com a noção de integral indefinida, possibilitando que, a princípio, o trabalho seja mais técnico, com mais exercícios de manipulação. Somente depois desta primeira abordagem mais manipulativa que englobava, inclusive, problemas aplicados na Física, é que apresentava um tratamento mais formal para o conteúdo em questão por meio das somas de Riemann. É interessante destacar que esta forma escolhida por Guidorizzi para trabalhar com o conceito

de integral é bastante semelhante àquela adotada por Catunda em seu livro *Um Curso de Análise* também analisado neste capítulo.

É interessante destacar que, após trabalhar com as idéias fundamentais envolvidas no processo de calcular uma integral via somas de Riemann, e antes de efetivamente definir integral de Riemann, o autor apresenta uma situação da cinemática para ilustrar aquilo que está sendo trabalhado. Considera uma partícula deslocando-se sobre o eixo Ox com função de posição $x = x(t)$ e com velocidade $v = v(t)$ contínua em $[a, b]$. Destaca que $x = x(t)$ é uma primitiva de $v = v(t)$, considera uma partição de $[a, b]$ com n elementos e tal que $\max \Delta t_i$ seja suficientemente pequeno: toma c_i como sendo um instante qualquer entre t_{i-1} e t_i e afirma que a velocidade instantânea $v(c_i)$ é um valor aproximado para a velocidade média entre t_{i-1} e t_i

$$v(c_i) \cong \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \text{ ou } \Delta x_i \cong v(c_i) \Delta t_i$$

na qual Δx_i é o deslocamento da partícula entre os instantes t_{i-1} e t_i . Afirma, em seguida, que, como, pela teoria, vista, a soma dos deslocamentos Δx_i para i variando de 1 a n é igual ao deslocamento $x(b) - x(a)$, podemos dizer que:

$$x(b) - x(a) \cong \sum_{i=1}^n v(c_i) \Delta t_i$$

e que é razoável esperar que, conforme as amplitudes Δt_i tendam a zero, a soma $\sum_{i=1}^n v(c_i) \Delta t_i$ tenda a $x(b) - x(a)$, isto é:

$$x(b) - x(a) = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(c_i) \Delta t_i.$$

Do ponto de vista didático, nos parece bastante interessante utilizar um problema aplicado para exemplificar resultados importantes como estes referentes a somas de Riemann que, para o aluno, se ficarmos apenas na abordagem teórica, sem nenhum exemplo, podem parecer extremamente abstratos e estéreis. A nosso ver, este conteúdo pode parecer menos artificial se for abordado da maneira proposta por Guidorizzi neste manual.

Com relação especificamente aos níveis de rigor observados nos cursos de Cálculo ministrados na graduação em Matemática da USP entre 1934 e 1994, uma experiência ocorrida em meados da década de 1980 merece lugar de destaque: nesta época, conforme

comentamos no capítulo anterior, um grupo de professores, dentre os quais estava Cerri, descontentes com a maneira com a qual a disciplina estava sendo conduzida, principalmente com relação ao decréscimo, cada vez mais acentuado, do nível de rigor com o qual a mesma era trabalhada, resolveu tentar uma retomada daquilo que, para eles, estava se perdendo. E, para colocar em prática esta idéia, passaram a utilizar, na disciplina em questão, o livro *Cálculo Infinitesimal*, de Michael Spivak, como referência bibliográfica.

Em 1989 o curso de Cálculo I ainda foi ministrado segundo esta orientação, com altos níveis de rigor, pelo professor Pereira. Dentre seus alunos, nesta ocasião, estava nosso entrevistado Ferreira, segundo o qual as aulas do referido docente eram sempre expositivas e nestas o mesmo não recorria a nenhuma metodologia diferenciada. Ainda de acordo com ele, “havia muito pouca interação entre professor e aluno durante a aula, mas ele sempre foi uma pessoa muito aberta para questões, para dúvidas, estava sempre a nossa disposição” ¹⁹³. Ferreira também fez questão de destacar que estas não eram características exclusivas das aulas de Pereira; em todas as disciplinas que cursou durante sua graduação, o modelo que prevaleceu foi o de “aula expositiva com pouca participação – ou quase nenhuma – da platéia de alunos” ¹⁹⁴. No caso deste curso de Cálculo, especificamente, destacou que os estudantes sequer resolviam exercícios em sala: “não fazíamos atividade durante a aula; só assistíamos à exposição dele” ¹⁹⁵. É preciso destacar, no entanto, que, em algumas ocasiões, Pereira discutia exercícios em aula, mas era ele quem os resolvia; os alunos, novamente, apenas tomavam nota. A este respeito, o entrevistado afirmou que: “era comum interromper a aula para discutir um exercício ou outro (...), mas acho que eram exercícios escolhidos por ele; não eram exercícios de demanda dos alunos nesse momento” ¹⁹⁶. Como havia alguns detalhes teóricos que o docente deixava para discutir apenas nos exercícios, em geral eram questões envolvendo estes elementos que eram levadas para sala de aula. Desta forma, as soluções das mesmas visavam cobrir uma parte do conteúdo ainda não trabalhada e que seria necessária para que os alunos pudessem compreender aqueles tópicos que seriam abordados posteriormente na disciplina. Ainda comentando a respeito das listas de exercícios que resolviam neste curso, Ferreira explicou que, quando os alunos procuravam o professor para esclarecer alguma dúvida, este só os auxiliava na solução de alguma questão se percebesse que, de fato, eles já haviam estudado o necessário e que realmente tinham refletido a respeito daquele exercício que estavam tentando solucionar: “se solicitássemos ajuda (...) em um

¹⁹³ FERREIRA (2010).

¹⁹⁴ FERREIRA (2010).

¹⁹⁵ FERREIRA (2010).

¹⁹⁶ FERREIRA (2010).

momento que ele considerasse muito cedo, se achasse que não havíamos estudado o suficiente ainda, ele falava: ”não vou dar a resposta; voltem a estudar e continuem tentando””” 197

De maneira geral, segundo Ferreira e também de acordo com a análise que realizamos do caderno ¹⁹⁸ de nosso depoente, a exposição feita em lousa pelo professor era bastante semelhante àquela forma de abordagem do conteúdo proposta no texto do Spivak. Do ponto de vista conceitual, destacou, conforme já frisamos no capítulo anterior, que a principal diferença que ele percebia entre a orientação do professor e a do livro era que, enquanto Spivak introduz as funções exponenciais e trigonométricas apenas depois de trabalhar com a integração, Pereira já definia as exponenciais no início do curso e, portanto, os alunos já podiam trabalhar com este tipo de função. Já as trigonométricas, assim como no manual, só foram introduzidas pelo professor depois do estudo da integração.

Do ponto de vista didático, as diferenças eram um pouco maiores: em primeiro lugar, enquanto Spivak procura sempre ilustrar, por meio de gráficos e outros tipos de figuras, a discussão que está sendo feita, estas visualizações geométricas não eram muito exploradas durante as aulas. A este respeito, Ferreira afirmou que: “tinha bem menos [gráficos durante as aulas do que no livro]. (...) A questão dos gráficos não era muito enfatizada durante o curso (...) [que] era mais formal, mais analítico mesmo” ¹⁹⁹. De fato, após a análise do caderno do entrevistado, pudemos perceber que estas lembranças do depoente realmente traduzem de maneira precisa a forma como o conteúdo se encontra registrado nessas notas e, consequentemente, nos dá uma boa idéia de como era a exposição feita pelo professor. O depoente destacou, por exemplo, que, dificilmente, o professor fazia o gráfico de uma função antes de calcular o limite em determinado ponto: “na verdade fazíamos um pouco o contrário de hoje em dia: o gráfico aparecia depois do cálculo dos limites. (...) Hoje em dia, usamos muito no ensino do Cálculo, o gráfico como uma maneira de facilitar a visualização do limite” ²⁰⁰. Outra diferença didática entre o texto do Spivak e as aulas de Pereira é que, enquanto no primeiro há várias explicações referentes às notações que estavam sendo empregadas na abordagem de determinado conceito, nas aulas estes comentários não eram feitos:

Usávamos sempre uma notação só, a que fosse a mais concisa. Então no curso de Cálculo II – que como eu já te disse foi a primeira vez em que vi integral – a integral não tinha o dx era só $\int f$. Eu, no futuro, fui descobrir que aquela economia nas

¹⁹⁷ FERREIRA (2010).

¹⁹⁸ No momento em que fomos entrevistar Ferreira, este nos disponibilizou para análise seu caderno, com as anotações que havia feito durante o curso de Cálculo ministrado por Pereira em 1989.

¹⁹⁹ FERREIRA (2010).

²⁰⁰ FERREIRA (2010).

notações, para mim era ótima; achava que aquilo simplificava muito a leitura das coisas. Só fui conviver com essa coisa das notações específicas do Cálculo, das variáveis, das diferentes notações associadas com os nomes dos matemáticos quando eu fui ensinar Cálculo; esse eu acho que foi um aspecto do Spivak que não foi aproveitado no curso. Era um curso mais minimalista neste sentido; (...) não eram apresentadas as outras notações associadas aos seus respectivos nomes, não havia isso. (FERREIRA, entrevista, 2009).

Na análise que fizemos do caderno de Ferreira, pudemos perceber que, ao longo das notas de aula produzidas pelo aluno com base na exposição teórica feita pelo professor, havia um único comentário referente às notações e este estava presente na abordagem do conceito de função e dizia respeito à maneira mais usual de indicar este objeto matemático e o valor assumido pelo mesmo em determinado ponto de seu domínio.

Com relação às possíveis preocupações em fazer comentários referentes à história do desenvolvimento dos conceitos que estavam sendo trabalhado, este era um aspecto que não estava presente nem nas aulas de Pereira e nem mesmo no livro de Spivak. A este respeito, Ferreira comentou que, nem ao apresentar aqueles teoremas que usualmente aparecem associados ao nome de algum matemático, como, por exemplo, o Teorema de Weierstrass, aparecia alguma nota histórica; ao contrário, “não havia a preocupação de (...) fazer comentários históricos; a teoria era sempre desquitada da história” ²⁰¹.

Um aspecto, a nosso ver, importante do ponto de vista didático e presente tanto no livro de Spivak quanto nas aulas de Pereira, é que antes de apresentar ao estudante a definição formal de determinado conceito, tanto o professor quanto o autor do manual em questão apresentavam uma definição provisória para o mesmo. Segundo Ferreira, esta idéia ficava bastante explícita, principalmente, nas abordagens das noções de função e de limite. A este respeito, nosso entrevistado destacou que:

Era trabalhada, primeiramente, a idéia intuitiva, em geral inspirada por situações geométricas, e depois era feita a formalização algébrica ou analítica. O professor também fazia assim, mas acho que mais rapidamente do que o Spivak, que gasta um pouco mais de tempo porque é um texto; acho que precisa haver mesmo essa diferença entre uma aula e um livro. Acho que, nas aulas, nesses momentos de definições provisórias, se falava muito mais do que se escrevia na lousa, tanto que tenho poucos registros desses momentos no caderno. Mas olhando esses cadernos, me lembrei que existia sim essa tentativa de chegar devagar à definição (Ibid.).

Ao relembra como as definições eram trabalhadas neste curso de Cálculo que vivenciou como aluno, também manifestou sua opinião a respeito deste tipo de abordagem; afirmou que tem dúvidas se, de fato, este processo, no qual o professor já sabendo em que

²⁰¹ FERREIRA (2010).

formato de definição quer chegar, conduz a discussão para que os alunos façam essa descoberta. De acordo com ele, isto não é, de fato, uma descoberta:

Eu acho que, muitas vezes, isso não chega realmente a motivar a definição propriamente dita. Eu já experimentei ensinar de um jeito ou de outro e, muitas vezes, acho que ganhamos mais explorando, em todos os detalhes, a definição logo depois que ela foi dada – se é uma definição vazia ou não, se existem muitos objetos que a satisfazem ou não – do que gastar muito tempo com uma motivação de algo que você já sabe como que é. Eu fico com um pouco de dúvida sobre a eficiência, a eficácia deste instrumento. Mas acho que o curso do Toninho [Pereira] foi sim muito inspirado por esta idéia proposta pelo Spivak (Ibid.).

Em nossa opinião, é sim importante o professor inicialmente ir “construindo” com seus alunos a definição que, posteriormente, será formalizada, mas este trabalho deve ser feito de maneira cuidadosa e significativa, de forma que, no momento mais oportuno, possa relacionar toda a discussão feita com a definição propriamente dita de determinado objeto matemático e todos os símbolos e elementos nela envolvidos. Uma abordagem na qual apenas se apresente uma definição provisória para certo ente matemático e, com base nela, se conduza o estudante à definição formal, sem explorar todos os aspectos de ambas, todas as deficiências da primeira e vantagens da segunda, realmente não parece trazer qualquer ganho para a aprendizagem do aluno. Assim como Ferreira, consideramos fundamental que o docente, além de se preocupar em motivar as definições, se preocupe também em discuti-las amplamente.

Como já destacado, o curso ministrado por Pereira era bastante rigoroso e formal. Nosso entrevistado comentou, por exemplo, que a abordagem do conceito de limite, via epsilons e deltas, foi feita de maneira detalhada. Segundo o depoente, “todos aqueles primeiros limites das funções $f(x) = c$, $f(x) = x$; $f(x) = x^2$, etc, eram calculados com epsilons e deltas”. E, ainda de acordo com Pereira, o docente tinha uma maneira bastante interessante, do ponto de vista didático, de trabalhar com as definições envolvendo epsilons e deltas: antes de apresentar a demonstração de maneira organizada,

Ele fazia um rascunho no canto da lousa (...) e daí partia do epsilon para tentar encontrar o delta que estava querendo. Tentava de um jeito não conseguia, riscava, tentava de outro, mas deixava todo o caminho na lousa e isso foi uma coisa que pegou entre todos os alunos daquele curso, esse jeito de demonstrar com rascunho e deixar também o rascunho; não era algo que apagávamos ou rasgávamos; e isto é bom porque, quando volto a ler meus cadernos daquela época, os passos estão todos lá; está tudo feito com muito detalhe. (Ibid.).

Analisando o caderno do entrevistado pudemos ter uma idéia de como o professor estruturava estas demonstrações e seus respectivos rascunhos. Transcreveremos ²⁰² aqui a forma como Pereira demonstrava que, sendo $f(x) = x^2$, então $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

Rascunho:

Sei que $|x - 2| < \delta$. Quero $|x^2 - 4| < \varepsilon$:

$$|(x - 2) \cdot (x + 2)| = |x - 2| \cdot |x + 2| < \varepsilon$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{|x + 2|}$$

Não pode ser, pois δ não pode ser dado em função de x . Portanto, faz-se:

Seja δ tal que $|x + 2| < M$

$$\delta < \frac{\varepsilon}{M}$$

$$|x + 2| = |x - 2 + 4| \leq |x - 2| + 4$$

Se $|x - 2| < 1$, então $|x + 2| < 5$. Quero $|x - 2| < \delta$. Portanto $\delta < 1$ e $\delta < \frac{\varepsilon}{5}$.

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{5} \right\}$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, temos:

$$\begin{aligned} |f(x) - 4| &= |x^2 - 4| = |(x - 2) \cdot (x + 2)| = |x - 2| \cdot |x + 2| = \\ &= |x - 2| \cdot |x - 2 + 4| \leq |x - 2| \cdot (|x - 2| + 4) \leq \frac{\varepsilon}{5} \cdot (1 + 4) = \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon. \end{aligned}$$

De acordo com o depoente, um aspecto importante de ser destacado é que, neste curso de Cálculo, Pereira, provavelmente tendo a consciência de que, não poderia, nas avaliações, esperar do estudante que estava acabando de ingressar no ensino superior, o mesmo nível de rigor e formalismo de um matemático, valorizava, mais o raciocínio adotado pelos mesmos nas demonstrações que eram cobradas nestas ocasiões do que, propriamente, o rigor na escrita matemática formal. A este respeito, afirmou que, nas avaliações, o docente dava abertura para argumentações que não fossem totalmente rigorosas: “se ele percebia que estávamos nos aproximando da demonstração rigorosa, mas não conseguíamos colocar aquilo em símbolos, mesmo assim conseguiríamos a pontuação completa na questão” ²⁰³. Note que, nesta declaração, provavelmente, o depoente esteja associando à palavra rigor o aspecto simbólico-formal. De qualquer forma, é preciso pontuar que, mesmo com a postura adotada por Pereira, a primeira avaliação do curso foi bastante traumática para a maioria dos alunos; além de predominarem as questões teóricas estas eram todas inéditas. Percebe-se então que, embora o docente tenha procurado minimizar o choque sofrido pelo estudante em relação ao maior grau de elaboração que se espera dele ao responder determinada questão em uma avaliação, o que, de acordo com Gascón (2009), é um dos aspectos envolvidos nas dificuldades enfrentadas

²⁰² A transcrição apresentada é de um trecho do caderno de Ferreira contendo as notas de aula do curso de Cálculo I ministrado por Pereira em 1989. No dia em que nos concedeu sua entrevista, Ferreira nos disponibilizou este material para consulta.

²⁰³ FERREIRA (2010).

pelos alunos na transição da educação básica para o ensino superior, por outro o ineditismo das questões cobradas nas provas, algo não recorrente no ensino básico, continuava sendo um aspecto complicador, o que também vai ao encontro das idéias do autor quando este discute as mudanças que ocorrem na forma como os processos de ensino e aprendizagem são avaliados na universidade. Segundo Ferreira:

A primeira avaliação foi um desastre na sala toda. Eu me lembro até hoje que eu tirei três e essa era uma nota que eu, absolutamente, não estava acostumado; sempre fui o melhor aluno da classe em Matemática durante o ensino fundamental e médio e daí cheguei aqui na universidade e na primeira prova de Cálculo tirei um três! Mas foi a nota mais alta da sala e, então, eu vi que havia algo acontecendo ali. (FERREIRA, entrevista, 2010).

Destacou que muitos alunos, provavelmente por considerarem aquela orientação dada à disciplina muito difícil e por não conseguirem acompanhar o que estava sendo feito, acabaram desistindo do curso ou sendo reprovados. Percebe-se, portanto, que ao tentar essa busca por um “rigor que estava se perdendo”, o docente parece ter deixado de refletir a respeito de qual seria o nível de rigor e formalismo mais adequado para um curso inicial de Cálculo; será que os ingressantes no ensino superior daquela época possuíam a maturidade matemática necessária para acompanhar e de fato compreender aquele tipo de abordagem que estava sendo proposta?

Assim como a maioria de nossos entrevistados, Ferreira relatou ter enfrentado dificuldades na transição da educação básica para a universidade. E tais dificuldades, segundo ele, não foram provenientes de uma possível defasagem nos conteúdos trabalhados naqueles níveis educacionais que atualmente conhecemos como ensino fundamental e ensino médio. O depoente afirmou que, com aqueles conhecimentos que havia adquirido anteriormente, sentia-se completamente preparado para acompanhar os cursos que vivenciou em sua graduação. Segundo ele, em primeiro lugar, o que havia era uma diferença muito grande no ritmo em que os assuntos eram tratados e na quantidade de informação presente em cada aula ministrada na universidade: “a quantidade de matéria coberta nas aulas daqui [da USP] era muito maior do que eu estava acostumado na escola. Isto, sem dúvida, foi muito marcante para mim” ²⁰⁴. Além disso, era inevitável que o salto qualitativo entre a matemática que começava a ser vista na universidade e aquela que havia sido estudada na escola básica desestabilizasse os estudantes:

²⁰⁴ FERREIRA (2010).

O assunto muda (...), e isso vai causar trauma sempre que este degrau existir. Eu acho que até hoje, apesar de já utilizarmos técnicas que facilitem essa passagem e termos transformado o primeiro ano em um ano mais de adaptação do que em um curso de Matemática propriamente dito, continua havendo – ouvimos diariamente isso dos alunos – que há um salto tremendo de qualidade entre o que se via em Matemática no ensino médio e o que se vê na universidade; até parece uma Matemática diferente, nos dizem alguns alunos. Então o salto vai continuar existindo sempre que continuarmos fazendo deste jeito e eu não sei se é possível fazer essa transição mais suavemente sem que haja um investimento muito grande em tempo e em material didático. (Ibid.).

Outro fator que, de acordo com Ferreira, acabava colaborando para que esta transição do ensino básico para o superior se tornasse ainda mais complicada para o estudante era o elevado grau de autonomia que este deveria adquirir, ao ingressar na universidade, em relação ao curso, ao professor e aos livros, algo com que, até aquele momento, ele não estava habituado:

Apesar de a aula estar todinha na lousa, uma boa parte do curso era feita por nós mesmos nos exercícios. Os exercícios eram cobrados; recebíamos nota nas listas, elas eram corrigidas, mas a nota das listas não era algo tão relevante na avaliação; você tinha a opção de não fazer exercícios, caso não quisesse. Você também tinha a possibilidade de ir até a biblioteca pesquisar ou de procurar o professor depois da aula para complementar sua formação... Enfim, eu notava que era um estilo de ensinar que fornecia muita autonomia. (Ibid.).

É interessante destacar que esta dificuldade relacionada à postura que o estudante do ensino superior precisa assumir e que foi destacada na última citação, diz respeito exatamente àquilo que Gascón (2009) denomina de *mudanças nas responsabilidades* dos alunos, necessárias quando os mesmos ingressam na universidade.

Vejamos então qual é o nível de rigor proposto em *Cálculo Infinitesimal* de Spivak, que servia como referência neste curso ministrado por Pereira em 1989, e quais as preocupações didáticas, relacionadas ou não ao rigor, que podem ser destacadas em tal livro.

Iniciamos a análise da obra pelo prefácio, no qual o autor explicita sua preocupação central ao redigir tal manual:

A idéia central que esteve presente durante a confecção de cada detalhe deste livro, foi a de apresentar o Cálculo não simplesmente como um prelúdio da matemática, e sim como o primeiro contato real do aluno com a mesma. Já que foram os fundamentos da análise que forneceram o material que serviu de base para o desenvolvimento das formas modernas de discurso matemático, o curso de Cálculo deveria ser uma ocasião para se aprofundar nos conceitos básicos de lógica, ao invés de tentar evitá-los. (SPIVAK, p. vii, 1975 – tradução nossa).

Percebe-se, portanto, que o autor, logo no início de seu texto, já dá indícios de que o foco do livro está nos fundamentos da Análise, e não apenas no trabalho com as técnicas. Para Spivak, no curso de Cálculo, o estudante deve, de fato, ser apresentado ao rigor característico da Matemática de nível superior e aos princípios do raciocínio lógico-dedutivo que fundamentam o trabalho nesta ciência. Nota-se então que, assim como para Artigue (1998) e Olimpio Junior (2007), para Spivak, também, as definições formais não devem ser ignoradas em um primeiro contato do estudante com o Cálculo, já que estas fazem parte da própria estrutura do ensino superior e, principalmente, da evolução matemática do aluno. Por esta razão, em momento algum o autor tentou evitar este tipo de abordagem no referido manual e transformar o contato inicial do aprendiz com o conteúdo em questão em uma coleção de procedimentos algorítmicos. Spivak afirma que o rigor deve ser visto como algo natural no trabalho com os conceitos do Cálculo e que, desde cedo, o professor deve destacar que ele não deve ser visto como algo que bloqueia a intuição:

Além de desenvolver a intuição dos alunos a respeito dos conceitos de análise, é igualmente importante, desde cedo, convencê-los de que a precisão e o rigor não constituem um obstáculo para a intuição e nem se encerram em si mesmos; são simplesmente o meio natural para formular e tratar de questões matemáticas. (Ibid., p. vii).

Por meio deste último trecho citado, percebemos que Spivak, assim como Tall (1991) e Reis (2001), não contrapõe intuição e rigor, mas salienta que não basta tratar os conteúdos do Cálculo apenas de maneira intuitiva. É preciso, desde o início, dar condições aos estudantes para que eles percebam a necessidade do rigor em Matemática; e não o rigor por si só, mas sim em constante relação dialética com a intuição, como uma ferramenta a que recorreremos naturalmente no momento de formularmos de maneira exata algum resultado desta ciência.

Spivak comenta ainda que a ordem escolhida para a sequência dos capítulos tem como intenção apresentar o Cálculo com a evolução de uma idéia e não como uma coleção de conteúdos. Com relação a esta ordem, no entanto, destacamos que ela não difere daquela encontrada na maioria dos outros livros que tratam deste assunto: apresentam-se, inicialmente, considerações referentes aos números reais para, em seguida, introduzir a noção de função, fundamentar, segundo as idéias de Weierstrass, os conceitos continuidade e de limite e, em seguida, com base neste último, trabalhar com a diferenciação e a integração, posteriormente interligadas por meio do Teorema Fundamental do Cálculo.

Com relação ao público a quem o manual se destina, Spivak destaca que o uso do livro foi pensado para alunos iniciantes, para aqueles com alguns conhecimentos prévios de Cálculo e também para os mais adiantados e com boa preparação geral. Esta grande abrangência de público-alvo pode indicar que o autor não tenha levado em consideração que estudantes com níveis diferentes de maturidade matemática requerem, conforme preceitua Reis (2001), diferentes níveis de rigor na abordagem do Cálculo.

A respeito dos problemas propostos no manual, o autor afirma que eles foram elaborados tanto para os alunos iniciantes quanto para aqueles com maior experiência e “vão desde exercícios diretos, porém não óbvios demais, nos quais são desenvolvidas técnicas fundamentais e servem para testar a assimilação dos conceitos, até problemas de dificuldade considerável, porém de compatível interesse” (p. viii). E manifestando uma preocupação didática a respeito de como o livro deve ser utilizado pelo professor, Spivak alerta a respeito de como devem ser escolhidas as questões que serão trabalhadas pelos alunos: “dentre aquelas menos difíceis, convém fazer uma seleção apropriada para manter os alunos ocupados, porém não frustrados” (p. viii). Percebe-se, portanto, que, para o autor, é necessário que os exercícios a serem resolvidos pelos estudantes sejam desafiadores, mas, ao mesmo tempo factíveis: é preciso que, com uma dose adequada de trabalho e dedicação os mesmos tenham sucesso em suas resoluções para que não se sintam demasiadamente frustrados e, conseqüentemente, desmotivados em estudar aquele conteúdo; é importante o estudante perceber que seu empenho nos estudos está lhe proporcionando, como recompensa, solucionar corretamente os problemas que lhe são propostos. Questões excessivamente complicadas, em um primeiro momento, não irão estimular os estudantes; muito pelo contrário: os mesmos, inevitavelmente, se sentirão desapontados em estudar tanto determinado conteúdo e, mesmo assim, não conseguirem resolver os exercícios propostos pelo professor ou pelo livro didático. Este, sem dúvida, é um aspecto que deve ser levado em conta pelo docente e que demonstra uma preocupação didática bastante explícita por parte de Spivak.

Com relação à maneira como os conceitos são trabalhados no texto, o primeiro aspecto que gostaríamos de destacar é que o autor procura sempre que possível, inicialmente, apresentar definições provisórias que, em seguida, são detalhadamente discutidas e criticadas, visando deixar explícita para o leitor a necessidade de se introduzir uma definição que seja realmente rigorosa e formal do ponto de vista matemático. Este tipo de tratamento está presente principalmente nas abordagens dos conceitos de função e de limite e, para exemplificá-lo, faremos alguns comentários relativos à maneira escolhida pelo autor para introduzir estes entes matemáticos citados.

Em primeiro lugar, destacamos uma observação feita por Spivak, no início de sua abordagem da noção de função, a respeito das vantagens de se trabalhar, inicialmente, com uma definição provisória que, em nossa opinião, resume bem o espírito desta orientação proposta pelo autor em seu manual:

A princípio, não daremos sequer uma definição de função. (...) Uma definição provisória nos possibilitará estudar muitas funções e ilustrará a noção intuitiva de função tal como os matemáticos a entendem. Mais adiante, consideraremos e discutiremos as vantagens da definição matemática moderna. (Ibid., p. 47).

Podemos perceber por este trecho, que, para Spivak, o trabalho feito inicialmente por meio de uma definição provisória e intuitiva possibilitará ao estudante que este, pouco a pouco, perceba as limitações deste tipo de abordagem e, conseqüentemente compreenda a necessidade de se apresentar um tratamento com maior nível de rigor e formalismo, que culminará na definição, de fato, daquele ente matemático que está sendo trabalhado. Depois de realizar um trabalho detalhado e extenso com a definição provisória, o estudante já terá elementos suficientes para reconsiderá-la e para criticá-la, começando a perceber que a Matemática exige também uma abordagem formal; não dá para ficar apenas nas noções intuitivas e nas definições provisórias. Segundo o autor, neste processo, é importante que o leitor perceba, no entanto, que “uma definição provisória não pode consistir em encontrar sinônimos de palavras que nos trazem dificuldades. A definição (...) aceita pelos matemáticos é um belíssimo exemplo de como as idéias intuitivas podem ser incorporadas à matemática rigorosa” (Ibid., p. 57). Este comentário de Spivak traz em seu bojo a questão da necessária relação dialética entre intuição e rigor que deve existir no ensino do Cálculo ou de qualquer outro conteúdo matemático: não é porque em determinado momento uma definição formal, com um nível mais elevado de rigor e abstração foi apresentada, que o estudante deve deixar de lado todos os aspectos percebidos por meio de uma abordagem mais intuitiva. Ele pode (e deve) continuar levando em consideração aquilo que compreendeu com o auxílio da intuição, já que a definição formal não é uma substituição da noção intuitiva, mas sim uma maneira precisa de expressar a idéia central nela envolvida.

O processo de transição de uma definição provisória para a definição oficial é explorado em detalhes durante a abordagem da noção de limite. Após apresentar diversos exemplos nos quais trabalha com a definição provisória deste ente matemático, o autor, com base nestes mesmos exemplos, passa a destacar os problemas existentes na mesma. Começa então a fornecer aos leitores pistas relativas aos aspectos que deverão ser levados em

consideração no momento em que forem formalizar aquela noção que está sendo estudada; alguns elementos dos quais a definição provisória não dá conta começam a ser explicitados. Afirma que:

É chegado o momento de notar que, das muitas demonstrações que demos a respeito de limites, nenhuma delas é uma demonstração no verdadeiro sentido da palavra. O problema está, não no nosso raciocínio e sim em nossa definição. Se nossa definição provisória de função estava sujeita à crítica, ainda mais vulnerável é nossa definição de tender a um limite. Esta definição não é suficientemente precisa para poder ser utilizada nas demonstrações. Não está claro como se pode “fazer” $f(x)$ próximo a l (qualquer que seja o significado da palavra próximo) “fazendo com que” x esteja suficientemente próximo de a (por mais próximo que tenha que ser o “suficientemente próximo”). (Ibid., p. 109).

Spivak comenta ainda que, espera que o leitor tenha compreendido que, apesar das críticas que devem ser feitas à definição provisória, as argumentações feitas ao longo dos exemplos eram convincentes. Destaca que, na verdade, para apresentar argumentações como aquelas, ele já precisou recorrer, implicitamente, à definição verdadeira de limite, mas que é possível chegar a esta em etapas, esclarecendo, em cada uma delas, o que ainda estiver obscuro. É exatamente isto que o autor faz e que apresentamos a seguir:

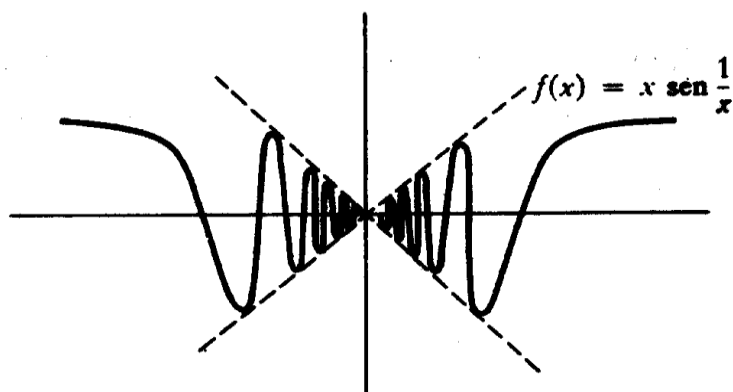
Voltemos, mais uma vez, para nossa definição provisória: A função f tende para o limite l para valores de x próximos de a , se pudermos fazer $f(x)$ tão próximo de l quanto desejarmos fazendo com que x esteja suficientemente próximo de a , mas seja diferente de a . A primeira mudança que precisamos fazer nesta definição consiste em esclarecer que fazer $f(x)$ próximo a l significa fazer $|f(x) - l|$ pequeno, e o mesmo para x e a . A função f tende para o limite l para valores de x próximos de a , se pudermos fazer $|f(x) - l|$ tão pequeno quanto desejarmos fazendo $|x - a|$ suficientemente pequeno, porém $x \neq a$. A segunda alteração e ainda mais crucial, consiste em esclarecer que fazer $|f(x) - l|$ “tão pequeno quanto desejarmos” significa fazer $|f(x) - l| < \varepsilon$ para qualquer $\varepsilon > 0$ que nos for dado. A função f tende para o limite l para valores de x próximos de a , se para todo $\varepsilon > 0$ pudermos fazer $|f(x) - l| < \varepsilon$ fazendo com que $|x - a|$ seja suficientemente pequeno e $x \neq a$. (...) Não existe nenhum padrão que seja comum a todas as demonstrações dadas a respeito de limites. Para cada número $\varepsilon > 0$ encontramos algum outro número positivo, que chamamos δ , com a propriedade de que se $x \neq a$ e $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - l| < \varepsilon$. (...) Em geral, pode não estar claro como encontrar o número ε , uma vez dado ε , porém, a condição $|x - a| < \delta$ é a que nos expressa a pequenez do “suficientemente” pequeno: A função f tende ao limite l para valores de x próximos de a , se para todo $\varepsilon > 0$ existe algum $\delta > 0$ tal que, para todo x , se $|x - a| < \delta$ e $x \neq a$, então $|f(x) - l| < \varepsilon$. Esta é praticamente a definição que iremos adotar. Faremos somente uma alteração trivial, destacando que $|x - a| < \delta$ e $x \neq a$ pode ser igualmente expresso por $0 < |x - a| < \delta$. (Ibid., p. 109-110).

Feitos estes comentários e as alterações necessárias na definição provisória de limite, o autor, finalmente, apresenta a definição formal de tal ente matemático: “a função f tender ao limite l

em a significa: para todo $\varepsilon > 0$ existe algum $\delta > 0$ tal que, para todo x , se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - l| < \varepsilon$ ” (Ibid., p. 110).

Do ponto de vista didático, esta maneira escolhida para trabalhar com a noção de limite nos parece adequada, pois, à medida que vai mostrando ao leitor as alterações que devem ser feitas na definição provisória, acaba dando oportunidade para o mesmo compreender o papel de cada um dos elementos e símbolos presentes na definição formal do ente matemático em questão. É uma abordagem que deixa bastante explícito que é sim possível apresentar o Cálculo de acordo com o rigor simbólico-formal, mas nem por isso incompreensível para o estudante; basta que a este formalismo estejam aliadas algumas preocupações didáticas adequadas.

Ainda no sentido de minimizar as possíveis dificuldades que podem decorrer de uma abordagem formal e com altos níveis de rigor do Cálculo, Spivak procura introduzir os simbolismos que são característicos deste tipo de tratamento também de maneira compreensível, por meio de exemplos trabalhados, majoritariamente, por meio da linguagem natural. Os epsilons, por exemplo, tão presentes em qualquer livro didático no trabalho com a noção de limite, são introduzidos da seguinte forma: em sua discussão a respeito de como aplicar a definição provisória de limite a uma função particular, analisa o comportamento da função $f(x) = x \operatorname{sen} 1/x$, cujo gráfico trazido pelo manual é reproduzido na sequência, para valores de x próximos de zero.



Reprodução do gráfico da função $f(x) = x \operatorname{sen} 1/x$ presente na página 110 de Spivak (1975).

Inicia suas análises, auxiliado pelo gráfico da função, considerando, a princípio, que $|x \operatorname{sen} 1/x| < 1/10$ e chega à conclusão de que, para que isto ocorra, é necessário que $|x| < 1/10$ e, ao mesmo tempo, $x \neq 0$. Em seguida, impõe que $|x \operatorname{sen} 1/x| < 1/100$ e conclui que, neste caso, é preciso que $|x| < 1/100$ e, ao mesmo tempo, ainda $x \neq 0$. Destaca

então que estas considerações nos inspiram a formular que, para que a desigualdade $|x \operatorname{sen} 1/x| < \varepsilon$ seja válida para qualquer número positivo ε dado, é preciso impor que outra desigualdade seja válida, a saber, $|x| < \varepsilon$ para o mesmo ε dado, ao mesmo tempo em que $x \neq 0$. Afirma também que dizer que $|x \operatorname{sen} 1/x| < \varepsilon$ é o mesmo que afirmar que $|f(x) - 0| < \varepsilon$ e, portanto, se tomarmos qualquer número positivo ε , podemos fazer com que esta última desigualdade seja válida impondo, simplesmente, que $|x| < \varepsilon$ e $x \neq 0$. É exatamente dessa forma que a simbologia dos epsilons é introduzida neste manual.

Outro cuidado didático bastante presente no texto de Spivak, e que, em nossa opinião, talvez colabore para que esta sua exposição rigorosa e formal do Cálculo possa ser mais bem compreendida pelos leitores, é um constante apelo à visualização gráfica daquilo que está sendo trabalhado. Um primeiro exemplo deste tipo de preocupação pode ser detectado logo após o autor introduzir a definição provisória de limite, quando apresenta seis gráficos de funções, comenta quais delas tende ao número l nas proximidades do ponto a e destaca que uma maneira conveniente de representar a afirmação f tende a l para valores de x próximos de a é desenharmos duas retas, cada uma delas representando $\mathbb{R}$, e flechas que vão desde um ponto x de uma até $f(x)$ da outra. Apresenta, então, exemplos deste método e, em seguida, com base no mesmo, começa a introduzir a idéia de vizinhança:

Considere agora a função cuja representação tenha o aspecto da figura 3. Suponhamos que se exija que $f(x)$ esteja próximo de l , que está no interior do intervalo aberto B desenhado na figura 3. Esta exigência é automaticamente satisfeita se considerarmos somente os números x do intervalo A da figura 3.

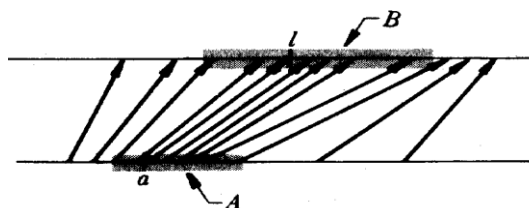


FIGURA 3

(Neste diagrama elegemos o maior intervalo entre todos aqueles que cumprem a exigência; qualquer intervalo menor contendo a seria válido). Se elegermos um intervalo B' menor (figura 4), precisamos eleger um A' menor e por menor que seja o intervalo escolhido B , terá sempre que haver algum intervalo aberto A correspondente.

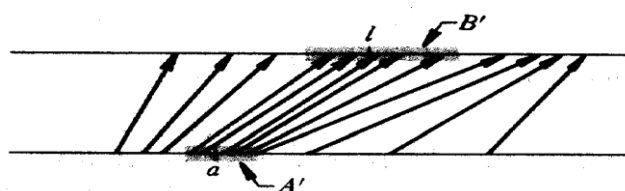


FIGURA 4

(Ibid., p. 100-101)

O autor então dá prosseguimento a esta discussão gráfica a respeito da noção de vizinhança afirmando que o raciocínio feito com o auxílio das retas e das flechas, presente nas figuras anteriores, também pode ser feito:

Em termos do gráfico de f , porém, neste caso, o intervalo B deve ser desenhado sobre o eixo vertical e o conjunto A sobre o eixo horizontal. O fato de $f(x)$ estar em B quando x está em A significa que a parte do gráfico que está por cima de A está contida na região limitada pelas retas horizontais que passam pelos extremos de B ; compare a figura 5(a), onde se tomou um intervalo A válido, com a figura 5(b) em que A é demasiadamente grande.

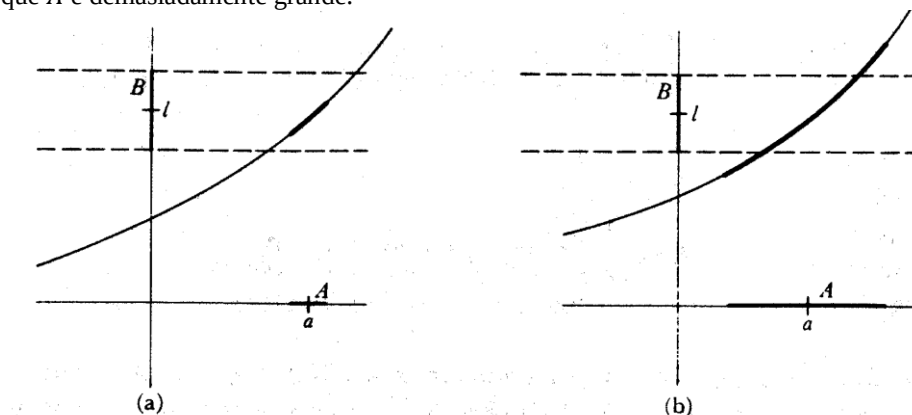


FIGURA 5

(Ibid., p. 101)

Esta ilustração gráfica da noção de vizinhança é importante do ponto de vista didático porque possivelmente fornece condições para que o estudante comece a interiorizar algumas idéias que são fundamentais no trabalho com a noção de limite e que, posteriormente, serão formalizadas por meio de definições escritas com alto nível de rigor e envolvendo um simbolismo epsilon-delta característico. Neste sentido, têm potencial para, no momento em que a definição formal for introduzida, auxiliar os alunos na compreensão dos significados e dos papéis desempenhados por tais símbolos.

Mais um momento no qual o autor demonstra sua preocupação em ilustrar aquilo que está sendo estudado é quando, ao iniciar sua abordagem da noção de derivada, passa a discutir o que significa uma reta ser tangente ao gráfico de uma função. Afirma que não se pode definir tal reta como sendo aquela que corta o gráfico apenas em um ponto porque tal definição seria, ao mesmo tempo, muito restritiva e muito ampla. Para ilustrar esta afirmação, apresenta algumas figuras e, a respeito delas, faz os seguintes comentários:

Com tal definição, a reta da figura 3 não seria tangente ao gráfico da figura, enquanto que a parábola teria duas tangentes em cada um de seus pontos (figura 4) e

as três funções da figura 5 teriam mais de uma tangente nos pontos em que apresentam um “bico”.

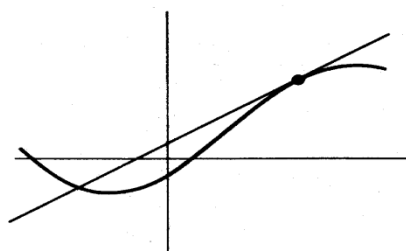


FIGURA 3

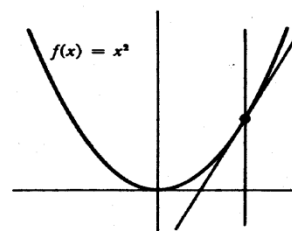
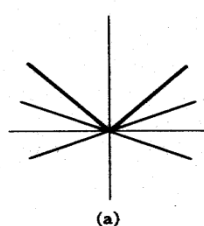
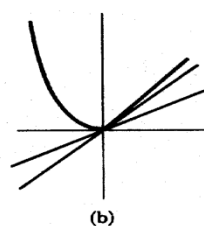


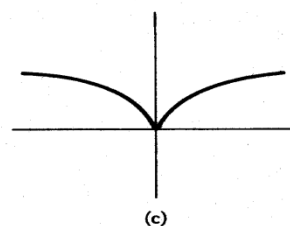
FIGURA 4



(a)



(b)



(c)

FIGURA 5

(Ibid., p. 182)

Em seguida, trabalha com a idéia de reta tangente como sendo o limite de retas secantes, define derivada de uma função em um ponto e, finalmente, estabelece que a reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(a, f(a))$ é aquela que passa pelo mesmo e tem como coeficiente angular $f'(a)$.

Observamos também que, ao longo de todo o manual, Spivak procura explicar ao leitor os significados das notações que estão sendo empregadas e alertá-lo a respeito dos possíveis enganos que podem decorrer das mesmas. Um primeiro exemplo desta preocupação com as notações pode ser encontrado durante o trabalho feito com a definição provisória de função, quando o autor afirma que, para dar prosseguimento ao estudo de tal ente matemático é necessário introduzir uma notação:

Já que em todo o livro falaremos com frequência a respeito de funções nos faz falta uma maneira de dar um nome às funções e de nos referirmos a elas em geral. O mais frequente é designar uma função por uma letra. Por razões óbvias, emprega-se, preferencialmente, a letra “ f ” ou as que a seguem na ordem de preferência “ g ” e “ h ”; mas, no fim das contas, as funções podem ser denotadas por qualquer letra (ou qualquer outro símbolo razoável), sem excluir nem mesmo “ x ” e “ y ” – embora estas letras sejam usualmente reservadas para designar números. Se f é a função, então o número que f associa ao número x é denotado por $f(x)$; este símbolo deve ser lido como “ f de x ” e a ele se dá, com frequência, o nome de valor de f em x . Naturalmente, se optamos por denotar uma função por x será preciso escolher outra letra para designar o número (seria perfeitamente legítimo, mas inadequado, escolher a letra “ f ”, que daria o símbolo $x(f)$ para representar o número que x associa a f). Observe que o símbolo $f(x)$ só tem sentido quando x pertence ao

domínio de f ; para os outros valores de x , o símbolo $f(x)$ não está definido. (Ibid., p. 49).

Esta explicação parece deixar bastante evidente ao leitor que não há nenhuma obrigatoriedade em representar funções ou incógnitas por determinadas letras específicas – embora f e x sejam as letras mais utilizadas para essa tarefa, elas não são obrigatórias. O que importa é a compreensão dos significados dos elementos com que se está trabalhando; compreendendo-os, podem-se utilizar os símbolos que se queira. Esse é um comentário bastante importante e nem sempre presente nas aulas e nos livros de Cálculo.

Também na abordagem do conceito de função, encontramos um comentário de Spivak no qual ele destaca uma das vantagens de trabalharmos com as notações matemáticas ao invés de ficarmos o tempo todo nos referindo aos elementos que estão sendo estudados por meio da linguagem natural. Ao tratar da composição de funções, afirma que:

O símbolo “ fog ” deve ser lido como “ f bola g ”. Comparando com a frase “a composição de f e g ”, esta notação tem, é óbvio, a vantagem de nos permitir escrever de maneira sintética, mas tem ainda outra vantagem muito mais importante: ao utilizá-la, a possibilidade de confundir fog com gof é muito menor. E estas composições não devem ser confundidas, já que, em geral, não são iguais. (Ibid., p. 55).

Outro momento no qual comentários referentes às notações empregadas ganham destaque é no capítulo que trata da noção de limite, quando o autor alerta que:

Observe que em nossa nova notação introduzimos uma letra x que é completamente irrelevante e poderia ser substituída por t , y , ou por qualquer outra letra que ainda não estiver sendo utilizada; os símbolos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x); \quad \lim_{t \rightarrow a} f(t); \quad \lim_{y \rightarrow a} f(y)$$

representam todos exatamente o mesmo número, que depende de f e a e não tem nada a ver com x , t ou y . (...) Um símbolo mais lógico seria algo como $\lim_a f$, porém, esta notação é, apesar de sintética, muito rígida e quase nunca utilizada. A notação $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ é muito mais fácil porque, se tomarmos, por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + \operatorname{sen} x)$$

ao tentarmos trabalhar com a outra notação precisaremos escrever uma expressão mais complicada:

$$\lim_a f \quad \text{onde} \quad f(x) = x^2 + \operatorname{sen} x.$$

(Ibid., p. 114-115).

O autor destaca ainda que outra vantagem da notação usual é que ela indica explicitamente qual é a variável envolvida na situação que está sendo considerada e, para ilustrar seu comentário, apresenta as seguintes expressões: $\lim_{x \rightarrow a} (x + t^3)$ e $\lim_{t \rightarrow a} (x + t^3)$. A primeira delas representa o limite de $f(x) = x + t^3$ quando x tende a a e, nesta situação, t é uma

constante; já a segunda, indica o limite de $f(t) = x + t^3$ quando t tende a a e, neste caso, x é que é uma constante. Essas informações não ficariam claras se utilizássemos simplesmente a notação $\lim_a f$.

As preocupações em fazer comentários a respeito das notações utilizadas e em detalhar os significados das mesmas se tornam ainda mais explícitas na abordagem do conceito de derivada. Neste contexto, inicialmente, Spivak afirma que:

O símbolo $f'(a)$ certamente lembra a notação funcional. De fato, para qualquer função f designamos por f' a função cujo domínio é o conjunto de todos os números a tais que f é derivável em a e cujo valor para tal número a é

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

(Para sermos mais precisos: f' é o conjunto de todos os pares $(a, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h})$ para os quais existe $\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)]/h$. A função f' recebe o nome de derivada de f). (Ibid., p. 185).

Convém destacar que, ao contrário de Spivak, a maioria dos livros didáticos considera x , e não a , como sendo a variável independente. Desta forma, para os mesmos $f'(a)$ indica o valor da função derivada $f'(x)$ quando $x = a$, enquanto que, para Spivak, como a está sendo tomada como variável independente, $f'(a)$ está denotando a função derivada e não o valor da mesma considerada em um ponto específico. Podemos dizer então que o autor, na redação de seu livro, coloca em prática uma idéia bastante discutida por ele ao longo de seu texto e que já foi citada em alguns parágrafos anteriores: tendo-se clareza a respeito do significado da notação que está sendo empregada, os símbolos escolhidos não fazem qualquer diferença.

Após estas explicações a respeito do símbolo $f'(a)$ e depois de apresentar diversos exemplos de cálculos de derivadas, Spivak passa a discutir de maneira detalhada a notação de Leibniz:

Os exemplos de cálculos de derivadas de uma função que apresentamos são suficientes para ilustrar a notação clássica e também muito popular para as derivadas. Para uma função dada f , a derivada f' , frequentemente, é designada por:

$$\frac{df(x)}{dx}.$$

É importante refletirmos a respeito do significado das partes distintas desta expressão quando as consideramos separadamente; os d não são números, não podem ser simplificados e a expressão completa não é o quociente dos números $df(x)$ e dx . Esta notação se deve a Leibniz (geralmente considerado como co-descobridor independente do cálculo infinitesimal junto com Newton) e é chamada notação de Leibniz. (Ibid., p. 191).

Esse comentário do autor é pertinente do ponto de vista didático, pois é bastante comum, no curso inicial de Cálculo, os alunos, ao se depararem pela primeira vez com esta notação, interpretem, erroneamente, a expressão $df(x)/dx$ como sendo um quociente, já que, durante toda a educação básica, foram informados de que a notação a/b indicava uma divisão do número a pelo número b . Este é mais um exemplo de que, conforme salienta Cantoral (1993), ao iniciar seus estudos da Matemática do ensino superior, o aluno, devido à introdução de novas simbologias, precisa, muitas vezes, estabelecer algumas mudanças no campo semântico de objetos matemáticos já conhecidos. E, a nosso ver, tais mudanças dificilmente ocorrerão sem algum tipo de comentário, neste sentido, por parte do professor e/ou do livro didático que está sendo adotado; daí a importância da observação feita por Spivak a respeito da notação de Leibniz.

Também com relação a esta notação, o autor apresenta, em nota de rodapé, um comentário referente à sua história:

Leibniz chegou a este símbolo por meio de sua noção intuitiva de derivada, que ele considerava não como o limite do quociente $[f(x+h) - f(x)]/h$, e sim como o “valor” deste quociente quando h é um número “infinitamente pequeno”. Esta quantidade “infinitamente pequena” foi designada por dx e a correspondente diferença “infinitamente pequena” $f(x+dx) - f(x)$ por $df(x)$. (Ibid., p. 191 – nota de rodapé).

As preocupações de Spivak em discutir a notação de Leibniz não se resumem a estes dois momentos citados. Visando dar prosseguimento a esta discussão, retoma os exemplos de cálculos de derivadas apresentados anteriormente e neles introduz tal notação, para, em seguida, discutir uma ambigüidade nela presente, a saber: na prática, $df(x)/dx$ algumas vezes significa f' (que é uma função) e outras vezes significa $f'(x)$ (que é um número). Comenta então que, devido a esta ambigüidade, a maior parte dos autores são contrários a denotar $f'(a)$ por $\frac{df(x)}{dx}(a)$; preferem indicar $f'(a)$ pelo símbolo $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$ que não apresenta ambigüidade. Afirma também que a notação de Leibniz está associada ainda a outra ambigüidade, originária de um costume entre os que dela fazem uso:

A notação $df(x)/dx$ é frequentemente substituída por df/dx . Isto está de acordo com o costume de confundir uma função com seu valor em x . Esta tendência é tão forte que, muitas vezes, as funções são indicadas por frases como: “consideremos a função $y = x^2$ ”. Algumas vezes seguiremos o costume clássico até o ponto de utilizarmos y como nome de uma função, porém, distinguiremos, cuidadosamente, a função de seus valores; assim, diremos sempre algo como: “consideremos a função definida por $y(x) = x^2$ ”. (Ibid., p. 192-193).

E finalmente, demonstrando, mais uma vez, que, de fato, se preocupa com a compreensão efetiva daquilo que está sendo apresentado, Spivak, embora já tenha feito comentários e alertas a respeito das complicações trazidas pela notação em questão, optar por “excluir a notação de Leibniz do texto, mas incluí-la nos problemas; alguns capítulos contêm alguns poucos problemas (imediatamente reconhecíveis) preparados para ilustrar as ambigüidades (...) [de tal] notação” (p. 193).

A questão dos significados das notações empregadas volta a ser objeto de preocupação do autor no momento em que trata da idéia de integral definida. Afirma que:

A notação $\int_a^b f$ não parece muito conveniente para designar funções definidas mediante fórmulas. Por esta razão, podemos, assim como fizemos no caso de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, considerar outra notação: $\int_a^b f(x)dx$ significa precisamente o mesmo que $\int_a^b f$. (...) Note que, da mesma forma que na notação $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, o símbolo x pode ser substituído por qualquer outra letra (com exceção, é claro, de f , a ou b):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\alpha)d\alpha = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(c)dc.$$

O símbolo dx perde significado isoladamente, do mesmo modo que não tem nenhum significado $x \rightarrow$, exceto no contexto $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. (Ibid., p. 336-337).

Ainda neste contexto, Spivak apresenta uma nota de rodapé a respeito do histórico da notação de integral:

A notação $\int_a^b f(x)$ é, na realidade, a mais antiga e durante muitos anos foi o único símbolo para a integral. Leibniz utilizou este símbolo porque considerava a integral como a soma (designada por $\int$) de infinitos retângulos de altura $f(x)$ e largura “infinitamente pequena”. Autores posteriores utilizaram $x_0, \dots, x_n$ para designar os pontos de uma partição e abreviaram $x_i - x_{i-1}$ por Δx_i . A integral foi definida como o limite quando Δx_i tendia a zero nas somas $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$ (análogas às somas inferiores e superiores). O fato de se obter o limite trocando $\sum$ por $\int$, $f(x_i)$ por $f(x)$ e Δx_i por dx encanta muita gente. (Ibid., p. 336 – nota de rodapé).

Um aspecto interessante de se salientar é que Spivak se preocupa em destacar que os pontos centrais do Cálculo - pensado como um campo de conhecimento - são os conceitos de derivada e de integral. O autor, ao iniciar o capítulo *Derivadas*, afirma que, embora o conteúdo visto anteriormente (números reais, funções e limites) seja importante, tal estudo foi, na verdade, uma preparação para as idéias que começarão a ser apresentadas a partir daquele momento, para os conceitos que são verdadeiramente característicos do Cálculo. A importância de tais conceitos é justificada no manual em termos de suas aplicações na própria Matemática e a este respeito, antes de introduzir a noção de derivada, afirma que:

Talvez (alguns diriam “certamente”) o interesse nas idéias que são introduzidas neste capítulo provenha da íntima ligação entre os conceitos matemáticos e certas idéias físicas. Muitas definições e inclusive alguns teoremas podem, frequentemente, serem descritos em termos de problemas físicos de maneira reveladora. De fato, as necessidades dos físicos constituíram a inspiração original para estas idéias fundamentais do Cálculo e, frequentemente, iremos mencionar as aplicações físicas. Porém, sempre definiremos primeiro as idéias de maneira precisa matematicamente e discutiremos seus significados em termos de problemas matemáticos. (Ibid., p. 181).

Outro momento no qual o autor recorre à própria Matemática para justificar a importância daquilo que está trabalhado aparece no capítulo chamado *Significado da Derivada*, quando comenta a respeito do porquê de se gastar tanto tempo estudando como calcular a derivada de uma função. Destaca que o domínio de tal conceito é importante porque “saber algo de f' nos diz muito a respeito de f ” (p. 237) e, então, trabalhando com as idéias de valores máximos e mínimos de uma função, com os teoremas de Rolle e do Valor Médio, com intervalos de crescimento e decrescimento de funções, mostra ao leitor como as informações fornecidas pela derivada podem auxiliar no esboço do gráfico da função em questão ou no cálculo de limites, por meio das regras de L'Hospital.

Ao trabalhar com o conceito de integral, Spivak demonstra mais uma preocupação de ordem didática: a de evitar que o leitor, levado pela motivação geométrica utilizada por ele para apresentar a idéia de somas superiores e somas inferiores, erroneamente, conceba que a noção de área é um elemento fundamental para definição de tais somas. Neste sentido, afirma que apesar da motivação geométrica apresentada no início da abordagem deste conteúdo, a definição formal dessas somas não faz qualquer referência ao conceito de área. Este tipo de preocupação traz em seu bojo a idéia de evitar que o estudante confunda uma aplicação ou uma motivação com a definição de um objeto matemático, algo bastante comum nos cursos iniciais de Cálculo, quando os alunos costumam, erroneamente, definir derivada como sendo o coeficiente angular da reta tangente a uma curva que é um gráfico de função e integral como sendo a área abaixo de uma curva deste mesmo tipo.

Um último ponto referente à obra de Spivak que destacamos diz respeito ao cuidado do autor em fazer alguns comentários referentes a detalhes teóricos envolvidos na formalização dos conceitos trabalhados. São aspectos bastante pertinentes, mas que, muitas vezes, são deixados de lado pelos professores de Cálculo e também nem sempre são salientados nos livros didáticos, que, na maioria dos casos, deixam para que o leitor, sozinho, os perceba sem que haja qualquer referência explícita aos mesmos. Para ilustrar este tipo de preocupação, vamos citar duas observações presentes no texto. Na primeira delas, Spivak

destaca que o leitor deve perceber que a hipótese de que f é uma função limitada em $[a, b]$, assumida antes de se apresentar a definição de soma inferior e soma superior, é essencial para que o supremo e o ínfimo envolvidos na mesma, de fato, existam no intervalo. Além disso, em tal definição, deve-se observar também que foi necessário considerar os números M_i e m_i como sendo supremos e ínfimos, ao invés de máximos e mínimos, já que, para que os máximos e mínimos, de fato, existam no intervalo, é preciso que a função f seja contínua e, na definição em questão, não foi feita nenhuma exigência neste sentido. Já na segunda observação, o autor procura deixar claro que, de nada adianta o leitor decorar um procedimento algorítmico se não houver conhecimento dos detalhes teóricos envolvidos no mesmo. Afirma que:

Muitos estudantes acreditam que $\int_a^b f$ se define por “ $g(b) - g(a)$ ”, onde g é uma função cuja derivada é f ”. Esta definição não somente é equivocada, como também inútil. Uma das razões para isto é que uma função pode ser integrável sem ser a derivada de outra função. Por exemplo, se $f(x) = 0$ para $x \neq 1$ e $f(1) = 1$, então f é integrável, mas não pode ser a derivada de outra função. (...) Existe também outra razão muito mais importante: se f é contínua, então sabemos que $f = g'$ para alguma função g . [Mas] a função $f(x) = 1/x$ proporciona um exemplo excelente: se $x > 0$, então $f(x) = g'(x)$, onde $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ e não conhecemos nenhuma função g com esta propriedade. (Ibid., p. 362-363).

Para que possamos, de fato, compreender a última frase da citação anterior é preciso salientar a razão pela qual o autor afirma que o leitor não conhece nenhuma primitiva que tenha como derivada a função $f(x) = \frac{1}{x}$: as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas só são introduzidas, no manual, em um capítulo que sucede o de integração.

Essa experiência de ensinar Cálculo utilizando como referência o manual de Spivak durou aproximadamente dois anos e, ao que tudo indica, a grande maioria dos estudantes envolvidos em tal experiência, e não apenas nesta ocasião em que a disciplina foi ministrada por Pereira, não possuía maturidade matemática para acompanhá-la, o que fica bastante explícito por meio da seguinte situação relatada pela professora De Souza, que em determinada ocasião ministrou Cálculo para uma turma formada quase que exclusivamente por alunos que haviam sido reprovados em um destes cursos baseados no Spivak:

O professor deu aula de Cálculo em certo ano, reprovou mais de 90% da turma e, depois, eu acabei pegando a turma de repetentes. Então, quando eu entrei na sala de aula – porque eu sabia do que havia acontecido e entendia que aqueles alunos não tinham condições de acompanhar o Spivak em um curso inicial de Cálculo; mesmo sendo uma turma de alunos do curso de Matemática – havia cerca de cem alunos; tinha um tablado na frente da sala para o professor e os alunos ficavam lá embaixo. Quando eu entrei, pensei: como vou lidar com isso? Sabe quando você entra e sente

a raiva dos alunos? Raiva mesmo! Aí eu pensei: vou dizer a que vim e disse: eu sei que é uma turma de dependência; vou trabalhar Cálculo, mas NÃO vou usar o Spivak; percebi que o clima já melhorou um pouco. Acabei adotando o [livro do] Hamilton [Guidorizzi] e ganhei a turma. (...) Era um curso formal, mas não tanto como no começo e aí eu sei que a turma estudou, a grande maioria conseguiu ser aprovada. (DE SOUZA, entrevista, 2009).

As palavras da professora De Souza, se analisadas isoladamente, podem dar a idéia de que o grande problema desta experiência implementada em meados da década de 1980 com a intenção de retomar o rigor no curso inicial de Cálculo, tenha sido a escolha de adotar o livro de Spivak. No entanto, em nossa opinião, o problema não é o manual em si, já que o mesmo propõe uma abordagem bastante cuidadosa para o conteúdo e, conforme o apresentado nos parágrafos anteriores, traz diversos tipos de cuidados do ponto de vista didático. A questão é como o texto foi utilizado em tal experiência. Ao menos no curso que analisamos, houve uma tentativa de reproduzir a apresentação proposta no livro e esta, apesar de ser matematicamente interessante, a nosso ver, por si só não basta, já que adota um nível de rigor e formalismo que possivelmente não é adequado à maturidade matemática da maioria dos ingressantes no ensino superior. Talvez o ideal fosse que os professores aliassem alguns aspectos trazidos por Spivak, como, por exemplo, não abrir mão de uma apresentação rigorosa do conteúdo, sem, no entanto, deixar de lado preocupações didáticas como a idéia de trabalhar inicialmente com as definições provisórias, de discutir o significado das notações empregadas, bem como suas vantagens e desvantagens, de valorizar a visualização gráfica daquilo que está sendo trabalhado, etc., com uma abordagem que fosse mais condizente com o contexto de uma disciplina inicial de Cálculo, já que, da forma como a mesma foi conduzida, acabou se tornando, na prática, um curso de Análise Matemática. Neste sentido, utilizando as idéias discutidas no capítulo 4, conjecturamos que a forma de trabalho adotada por este grupo envolvido nesta experiência de ensinar Cálculo baseando-se no Spivak, mais uma vez, pode indicar a falta de clareza por parte da maioria dos docentes universitários a respeito de como deve ser um curso inicial desta disciplina, o que é, de fato, fundamental em uma primeira abordagem deste conteúdo. Novamente nos parece que o foco não esteve no Cálculo e sim na Análise; a impressão que nos fica é a de, para tal grupo, o primeiro não tem um papel específico na formação do futuro matemático ou do futuro professor: é apenas uma preparação para a Análise, esta sim indispensável. Parece-nos não ter sido levado em consideração que a disciplina de Cálculo tem papéis e objetivos próprios na formação do estudante.

É preciso destacar, no entanto, que enquanto alguns alunos receberam muito mal esta nova tentativa de dar um tratamento mais formal e com nível mais alto de rigor aos conteúdos trabalhados no curso inicial de Cálculo, outros acabaram se acostumando com este tipo de abordagem e até mesmo esperando – e, inclusive, cobrando - um trabalho semelhante nas demais disciplinas. A esse respeito a professora Cerri afirmou o seguinte:

O interessante disso tudo foi o que aconteceu: (...) os alunos passaram a exigir mais rigor dos outros professores. A professora que foi dar Cálculo II para aquela turma começou a enunciar resultados e os alunos ficaram incomodados: a senhora não vai provar? E ela disse que não havia se preparado para demonstrar. E os alunos disseram: mas como? E aí, ela teve que repensar o curso porque ela havia planejado um curso tipo Poli, para Engenharia, bem aplicado, mas os alunos haviam se acostumado com outra prática. Então, essas turmas passaram a carregar essa necessidade do rigor. (CERRI, entrevista, 2009).

Assim como havia ocorrido no caso da experiência com os roteiros, a mudança no corpo docente responsável pelo curso inicial de Cálculo colocou fim a mais esta tentativa de mudança no processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina. De acordo com Cerri, os professores que passaram a ministrar tal conteúdo a partir daquele momento não concordavam com a orientação que estava sendo dada; achavam que o nível de rigor e formalismo adotado era excessivo e que se deveria ensinar, na Matemática, da mesma forma como estava se fazendo nos cursos aplicados. Então, a partir do início da década de 1990, passaram a imperar, também no IME, cursos em que a ênfase não estava na abordagem do conteúdo com níveis elevados de rigor e formalismo e sim na manipulação dos conceitos de derivada e integral e suas aplicações na própria Matemática e também em outras ciências.

Também no início dos anos 1990, razões de caráter didático ocasionaram algumas modificações na estrutura do curso inicial de Cálculo e, posteriormente, em 1994, a diferenciação entre as disciplinas de Cálculo I ministradas na Licenciatura e no Bacharelado em Matemática. Vejamos então, na sequência, quais foram os motivos que levaram a estas mudanças.

5.3 – As modificações estruturais ocorridas a partir da década de 1990, dentre as quais a separação das disciplinas de Cálculo I da Licenciatura e do Bacharelado

A partir do início da década de 1990, a graduação em Matemática da USP começou a passar por algumas reformulações curriculares que culminaram, em 1994, na diferenciação entre as disciplinas de Cálculo I do Bacharelado e da Licenciatura. Antes de tal diferenciação, no entanto, a disciplina passou por uma mudança significativa: em 1992 ela se tornou anual,

enquanto que as de Cálculo II e Cálculo III continuaram semestrais. Conforme pudemos perceber pelas informações fornecidas pelos depoentes, foram razões de caráter didático que levaram a esta alteração. De acordo com Cândido, tomou-se esta decisão “porque se achava que se perdiam alunos na passagem do Cálculo I para o Cálculo II, que o aluno precisava ter mais tempo para digerir o que havia sido ensinado, amadurecer, etc”²⁰⁵. A este respeito, Cerri comentou que os professores tinham a consciência de que muitos alunos entravam na universidade com pouca maturidade matemática e, em razão disto, acabavam sendo reprovados no curso de Cálculo I, que durava apenas um semestre, e, desta forma, não podiam fazer Cálculo II. Estes mesmos docentes passaram então a refletir que, se o estudante tivesse um tempo maior para trabalhar com aqueles conceitos fundamentais da disciplina, introduzidos no primeiro curso, talvez pudesse, aos poucos, interiorizá-los. Decidiram então tornar o curso inicial de Cálculo anual, com o objetivo de que o aluno, ao longo de todo este primeiro ano, pudesse, dentro da própria disciplina de Cálculo I, ir paulatinamente recuperando aquilo que não havia aprendido, sem que, com isso, fosse prejudicado, logo no início do ensino superior com uma reprovação que o impossibilitaria de dar continuidade ao estudo daquele assunto. De acordo com a entrevistada:

Foi uma tentativa de fazer com que os alunos não perdessem um semestre porque reprovaram em Cálculo I; apostávamos que, no decorrer do processo, eles poderiam recuperar e, de repente, dar aquele salto qualitativo e deslanchar. Só que isso pode não acontecer em maio, nem em junho; pode ser que aconteça só em agosto ou só em setembro, mas o curso sendo anual, mesmo assim ele poderia concluí-lo com sucesso. Essa era nossa idéia ao propormos um curso anual de Cálculo I. (CERRI, entrevista, 2009).

Druck complementa as palavras de Cerri destacando que foi uma tentativa feita com a intenção de fornecer aos estudantes elementos para que estes pudessem ter melhores condições de enfrentar àquelas dificuldades que são intrínsecas a um primeiro contato com a disciplina em questão.

Com o passar do tempo, no entanto, começou-se a perceber que esta experiência estava trazendo mais problemas do que soluções, já que a convivência de disciplinas semestrais com uma única anual não estava sendo bem sucedida. De acordo com Cerri, em razão de o Cálculo ser anual, não havia provas finais na metade do ano, mas nas disciplinas semestrais havia “e os alunos precisavam estudar (...) para serem aprovados. Já com o Cálculo (...) eles só precisariam se preocupar (...) no final do ano. Consequentemente (...) largavam-na

²⁰⁵ CÂNDIDO (2009).

no fim do semestre. E isso comprometia muito o aprendizado”²⁰⁶. Diante desta situação, que acabou ocasionando diversas reclamações por parte dos professores e dos estudantes, foram feitas pesquisas, por meio de questionários respondidos por docentes e alunos, com o objetivo de implementar mudanças no curso. Tais pesquisas começaram por volta de 1998 e, então, “em 2000, fizemos uma (...) uma mini-reforma²⁰⁷: o projeto pedagógico não mudou, mas fizemos adaptações, correções de percurso. (...) As disciplinas de Cálculo [tanto do Bacharelado quanto da Licenciatura] passaram a ser semestrais”²⁰⁸.

Entre 1992 e 1994, essa disciplina anual de Cálculo oficialmente ainda era a mesma para os alunos da Licenciatura e do Bacharelado, a não ser no período noturno no qual havia apenas a modalidade Licenciatura. No entanto, como afirmamos no capítulo anterior, com a implantação, em 1994, de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática, o curso ministrado aos alunos desta modalidade passou a ser diferente daquele oferecido aos estudantes do Bacharelado. Segundo Cerri (2009), as mudanças introduzidas na disciplina destinada à Licenciatura tiveram dois objetivos principais: “preparar melhor o aluno para o primeiro semestre do curso e escolher, dentre os conteúdos que se vê no curso de Cálculo I, aqueles que são mais adequados à formação do professor; e não só isso, mas também a forma de abordar e tratar esses conteúdos”²⁰⁹. Druck destacou que tais mudanças foram necessárias porque os alunos que ingressavam nesta modalidade de graduação, em geral, chegavam à universidade com maiores deficiências do que aqueles que entravam em um curso que tinha um vestibular mais concorrido como, por exemplo, as Engenharias da Escola Politécnica. Era preciso então formatar a disciplina de forma a permitir que, nela, o estudante pudesse crescer matematicamente, superar as dificuldades trazidas da educação básica, “sanar a insegurança, a baixa auto-estima, enfim, a pouca experiência com o raciocínio mais abstrato e a capacidade de dedução”²¹⁰. Já para Guidorizzi, as disciplinas devem ser ministradas separadamente para os licenciandos e bacharelados porque “os objetivos destes cursos são diferentes”²¹¹. Além disso, para ele, enquanto o Cálculo era ensinado em conjunto para estas duas modalidades de graduação, “para os alunos da Licenciatura o curso não era adequado. A separação (...) foi uma decisão acertada e importante (...) que demorou muito tempo para ser tomada”²¹².

²⁰⁶ CERRI (2009).

²⁰⁷ Tal reforma foi colocada em prática em 2001.

²⁰⁸ CERRI (2009).

²⁰⁹ CERRI (2009).

²¹⁰ DRUCK (2009).

²¹¹ GUIDORIZZI (2010).

²¹² GUIDORIZZI (2010).

A partir dessa mudança curricular, os alunos da Licenciatura passaram a estudar, no primeiro ano, apenas funções de uma variável, o que, de acordo com Druck (2009), foi feito para que eles tivessem mais tempo para refletir a respeito das questões referentes a esta situação antes de se preocuparem com problemas envolvendo funções de duas ou mais variáveis. A professora Hellmeister resume da seguinte forma as mudanças ocorridas a partir de 1994:

Mudou no seguinte sentido: você acolhe mais os alunos. Na Licenciatura temos muitos alunos que vêm (...) mal formados e, então, se percebeu que eles acabavam não aprendendo quase nada daquele Cálculo formal. Decidiu-se então ir menos longe nos conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, não fazer os teoremas de Gauss, Green e Stokes, fazer pouca coisa de integral de superfície... Enfim, optou-se por avançar menos e ficar mais no começo; tentamos cobrir um pouco essa parte do conteúdo do ensino médio que o aluno não tem. (...) Nós retomamos alguns conteúdos do ensino médio, mas com outra abordagem; trabalhamos um pouco mais funções, funções exponenciais, logarítmicas, (...) as funções trigonométricas, as inversas... Dedicamos mais tempo a isto. E tem também algumas atividades que preparamos para introduzir certos conceitos e que os alunos desenvolvem em grupo. Então, o que se estabeleceu foi essencialmente o seguinte: ir um pouco menos longe e acolher melhor o aluno, (...) fazer testes para diagnosticar as falhas deles e tentar cobrir. (HELLMEISTER, entrevista, 2009).

Além das mudanças discutidas nos parágrafos anteriores, outra alteração importante ocorrida em 1994 no currículo da Licenciatura e que esteve diretamente relacionada a preocupações com a aprendizagem do Cálculo por parte dos estudantes foi a criação de uma disciplina chamada *Laboratório de Matemática*, implantada, segundo Druck (2009), para prover as deficiências do aluno com relação a alguns conteúdos do ensino médio que são fundamentais em um curso de Cálculo. O objetivo da criação de tal disciplina foi possibilitar que o professor tivesse mais tempo de trabalhar, de forma mais cuidadosa e aprofundada, com determinados conteúdos da educação básica, que são novamente discutidos na universidade, mas de forma bastante rápida e superficial: “no Cálculo, por falta de tempo, o professor começa a ficar atrasado, atropela o aluno, não faz nada direito. O Laboratório é um espaço diferente”²¹³.

Para a disciplina inicial de Cálculo ministrada no Bacharelado, essa diferenciação ocorrida em 1994 parece não ter trazido qualquer alteração. De acordo com os depoentes, em tal modalidade, o curso de Cálculo I manteve-se exatamente da mesma maneira como já se encontrava organizado e os conteúdos continuaram sendo tratados de acordo com a orientação que já vinha sendo empregada desde o início da década, quando, conforme comentamos no capítulo anterior, os docentes optaram por, no Cálculo, dar uma abordagem menos formal e

²¹³ DRUCK (2009).

com um nível menos elevado de rigor para os conteúdos e introduzir no currículo uma disciplina chamada Análise Real, na qual os mesmos seriam revistos de maneira mais formal.

Por meio das considerações apresentadas nos últimos parágrafos, percebe-se que, ao diferenciar a disciplina inicial de Cálculo ministrada na Licenciatura daquela ministrada no Bacharelado, procurou-se adequar o tipo de tratamento dado aos conteúdos, e consequentemente os níveis de rigor e formalismo empregados, ao nível de maturidade matemática mais frequente dentre aqueles estudantes que, na época, ingressavam em uma graduação destinada à formação de professores, além de levar em conta, também, à futura atuação profissional dos egressos do curso em questão. Tais idéias vão ao encontro daquilo que postula Reis (2001), para o qual, no ensino de qualquer conteúdo matemático, deve sempre haver uma flexibilização do nível de rigor empregado, levando-se em conta o contexto em que está trabalhando, o conhecimento prévio dos alunos, o curso no qual a disciplina em questão está inserida e o perfil desejado para aquele profissional que está sendo formado.

Atualmente, as disciplinas de Cálculo I da Licenciatura e do Bacharelado permanecem diferenciadas e, conforme salientamos em um dos parágrafos anteriores, desde 2001 voltaram a ser semestrais. Seguem algumas considerações a respeito de suas características atuais.

De acordo com Cândido (2009) e Cerri (2009), a estrutura atual do curso de Cálculo (e não só da disciplina inicial deste conteúdo) na Licenciatura é a seguinte: durante todo o primeiro ano do ensino superior, nas disciplinas de Cálculo I e Cálculo II, são trabalhadas apenas funções de uma variável real, sendo que, no primeiro semestre, são estudadas funções, derivadas, antiderivação e aplicações e, no segundo, integração e suas aplicações até o Teorema Fundamental do Cálculo. As funções de várias variáveis são introduzidas no segundo ano, no chamado Cálculo III, em que os alunos estudam as derivadas parciais. Na sequência, ainda no segundo ano, há uma disciplina chamada Cálculo IV na qual são estudados integração de funções de várias variáveis, teoremas de Gauss, Green, Stokes; “essa é a última disciplina de Cálculo que o aluno cursa; o conteúdo referente a séries e sequências é visto no curso de Introdução à Análise, ministrado mais no final da graduação”²¹⁴.

Cândido, em seu depoimento, fez algumas críticas a respeito desta estrutura atual dos cursos de Cálculo da Licenciatura descrita no último parágrafo:

Esses cursos ficaram meio esquisitos; eu tenho uma crítica: a disciplina de Cálculo I é dada em seis horas semanais, assim como o Cálculo II e nessas (...) só tratamos de funções de uma variável; depois, precisamos ministrar os cursos de Cálculo III e Cálculo IV, que tratam das funções de várias variáveis, em quatro horas semanais

²¹⁴ CÂNDIDO (2009).

cada um. Os alunos ficam chocados quando acontece essa transição do curso de seis horas para o de quatro horas; dizem: está muito rápido, o que está acontecendo? Estamos acostumados a dar Cálculo em quatro horas semanais em outros institutos, mas, para os nossos alunos, parece que você estava em um veículo 1.0 e, de repente, foi para um 2.0 com motor turbo; para eles é pesado, é um choque. (CÂNDIDO, entrevista, 2009).

A este respeito, Cerri, destacou que, na época em que ela nos concedeu a entrevista, estava sendo discutido no IME que esta carga horária de seis horas semanais para disciplinas que abordam apenas funções de uma variável (Cálculo I e Cálculo II) talvez, realmente, fosse demais: “por mais que você incremente, recheie, acaba sendo muito tempo para ficar somente em uma variável, tratando apenas desses conceitos. (...) Seria possível colocar mais alguns conteúdos que seriam úteis para o que vem depois”²¹⁵.

Em 2006, o curso de Licenciatura passou por uma pequena alteração para se adaptar tanto ao Programa de Aperfeiçoamento de Ensino (PAE), implantado na Universidade em 2005, quanto às novas diretrizes do MEC, alteração está que acabou tendo reflexos também na disciplina de Cálculo I. De acordo com Druck,

Como a Licenciatura tem que ter como ênfase a formação de professores e tem de ter identidade própria do começo ao fim, então resolvemos, também por orientação do Programa [de Aperfeiçoamento de Ensino], dividir as práticas como componente curricular ao longo de todo o percurso e o acréscimo de estágios (...) ficou por conta das unidades de conteúdos específicos. Foi uma maneira de obrigar todo mundo a olhar para o lado pedagógico, mais profissional nessa formação. Resolvemos escolher algumas disciplinas dos conteúdos matemáticos específicos e acrescentar a elas aquilo que aqui é chamado crédito trabalho. Cada crédito trabalho é composto de 30 horas; são horas de trabalho extraclasse. (...) Nós (...), acrescentamos esses créditos trabalho aumentando a carga horária de sete disciplinas da Matemática (...) para que elas dessem conta de trabalhar, fazer uma discussão, levar os alunos a relacionar aqueles conteúdos com a prática profissional futura em sala de aula. E o Cálculo I, já que tem essa parte de funções, de módulo, de áreas, volumes, enfim, que são conteúdos também trabalhados na escola básica, foi uma das disciplinas que ganhou a obrigação de, só no curso de Licenciatura, descobrir um jeito de fazer esse relacionamento, de fazer os alunos refletirem a respeito de como essa abordagem que está sendo dada na universidade para áreas, função, etc, pode ser transladada, transferida para o ensino desses mesmos conceitos no ensino médio. (DRUCK, entrevista, 2009).

De acordo com a depoente, os estudantes precisam apresentar os resultados destas suas reflexões nas próprias aulas de Cálculo e, portanto, a principal modificação introduzida pelo acréscimo deste crédito-trabalho na disciplina foi a necessidade de, em algum momento da mesma, professores e alunos juntos discutirem qual a relação que deve existir entre aquela abordagem mais aprofundada, rigorosa e simbólico-formal que está sendo feita no ensino

²¹⁵ CERRI (2009).

superior para diversos tipos de funções e seus respectivos gráficos, módulo, áreas, volume, etc, e o tratamento que deve ser dado a estes mesmos conteúdos na educação básica.

O referido crédito foi acrescentado também na disciplina Introdução à Análise que, apesar de tratar de um conteúdo que tem pouco a ver com a educação básica, engloba a discussão dos números reais que, segundo a entrevistada:

É tão vilipendiada no ensino básico. Então achamos que mesmo que Introdução à Análise tenha pouco a ver com o ensino básico, os números reais têm tudo a ver. E ali eles estão vendo esse assunto de um jeito legal, super correto do ponto de vista matemático, mas e como fica então a transferência, a transposição para o ensino básico? Não pode ser essa coisa absurda que os livros trazem; tem que ter um jeito mais interessante. Mesmo não fazendo todos os detalhes mais sofisticados, também não escondê-los embaixo do tapete; dizer que eles existem e discutir as idéias possíveis. (Ibid.).

Por outro lado, com relação à estrutura atual do Bacharelado, Cândido afirmou que, nesta modalidade, “atualmente, o que está acontecendo é que os alunos (...) estão querendo um curso com mais demonstrações” ²¹⁶. E, então, na disciplina de Cálculo I, em diversas ocasiões, as mesmas ou, quando é mais oportuno, apenas suas idéias ou contra-exemplos são apresentados.

Atualmente, alguns professores que ministram Cálculo I na Licenciatura e no Bacharelado em Matemática têm defendido que, nestas duas modalidades de graduação, os estudantes entrem em contato com exigências rigorosas já no curso inicial do Cálculo; sempre que possível as demonstrações devem ser feitas e os docentes devem apresentar um tratamento simbólico-formal do conteúdo que está sendo trabalhado. É necessário, de acordo com Cardona, que o aluno seja exposto ao rigor, já que “a Matemática, além de ser uma organização de pensamentos e estruturas, é também uma linguagem e, se ele não for exposto a isto logo, será pior” ²¹⁷. No entanto, a tendência atual é, nas avaliações, não cobrar dos alunos esta abordagem feita com altos níveis de rigor; nestes momentos prevalecem àqueles exercícios efetivamente de cálculo de limites, derivadas e integrais: “apresento a formalização, mas não cobro tudo isso; não adianta. Não é realmente a minha idéia cobrar toda a formalização; ainda mais de um aluno de primeiro ano; não acho que seja por aí; (...) ele tem que passar por uma progressão” ²¹⁸. Cândido também defende este tipo de trabalho: “estamos tentando fazer o máximo no Cálculo I, mas sem cobrar muito dos alunos, porque

²¹⁶ CÂNDIDO (2009).

²¹⁷ CARDONA (2010).

²¹⁸ CARDONA (2010).

eles morrem de medo; todo dia nos perguntam: vai cair demonstração na prova?”²¹⁹. A idéia então é, durante as aulas, não pedir diretamente que o estudante trabalhe apenas com cálculos, com procedimentos algorítmicos; ele será levado a perceber quais os fundamentos teóricos existentes naqueles procedimentos: “eu não vou dar a conta direto para o aluno fazer, ele precisará saber por que precisa fazer aquilo, mas, ao mesmo tempo, se ele não souber fazer a conta, não sentirá como se envolver (...); ficará muito abstrato, muito vazio”²²⁰.

Para Cardona, a formalização do Cálculo, ainda que não seja posteriormente cobrada, deve ser apresentada tanto na Licenciatura quanto no Bacharelado. Destaca também que, tanto os alunos da Licenciatura, quanto os do Bacharelado, necessitam de preocupações didáticas bastante parecidas, já que o perfil dos ingressantes nestas duas modalidades não é muito diferente:

É a mesma população. No meu ponto de vista, o aluno que vem fazer Matemática ou é aquele que a vida inteira gostou de Matemática, é o gênio da classe, digamos assim, ou é aquele que gosta de Matemática e veio para cá meio aéreo, não sabendo muito bem o que iria encontrar, ou então é aquele que diz: a pontuação necessária para ser aprovado no vestibular é mais baixa e então eu vou tentar; é um diploma universitário. Esse que gosta de Matemática, mas não é um gênio, vai penar muito, mas vai concluir o curso. Agora, esse que caiu aqui de pára-quedas, pode até começar a gostar de Matemática, mas se a coisa não for feita de uma maneira que puxe o aluno para ele sair daquele nível de conforto e ir entendendo, ele vai desistir. (CARDONA, entrevista, 2010).

Cândido destaca que, em ambas as modalidades, é importante que o professor mostre para seus alunos quais são as aplicações daqueles conceitos do Cálculo que eles estão estudando: “eu sempre digo aos alunos que não é que o Cálculo tem muitas aplicações; é o contrário: as aplicações é que fizeram o Cálculo nascer. Não acho que tenha sentido um curso [...] no qual os estudantes ficam fazendo apenas exercícios imediatos, de conta”²²¹. E, em nossa opinião, tais aplicações, não necessariamente, precisam ser em situações presentes no cotidiano do aluno - algo defendido por alguns e que, muitas vezes, leva ao tratamento de questões extremamente artificiais e tão desprovidas de significado quanto qualquer exercício de treinamento algorítmico; podem ser aplicações na própria Matemática, situações que ilustrem a importância do conceito que está sendo abordado para o tratamento de questões relevantes para esta ciência. Cândido destaca ainda outro aspecto que deve ser levado em consideração nas aulas de Cálculo: as dificuldades algébricas que os livros didáticos e os professores costumam enxertar nos exercícios desta disciplina. Para ela, tais dificuldades,

²¹⁹ CÂNDIDO (2009).

²²⁰ CARDONA (2010).

²²¹ CÂNDIDO (2009).

talvez, possam, em muitas ocasiões, se tornar obstáculos maiores para os alunos do que o próprio rigor simbólico-formal com que os conceitos, às vezes, são trabalhados na disciplina ou do que uma abordagem mais analítica que alguns docentes porventura dão a mesma. Destaca que muitos professores e manuais, por não cobrarem dos alunos uma formalização, com alto nível de rigor, daquilo que está sendo apresentado, acham que devem propor exercícios nos quais ao menos os cálculos algébricos sejam trabalhosos:

Os livros partem do princípio: por que eu vou derivar $x^2 + x$ se posso derivar $\arctg \sqrt[3]{x^2 + x}$ e fazer o aluno usar a regra da cadeia três ou quatro vezes. Tem também esses limites nos quais a dificuldade não é o conceito, mas como (...) da forma $\frac{\infty}{\infty}$ ou da forma $\frac{0}{0}$, o aluno tem que fazer uma fatoração complicada para obter um limite que ele consiga, finalmente, determinar. Então, eu fico muito em dúvida a respeito do que é, de fato, mais difícil para o estudante no curso de Cálculo: a Análise colocada junto com o Cálculo ou a parte algébrica extremamente elaborada, introduzida porque, já que não vou definir os conceitos com todo o rigor, só vou operá-los, então devo pedir algo bem complicado? (...) Esta questão merece uma reflexão. (CÂNDIDO, entrevista, 2009).

Embora, em linhas gerais, as preocupações dos professores que ministram Cálculo na Licenciatura e no Bacharelado devam ser essencialmente as mesmas, há aspectos pontuais que podem diferenciar as abordagens a serem dadas para a disciplina cada uma dessas modalidades. Marcos, por exemplo, afirma que, especificamente no curso de Cálculo I da Licenciatura:

Toda vez que houver uma demonstração importante e fácil de ser feita, o professor deve fazê-la com muito detalhe, chamando atenção para todos os aspectos e quando houver uma demonstração difícil, (...) deve falar para os alunos que realmente considera essa demonstração difícil, para que eles não se assustem muito. Mas, acho que pelo menos, as demonstrações mais fáceis os alunos da licenciatura deveriam ser capazes de fazer. O professor pode explicar para eles como é que se demonstra o Teorema de Rolle, já que, uma vez que um teorema mais difícil, que é o Teorema do Valor Intermediário, foi demonstrado lá no começo do curso, a demonstração do Teorema de Rolle se torna algo fácil. (MARCOS, entrevista, 2009).

Cândido pontua que, embora realmente muitas das dificuldades dos ingressantes no Bacharelado sejam as mesmas daqueles ingressantes na Licenciatura, estes últimos, em geral, acabam chegando à universidade com mais dúvidas referentes aos conteúdos trabalhados ao longo da educação básica e, em razão disto, é preciso que os professores do curso inicial de Cálculo procurem fazer com os “alunos superem os obstáculos da escola básica que possam atrapalhar o desenvolvimento da disciplina”²²², levando em consideração neste processo a

²²² CÂNDIDO (2009).

heterogeneidade da turma; o professor deve sempre ficar atento para “dar uma aula interessante para o melhor aluno e não atropelar o pior” ²²³. Cardona destaca que, em razão desta necessária retomada de alguns conteúdos da educação básica no curso inicial de Cálculo da Licenciatura, alguns professores têm afirmado que a disciplina oferecida para esta modalidade de graduação está muito facilitada. A entrevistada discorda:

Eu não acho que o curso que dei para eles recentemente tenha sido fácil, porque fiz toda a formalização, gastei um bom tempo trabalhando com exemplos de funções - função é a ferramenta para matemáticos; se você não as tiver lá, na caixinha, não vai ser capaz de fazer nada, então precisa saber - porque, cada vez menos, os alunos do ensino médio vêm sabendo o que é uma exponencial, o que é um logaritmo. Logaritmo para eles é um susto e, então, você é obrigado a trabalhar com isso. As funções trigonométricas também precisam ser retrabalhadas. (...) Você perde tempo com isso? Eu não acho; acho que estamos fazendo plantações para o futuro. (CARDONA, entrevista, 2010).

Bonomi também argumenta em favor desta retomada, sob outro enfoque, de alguns conteúdos da educação básica que são fundamentais para a compreensão daquilo que será estudado no Cálculo. Afirma, por exemplo, que o tratamento dado, no ensino médio, ao tema função é sempre muito particionado e, então, na universidade é preciso dar unidade a ele: “você estuda um tipo de função e depois outro, outro, outro e uma coisa não tem nada a ver com a outra. Então, com relação às funções, eu tento dar uma espécie de uniformidade a elas, tratá-las de um jeito que me é interessante para o Cálculo” ²²⁴. Comenta também que o professor do curso inicial de Cálculo da Licenciatura deve, desde o início, mostrar ao aluno que de nada adianta ele decorar coisas; é preciso que o estudante perceba que este é um aspecto fundamental em sua formação, já que, “se ele é da licenciatura e vai ser professor, precisará dar um jeito de ensinar para seus alunos que não basta decorar regras e fórmulas” ²²⁵. Outro aspecto que precisa ser trabalhado nesta modalidade, de acordo com a docente, é que os “os alunos precisam aprender a não aceitar as coisas de maneira tão fácil. (...) Eles precisam começar a questionar. (...) Eu acho importante mostrar aos alunos que eles têm um monte de crenças, mas não sabem de onde elas vêm. E isso não dá!” ²²⁶. De acordo com ela, principalmente no curso de Cálculo da Licenciatura:

O professor precisa tirar um pouco o chão dos seus alunos porque esse chão é formado por um monte de crenças, que eles não sabem por que são verdadeiras ou por que não são verdadeiras, não percebem a necessidade de demonstrar a validade

²²³ CÂNDIDO (2009).

²²⁴ BONOMI (2009).

²²⁵ BONOMI (2009).

²²⁶ BONOMI (2009).

de um resultado; é verdade sempre? Então vou ter que provar. Isso eu acho que é fundamental, que diferencia o enfoque que deve ser dado na Licenciatura. Eu acho que esse tipo de preocupação deveria estar presente em todos os cursos, mas para a Licenciatura é extremamente necessário. (BONOMI, entrevista, 2009).

Com relação à disciplina de Cálculo I do Bacharelado, Marcos destacou que, atualmente, ela é bastante parecida com aquela que é ministrada para os alunos da Escola Politécnica e, que se compararmos este curso atual com aquele vivenciado por ele em sua época de estudante, perceberemos que: “não se faz mais algumas coisas, não se dá muita ênfase aos fundamentos, ao completamento dos números reais, etc.”²²⁷. Para Cândido, o fundamental é que, no Bacharelado, o professor deixe claro para o aluno a necessidade de ele questionar tudo o que lhe é apresentado; destacar que ele não deve mais

(...) aceitar que isso vale porque sim, porque a professora de não sei que ano falou, porque eu vi em um livro, etc. (...) Por exemplo, eu tive uma aluna que jurava que π é $22/7$ porque ela estudou em uma escola muito boa, na qual os professores faziam os textos, as apostilas e, não sei se o texto estava bem escrito ou não, mas alguém fez o favor de colocar em um quadrinho – ela me trouxe o texto – que $\pi = 22/7$. E o texto dizia: há não sei quantos séculos, já se encontrou uma aproximação excelente para π - a fração $22/7$, mas o que fica para um aluno? O que está no quadrinho: $\pi = 22/7$! E, portanto que π é racional! Então, eu procuro sempre insistir com eles: vocês têm que questionar, tem que procurar o porquê das coisas, tem que se acostumar com demonstrações, que nesse curso é para demonstrar tudo, que não é para aceitar nada; o Bacharelado é assim! (CÂNDIDO, entrevista, 2009).

Encerramos esta seção destacando uma consideração feita por Marcos durante seu depoimento e que nos pareceu interessante do ponto de vista didático: tal professor afirmou que, na opinião dele, é importante, ao ensinar Cálculo ou qualquer outra disciplina na graduação em Matemática, o docente proporcionar a seus alunos situações nas quais eles possam perceber como ele raciocina no momento de trabalhar com alguma questão matemática. Destacou ainda que, para isto, ele costuma pedir que os alunos lhe proponham algum problema matemático e, em seguida, começa a tentar resolvê-lo na lousa, na frente deles o que, em geral, é um desastre: “os alunos se perdem, começam a ficar bravos, (...) a conversar com as pessoas do lado...”²²⁸. Comenta então que: “do ponto de vista dos estudantes, a melhor coisa é o professor ter a aula bem preparada, porém, não sei se isto, de fato, é o melhor para os alunos”²²⁹. Para ele, apesar dessa resistência inicial do aluno,

²²⁷ MARCOS (2009).

²²⁸ MARCOS (2009).

²²⁹ MARCOS (2009).

didaticamente, é bom o professor que leciona no curso de Matemática, algumas vezes, fazer algo de improviso; “é como um músico que ensaia bastante, mas, uma vez ou outra, consegue (...) fazer algo improvisado, mostrando outras características da música. No nosso caso, este improviso talvez mostre outros aspectos a respeito do que é a Matemática”. Este aspecto levantando por Marcos é um ponto que, a nosso ver, deve sim ser objeto de reflexão por parte do professor que ministra Cálculo em um curso de graduação em Matemática, seja Licenciatura ou Bacharelado.

Por meio dos dados apresentados neste capítulo, percebemos que grande parte das preocupações de caráter didático manifestadas pelos professores dos cursos analisados, bem como pelos autores dos manuais adotados como referências nos mesmos, estiveram diretamente relacionadas ao rigor, mais especificamente à necessidade de se fornecer subsídios para que os estudantes de fato pudessem compreender abordagens feitas com níveis elevados de rigor e de formalismo. Inicialmente, como atestam as notas de aula de Fantappiè, não era usual os docentes conceberem a existência de diferentes níveis de rigor e, portanto, buscarem aquele que fosse mais adequado para os estudantes que estivessem ingressando no ensino superior. Da mesma forma, não havia, explicitamente, a preocupação em buscar um diálogo entre intuição e rigor; tudo já era apresentado diretamente sistematizado e de maneira formal. Preocupações neste sentido começam a ganhar força a partir do início da década de 1950 por meio das reflexões de Gomide e Catunda a respeito do que seria mais adequado aos alunos do primeiro ano da universidade: se estudar diretamente Análise Matemática ou se inicialmente passar por um curso de Cálculo. A partir destas reflexões começou a haver um redirecionamento na forma como a disciplina inicial de Análise era trabalhada. Pouco a pouco, preocupações didáticas como a valorização da intuição geométrica, a busca por uma abordagem menos abstrata - porém nem por isso não rigorosa - daquilo que estava sendo trabalhado, a procura pelo nível de rigor que fosse mais adequado ao público-alvo daquela disciplina e a valorização também dos exercícios de cálculos de limites, derivadas, pontos de máximos e mínimos, esboço de gráficos, integrais, áreas, volumes e comprimentos de arco, passam a ser mais frequentes tanto nas aulas quanto nos textos adotados como referências para as mesmas. Como consequência desse redirecionamento, a partir de 1964, os estudantes do primeiro ano da graduação em Matemática passaram, oficialmente, a estudar inicialmente Cálculo e não mais diretamente Análise o que, conforme discutimos no capítulo anterior, não significa que em tal data este movimento em direção a uma disciplina inicial de Cálculo, mais próxima daquela que conhecemos atualmente, tenha terminado.

Pudemos notar que preocupações de caráter didático, em maior ou menor grau, estiveram presentes desde a implantação da disciplina de Análise Matemática por Fantappiè em 1934. Acentuaram-se com esse movimento em direção a um curso inicial efetivamente de Cálculo e ganharam ainda mais força na década de 1970, quando alguns professores passaram a buscar formas diferenciadas de trabalhar com a disciplina, a saber, a adoção de um manual (Moise) que trazia uma abordagem em espiral para os assuntos a serem ensinados e a introdução de uma metodologia de ensino baseada em roteiros e discussões em grupo, na qual o grande diferencial era a mudança de papel do aluno: de receptor passivo a participante ativo na construção de seu próprio conhecimento. Estas inovações propostas nos anos 1970 não foram, no entanto, institucionais e sim iniciativa dos docentes que estavam ensinando Cálculo naquele momento e, por esta razão, não foram levadas adiante; na medida em que outros professores foram se tornando responsáveis por conduzir as aulas daquela disciplina, acabou havendo um retorno ao modelo didático que vigorava anteriormente.

Ao longo da década de 1980 houve grande variabilidade em relação aos níveis de rigor; percebemos, neste período, a convivência de disciplinas conduzidas com abordagens ainda mais rigorosas do que aquelas encontradas em cursos atuais de Análise com outras bastante próximas daquelas encontradas na maioria dos cursos de Cálculo ministrados atualmente. Em diversos momentos notamos também certo retrocesso em relação a aspectos que já haviam sido alvo de preocupação em outras ocasiões, como, por exemplo, a participação do aluno em seu processo de aprendizagem, as formas de avaliações consideradas, o papel da intuição, a preocupação em fornecer ao estudante subsídios para que uma abordagem simbólico-formal do conteúdo fosse efetivamente compreendida e a valorização em demasia de aspectos formais em algumas ocasiões e de algoritmos em outras. No final da década, mais uma experiência didática foi colocada em prática: na tentativa de devolver o rigor ao curso inicial de Cálculo, que para alguns professores estava se perdendo, optou-se por adotar como referência em tal disciplina o manual de Spivak. Tal experiência durou apenas dois anos e não foi muito bem recebida pelos estudantes, que achavam o curso muito difícil e completamente voltado para si mesmo.

Na década de 1990, mais precisamente em 1994, ocasionada por preocupações didáticas dirigidas especialmente aos licenciandos que, por normalmente chegarem à universidade com maiores deficiências em relação a alguns conteúdos matemáticos da educação básica, precisavam de um curso inicial de Cálculo com características próprias, que os possibilitasse rever tais conteúdos de uma maneira que fosse mais apropriada aos objetivos

da disciplina e, ao mesmo tempo, sanar as possíveis dificuldades, finalmente se deu a diferenciação entre as disciplinas de Cálculo I da Licenciatura e do Bacharelado.

Com relação aos cuidados de caráter didático manifestados pelos autores dos livros adotados como referência nos cursos ministrados no período considerado na pesquisa, destacamos alguns que, a nosso ver, são essenciais em um primeiro curso de Cálculo: a utilização de textos em linguagem natural, procurando explicar ao leitor algo que, posteriormente, será apresentado de maneira sintética por meio da linguagem característica do Cálculo e da Análise ou ainda procurando explicar o significado de algo anteriormente apresentado de modo simbólico-formal; a preocupação em discutir o significado dos símbolos e notações empregadas; a valorização da intuição ao longo de todo o processo de ensino, principalmente naqueles momentos em que os novos conceitos serão introduzidos; a preocupação em esclarecer quais são, de fato, as características essenciais daqueles entes matemáticos que estão sendo estudados e que, por esta razão, devem figurar em suas definições; o cuidado em diferenciar para o estudante uma aplicação ou motivação de uma definição; e ainda a preocupação em escolher situações, que muitas vezes são da própria Matemática, que sejam realmente adequadas à motivação do estudo de novos conceitos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Faremos, na sequência, considerações a respeito dos principais resultados obtidos na investigação e sintetizaremos algumas das análises feitas ao longo deste relatório de pesquisa. Para isto, é pertinente, em primeiro lugar, retomarmos a questão que guiou nosso estudo, a saber: *De que maneira a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral foi implantada no curso de Matemática da Universidade de São Paulo, de que forma se modificou, ao longo dos anos, em termos do nível de rigor e das preocupações didáticas e como se transformou, de uma disciplina inicialmente de Análise Matemática, em outra efetivamente de Cálculo?*

Com relação à primeira parte – *de que maneira a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral foi implantada no curso de Matemática da Universidade de São Paulo* – pudemos perceber que ela se relaciona diretamente com a origem da própria universidade, em 1934, e do modelo de ensino que seus idealizadores desejavam que nela fosse seguido. Conforme destacamos no capítulo 3, os envolvidos na fundação da USP procuraram implantar no Brasil uma instituição seguindo os mesmos moldes das conceituadas universidades européias e, para isto, era fundamental que os docentes contratados fossem, de fato, pesquisadores, na verdadeira acepção do conceito, já que, um dos objetivos da universidade, além de preparar profissionais para o mercado de trabalho, seria formar pessoas capazes de realizar pesquisa científica de ponta. Como não havia no país um número suficiente de profissionais preparados para preencher todos os quadros desta universidade que estava sendo criada, diversos pesquisadores europeus foram contratados, dentre os quais Luigi Fantappiè, destacado analista italiano que trouxe para o Brasil o modelo de ensino presente nos cursos de Matemática da Itália e de diversos outros países europeus, no qual não havia no currículo uma disciplina chamada Cálculo Diferencial e Integral. Os estudantes trabalhavam com os conceitos fundamentais deste ramo – a saber, função, limite, derivada e integral – em uma disciplina chamada Análise Matemática, ministrada, desde o primeiro ano do ensino superior, com uma abordagem predominantemente analítica, que, em momento algum, enfatizava a manipulação de procedimentos de cálculo de limites, derivadas e integrais. Foi exatamente essa disciplina de Análise Matemática que Fantappiè implantou na graduação em Matemática da USP, que, ao longo dos anos, paulatinamente, foi dando origem à disciplina atual de Cálculo de tal curso superior dessa instituição.

É importante salientar que não foi Fantappiè quem introduziu o ensino do Cálculo no Brasil; esta disciplina já era ministrada no país desde 1810 no curso de *Sciencias*

Mathematicas da Academia Real Militar do Rio de Janeiro e também nos cursos das Escolas Politécnicas que foram criadas ao longo do século XIX. No entanto, Fantappiè, ao introduzir, na USP, o ensino da Análise Matemática, foi o responsável por uma mudança de orientação e de objetivos com os quais os conceitos passaram a ser trabalhados nas instituições de ensino superior do país. Muitas delas deixaram de oferecer cursos de Cálculo e introduziram em seus currículos disciplinas de Análise, mas mesmo naquelas em que a nomenclatura Cálculo foi mantida, a abordagem dada aos conteúdos, bem como os objetivos ao se ensiná-los, sofreram mudanças significativas. Inicialmente, nas escolas militares e politécnicas, o curso tinha um caráter prático, cuja característica principal era a ênfase nos procedimentos algorítmicos, em exercícios de cálculos de limites, derivadas e integrais. Só eram apresentadas definições e deduções que fossem realmente essenciais para o desenvolvimento da disciplina e a finalidade da mesma era fornecer subsídios aos futuros militares e engenheiros para que estes pudessem utilizar os elementos do Cálculo como ferramentas em suas carreiras profissionais. Por outro lado, na disciplina de Análise implantada por Fantappiè, a ênfase passou a ser a formalização do conteúdo trabalhado, apresentado sempre com um elevado nível de rigor, e acompanhado das demonstrações de todos os resultados enunciados. As técnicas de cálculo perderam quase que completamente seu espaço e o objetivo da disciplina era fornecer aos estudantes uma sólida conceitualização dos elementos matemáticos estudados, já que, em um curso destinado à formação de matemáticos e de professores de Matemática, somente o domínio das técnicas, da Matemática pensada como ferramenta, não bastava para o exercício profissional de seus egressos. Para atender às necessidades destes últimos, Fantappiè entendeu que o mais adequado, ao invés de um curso de Cálculo, era oferecer aos estudantes uma disciplina de Análise nos moldes daquelas presentes nas universidades européias, estabelecendo, desta forma, um novo modelo, um padrão que, durante muito tempo, exerceu grande influência na forma como os conceitos de função, limite, derivada e integral foram trabalhados no ensino superior brasileiro, principalmente nos cursos de graduação em Matemática.

De acordo com os dados obtidos neste trabalho, pudemos constatar que grande parte das preocupações de caráter didático manifestadas pelos professores dos cursos que analisamos, bem como pelos autores dos manuais adotados como referências nos mesmos, estiveram diretamente relacionadas ao rigor, mais especificamente à necessidade de se fornecer subsídios para que os estudantes, de fato, pudessem compreender abordagens bastante rigorosas e formais de tal conteúdo. Da mesma maneira, tanto as variações nos níveis de rigor (GRATTAN-GUINESS, 1997) quanto o apelo a cuidados didáticos, estiveram em constante relação com o processo de transição da disciplina que, a princípio, era de

Análise Matemática para outra, de fato, com orientação voltada ao Cálculo Diferencial e Integral, evidenciando assim, o quanto que os aspectos envolvidos na segunda parte de nossa questão de pesquisa - *de que forma a disciplina se modificou, ao longo dos anos, em termos do nível de rigor e das preocupações didáticas e como se transformou, de uma inicialmente de Análise Matemática, em outra efetivamente de Cálculo* – estão interligados.

Inicialmente, como atestam as notas de aula de Fantappiè, não era usual os docentes conceberem a existência de diferentes níveis de rigor e nem, portanto, a necessidade do professor de qualquer disciplina do ensino superior buscar aquele que fosse mais adequado ao contexto em que está trabalhando e à maturidade matemática de seus alunos. Da mesma forma, o matemático italiano parecia não procurar um diálogo entre intuição e rigor; tudo já era trabalhado diretamente de maneira sistematizada e rigorosa. Sua principal preocupação foi introduzir, no país, o rigor simbólico-formal no ensino da Análise. Trouxe para o Brasil uma abordagem baseada na organização weierstrassiana do conteúdo em questão e isto, sem dúvida, foi um cuidado didático de sua parte, já que, na época, esse era o tratamento considerado como sendo o mais adequado para se trabalhar com este assunto em um curso de graduação em Matemática; era o modelo em vigor nas universidades européias, em especial italianas, tidas como modelo de rigor no ensino da Análise.

Na época da fundação da USP, o que era necessário para que um professor universitário fosse considerado um bom profissional não era seu conhecimento didático, mas sim o domínio pleno do conteúdo e isto, sem dúvida, Fantappiè possuía. Além disso, notamos que, em diversos momentos, ele parece se preocupar em não transpor diretamente o rigor dos trabalhos acadêmicos para a sala de aula. Buscava maneiras, não intuitivas, mas, de certa forma, mais palatáveis de apresentar o conteúdo que estava sendo trabalhado já diretamente com alto nível de rigor e formalismo. Neste sentido, destacamos diversas preocupações em explicar os significados das notações e símbolos empregados, em discutir alguns aspectos relativos ao processo histórico de rigorização do Cálculo e em iniciar a abordagem de alguns conceitos, ainda que diretamente de maneira formal e rigorosa, de modo a tornar mais significativo algo que, na sequência, seria apresentado sinteticamente por meio de um simbolismo característico.

No início da década de 1950, preocupações didáticas diretamente relacionadas à necessidade de se adequar o nível de rigor com que os conceitos de limite, derivada e integral eram apresentados aos estudantes que estavam ingressando no ensino superior e sua própria experiência como aluna do curso de Matemática da FFCL, levaram à professora Gomide a propor que, inicialmente, os alunos aprendessem Cálculo Diferencial e Integral, de maneira

menos crítica e mais manipulativa para, posteriormente, em um segundo momento, já com maior maturidade matemática, rever tais conteúdos com níveis mais elevados de rigor e formalismo, por meio de uma abordagem mais crítica, em um curso de Análise Matemática. Convém destacar, no entanto, que Gomide, em momento algum, propôs a substituição de um modelo teoricista para outro tecnicista (SALINAS & ALANÍS, 2009), isto é, de um modelo em que o foco estava na apresentação detalhada da teoria, por outro no qual a ênfase estivesse nas técnicas, nos procedimentos algorítmicos do Cálculo. O que ela postulava é que não se devia ir tão fundo na sistematização e na formalização dos conceitos em um primeiro contato dos estudantes com o conteúdo em questão; isto podia ser feito posteriormente. Esta abordagem inicial deveria continuar sendo feita de maneira rigorosa, mas de uma forma que fosse significativa e acessível àqueles alunos que estavam iniciando seus estudos na Matemática de nível superior. Ademais, as técnicas de cálculos de limites, derivadas e integrais que, até então, praticamente não tinham espaço na disciplina, deveriam sim fazer parte deste estudo introdutório. Ao que nos parece, para ela, em um primeiro momento, mais importante do que os estudantes conhecerem profundamente os detalhes teóricos envolvidos nos principais conceitos do Cálculo e da Análise, seria que os mesmos compreendessem seus significados e que soubessem utilizá-los, por meio de suas técnicas operatórias, como ferramentas para a resolução de problemas.

A partir destas reflexões de Gomide, começou a haver um redirecionamento na maneira como a disciplina inicial de Análise era trabalhada. A docente passou a buscar uma abordagem que estivesse mais próxima do Cálculo do que da Análise e que adotasse um nível de rigor mais moderado. No entanto, como revelam as notas de aula do curso ministrado por ela em 1951, a princípio, as mudanças foram bastante sutis e praticamente imperceptíveis; na prática, continuava sendo uma disciplina conduzida de acordo com uma orientação predominantemente analítica. Com o passar do tempo, no entanto, as alterações começam a se tornar mais explícitas. As apostilas escritas por Catunda - que era o responsável pela cátedra de Análise no momento em que Gomide começou a propor essas modificações e que se mostrou favorável às mesmas - a partir do início da década de 1950 e o livro *Um Curso de Análise* que o mesmo autor lançou em 1962, trazem diversas preocupações didáticas, sempre relacionadas ao rigor, que dão indícios de que, realmente, estavam ocorrendo mudanças na maneira como o curso de Análise Matemática do primeiro ano era conduzido. Começa a haver uma valorização da intuição no ensino, principalmente a intuição geométrica, e a busca por uma abordagem menos abstrata, porém nem por isso não rigorosa, daquilo que estava sendo trabalhado; passou-se a procurar o nível de rigor que fosse mais adequado ao público-alvo

daquela disciplina. Além disso, exercícios de cálculos de limites, derivadas, pontos de máximos e mínimos, esboço de gráficos, integrais, áreas, volumes e comprimentos de arco também passaram a figurar explicitamente nos materiais redigidos por Catunda e, durante as aulas que este ministrava na FFCL. Conforme ele mesmo destaca no prefácio das apostilas, havia, inclusive, o cuidado de não abordar os conteúdos necessariamente na ordem em que os mesmos figuravam em tal material. Segundo ele, com o passar do tempo, havia percebido que o nível de maturidade matemática com a qual os estudantes ingressavam no ensino superior o impossibilitava de, em sala de aula, seguir a mesma ordem de apresentação adotada nos materiais escritos; eram necessárias algumas inversões para que os assuntos tratados fossem mais bem compreendidos pelos alunos. Além de Gomide e de Catunda, há que se destacar que outro docente que, de acordo com nossos depoentes, também se mostrava favorável a esta idéia de haver uma disciplina de Cálculo precedendo à de Análise era Lyra.

O primeiro fruto oficial deste redirecionamento discutido no último parágrafo foi a renomeação da cátedra de Análise Matemática que, em 1964, passou a se chamar Cálculo Infinitesimal. Esta mudança de nomenclatura, provavelmente, tenha sido influenciada pela chegada ao Brasil, por meio de livros-didáticos e de professores universitários que porventura viajavam até aquele país fazer pós-graduação, do modelo adotado nos Estados Unidos para o ensino do Cálculo e da Análise. Em tal país, os estudantes cursavam primeiramente uma disciplina de Cálculo, na qual os conceitos fundamentais deste campo do conhecimento eram trabalhados de maneira menos analítica, mais intuitiva, com um nível mais moderado de rigor e com maior ênfase nos significados do que nos fundamentos para, posteriormente, em um curso de Análise ou, conforme nomenclatura também bastante utilizada na época, de Cálculo Avançado, rever tais conteúdos de acordo com uma orientação mais crítica e mais voltada aos fundamentos do que a manipulação. Este modelo norte-americano passou, a partir do início da década de 1960, a exercer grande influência no ensino superior brasileiro que, até então, no que se referia ao ensino do Cálculo e da Análise, ainda era dominado pelo modelo europeu, principalmente o italiano e o francês.

É, portanto, a partir de 1964 que, verdadeiramente, podemos falar na existência de uma disciplina chamada Cálculo no currículo do curso de Matemática da USP. Foi neste ano, inclusive, que, pela primeira vez, foi adotado como referência bibliográfica um manual – que, há que se destacar, era norte-americano – que trazia em seu título a palavra Cálculo, a saber, *Calculus with Analytic Geometry – A First Course* de Protter & Morrey e, também ao longo dos anos 1960, outros textos efetivamente de Cálculo se tornaram populares entre os alunos e os professores do curso de Matemática da USP.

O fato de a disciplina ter passado a se chamar Cálculo e não mais Análise não colocou fim ao processo lento e gradual de transição de um curso inicialmente ministrado de acordo com uma abordagem essencialmente analítica, com níveis elevados de rigor e formalismo, sem grandes preocupações em adequá-lo à maturidade matemática dos estudantes e no qual a ênfase estava na sistematização dos conceitos principais do Cálculo, para outro em que os conteúdos deveriam ser tratados com um nível de rigor mais adequado ao seu público-alvo e que o foco estivesse nos significados dos conceitos e na manipulação dos mesmos pelos alunos. Inicialmente, o nome mudou, mas o programa continuou exatamente o mesmo; não houve uma preocupação imediata em refletir a respeito de quais são os conteúdos fundamentais para um curso inicial de Cálculo direcionado a graduandos em Matemática e de quais os objetivos e especificidades desta disciplina. A transição para um curso efetivamente de Cálculo foi um movimento que, depois de 1964, ainda durou muito tempo e, neste processo, em especial a partir da aposentadoria de Catunda, quando passou a não haver mais a figura de um catedrático, ou seja, de um professor que, independente de em determinado ano estar ou não lecionando aquela disciplina, era o responsável por ela, por determinar quais conteúdos seriam trabalhados e qual a orientação que seria adotada, observa-se, em determinado momento, cursos com ênfase na manipulação de técnicas de cálculo e adotando como referência principal um manual com esta mesma orientação, e, no momento seguinte, a mesma disciplina voltando a ser ministrada com ênfase na apresentação rigorosa e formal do conteúdo abordado, sem qualquer preocupação com as técnicas e com a manipulação dos conceitos vistos, com ex-alunos chegando a afirmar que, ao final do curso, haviam efetivamente aprendido o conceito, mas que não sabiam manipulá-lo e vice-versa; sabiam, por exemplo, conceituar de maneira rigorosa e formal a idéia de integral, mas não eram capazes de calcular uma integral mais complicada, pois não haviam sido preparados para isto naquela disciplina.

Podemos dizer que, a partir daquelas reflexões de Gomide, Catunda e Lyra, que eram favoráveis a um redirecionamento da disciplina, houve um longo período que, de acordo com Chervel (1990), pode ser classificado como de *perturbação* (ou de *transição*), no qual pôde ser observada a existência simultânea de dois modelos, o antigo – ensinar diretamente Análise – que ainda não havia caído totalmente por terra e o novo – ensinar inicialmente Cálculo – que começava a se instaurar.

Ao longo dos primeiros anos deste processo de transição, embora não tenhamos detectado preocupações em voltar o Cálculo para ele mesmo e para seus conceitos fundamentais, pudemos perceber, com maior ou menor intensidade, dependendo do docente

que estava ministrando a disciplina em determinado momento, uma série de preocupações didáticas, quase sempre, relacionadas ao desejo dos professores de possibilitar a seus estudantes uma compreensão efetiva daquele tratamento, na maioria das vezes rigoroso e formal, que estava sendo dado ao Cálculo. Dentre estas, destacamos: a preocupação em esclarecer e ilustrar, por meio de situações que fossem do interesse dos diversos públicos que constituíam a turma, aspectos relativos ao tratamento rigoroso que estava sendo dado ao conteúdo; o cuidado em desenvolver o espírito crítico do estudante não reduzindo o Cálculo a um conjunto de técnicas a serem memorizadas e nem a um conjunto de teoremas e suas demonstrações; a preocupação em não evitar aquelas dificuldades que são intrínsecas aos conteúdos da disciplina, explicitando aos alunos que determinados aspectos são realmente difíceis, mas que, nem por isso, devem ser evitados; e a preocupação em propor exercícios que tinham como objetivo deixar claro para o estudante se ele havia, de fato, compreendido o que havia sido apresentado pelo docente.

No início da década de 1970, com a Reforma Universitária, as disciplinas deixaram de ser anuais e se tornaram semestrais e, a partir deste momento, pouco a pouco, o programa do curso inicial de Cálculo tornou-se mais próximo daquele encontrado atualmente na graduação em Matemática. Além disso, embora as preocupações didáticas, em maior ou menor evidência, estivessem presentes nos cursos desde a chegada de Fantappiè ao Brasil, foi a partir da década de 1970 que cuidados deste tipo ganharam força entre alguns professores da USP, principalmente entre aqueles mais jovens que, logo após terem concluído suas graduações, foram convidados para fazer mestrado na instituição e, paralelamente a isto, devido à grande demanda por novos professores, ocasionada por uma das mudanças introduzidas pela Reforma, a saber, a exigência de que todas as disciplinas de Matemática da Universidade passassem a ser ministradas por professores do recém-criado Instituto de Matemática e Estatística, iniciaram suas carreiras docentes no IME. E esse crescimento de preocupações relativas a aspectos didáticos a partir do momento em que novos professores foram contratados, de certa forma confirmam a tese de Chervel (1990), segundo a qual a renovação do corpo docente responsável por determinada disciplina é um elemento fundamental para a evolução da mesma.

Além desta provável influência da renovação do corpo docente, uma das causas para que esse tipo de preocupação se acentuasse no ensino superior foi, possivelmente, a mudança ocorrida no perfil dos ingressantes neste nível educacional desde que as universidades foram criadas no país. Na maior parte da trajetória do ensino de Cálculo no curso de Matemática da USP o que se observou foi a predominância daquilo que Thurston (1994) denomina de

modelo popular, no qual a tarefa do docente é apresentar, na lousa, o conteúdo organizado de acordo com a sequência definição – explicação - teorema – demonstração, enquanto que o papel do aluno é tomar nota daquilo que é “transmitido” pelo docente, estudar aquele conteúdo e se apropriar do mesmo de tal forma que seja capaz de resolver as questões que lhe serão propostas nas listas de exercícios e nas avaliações. Este foi o contrato didático (BROUSSEAU, 1986) vigente na maior parte do tempo, até, pelo menos, o final da década de 1960, e que, de acordo com os depoentes, era aceito com bastante tranquilidade pelos estudantes, que assumiam uma postura mais passiva e não tinham o hábito de questionar os professores a respeito de seus métodos didáticos ou sobre algo que não haviam compreendido bem. Conforme destacou um dos entrevistados, naquela época, o papel do aluno não era perguntar e sim se virar sozinho: o professor “jogava” as idéias e ele deveria se esforçar para entendê-las. Desta forma, enquanto os estudantes não passassem a questionar os procedimentos de ensino de seus mestres e exigir condições para que pudessem ter um aprendizado mais significativo, dificilmente o *modelo popular* seria abandonado.

Com o surgimento de tais questionamentos, no entanto, os professores acabaram precisando buscar alternativas didáticas e, no caso da disciplina inicial de Cálculo, isto se tornou mais frequente a partir do início da década de 1970, época em que duas experiências foram marcantes: a adoção do livro de Moise como referência bibliográfica e a implantação de uma metodologia de ensino baseada em roteiros de estudo e trabalhos em grupo. Na primeira delas, ainda que as aulas continuassem a ser conduzidas de acordo com algo bastante próximo do *modelo popular*, a idéia fundamental era fazer com que os alunos, por meio da abordagem em espiral trazida pelo manual adotado como referência, entrassem em contato com o mesmo conceito diversas vezes, sendo que, a cada nova aparição, este era tratado com maiores níveis de detalhamento, rigor e formalismo. Já na segunda, a idéia era de fato promover uma quebra no estilo de aula em vigor até então; uma mudança de um modelo de ensino baseado na “transmissão” de conhecimentos, por parte dos professores, para outro no qual os mesmos fossem construídos pelos estudantes, algo de importância tanto no aprendizado do Cálculo como de qualquer outro conteúdo da Matemática, seja na educação básica ou no ensino superior. Essas inovações didáticas também estiveram estreitamente relacionadas ao rigor, já que, de acordo com os entrevistados desta pesquisa, a intenção ao propô-las não foi tornar a disciplina mais “fácil” para os estudantes, mais próxima de um curso atual de Cálculo do que de um curso de Análise; não foram, de maneira alguma, tentativas de adequar o nível de rigor com o qual os conteúdos eram trabalhados à maturidade matemática daqueles estudantes que estavam ingressando no ensino superior. O objetivo dos

que as colocaram em prática era justamente tentar possibilitar aos alunos que eles realmente interiorizassem aquele tratamento rigoroso e formal que estava sendo dado ao assunto naquela ocasião e não apenas o memorizassem e tentassem conseguir bons resultados nas avaliações. Convém destacar, inclusive, que não havia preocupação em contextualizar aquilo que estava sendo trabalhado e nem em apresentar discussões a respeito do desenvolvimento histórico dos conteúdos abordados.

No caso específico dos roteiros, embora os professores que participaram da experiência acreditem que atualmente o tipo de atividade que propunham está ultrapassado, o que se observa é que o grande diferencial era o papel desempenhado pelo estudante durante as aulas: ao invés de ficar apenas tomando nota do que o professor estava expondo, era necessário que trabalhasse, discutisse com os colegas e avaliasse suas respostas o que, talvez, o possibilitasse desenvolver o chamado pensamento matemático flexível (DAVID & LOPES, (1998)). Por outro lado, notamos que grande parte das questões trabalhadas nos roteiros não fornecia subsídios para que o estudante pudesse perceber em quais contextos – matemáticos ou não – aquilo que estava sendo estudado poderia ser aplicado ou utilizado, o que é fundamental em um curso inicial de Cálculo. As atividades propostas, embora abrissem algum tipo de espaço para a intuição dos alunos, privilegiavam os aspectos formais dos conceitos abordados, ao invés de explorarem algo que, para os pesquisadores da Educação Matemática preocupados com questões ligadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo, é um dos pontos centrais em um primeiro contato dos alunos com a disciplina em questão: os aspectos epistemológicos e cognitivos de seus entes fundamentais.

De qualquer forma, podemos afirmar que essa experiência com os roteiros talvez tenha sido a primeira inovação didática, no sentido posto por Lucarelli (2000) e Franco (2010), vivenciada na disciplina de Cálculo do curso e instituição do interesse desta pesquisa. Esta não se resumiu a uma modificação nos métodos de ensino, mas envolveu também mudanças na relação entre professor e aluno e na forma da avaliação da aprendizagem, que passou a levar em conta também o trabalho desenvolvido pelos estudantes em sala de aula. Tais mudanças, aliás, não foram muito bem recebidas pelos estudantes em um primeiro momento; muitos, completamente adaptados ao *modelo popular* de ensino, estranhavam o fato de “o professor não dar aula” e ficar apenas esclarecendo as dúvidas que fossem surgindo ao longo do trabalho que, em um momento inicial, era feito todo por eles. Do ponto de vista teórico, esta reação já era esperada; afinal, houve uma ruptura no contrato didático vigente e, conforme destaca Brousseau (1986), tal acontecimento é sempre marcado por conflitos. Além disso, propostas como esta, envolviam outras questões, além do estudo do conteúdo, que os

mesmos deveriam ser capazes de dar conta, tais como: evitar dispersões durante as aulas, mantendo o foco e a concentração naquilo que devia ser discutido, vencer uma provável timidez, se expor e realmente se envolver no trabalho que estava sendo feito, etc. Era de se esperar, portanto, que tal inovação não agradasse a todos.

Outro ponto a salientar, é que o processo de implantação deste tipo de aula baseada nos trabalhos dos alunos nos fornece um exemplo da importância da formação pedagógica também para o professor da universidade. Embora esta idéia de possibilitar, por meio de discussões em grupo auxiliadas por roteiros, a construção do conhecimento por parte do próprio estudante tenha sido trazida dos Estados Unidos pela professora Martin Bund e implantada inicialmente na Física, foi no momento em que foi adaptada para a Matemática que tal metodologia foi, de fato, discutida com base em argumentos teóricos pelos docentes que nela estavam envolvidos. Tais discussões foram comandadas por Bonomi, que, por ter passado por algumas formações pedagógicas em um Colégio Experimental onde lecionava antes de se tornar professora da USP, acabou, de acordo com os entrevistados, se tornando a líder natural deste movimento de busca por formas diferenciadas de ministrar aulas de Cálculo. Nota-se então que os próprios docentes valorizaram estes conhecimentos pedagógicos trazidos por Bonomi; já havia entre eles a consciência de que apenas dominar o conteúdo não bastava para que tentassem maneiras alternativas de trabalhar em sala de aula.

Estes cursos de Cálculo ministrados ao longo da década de 1970, com o auxílio dos roteiros ou do texto de Moise, demonstram que é sim possível abordar tal disciplina de uma maneira que ela seja rigorosa sem, no entanto, ser excessivamente formalista. Neste sentido, experiências didáticas como estas, mostram que, de maneira alguma, é necessário banalizar o curso de Cálculo e retirar dele qualquer vestígio de rigor para que o mesmo se torne significativo para o estudante. Por outro lado, é preciso destacar que, apesar destes aspectos positivos dessas inovações, a maioria dos alunos continuava apresentando um rendimento abaixo do esperado na disciplina; o estranhamento com a linguagem simbólico-formal com a qual os conceitos eram apresentados, ainda que, provavelmente, em menor grau, permanecia. Neste sentido, a primeira avaliação continuava a ser traumática: embora as atividades propostas nos roteiros fossem corrigidas pelo professor e devolvidas ao aluno, era na primeira prova, que normalmente englobava apenas questões inéditas, que o estudante, de fato, percebia qual o nível de rigor e de elaboração que o docente estava esperando dele em suas resoluções, questão que envolve o que Gascón (2009) chama de *mudanças em relação à forma de avaliar o processo de ensino*. E, de acordo com nossos entrevistados, mesmo atualmente, independentemente da forma como a disciplina é ministrada, a primeira avaliação

que o aluno faz na universidade – e isto geralmente acontece no curso de Cálculo – continua sendo um ponto bastante delicado para ele.

As inovações didáticas discutidas nos últimos parágrafos foram obra do corpo docente que estava ministrando Cálculo naquela ocasião e, não projetos institucionais. Além disso, principalmente no caso dos roteiros, era uma metodologia de ensino que exigia do professor disponibilidade de tempo para dar conta de um volume muito grande de trabalho, já que a cada aula ministrada era necessário que analisasse toda a produção dos estudantes para que a discussão pudesse ser retomada, se necessário redirecionada e, posteriormente, concluída nas aulas seguintes. Por estas razões, foram experiências que não duraram muito tempo. Na medida em que outros professores foram se tornando responsáveis por conduzir as aulas daquela disciplina, as inovações foram sendo abandonadas e houve um retorno àquele *modelo popular* de ensino que vigorava anteriormente, o que demonstra que, as modificações introduzidas em determinada disciplina quando há a renovação do corpo docente responsável pela mesma, citadas por Chervel (1990), nem sempre são não sentido de avanços; podem também haver retrocessos.

Ao longo da década de 1980, provavelmente por falta de um consenso entre os docentes a respeito de como deveria ser um curso inicial de Cálculo destinado a alunos da graduação em Matemática – assunto amplamente discutido no capítulo 4 – observamos uma grande variedade de orientações dadas à disciplina, sendo que estas dependiam exclusivamente das concepções do docente responsável por ministrar aquele conteúdo naquele momento. Desta forma, não é de estranhar que o rigor com o qual o conteúdo foi trabalhado também tenha variado significativamente: percebemos, neste período, a convivência de disciplinas conduzidas com níveis de rigor mais altos do que aqueles encontrados em cursos atuais de Análise com outras conduzidas de maneira bastante semelhante à maioria dos cursos de Cálculo ministrados atualmente.

Não há como negar que, ao longo de tal década, características presentes em diversos cursos parecem demonstrar um retrocesso em relação a discussões e experiências já feitas anteriormente. Por exemplo, a participação dos alunos durante as aulas, na maioria dos casos, voltou a ser muito reduzida; retomou-se um modelo no qual o conhecimento é “transmitido” pelo professor e não construído pelo estudante; a avaliação, que na época dos roteiros era continuada, voltou a basear-se quase que exclusivamente nas notas das provas (as notas das listas de exercícios, em geral, também eram levadas em consideração, mas tinham um peso tão baixo na média final que praticamente não fazia diferença os alunos as entregarem ou não); em muitos momentos a intuição perdeu grande parte de seu espaço durante a abordagem

dos conceitos e, em diversas ocasiões, voltou-se a considerar como aceitável apenas o rigor simbólico-formal, não havendo preocupação em buscar aquele que fosse mais adequado aos estudantes que estavam ingressando no ensino superior; deixou-se de lado, em muitos casos, a preocupação em fornecer subsídios para que o tratamento simbólico-formal do Cálculo fosse efetivamente compreendido pelos alunos; e, finalmente, enquanto que, em alguns momentos privilegiaram-se, em demasia, os procedimentos algorítmicos, em outros as técnicas de cálculo de limites, derivadas e integrais voltaram a ser quase banidas do programa, fazendo com que os alunos concluíssem a disciplina sem ser capazes de manipular estes conceitos ou utilizá-los na resolução de problemas, tarefas que também são importantes no ensino superior. Outro ponto a ser destacado é que durante esta década, em diversos momentos, imperou entre alguns professores a idéia de que não se podia “baixar o nível” dos cursos e então, a custo disso, deixou-se de levar em consideração a maturidade matemática daqueles que estavam ingressando no ensino superior e se estes realmente tinham condições de acompanhar, logo no início de suas graduações, disciplinas conduzidas de maneira tão rigorosa e formal.

No final da década de 1980 foi colocada em prática mais uma experiência didática que, novamente, esteve profundamente relacionada com a questão do nível de rigor com o qual o Cálculo estava sendo trabalhado. Um grupo de professores, descontentes com o rumo tomado pela disciplina, mais especificamente em relação a este aspecto – o rigor, para eles, estava cada vez mais aquém do que deveria ser e daquele que a havia caracterizado até então - resolveu tentar uma retomada daquilo que, na opinião deles, estava se perdendo. Para isto, optaram por adotar como referência no curso inicial de Cálculo o manual de Spivak, que traz uma abordagem essencialmente analítica para os conceitos tratados. Tal experiência durou apenas dois anos e não foi muito bem recebida pelos estudantes, que achavam o curso completamente voltado para si mesmo e, por esta razão, muito difícil.

A respeito de tal experiência, é preciso destacar que, a nosso ver, o seu grande problema não foi a utilização de um livro que, atualmente, o próprio autor considera mais adequado para uma disciplina de Análise do que para ser utilizado em um curso inicial de Cálculo, já que, apesar desta orientação predominantemente voltada para a sistematização teórico-formal dos conteúdos trabalhados, que, em nossa opinião, é bastante complexa para alunos que estão ingressando no ensino superior, o manual traz preocupações de caráter didático bastante relevantes que poderiam contribuir significativamente para o aprendizado dos estudantes. No entanto, para alunos iniciantes, apenas entrar em contato com tais cuidados por meio da leitura do texto de Spivak não basta. O ideal seria que o professor se inspirasse nos elementos trazidos pelo autor e então os adequasse para aqueles que ainda não possuíam

qualquer conhecimento a respeito do Cálculo ou da Análise e nem mesmo maturidade matemática suficiente para, de fato, compreenderem um tratamento tão rigoroso de tais assuntos.

E isto parece não ter sido feito; de acordo com um dos entrevistados, ao menos em um dos cursos ministrados durante esta experiência, o livro era praticamente reproduzido em sala de aula, sem qualquer consideração adicional; havia, inclusive, aspectos importantes do ponto de vista didático, como, por exemplo, o apelo à visualização gráfica e a discussão dos significados das notações empregadas, que estavam presentes no livro e que não eram levados para a sala de aula; o aluno só entraria em contato com estas discussões se fosse estudar pelo livro, o que não necessariamente ocorreria. Por outro lado, é preciso salientar um aspecto positivo agregado por esta experiência à formação daqueles que dela participaram e que foi destacado por um dos entrevistados: alguns destes estudantes que, em um primeiro contato com o Cálculo, utilizaram como referência o texto de Spivak, passaram a exigir que, nas demais disciplinas, os professores também adotassem uma abordagem mais cuidadosa e com maior nível de rigor; para estes alunos, o rigor simbólico-formal e a justificação lógica daquilo que estava sendo apresentado passaram, de fato, a ser características intrínsecas do trabalho com a Matemática de nível superior.

Com relação aos cuidados de caráter didático manifestados pelos autores dos livros, apostilas ou notas de aulas adotados como referência nos cursos ministrados entre 1934 e 1994 e que foram por nós analisados neste trabalho, destacamos alguns que, a nosso ver, são essenciais em um primeiro curso de Cálculo:

- Preocupações relacionadas à como motivar a introdução dos conceitos a serem estudados, seja por meio de situações da própria Matemática ou de problemas de outras áreas do conhecimento. Este tipo de cuidado foi detectado especialmente nas apostilas e no livro de Catunda, no manual de Moise e no livro de Guidorizzi;
- Preocupação em apresentar comentários referentes à História da Matemática e ao processo de desenvolvimento do Cálculo: embora este não tenha sido um elemento muito frequente nos manuais adotados, o detectamos, de alguma forma, nos textos de Fantappiè, Catunda, Piskunov e Spivak;
- Preocupação em, inicialmente, apelar à intuição do estudante, em, antes de apresentar uma formalização ou justificação de determinado conceito ou resultado, dar condições para que o aluno compreenda o significado do mesmo, idéia posta em prática por Catunda (que valoriza, principalmente, a intuição geométrica), Hardy, Protter &

Morrey, Moise, Leithold e Spivak (nos momentos em que este autor trabalha com aquilo que chama de definições provisórias);

- Preocupação em recorrer a textos em linguagem natural explicando ao leitor algo que já tenha sido ou que será apresentado de maneira sintética por meio da linguagem simbólico-formal característica do Cálculo e da Análise. Este tipo de cuidado pode ser percebido principalmente nas notas de aula de Fantappiè e nos manuais de Hardy, Leithold e Spivak;
- Preocupação em discutir o significado dos símbolos e notações empregadas, algo presente nas notas de aula de Fantappiè, nas apostilas e no livro de Catunda e nos textos de Hardy, Protter & Morrey, Piskunov, Moise, Leithold, Guidorizzi e Spivak;
- Preocupação em discutir detalhes teóricos que muitas vezes figuram nas definições matemáticas ou nos teoremas, mas que não são efetivamente analisados nos cursos de Cálculo. Este é um cuidado didático manifestado por Fantappiè, Catunda, Moise e Spivak;
- Preocupação em apelar, quando possível, à visualização geométrica, recurso utilizado por Catunda, Protter & Morrey, Piskunov, Moise, Guidorizzi e Spivak;
- Preocupação em explicitar ao estudante quais são, de fato, as características essenciais de determinado ente matemático e que, por esta razão, devem figurar nas definições dos mesmos. Detectamos este tipo de cuidado nos manuais de Hardy e de Leithold;
- Preocupação em dar condições para que o estudante não confunda uma motivação ou aplicação com uma definição, algo presente nos textos de Hardy e Spivak.

Ainda com relação a estes materiais adotados como referências nos cursos de Análise (de 1934 a 1963) e de Cálculo (de 1964 a 1994) investigados nesta pesquisa, salientamos que, com exceção do texto de Spivak que, de acordo com o prefácio, foi pensado para ser utilizado tanto por alunos iniciantes no Cálculo quanto por aqueles que já tivessem conhecimentos a respeito desta área, todos eles foram concebidos por seus autores de forma a terem como público-alvo estudantes que estivessem passando por um curso inicial de Cálculo no primeiro ano do ensino superior. Por esta razão, alguns de maneira mais explícita e outros ainda em menor grau, demonstram algum tipo de preocupação em adequar o rigor a um nível que fosse mais apropriado a este público.

No que diz respeito à distinção entre as disciplinas de Cálculo I da Licenciatura e do Bacharelado, posta em prática oficialmente em 1994, pudemos perceber que ela foi ocasionada por preocupações didáticas dirigidas especialmente aos licenciandos que, em

geral, são estudantes que chegam à universidade com maiores deficiências em relação a alguns tópicos matemáticos da educação básica e que, por este motivo, precisam de um curso inicial de Cálculo com características próprias, que os possibilitem reestudar tais conteúdos de uma maneira que seja mais apropriada aos objetivos da disciplina e do ensino superior e, ao mesmo tempo, sanar as possíveis dificuldades. Foram, portanto, neste sentido as mudanças implantadas no Cálculo I da Licenciatura. Já no Bacharelado, tal disciplina permaneceu com a mesma orientação e como o mesmo programa com a qual era conduzida anteriormente. De qualquer forma, podemos dizer que, depois de oficialmente separadas, as disciplinas de Cálculo I da Licenciatura e do Bacharelado passaram a, cada vez mais, enfatizar os resultados e técnicas do Cálculo como ferramentas para a resolução de problemas matemáticos do ensino superior, enquanto que o trabalho aprofundado com os fundamentos de tais ferramentas passou a ser objetivo das disciplinas de Análise Real, cursada pelos bacharelados no 3º semestre, e de Introdução à Análise, cursada no 5º semestre pelos licenciandos. De acordo com os depoentes, a partir de então, o que se espera de um aluno da Matemática que tenha concluído a disciplina de Cálculo I é que o mesmo tenha habilidade em operar com funções reais de uma variável real, sendo capaz de calcular limites, derivadas e integrais de funções deste tipo, além de resolver problemas envolvendo tais conceitos, como questões englobando cálculo de áreas, volumes, comprimentos de arcos e otimização.

Analisando programas e ementas de diferentes épocas, percebemos que, com relação aos conteúdos trabalhados, eles sofreram algumas modificações e tópicos como, por exemplo, a construção dos números reais pelos cortes de Dedekind e o axioma da completude, deixaram de ser trabalhados no curso inicial de Cálculo. No entanto, pudemos notar que as alterações mais substanciais não diziam respeito à quais assuntos deveriam ser abordados e sim à forma como estes deveriam ser trabalhados. Na criação do curso de Matemática da USP, não houve preocupação em discutir como deveria ser uma disciplina inicial, efetivamente, de Cálculo a ser ministrada aos alunos desta graduação. Ao longo dos anos é que alguns docentes, devido às dificuldades apresentadas pelos estudantes na disciplina de Análise do primeiro ano, começaram a perceber que, primeiramente, os mesmos deveriam ter um contato inicial com os conceitos, em uma disciplina de Cálculo, de maneira menos formal, com um menor nível de rigor e com maior ênfase na manipulação dos conteúdos para, posteriormente, rever aqueles conceitos, na disciplina de Análise, de forma mais crítica, mais analítica.

Percebemos que, ao longo do período considerado nesta investigação, em momento algum o Cálculo esteve voltado para si mesmo; desde que foi incluído no currículo, esteve sempre subordinado à Análise e, por esta razão, não observamos discussões referentes ao

curso inicial de Cálculo levando em conta apenas os problemas que deram origem a este campo de conhecimento, suas idéias e conceitos fundamentais. As reflexões foram sempre feitas em termos dos conteúdos que normalmente são trabalhados no Cálculo e na Análise e não em termos das especificidades do Cálculo, disciplina predominantemente vista como uma pré-Análise, como um curso no qual seriam dados os elementos necessários para que os alunos pudessem, de fato, compreender o que iriam estudar com mais detalhes posteriormente. Neste sentido, nosso ponto de vista diferencia-se de Otero-Garcia (2011) quando este afirma que, no curso de Matemática da USP, “o cálculo nem sempre foi pré-requisito para a análise” (p. 225). Se pensarmos especificamente na Análise, realmente, durante as primeiras décadas de funcionamento do curso, não havia nenhuma outra disciplina que fosse pré-requisito para ela, mas isto porque o modelo europeu adotado na instituição não via necessidade para isto. No entanto, se pensarmos conjuntamente nas duas disciplinas, os dados obtidos nesta investigação nos mostram que, desde que o Cálculo foi incluído no currículo do curso de Matemática da universidade em questão, ele sempre foi visto como algo necessário e, portanto, um pré-requisito, para que os estudantes pudessem de fato acompanhar o trabalho que seria desenvolvido na Análise. O autor salienta ainda que, a posição ocupada pela disciplina de Análise no currículo do curso de Matemática foi alterada diversas vezes ao longo dos anos: “já esteve presente logo no início, meio e atualmente costuma estar localizada mais para o fim” (p. 225) o que, a nosso ver, fornece mais um indício de que, a partir de certo momento, começou-se a perceber a importância de se fornecer aos estudantes determinados conhecimentos – aquele conteúdo que se estuda usualmente na disciplina de Cálculo - para a efetiva compreensão do curso de Análise. Desde então, o Cálculo, na maioria das vezes, foi tratado como um passo necessário para a Análise e não como um curso com objetivos próprios.

Uma demonstração desta subordinação constante do Cálculo à Análise que pudemos perceber em nosso estudo foi o fato da disciplina analisada, em praticamente todos os momentos, adotar a sequência de Cauchy-Weierstrass para a apresentação dos conteúdos, com a noção formal de limite embasando as idéias de derivada e integral. Tal sequência, de acordo com Barufi (1999), é mais adequada para a Análise do que para a disciplina de Cálculo e, para Rezende (2003), ela não é apropriada para cursos mais preocupados com os significados dos resultados do que com sua sintaxe lógica. Este último autor destaca que um curso inicial conduzido de acordo com esta orientação, por ser muito difícil para os estudantes, acaba, em geral, enfatizando o treinamento algébrico e sintático dos resultados trabalhados. E, desta forma, atualmente vem ganhando força uma idéia que, em algumas ocasiões, já estava

presente nos cursos iniciais de Cálculo desde meados da década de 1960: apresentar aos estudantes uma abordagem bastante rigorosa e formal da disciplina, mas não cobrar este elemento dos mesmos nas listas de exercícios e avaliações, acentuando aquilo que Rezende (2003) denomina de *conflito pedagógico entre o que se faz e o que se pede*. Este procedimento, que Ríos (1998) classifica como uma escolha didática equivocada, é normalmente praticado por aqueles docentes que, tendo consciência das dificuldades trazidas por um tratamento excessivamente rigoroso e formal dado ao Cálculo, procuram avaliar os estudantes com base naquilo em que os mesmos tendem a apresentar melhores resultados, a saber, os exercícios algorítmicos. Esta postura, de acordo com Artigue (1995), faz com que o aluno não valorize o conceito e seus significados, mas sim os procedimentos operatórios associados a ele, já que estes últimos é que são cobrados e, para muitos, é por meio daquilo que figura nas avaliações que se percebe o que, de fato, é fundamental de ser aprendido em determinada disciplina. Além disso, o professor agindo desta forma acentua a subordinação dos objetivos do ensino da disciplina aos da Análise e fortalece a visão do Cálculo como uma pré-Análise.

Pudemos perceber que, ao longo da trajetória do curso de Matemática da USP, diversos professores e alunos realmente têm associado, inadequadamente, a intuição ao Cálculo e o rigor à Análise, quando, na verdade, ambas as disciplinas devem possuir, em relação dialética, níveis adequados de rigor e de intuição. Da mesma forma, têm associado o Cálculo aos algoritmos e manipulações e a Análise aos teoremas e demonstrações, quando, no entanto, há teoremas e demonstrações cujas apresentações são sim essenciais na disciplina de Cálculo. Essas associações, a nosso ver, podem decorrer do fato de a transição havida, ao longo do tempo, de um curso inicial de Análise para outro de Cálculo, não ter sido bem compreendida por alguns dos professores envolvidos no processo de ensino destas disciplinas e, provavelmente, por aqueles que formaram estes últimos. Tal incompreensão talvez possa ter colaborado para que diversas idéias – como, por exemplo, a de que no curso inicial de Cálculo o aluno deve aprender as técnicas, ser capaz de fazer contas, enquanto que, na Análise deverá entender verdadeiramente o conceito - ganhassem força. É preciso que o objetivo maior de qualquer curso – seja ele de Cálculo ou de Análise - seja a aquisição dos significados, pelo estudante, daquilo que está sendo abordado. Da mesma forma que não tem sentido reduzir a disciplina de Cálculo a uma coletânea de teoremas seguidos de suas demonstrações sem dar ao estudante qualquer possibilidade de compreensão efetiva daquilo tudo, não tem sentido reduzi-la a exercícios de cálculos puramente mecânicos sem qualquer reflexão a respeito dos processos e idéias fundamentais neles envolvidos.

Rezende (2003) comenta que a disciplina inicial de Cálculo do curso de Matemática enfrenta, atualmente, uma crise de identidade causada principalmente por essa subordinação desta à Análise, levando a uma abordagem excessivamente rigorosa e formal do Cálculo que dificulta a compreensão, por parte dos alunos, de suas idéias básicas e seus respectivos significados. Estamos de acordo com Rezende de que tal crise, de fato, existe e é favorecida pela forma como o curso se encontra organizado. No entanto, a nosso ver, ela não é recente; suas origens, ao menos na USP, se confundem com a própria implantação e com o desenvolvimento da disciplina no currículo do curso de graduação em Matemática. Percebemos que, nesta instituição, ela já nasceu subordinada à de Análise; não existia inicialmente e surgiu como uma necessidade de preparar o aluno para o estudo da Análise Matemática, de dar condições a ele de melhor compreender aquilo que seria apresentado nesta disciplina e que não ficaria totalmente claro se ele não tivesse tido um primeiro contato, sob outra orientação, com aqueles conteúdos nela trabalhados. O curso inicial de Cálculo da Matemática já nasceu, portanto, sem identidade própria, como uma pré-Análise, um curso no qual seria feita abordagem mais intuitiva e menos formal daqueles conteúdos que, posteriormente, seriam revistos e formalizados com alto nível de rigor na disciplina de Análise. É neste sentido que afirmamos que, na USP, a crise de identidade citada por Rezende (2003) não é algo recente. Estamos de acordo com este pesquisador de que, para superar tal crise, é necessário voltar o ensino do Cálculo para o próprio Cálculo, seus problemas construtores, suas potencialidades e seus significados, procurando nele mesmo o nível de rigor possível e as metas de seu ensino, rompendo o cordão que submete o ensino deste ao da Análise.

Conforme salientamos no capítulo 1, a estrutura adotada na USP serviu, durante muito tempo, de modelo para outras instituições brasileiras. No curso de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade Estadual Paulista (UNESP), por exemplo, Otero-Garcia (2011) afirma que também não havia, durante as décadas de cinquenta e sessenta, disciplinas específicas de Cálculo e de Análise e que a separação de tais conteúdos no ensino se deu, oficialmente, na década de 1970. Estabelecendo uma comparação entre o ensino de Cálculo e de Análise nas graduações em Matemática oferecidas por estas duas instituições, o autor concluiu que o movimento das disciplinas “seguiu basicamente a mesma linha, a menos de questões pontuais e temporais, e em geral as modificações primeiro aconteciam no curso da USP para depois aparecerem no da FFCL de Rio Claro [UNESP]” (OTERO-GARCIA, 2011, p. 212), o que, a nosso ver, é mais um indício da influência

exercida, em determinada época, pelo modelo de curso da USP e pelas modificações estruturais efetivadas no mesmo.

É preciso realçar que, o que se passou na USP e nas demais instituições brasileiras que adotaram seu modelo de organização no que diz respeito ao ensino de Cálculo e de Análise, vai na contramão da história da constituição destes ramos da Matemática como campos de conhecimentos: historicamente, o que ocorreu foi que, na tentativa de justificar de maneira rigorosa os elementos envolvidos nas idéias fundamentais daquilo que hoje chamamos de Cálculo, estabeleceu-se a Análise Matemática. Por outro lado, na USP, ao invés de, inicialmente, tentar-se apresentar, sem tanto formalismo e com um nível menos elevado de rigor, os significados e idéias básicas do Cálculo, tentou-se abordar tais idéias diretamente de maneira crítica, analítica, rigorosa e formal. Ou seja, da maneira como estas disciplinas se estruturaram no ensino superior brasileiro, foi a Análise quem passou a traçar as diretrizes para o ensino do Cálculo, ocorrendo uma contradição em relação à origem histórica deste campo de conhecimento. Buscou-se ensinar no curso de Cálculo, aqueles conteúdos que eram vistos como essenciais para que o estudante pudesse acompanhar um futuro curso de Análise.

Achamos pertinente destacar que, muitas das dificuldades enfrentadas pelos entrevistados desta pesquisa na transição da educação básica para o ensino superior, estiveram relacionadas à ausência de preocupações didáticas com o intuito de minimizar alguns elementos tradicionalmente complicadores nesta passagem, como a grande autonomia que o estudante deve adquirir ao ingressar na universidade, o estranhamento causado pela linguagem própria da Matemática de nível universitário, as diferenças entre os tipos de questões cobradas nas avaliações neste nível de ensino e aquelas com as quais os alunos estavam habituados na educação básica e, principalmente, as mudanças de significados sofridas por alguns símbolos e entes matemáticos já conhecidos anteriormente pelos estudantes, como é o caso, por exemplo, do sentido adquirido pela igualdade na Análise.

Detectamos que, conforme apontam as pesquisas, há realmente uma tendência de o professor universitário ensinar da mesma maneira como foi ensinado, o que, na maioria das vezes, não é positivo, já que, muitos procedimentos que, em determinada época, eram considerados como adequados para ser utilizados em sala de aula, não condizem com as concepções atuais de conhecimento, de ensino e de aprendizagem. É claro que o professor pode se inspirar em experiências vivenciadas por ele em sua época de estudante e que tenha considerado interessante, mas não parece apropriado que as reproduza sem qualquer reflexão; é preciso analisar se as mesmas estão de acordo com o que se concebe atualmente a respeito

do processo de construção de conhecimento e com aqueles caminhos apontados pelas pesquisas atuais relativas aos processos de ensino e aprendizagem no ensino superior.

Com base nos dados obtidos nesta investigação, podemos afirmar que, ao contrário do que pensavam e afirmavam nossos professores, a maneira como o Cálculo era ensinado antigamente não era perfeita. Mesmo quando ainda nem se ensinava efetivamente esta disciplina, e sim Análise Matemática, os estudantes já enfrentavam problemas no curso em que viam pela primeira vez os conceitos de limite, derivada e integral, problemas estes oriundos, predominantemente, da abordagem extremamente formal e rigorosa dada aos conteúdos. A própria disciplina de Cálculo surgiu no curso de Matemática da USP como uma tentativa de amenizar estas dificuldades enfrentadas pelos estudantes, demonstrando que, mesmo antes de existir, de fato, na graduação em Matemática, o ensino de tal disciplina já inspirava cuidados. Os manuais adotados como referências, embora realmente trouxessem alguns tipos de preocupações didáticas ligadas a aspectos importantes para o desenvolvimento da disciplina e que na maioria dos livros atuais são deixados de lado ou ‘escondidos embaixo do tapete’, também não conseguiam garantir total sucesso no aprendizado dos alunos. Não há como afirmar, portanto, que os problemas observados atualmente no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo sejam decorrentes do fato de não se abordar este conteúdo da forma como isto era feito antigamente ou por não se recorrer a determinados livros-didáticos. Ao contrário; as mudanças observadas, ainda que em muitos casos possam não ter sido bem sucedidas, tiveram como objetivo exatamente tentar minimizar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes; foi por esta razão que novas orientações foram dadas à disciplina, novas metodologias de ensino foram testadas e outros manuais passaram a ser adotados como referências. E este processo pela busca de uma maneira de se trabalhar com o Cálculo em sala de aula que seja capaz de promover um aprendizado efetivo aos estudantes persiste, já que os mesmos, apesar de todas as mudanças já feitas, continuam apresentando problemas, que são, de acordo com as pesquisas desenvolvidas, esperados, independente da maneira como a disciplina é trabalhada, já que muitos deles são intrínsecos aos próprios conteúdos desta área do conhecimento.

Ressaltamos, mais uma vez, que o objetivo desta pesquisa não foi apresentar a história exata da implantação e do desenvolvimento da disciplina inicial de Cálculo do curso de Matemática da USP. Estamos cientes da inexistência de uma verdade sólida, inquebrantável, definida e definitiva e de que o panorama que pudemos traçar por meio dos depoimentos coletados nos fornece uma percepção parcial, mas nem por isso menos nítida daquilo que estudamos. Da mesma maneira, os dados trazidos por meio dos livros-didáticos, apostilas e

notas de aula analisadas também não nos informam exatamente como aqueles professores que utilizaram estes materiais como referência conduziam suas aulas; dão-nos apenas indicações, já que, neste caso, entram em jogo as apropriações destes feitas pelos docentes e pelos alunos. Além disso, novamente salientamos que o leitor deste relatório de pesquisa deve estar consciente de que, alguns procedimentos adotados por professores e autores de livros-didáticos em determinados momentos e que, para ele, atualmente, possam parecer completamente inadequados, verdadeiros “absurdos pedagógicos”, no contexto da época em que foram postos em prática, eram considerados como legítimos.

Finalizamos nossas considerações apontando algumas sugestões para estudos futuros:

- Investigar a trajetória da disciplina de Cálculo nos cursos de Matemática de outras universidades brasileiras que, durante determinada época, foram referência para as demais instituições daquele Estado ou região;
- Investigar as concepções dos professores universitários a respeito das disciplinas de Cálculo e de Análise: quais as especificidades de cada uma delas, no que diferem e no que se assemelham e qual o papel desempenhado por cada uma delas no currículo do curso de graduação em Matemática (Licenciatura e/ou Bacharelado);
- Investigar como poderia ser formatado um curso de Cálculo para a graduação em Matemática que fosse voltado para si mesmo, desvinculado da disciplina de Análise. Quais deveriam ser os objetivos de tal curso? Que conteúdos ou situações deveriam ser enfatizados? Quais as metodologias mais indicadas para se trabalhar com esta disciplina de acordo com essa nova orientação?

REFERÊNCIAS

- ABUD, Z. I. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 10 de fevereiro de 2009.
- ALBERTI, V. **Manual de História Oral**. Rio de Janeiro: FGV, 2004.
- ALTHAUS, M. T. M. Ação Didática no Ensino Superior: a docência em discussão. In: **Rev. Teoria e Prática da Educação**, v. 7, n. 1, p. 101 – 106, jan./abr. 2004.
- Anuario da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras 1934-1935**. 1937. São Paulo. UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras.
- Anuario da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras 1939-1949.V.I e V.II**. São Paulo. UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, 1953.
- ARIZA, R. P. & TOSCANO, J. M. El saber práctico de los profesores especialistas: aportaciones desde las didácticas específicas. In: MOROSINI, M. C. **Docência Universitária e os desafios da realidade nacional**. Professor do Ensino Superior – identidade, docência e formação. Brasília: Inep/MEC, 2000. P. 35-42.
- ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L. & GÓMEZ, P. (Eds.). **Ingeniería didáctica em educación matemática**, pp. 97 – 140. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- _____. Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? In: **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)**, vol. 1, n. 1, p. 40 – 55, março de 1998.
- ARTIGUE, M. & ERVYNCK, G. (eds.) **Proceedings of Working Group 3 on Student's Difficulties in Calculus, ICME 7**, Quebec, Canada, 1993.
- ÁVILA, G. O Ensino do Cálculo e da Análise. **Revista Matemática Universitária**, São Paulo, n.33, p. 83-95, dezembro de 2002.
- BALDINO, R. R. Editorial. **Temas & Debates**, Brasília, v. 8, n. 6, p. 3, 1995.
- BALDINO, R. R. **Desenvolvimento de essências de Cálculo Infinitesimal**. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1998.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Edições 70. Lisboa, 2006.
- BARKER, S. F. **Filosofia da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976.
- BARON, M. E. & BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985, 5 v.
- BARRETO, A. O ensino de Cálculo I nas universidades. **Informativo da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM** (6), 4-5, 1995.

BARUFI, M. C. B. **A Construção/negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BASS, H. Mathematicians as Educators. **Notices of the AMS**, vol. 44, n. 1, 1997.

BICUDO, I. Análise Não-Standard. Boletim de Educação Matemática. In: **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 7, nº 8, 1992, pp. 60 a 67.

BITTENCOURT, C. M. F. Disciplinas escolares: história e pesquisa. In OLIVEIRA, M. A. T. de; RANZI, S. M. F. (Orgs.). **História das disciplinas escolares no Brasil**: contribuições para o debate. Bragança Paulista: EDUSF, 2003.

BOGDAN, R. & BIKLEN, S.K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1991.

BOLÍVAR, A. “De nobis ipsis silemus?”: Epistemologia de al investigación biográfico-narrativa em educación. **Revista Electrónica de Investigación Educativa**, 4(1). Disponível em <http://redie.ens.uabc.mx/vol4no1/contenido-bolivar.html>. Último acesso em 16/11/2011.

BONOMI, M. C. Entrevista concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 06 de março de 2009.

BOURBAKI, N. **Eléments d’histoire des mathématiques**, 2 ed. Paris, Hermann, 1960.

_____. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

_____. **Cálculo**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992 (tópicos de história da matemática para uso em sala de aula, v. 6).

BRASIL, Presidência da República. Decreto-lei nº 1190, de 04 de abril de 1939. Da organização à Faculdade Nacional de Filosofia. In: NÓBREGA, Vardick Lontres da. **Enciclopédia da Legislação do Ensino**. Rio de Janeiro, s. n., v.1, p. 562-570, s.d.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de La Didactique des Mathématiques. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 7, n. 2, pp. 33-115.

CAMPOS, R. P. **A abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

CÂNDIDO, C. C. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 25 de março de 2009.

CANTORAL, R. Hacia una didáctica del cálculo baseada en La cognición. In: **Memorias de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matematica Educativa**, Universidad de Panamá, Panamá, 1993.

CANTORAL, R., CORDERO, F., FARFÁN, R. & IMAZ, C. Cálculo-Análisis. Una revisión de la investigación educativa reciente en México. In: CANTORAL, R., CORDERO, F., FARFÁN, R. & IMAZ, C. (Eds.), **Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre**

Investigación en Educación Matemática (PP. 55-69). México: Universidad Autónoma del Estado de México, 1990.

CARDONA, F. S. P. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 05 de abril de 2010.

CARVALHO, D. L. **Metodologia do Ensino da Matemática**. São Paulo: Cortez, 1990.

CARVALHO, T. F. de & D'OTTAVIANO, I. M. L. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. In: **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 13 – 43, 2006.

Catálogos de graduação da Universidade de São Paulo. São Paulo: UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, 1989-2011.

CATUNDA, O. **Curso de Análise Matemática** – 1º volume. São Paulo: Editora Bandeirantes, 1952.

_____. **Curso de Análise Matemática** – II parte. São Paulo: Editora Bandeirantes, 1952.

_____. **Curso de Análise Matemática** – III parte. São Paulo: Editora Bandeirantes, 1954.

_____. **Curso de Análise Matemática** - vol.1, 1962.

_____. A Introdução dos Conceitos no Ensino da Matemática. In: **Ciência e Cultura**, v. IX, n. 1, 1957, p. 31-35.

CAVALARI, M. F. **A Matemática é Feminina?** Um Estudo Histórico da Presença da Mulher em Institutos de Pesquisa em Matemática no Estado de São Paulo. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), IGCE, UNESP, Rio Claro, 2007.

CELESTE FILHO, M. **A Reforma Universitária e a Universidade de São Paulo – década de 1960**. Tese (Doutorado em Educação), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

CERRI, C. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 29 de abril de 2009.

CHALOM, A. G. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 22 de abril de 2009.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, n. 2, p. 177-229, Porto Alegre: Palmarinca, 1990.

COELHO, S. P. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 01 de setembro de 2009.

COLL, C. As contribuições da psicologia para a educação: teoria genética e aprendizagem na escola. In: SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Coletânea de textos de psicologia: psicologia da educação** – REM/CEFAM. São Paulo: SE/CENP, 1991.

CORDERO, F. El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. In: **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa** (RELIME), vol. 8, n. 3, p. 265 – 286, novembro de 2005.

CORTESÃO, L. **Ser professor**: um ofício em risco de extinção? Porto, Portugal, Ed. Afrontamento, 2000.

CUNHA, M. I. Diferentes Olhares sobre as Práticas Pedagógicas no Ensino Superior: a docência e sua formação. In: **Educação**, Porto Alegre, ano XXVII, n.3 (54), p. 525 – 536, Set./Dez. 2004.

DAHAN-DALMEDICO, A. & PEIFFER, J. **Une historie des mathématiques**. Paris: Seuil, 1986.

D'AMBROSIO, U. História da Matemática no Brasil: uma visão panorâmica até 1950. **Saber y Tiempo**, v. 2, n. 8, p.7-37 Julio/Diciembre. 1999.

_____. **Fichas** produzidas pelo professor Ubiratan D'Ambrosio durante a disciplina Análise Matemática I cursada em 1951 na FFCL da USP. Osasco-SP: APUA-GHEMAT Arquivo Pessoal Ubiratan D'Ambrosio.

_____. Um enfoque transdisciplinar à educação matemática e à história da matemática. In: **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. In: (Org.) BICUDO, M. A. ; BORBA, M. C.; São Paulo: Cortez Editora, 13-29, 2004.

_____. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 18 de fevereiro de 2009.

DANIS, P. J. & HERSH, R. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DAVID, M. M. M. S. & LOPES, M. P. **O papel do professor no desenvolvimento do pensamento flexível de seus alunos em Matemática**. Encontro de Estudantes de Matemática – UFG – Goiânia, 1998.

DAVID, M. M. M. S. & MACHADO, M. P. Como alguns procedimentos de ensino estão contribuindo para o erro e o fracasso em Matemática. **Educação e Matemática**, n. 40, pp. 25-29, 1996.

DE SOUZA, V. H. G. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 06 de novembro de 2009.

DEBALD, B. S. A Docência no Ensino Superior numa Perspectiva Construtivista. In: **Seminário Nacional Estado e Políticas Sociais no Brasil**, 2003, Cascavel/PR. Disponível em [http://cac-
php.unioeste.br/projetos/gpps/midia/seminario1/trabalhos/Educacao/eixo5/97blasiussilvanodebald.pdf](http://cac.php.unioeste.br/projetos/gpps/midia/seminario1/trabalhos/Educacao/eixo5/97blasiussilvanodebald.pdf). Último acesso em 05 de dezembro de 2011.

DEMIDOVITCH, B. **Problemas e Exercícios de Análise Matemática**. Editora Mir, Moscou, 1977.

DHOMBRES, J. French Mathematical Textbooks from Bézout to Cauchy. In **Historia Scientiarum**, nº 26, 1985.

DIAS, C. L. da S. Cândido da Silva Dias: meio século como pesquisador. **Estudos Avançados**, v. 8, n. 22, p. 97-105, 1994.

DIAS SOBRINHO, J. Pós-graduação, escola de formação para o magistério superior. In: VOLPATO, SERBINO, Raquel et al. (org.). **Formação de professores**. Águas de São Pedro: Unesp: Congresso Estadual Paulista, 1994.

DO CARMO, M. P. Considerações sobre o ensino da Matemática. In: **Boletim da Sociedade de Matemática**, vol. 5, nº 1, pp. 105-112, 1974.

DRUCK, I. F. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 12 de agosto de 2009.

DUNAWAY, D. K. & BAUM, W. K. (ed.). **Oral History** – An Interdisciplinary Anthology. New York: Altamira Press, 1996.

EVANGELISTA, O. **A formação universitária do professor: o Instituto de Educação da Universidade de São Paulo (1934-1938)**. Florianópolis: Cidade Futura, 2002.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. 843p.

FANTAPPIÈ, L. **Curso de Análise Matemática**. São Paulo: Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP, sem paginação contínua, sem data.

FERREIRA, V. L. **O Processo de Disciplinarização da Metodologia do Ensino de Matemática**. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

FERREIRA, V. O. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 01 de março de 2010.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o Ensino da Matemática no Brasil. In: **Zetetiké**, vol. 3, n. 4, pp. 1 – 38, nov. 1995 – CEMPEM/FE/UNICAMP – Campinas - SP.

FISCHER, B. T. D. Docência no Ensino Superior: questões e alternativas. In: **Educação**, Porto Alegre, v. 32, n. 3, p. 311 – 315, Set./Dez. 2009.

FRANCO, A. de P. Ensino Superior no Brasil: cenário, avanços e contradições. In: **Jornal de Políticas Educacionais**, n. 4, p. 53 – 63, jul./dez. 2008.

_____. Organização do trabalho pedagógico no ensino superior: alternativas e desafios para o trabalho educativo. In: **Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria**, vol. 3, n. 1, p. 21 – 32, 2010.

FREUDENTHAL, H. Mathematical Rigour. In: **Mathematics as an Educational Task**, p. 147-154, Netherlands: D. Reidel Publ., 1973.

FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.) **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009.

GAERTNER, R. & BARALDI, I. M. Um Ensaio Sobre História Oral e Educação Matemática: pontuando princípios e procedimentos. In: **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 30, 2008, pp. 47 a 61.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática: de um inventário a uma regulação. In: **Zetetiké**, vol. 11, n. 19, pp. 9-55, Jan./Jun. 2003 – CEMPEM/FE/UNICAMP – Campinas – SP.

_____. (Re)Traçando Trajetórias. (Re)Coletando Influências e Perspectivas: Uma Proposta em História Oral e Educação Matemática. In: **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. In: (Org.) BICUDO, M. A. ; BORBA, M. C.; São Paulo: Cortez Editora, 151-163, 2004a.

_____. História oral e educação matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L.; FIORENTINI, D.; GARNICA, A. V. M.; BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004b. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 9).

_____. **História oral em educação matemática: outros usos, outros abusos**. Guarapuava: SBHMat, 2007. 84 p. – (Coleção História da Matemática para Professores).

GASCON, J. El problema de la Educación Matemática entre la Secundaria y la Universidad. In: **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 11, n. 2, pp. 273 – 302, 2009.

GIMÉNEZ, C. A. & MACHÍN, M. C. Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. In: **Boletín de la Asociación Matemática Venezolana**, vol. X, n. 2, 2003.

GOMIDE, E. F. & MOUSINHO LEITE LOPES, M. L. Sessão Especial Memórias vivas. In: Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, II; Seminário Nacional de História da Matemática, II, Águas de São Pedro. **Anais**. Rio Claro: UNESP, p. 95-106, 1997.

GOMIDE, E. F. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 4 de novembro de 2008.

GOULIN, A. **Curso de Cálculo de Rodolpho Baptista San Thiago**. São Paulo: Escola Politécnica, 1904.

GRATTAN-GUINNES, I. O que foi e o que deveria ser o Cálculo? In: **Zetetiké**, vol. 5, n. 7, pp. 69-94, Jan./Jun. 1997 – CEMPEM/FE/UNICAMP – Campinas – SP.

Guia Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras para 1966. São Paulo. UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, 1966.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo (capítulos 2 e 3)**. São Paulo, 1979.

_____. **Um Curso de Cálculo (capítulos 4, 5, 6 e 7)**. São Paulo, 1980.

_____. **Um Curso de Cálculo (capítulos 8 e 9)**. São Paulo, 1982.

_____. **Um Curso de Cálculo**, volume 1, 2ª ed. São Paulo: LTC, 1987.

_____. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima, via correio eletrônico, em dezembro de 2010.

GUSMÃO, E. M. **Memórias de quem ensina História: cultura e identidade docente**. São Paulo: Editora UNESP, 2004.

HALL, S. **A identidade cultural na pós-modernidade**. Rio de Janeiro: DP&A Editora, 2000.

HARDY, G. H. **A Course of Pure Mathematics**. University Press: Cambridge, Tenth Edition, 1955.

HELLMEISTER, A. C. P. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 10 de fevereiro de 2009.

HIRATA, N. S. T. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 12 de abril de 2010.

IGLIORI, S. B. C. **Considerações sobre o ensino do Cálculo e um estudo sobre os números reais**. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.) Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009.

KATZ, V. J. **A history of mathematics: an introduction**. Massachusetts: Addison-Wesley, 1998.

KLINE, M. **Matemáticas para los Estudiantes de Humanidades**. México: Fondo de Cultura Económica, 1998.

LABEGALINI, A. C. F. B. A didática no ensino superior: saberes e competências da nossa época. In: LABEGALINI, A. C. F. B. & MARÇOLLA, R. (Org.). **Comunicação e Educação**: a didática a serviço do ensino superior. Marília: Arte & Ciência Editora, p. 11 – 18, 2009.

LACROIX, S. F. **Traité élémentaire de calcul différentiel e de calcul integral**. Paris: Gauthier-Villars, 1867. Primeiro volume disponível em <<http://historical.library.cornell.edu/cgi-in/cul.math/docviewer?did=01490002&seq=7>> Último acesso em 17/11/2011. Segundo volume disponível em <<http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=Lacr016&seq=7>>. Último acesso em 17/11/2011.

LAKOFF, G. & NÚÑEZ, R. E. The metaphorical structure of Mathematics: sketching out cognitive foundations for a mind-based Mathematics. In: L. D. English (Ed.). **Mathematical Reasoning**: Analogies, Metaphors and Images, Capítulo 2, 21- 89. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1997.

LAVILLE, C. & DIONNE, J. **A Construção do Saber**: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas; trad. Heloísa Monteiro e Francisco Settineri – Porto Alegre: Editora Artmed; Belo Horizonte: Editora UFMG, 1999.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Tradução de Antonio Paques, Otilia Teresinha W. Paques e Sebastião Antonio José Filho. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil Ltda, 1977.

LIMA, E. B. **Dos Infinitésimos aos Limites**: a contribuição de Omar Catunda para a modernização da Análise Matemática no Brasil. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências), Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2006.

LLINARES, S. & SÁNCHEZ, V. Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales em estudiantes para profesores de primaria. J. Gimenez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.). **El proceso de llegar a ser um profesor de**

primaria. Cuestiones desde la educación matemática. Capítulo 4, pp. 95-118. Granada: Comares, 1996.

LOYES, C. C. **La Matemática:** creación y descubrimiento. Madrid: Universidad Pontificia Comillas, 1993.

LUCARELLI, E. Um desafio institucional: inovação e formação pedagógica do docente universitário. In: Castanho, S. & Castanho, M. **O que há de novo na educação superior:** do projeto pedagógico à prática transformadora. Campinas: Papirus, 2000.

MARCOLINI, M. & PERALES, J. La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para La educación universitaria. In: **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa** (RELIME), vol. 8, n. 1, p. 25 – 68, março de 2005.

MARCOS, E. N. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 27 de março de 2009.

MASETTO, M. **Docência na Universidade.** Campinas: Papirus, 1998.

_____. Docência universitária: repensando a aula. In: TEODORO, A., VASCONCELOS, M. L. (Org.). **Ensinar e aprender no ensino superior:** por uma epistemologia da curiosidade na formação universitária. São Paulo: Mackenzie, 2003, p. 79 – 108.

MAY, K. **Bibliography and Reserch Manual of History of Mathematics**, University of Toronto Press, Toronto, 1973.

MEIHY, J. C. S. B. **Manual de História Oral.** São Paulo: Loyola, 1996.

MESQUITA FILHO, J. **Política e Cultura.** São Paulo: Livraria Martins, 1969.

MIGUEL, A. & MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MIRANDA, G. A. de. **Silvanus Philips Thompson e a desmistificação do Cálculo:** resgatando uma história esquecida. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontificia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

MOISE, E. E. – **Cálculo:** um curso universitário – volume 1 – tradução de Dorival A. Mello e Renate G. Watanabe sob coordenação de Elza Furtado Gomide. Editora Edgar Blucher Ltda. São Paulo, 1972.

MOREIRA, D. Profissionalização e continuidade geracional: uma leitura sociológica do prefácio do *Traité du Calcul Differentiel et du Calcul Intégral* de S. F. Lacroix. In MOREIRA, D. & MATOS, J. M. (Orgs.). **História do Ensino da Matemática em Portugal.** Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2005.

NISS, M. Aspects of the nature and state of research in Mathematics Education. **Educational Studies in Mathematics**, 40, p.1-24, 1999.

NÓVOA, A. Inovação e História da Educação. In: **Teoria & Educação.** Porto Alegre: Pannonica Editora, 1992, pp. 210-219.

OLIMPIO JUNIOR, A. Primeiro Ano num Curso de Matemática: a definição de função e a dualidade local/global em conceitos de Cálculo. In: **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 20, no 28, 2007, pp. 39 a 67.

OLIVEIRA, A. S. V. **O ensino do cálculo diferencial e integral na Escola Politécnica de São Paulo, ano de 1904**: uma análise documental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), IGCE, UNESP, Rio Claro, 2004.

OLIVEIRA, M. C. A. Assistindo ao curso de Análise Matemática com Ubiratan d'Ambrosio. In: III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006, Águas de Lindóia. **Anais** do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006.

OLIVEIRA, O. R. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 11 de março de 2009.

OTERO-GARCIA, S. C. **Uma Trajetória da Disciplina de Análise e um Estado do Conhecimento sobre seu Ensino**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), IGCE, UNESP, Rio Claro, 2011.

PACHANE, G. G. Uma introdução histórica ao processo de formação de professores universitários no Brasil. In: **Livro eletrônico** do IX Congresso Estadual Paulista Sobre Formação de Educadores – 2007, p. 105 – 113. UNESP – Universidade Estadual Paulista – Pró-Reitoria de Graduação. Disponível em <http://www.unesp.br/prograd/ixcepfe/index.htm>. Último acesso em 05 de dezembro de 2011.

PALARO, L. A. **A concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

PEREIRA, C.A.B. **Instituto de Matemática e Estatística. História e Cotidiano**. São Paulo: Gráfica do IME. 1998.

PERMINOV, V. Y. On the reliability of mathematical proofs. **Revue Internationale de Philosophie**, vol. 42, n° 167, pp. 500-508, 1988.

PERRENOUD, P. Le role de la formation à l'enseignement dans la construction des disciplines scolaires. **Education et francophonie – Revue Scientifique Virtuelle**. Association Canadiense d'éducation de langue française. vol. XXVIII, n. 2, automne-hiver 2000. Disponível em <http://www.acelf.ca/c/revue/revuehtml/28-2/05-Perrenoud.html> . Último acesso em 16/11/2011.

PESSOA, R. B. **Um olhar sobre a trajetória da Geografia Escolar no Brasil e a visão dos alunos do Ensino Médio sobre a Geografia atual**. Dissertação (Mestrado em Geografia), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2007.

PIMENTA, S. G. & ANASTASIOU, L. das G. C. **Docência no Ensino Superior**. São Paulo: Cortez, 2002. (coleção Docência em Formação v. 1).

PIRES, R. C. **A presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

PISKUNOV, N. **Calculo Diferencial e Integral** – tomo I – Editora Mir. Moscou, 1969.

PORTELLI, A. Tentando Aprender um pouquinho: algumas reflexões sobre a ética na História Oral. In: **Projeto História**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em História e do Departamento de História – PUC-SP, n. 15, 13-49. São Paulo, abril, 1997.

PRANDI, L. R. Tendências do Processo Didático-Pedagógico no Ensino Superior na Contemporaneidade. In: **Akrópolis**, Umuarama, v.17, n. 3, p. 137 – 142, jul./set. 2009.

PROTTER, M. H. & MORREY JR, C. B. – **Calculus with Analytic Geometry**: a first course. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1962.

QUEIROZ, M. I. Relatos orais: do “indizível” ao “dizível”. In: VON SIMSON (org.) **Experimentos com Histórias de Vida**: Itália-Brasil. São Paulo: Vértice, 1988.

REIS, F. S. **A tensão entre Rigor e Intuição no ensino de Cálculo e Análise**: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 2001.

REIS, J. C. **A História entre a filosofia e a ciência**, 3. ed. Editora Autêntica, Belo Horizonte, 2004.

RESENDE, M. R. **Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na Licenciatura**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

RICOEUR, P. **Teoria da Interpretação** – O discurso e o excesso de significação. Lisboa: Edições 70, 1976.

RÍOS, R. P. El rediseño de los cursos de cálculo. In: **Transferencia de Posgrado, Investigación y Extensión en El Campus Monterrey**, n. 44, ano 11, outubro de 1998.

SALINAS, P. & ALANÍS, J. A. Hacia un Nuevo Paradigma en La Enseñanza del Cálculo dentro de una Institución Educativa. In: **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa** (RELIME), vol. 12, n. 3, p. 355 – 382, novembro de 2009.

SCHWARTZMAN, S. **Formação da comunidade científica no Brasil**. São Paulo: Nacional, 1979.

SILVA, B. A. Contrato Didático. In: MACHADO, S. D. A. (Org.), **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010.

SILVA, C. M. S. O conceito de derivada no ensino da matemática no Brasil do século XIX. In: ICME-8 Satellite Meeting HPM, 1996, Braga. **Anais**. Braga: Grafis, Coop. de Artes Gráficas, v. 1. p. 80-87, 1996.

_____. **A Matemática Positivista e sua difusão no Brasil**. Vitória: EDUFES, 1999.

_____. A Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP e a formação de professores de Matemática. In: 23a. Reunião Anual da ANPED, 2000, Caxambu. **Anais** da 23a. Reunião Anual da ANPED, 2000.

SILVA, H. da & SOUZA, L. A. de. A História Oral na Pesquisa em Educação Matemática. In: **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 20, no 28, 2007, pp. 139 a 162.

SILVA, L. R. R. **Prof. J. O. Monteiro de Camargo e o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise na Universidade de São Paulo**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro-SP, 2006.

SPIVAK, M. **Cálculo Infinitesimal**. Barcelona: Reverte, 1975.

SOUZA JUNIOR, A. J. **Trabalho coletivo na Universidade**: Trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 2000.

SOUZA, M. P. & GATTI Jr, D. História, História da Educação e Instituições Escolares: aspectos teórico-metodológicos. II Congresso de Pesquisa e Ensino em História da Educação em Minas Gerais. **Anais**. Faculdade de Educação – Universidade Federal de Minas Gerais, Uberlândia – Minas Gerais, Brasil, 2003.

TALL, D. O. **The Psychology of Advanced Mathematical Thinking**. In; Tall, D. O. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, Capítulo 1, 3-21. Londres: Kluwer Academic Publisher, 1991.

TÁBOAS, P. Z. **Luigi Fantappiè**: influências na Matemática brasileira. Um estudo de História como contribuição para a Educação Matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro - SP, 2005.

THOMPSON, P. **A voz do passado – História Oral**. São Paulo: Editora Paz e Terra, 1998.

THURSTON, W. P. On proof and progress in mathematics. In: **Bulletin of the American Mathematical Society**, 30/2, p. 161-177, 1994.

VANSINA, J. **Oral Tradition as history**. Madison: University of Wisconsin Press, 1985.

VASCONCELOS, M. L. M. C. **A formação do professor de terceiro grau**. São Paulo: Pioneira, 1996.

VEIGA, I. P. A., RESENDE, L. M. G. & FONSECA, M. A aula universitária em espaços não convencionais e as inovações pedagógicas. In: Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino (ENDIPE); 9.; 1998, Águas de Lindóia, **Anais**. [CD-ROM], Águas de Lindóia, 1998.

VIANNA, C. R. **Vidas e Circunstâncias na Educação Matemática**. Tese (Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, 2000.

ZABALZA, M. A. **O ensino universitário**: seu cenário e seus protagonistas. Porto Alegre: Artmed, 2004.

ZANETIC, J. **Entrevista** concedida a Gabriel Loureiro de Lima. São Paulo, 18 de março de 2009.

ZHANG, B. Using student-centered teaching strategies in calculus. In: PEAT, M. (Ed.), **The China papers: Tertiary science and mathematics teaching for the 21st century** 2, p. 100-103, 2003.

ZICCARDI, L. R. N. **O curso de Matemática da PUC/SP:** uma história de sua construção/desenvolvimento/legitimação. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

ANEXOS

ANEXO 1 - Breve biografia de Luigi Fantappiè

O Anuário da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, referente aos anos de 1934 e 1935, que foi publicado em 1937, traz algumas informações a respeito de Luigi Fantappiè, então catedrático de Análise Matemática daquela instituição. São deste anuário grande parte das informações reproduzidas aqui.

Luigi Fantappiè nasceu na cidade italiana de Viterbo, no dia 15 de setembro de 1901. Em 1918 ingressou como aluno da Scuola Normale Superiore de Pisa e em 4 de julho de 1922, graduou-se em Matemática Pura. Em 1923 obteve, na mesma universidade, diploma de habilitação ao ensino.

Ao concluir o serviço militar em novembro de 1923, recebeu do Ministério da Educação da Itália um prêmio de aperfeiçoamento no exterior. Por esta razão, durante o ano de 1924, foi a Paris e freqüentou cursos da Escola Normal Superior, do Colégio de França e da Universidade de Sorbonne. Em 1924 tornou-se assistente na cadeira de Análise Infinitesimal – regida pelo matemático Francesco Severi - na Universidade de Roma. Em outubro de 1925 tornou-se livre docente em Análise Algébrica e Infinitesimal. Em 1926 venceu concurso para a cátedra de Análise Algébrica da Universidade de Florença e também passou a ensinar Mecânica Superior na Universidade de Roma. No ano de 1927, além de vencer concurso para catedrático de Análise Infinitesimal na Universidade de Ferrara, tornou-se professor extraordinário da cátedra de Análise Algébrica da Universidade de Cagliari. Em 1928 foi convidado para reger a cátedra de Análise Infinitesimal da Universidade de Palermo. No ano de 1929 recebeu uma medalha de ouro da Sociedade Italiana de Ciências e em 1930 foi promovido a professor ordinário da Universidade de Palermo.

Entre 1931 e 1932, visitou as mais importantes universidades alemãs, realizando conferências a respeito de suas próprias pesquisas e também organizando colóquios e trocas de idéias com colegas alemães. Em novembro de 1932 assumiu a cátedra de Análise Infinitesimal da Universidade de Bolonha e um ano depois foi eleito diretor do Instituto Matemático Salvatore Pincherle da mesma universidade.

Em abril de 1934, com apoio do governo italiano, foi contratado por Teodoro Ramos para reger, durante três anos, a cátedra de Análise Matemática da Universidade de São Paulo,

conservando, porém, sua função de catedrático na Universidade de Bolonha e todos os direitos a ela correspondentes.

Fantappiè chegou ao Brasil com 34 anos e já era um matemático de renome internacional tendo 54 trabalhos publicados. Era o discípulo favorito do matemático Vito Volterra (1860-1940), pioneiro na teoria dos funcionais, da qual Fantappiè foi o maior divulgador e também colaborador introduzindo o conceito de Funcional Analítico. Dominava também teorias modernas de Álgebra, Geometria e principalmente de Análise.

De acordo com Ziccardi (2009, p. 55) ²³⁰, “foi Fantappiè quem deu os primeiros passos para equiparar a Sub-seção de Matemática com a estrutura necessária para que seus alunos pudessem desenvolver atividades científicas de maneira sistemática”. Merece destaque também seu empenho na criação da biblioteca de Matemática da Universidade de São Paulo: quando chegou da Itália, trouxe muitos livros e periódicos e com a doação destes, deu início a tal biblioteca. Além disso, implantou, a partir de 1935, o Seminário Matemático, que eram apresentações semanais, públicas e privadas de pesquisas matemáticas, visando aperfeiçoar a formação dos estudantes e professores, ministrou palestras e cursos para alunos que não eram do curso de Matemática, foi um dos organizadores do Jornal de Matemática Pura e Aplicada da USP, que teve seu primeiro número publicado em 1936. Sua atuação na FFCL da USP permitiu a produção de trabalhos originais de pesquisa matemática como, por exemplo, os primeiros trabalhos a respeito de Cálculo Funcional de Omar Catunda, Cândido Lima da Silva Dias e Mário Schenberg. Segundo Ziccardi (2009, p. 55) ²³¹, “a publicação de trabalhos matemáticos nos Anais da Academia Brasileira de Ciências passou a ser cada vez mais frequente e a abrangência dos temas de pesquisa mais ampla”. Fantappiè também viajou pelo país divulgando os progressos da matemática no século XX e participou da reforma do ensino secundário de São Paulo no final da década de 30.

Ficou no Brasil até 1939 quando assumiu um posto de catedrático de Análise Superior na Universidade de Roma. Em 1942 propôs uma teoria chamada “Teoria Unificada do Mundo Físico e Biológico” e, em 1952, começou a trabalhar com outra teoria física chamada “Relatividade Projetiva”. Faleceu em 1956.

²³⁰ ZICCARDI, L. R. N. O curso de Matemática da PUC/SP: uma história de sua construção/desenvolvimento/legitimação. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009.

²³¹ Ver nota de rodapé número 231.

ANEXO 2 – Breve biografia de Omar Catunda

Paulista de Santos, nascido no dia 23 de setembro de 1906, Omar Catunda formou-se em Engenharia Civil pela Escola Politécnica de São Paulo em 1930. Atuou como engenheiro na prefeitura de Santos até 1933 quando prestou concurso para a Cadeira de Cálculo Infinitesimal na Escola Politécnica. Nesse exame, dois membros da banca - Theodoro Ramos (que havia sido seu professor na Poli) e Lélío Gama - consideraram seu preparo matemático muito superior ao que se observava na época e o classificaram em primeiro lugar. Outros três examinadores, no entanto, preferiram outro candidato e Catunda acabou não sendo aprovado. Porém, em 1934, ao contratar professores para a recém-criada Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, Theodoro Ramos o convidou para ser o 1º assistente de Luigi Fantappiè na cátedra de Análise Matemática. Foi neste momento que teve início a carreira acadêmica de Omar Catunda.

A função de Catunda era redigir as apostilas do curso de Fantappiè, propor e corrigir os exercícios. Havia uma grande afinidade entre Fantappiè e seu assistente e Lima (2006) argumenta que uma das possíveis causas desta afinidade seria a maneira como Fantappiè enxergava a educação. Segundo ele, havia dois tipos de ensino, ambos necessários para o progresso social de uma nação: o ensino profissional que serviria a fins utilitários e imediatistas e o ensino formativo que se destinaria à formação de cientistas, literatos, artistas, médicos, engenheiros, etc. Para Fantappiè, o ensino formativo é o que proporciona a autonomia do desenvolvimento social de uma nação, já que prepara o homem “Não só para executar tarefas, mas também para participar e contribuir cientificamente no processo de transformação da área em que foi especializado” (LIMA, 2006, p.31). Catunda incorporou profundamente essas idéias e seu contato com o matemático italiano lhe trouxe um grande aprendizado sobre teorias modernas da matemática, em especial na área de Análise.

Em 1937, publicou um artigo no segundo fascículo da Revista de Matemática Pura e Aplicada. Esta foi a primeira publicação de um brasileiro na Seção de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP. Além disso, foi a primeira pesquisa publicada a refletir, de maneira direta, a influência de Fantappiè na matemática brasileira.

Entre 1938 e 1939, estagiou durante quatro meses na Universidade de Roma. Em 1939, com o retorno de Fantappiè à Itália, foi nomeado professor interino e diretor do Departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP. Por volta de 1942, passa a alargar o campo de seus estudos: estuda Topologia no texto de Alexandrov e Álgebra no texto de Van der Waerden. E essas suas novas investigações se refletem em sua

tese “Sobre os Fundamentos da Teoria dos Funcionais Analíticos”, apresentada em 1944 no concurso que o elegeu catedrático em Análise Matemática.

Inspirado pelos cursos de Análise Matemática ministrados por Fantappiè e por ele mesmo na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, Omar Catunda passou a escrever, durante a década de 1950, apostilas referentes a esse assunto. E no início da década de 1960 essas apostilas foram reformuladas e deram origem ao primeiro livro moderno de Análise Matemática escrito no Brasil – *Curso de Análise Matemática*. Esse material escrito por Catunda foi usado durante muito tempo na Faculdade de Filosofia da USP e em vários outros centros do país e influenciou a formação de vários matemáticos brasileiros.

E não era apenas o ensino na universidade que despertava a atenção de Catunda; o ensino secundário também era alvo de suas preocupações. De acordo com Lima (2006), ele percebia a existência de problemas no sistema educacional brasileiro. Para ele, até 1930, o ensino era destinado apenas às famílias mais ricas, deixando analfabeta a maior parte da população brasileira. Quando o governo resolveu “democratizar” o ensino, não percebeu (ou fingiu não perceber) que não havia material humano para fazer essa democratização com a necessária seriedade e, com essa situação, ocorreu um decréscimo cultural dos estudantes de nível superior, que chegavam às universidades sem a preparação necessária, já que obtinham uma formação deficiente no ensino secundário. Além disso, Catunda tinha grandes preocupações com os aspectos negativos da Matemática Moderna no ensino secundário, e a conseqüente eliminação de parte significativa do conteúdo essencial da disciplina.

Com o auxílio de uma bolsa da Fundação Rockfeller, foi à Universidade de Princeton aperfeiçoar seus estudos. Permaneceu nos Estados Unidos entre 1947 e 1948, onde assistiu conferências, simpósios e cursos dos mais renomados matemáticos. Permaneceu no cargo de professor catedrático de Análise até 1962, quando se aposentou.

Em 1963, após a aposentadoria na USP, passa a trabalhar como professor na Faculdade de Filosofia da Universidade da Bahia, onde permaneceu até 1976, ano de sua aposentadoria compulsória. De acordo com Lima (2006), Catunda acreditava que uma das causas que contribuíram para que fosse bem recebido na Bahia foi a grande aceitação em todo o Brasil de suas apostilas de Cálculo e dos fascículos do curso de Análise Matemática que lhe deram prestígio e fama de grande matemático. Maiores detalhes a respeito da passagem de Omar Catunda pela Universidade da Bahia podem ser encontrados no trabalho de Lima (2006). Catunda faleceu no dia 12 de agosto de 1986 em Salvador, mas deixou importantes difusores de suas idéias, como sua ex-assistente Elza Furtado Gomide, outra personagem de grande relevância no curso de Matemática da Universidade de São Paulo.

ANEXO 3 - Breve biografia de Elza Furtado Gomide

Esta breve biografia aqui apresentada foi escrita com base nos dados apresentados por Cavalari (2007) que realizou um estudo a respeito da presença da mulher em institutos de pesquisa em matemática no Estado de São Paulo e também com base em uma entrevista de Gomide transcrita em Vianna (2000).

Elza Furtado Gomide nasceu no dia 20 de agosto de 1925 em São Paulo. Seus pais e avós eram professores e, desde cedo, foi bastante incentivada a estudar, tanto que, aos onze anos de idade, já falava inglês e francês.

Não fez grupo escolar; toda sua formação até os 11 anos de idade – quando ingressou no ginásio - foi em casa, por meio de aulas ministradas por seus pais. Fez o curso ginásial no Colégio D. Pedro em São Paulo, o único ginásio do Estado na cidade, onde seu pai era professor de Matemática. O fato de ser filha de um professor de Matemática teve grande influência em sua escolha profissional e, a esse respeito, Gomide disse o seguinte, em entrevista concedida a Vianna (2000):

A matemática tem bastante presença na história da minha família. Meu avô materno era professor de matemática na Escola Normal; um tio, que infelizmente morreu muito cedo, era aluno da Politécnica e com grande pendor para a matemática; e meu pai era professor de matemática... Havia muitas pessoas na família com o gosto pela matemática. (VIANNA, 2000, p. 21).

Além disso, comentou que por perceber seu talento para a Matemática, o pai, um de seus professores no ginásio, fez questão de acompanhar sua turma, o que, segundo ela, não lhe trazia comodidades:

Ele era muito mais severo comigo do que com qualquer outro. Mas ele era um excelente professor; era um professor famoso. Ele era estimulante e muito exigente: dava muito mais conteúdo do que o habitual. Eu estudei com ele no quinto ano de ginásio a teoria de limites, que depois era dada no primeiro ano da faculdade. Ele deu para a minha turma limites, derivadas e fazia muita questão de demonstrações, de geometria... E ele sabia! Ele tinha estudado na Europa, sabia mais do que a maioria. (Ibid, p. 28-29).

Na época em que Gomide era estudante, o grupo escolar tinha duração de cinco anos e ainda não existia o colegial – que começou a existir exatamente no ano em que ela ingressou na universidade. Naquela época, as faculdades de Medicina, Engenharia e Direito exigiam que os recém-formados no grupo escolar fizessem um curso de dois anos chamado de “pré” para que pudessem prestar o exame de admissão ao ensino superior; as Faculdades de Filosofia não obrigavam a realização desse curso pré. Então, em 1942, com apenas 16 anos, Gomide

ingressou no curso de Física da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. Paralelamente, cursou também o bacharelado em Matemática na mesma instituição. Graduou-se em Física em 1944 e em Matemática no final de 1945.

Ainda no ano de 1944, devido ao seu excelente desempenho na graduação, foi convidada pelo professor Omar Catunda para ser professora assistente de Análise Matemática na FFCL.

No dia 27 de dezembro de 1950 defendeu sua tese de doutorado, elaborada sob a orientação de Jean A. F. Delsarte, tornando-se a primeira mulher a obter o título de doutora em Matemática por uma instituição brasileira.

Gomide é também sócia fundadora da Sociedade de Matemática de São Paulo, da Sociedade Brasileira de Matemática e do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Concluiu seu pós-doutorado na área de Topologia no ano de 1962 no Instituto Henri Poincaré da França. Trabalhou na USP até os 70 anos de idade e, depois disso, continuou como professora voluntária da instituição até 2000, quando foi aposentada compulsoriamente.

ANEXO 4 - Breve biografia de Carlos Benjamin de Lyra

Carlos Benjamin de Lyra ²³² nasceu no dia 23 de novembro de 1927, em Recife. Era filho de Carlos Lyra Filho, proprietário e diretor do jornal Diário de Pernambuco. Após a morte do pai, mudou-se para os Estados Unidos e, entre 1939 e 1945 foi aluno da Iona High School em New Rochelle, New York. Desde muito cedo se tornou um aluno brilhante e frequentemente, durante viagens de trem à New York, conversava com o matemático Courant, fundador do Instituto de Matemática da Universidade de New York. Aos quinze anos de idade, bastante influenciado por Courant, escolheu a Matemática como futura profissão.

Em 1945, ao concluir o ensino médio, retornou ao Brasil para cumprir o serviço militar obrigatório. Em 1946 começou a frequentar algumas aulas do Departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, onde conheceu os matemáticos franceses André Weil e Jean Dieudonné. Em 1947, matriculou-se no curso de graduação em Matemática desta instituição e cursou, entre outras disciplinas, Topologia Algébrica com o professor Cândido da Silva Dias, que havia acabado de retornar dos Estados Unidos onde havia se aperfeiçoado em Topologia com os matemáticos Cartan e Spanier. A boa impressão deixada pelo curso de Dias e o grande interesse que Lyra já possuía pelo assunto fizeram-no escolher a Topologia Algébrica como seu campo de pesquisa na Matemática.

O desempenho de Lyra foi excelente durante todo seu curso de graduação, concluído em 1950. Em junho de 1951, foi à França com o apoio de uma bolsa de estudos do Conselho Nacional de Pesquisas e lá participou do Seminário Cartan tratando de espaços fibrados. Permaneceu na França e, em 1953, participou de palestras sobre homotopia, proferidas pelo matemático Hurewicz no Collège de France. Aliás, foi em seus estudos com Hurewicz que Lyra escolheu o tema de sua pesquisa de doutorado. No final de 1953, retornou ao Brasil e neste mesmo ano começou a trabalhar na Universidade de São Paulo, instituição na qual permaneceu até o fim da vida.

Seu primeiro posto na instituição foi o de auxiliar de ensino na cadeira de Análise Matemática da qual o catedrático era o professor Omar Catunda. Durante toda a década de 1950, influenciado principalmente por Alexander Grothendieck, que estava na USP como professor visitante, ampliou suas pesquisas na área de Topologia e em 1958 defendeu sua tese de doutorado. Entre 1960 e 1961, com o auxílio de uma bolsa de estudos da Fundação

²³² As informações biográficas a respeito de Carlos Benjamin de Lyra foram obtidas no volume 5, número 2, p. 115-122, do Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, lançado em setembro de 1974. Em razão, na época, do recente falecimento deste docente, esta edição do Boletim da SBM trouxe uma pequena biografia do mesmo.

Rockfeller, visitou o Instituto de Estudos Avançados de Princeton em New Jersey, onde deu continuidade a seus estudos em Teoria da Homotopia e passou a estudar também Topologia Diferencial. Em 1968, obteve o título de livre-docente na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras. A partir de 1956, Lyra passou a comandar um seminário semanal sobre Topologia Algébrica no qual eram discutidos os tópicos mais importantes deste campo de estudos. Dele participaram estudantes que, mais tarde, se tornaram professores de diversas universidades do Brasil e do exterior. A iniciativa de Lyra de realizar estes seminários foi bastante importante porque, por meio dela, muitos professores estrangeiros foram convidados para virem ao Brasil e darem cursos e palestras. Lyra se envolveu ainda na organização de uma associação de professores universitários no Estado de São Paulo e, por meio de suas atividades nesta associação, teve participação ativa na criação da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). Também foi membro do comitê que apresentou e propôs o texto para a Reforma Universitária.

Outras atividades de Lyra que merecem destaque são: sua participação nos comitês de organização de alguns dos Colóquios Brasileiros de Matemática; o fato de ter sido membro do conselho e presidente da Sociedade de Matemática de São Paulo; membro do comitê que definiu o caráter científico e a organização da Escola Latino-Americana de Matemática; o representante brasileiro do Comitê Permanente desta escola; membro fundador da Sociedade Brasileira de Matemática; membro do conselho de assessoria científica do Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Rio de Janeiro e do Instituto de Física Teórica de São Paulo; membro do conselho editorial da “Ciência e Cultura”, publicação da Sociedade Brasileira de Progresso da Ciência e ter feito parte de diversos comitês federais organizados com a finalidade de avaliar a situação da Matemática no Brasil no início da década de 1970.

Além de tudo isso, Lyra, a partir de 1963, juntamente com a professora Gomide, começou a trabalhar na reorganização dos cursos de Cálculo e no planejamento de “honour courses” de Cálculo Avançado. Ministrou, também, cursos de História da Matemática, Cálculo, Análise, Álgebra, Topologia e cursos avançados de Topologia Algébrica, Teoria de Grupos, etc. Em 1974, logo após ter sido nomeado professor associado do Instituto de Matemática e Estatística da USP, faleceu aos 46 anos de idade.

ANEXO 5 - Carta de Cessão de Direitos de Uso das Entrevistas

CARTA DE CESSÃO DE DIREITOS

São Paulo, ____ de _____ de 2010

Eu, _____, portador (a) de carteira de identidade número _____ - _____, declaro para os devidos fins que cedo os direitos de minha entrevista, concedida no dia ____ de _____ de _____, para o doutorando Gabriel Loureiro de Lima e seu orientador, o prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, usarem-na integralmente ou em partes, para a elaboração da tese de doutorado ou em publicações decorrentes da referida. Abdicando de direitos autorais, subscrevo a presente carta de cessão de direitos.

ASSINATURA