CRISTIANE ATTILI CASTELA

DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS: CONCEPÇÕES DE ALUNOS DE 6ª SÉRIE.

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

SÃO PAULO

2005

CRISTIANE ATTILI CASTELA

DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS: CONCEPÇÕES DE ALUNOS DE 6ª SÉRIE.

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação da Prof. Dra. Sonia Pitta Coelho.

PUC/SP

SÃO PAULO

2005

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____________________________ Local e Data: _______________

"Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter."

George Polia (1978, Prefácio da 1ª tiragem)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a Deus, não só pela oportunidade de poder vivenciar e aprender tudo o que tenho assimilado como também pela oportunidade de possuir pais e amigos, que são tão importantes em minha Vida.

A meus pais, gostaria de agradecer não só o apoio, carinho e amor incondicionais, como também a paciência nos momentos de mais tensão e desespero; e pedir desculpas pela distância e falta de carinho dos últimos meses. Quero aproveitar para agradecer tudo o que aprendi com vocês: valores impossíveis de se ensinar se não se tem a oportunidade de vivenciar.

Em seguida, gostaria de agradecer a dedicação, a paciência e a amizade de minha orientadora Prof. Dra. Sonia que, com carinho, me acolheu nesses meses que nem sempre foram fáceis...

A Prof. Dra. Silvia que me incentivou com palavras de carinho e um sorriso no rosto.

A Vera Lúcia, a amiga inseparável dos últimos anos; sempre me incentivando a não desistir com sua paixão pelo que faz. Quantos domingos trabalhando... Não tenho mais palavras para dizer sobre o quanto ela é importante e o quanto é bom tê-la como companheira de trabalho!

Ao amigo Ernani que, além de muito amigo, ainda abriu as portas de sua sala de aula, para que eu pudesse fazer esta pesquisa com seus alunos.

Aos amigos, além do Ernani, David e Ricardo que, mesmo de longe, sempre estiveram presentes interessados em saber como ia o trabalho e ajudando-me sempre que necessário. Aproveito aqui para agradecer ao Ricardo as portas que ele me abriu do Colégio Consolata, lugar em que me encontrei profissionalmente e onde tenho a oportunidade de estar sempre aprendendo...

Não menos importante foi o apoio que recebi dos amigos do Colégio Nossa Senhora Consolata: que sempre apoiaram minhas idéias com novas sugestões e, mais do que isso me incentivam com carinho e palavras sempre amigas... agradeço à Ir. Dirce, prof. Getúlio (paizão), prof. Jane, prof. Mônica, prof. Zélia, prof. Meire, Prof. Tânia (abstract), Ir. Myrian, prof. Orestes, prof. Rosi, prof. Cibele, prof. Ronaldo...

Não poderia deixar de agradecer também a meus alunos, sobretudo os formandos de 2004, 2005 e 2006 que agüentaram e agüentam, sem opção de

escolha, os momentos em que o bom humor dá lugar às preocupações do dia-a-dia... e também gostaria de agradecer-lhes todos os sorrisos e gestos de carinho que tanto me apoiaram em diversos momentos de angústia... e, em especial, a aluna Lívia, sempre amiga, que me ajudou e ajuda de diversas maneiras; também ao Felipe, pelo carinho e por ter me ajudado a traduzir o resumo.

Ao Fábio que, muitas vezes, me ajudou a ficar sentada quieta – o que é muuuuito difícil!

Sem comentar o carinho presente durante todo o mestrado, apesar de muitas vezes distantes, dos companheiros Aparecido e Leonel.

A meu avô que, apesar do pouco tempo que conseguimos passar juntos, é uma pessoa maravilhosa e está sempre pronto a colaborar e aconselhar e dedicar este trabalho à minha avó, que tanta falta me faz...

A minha única tia que, incondicionalmente eu sei que me apóia e se preocupa comigo.

À amiga Inês, sempre de bem com a vida e otimista... com quem tenho dividido muitas alegrias e bons momentos, como também problemas, angústias e inseguranças...

E à Sandra que, graças à ela, minha casa estava quase sempre em ordem...

Não posso deixar de agradecer a Rosângela, amiga e terapeuta de plantão...

Àquelas pessoas que não vejo muito, mas, nem por isso deixam de ser importantes... Paty, Sonia, Vilma, Alê, Edna,...

A minha filhinha July pelos momentos em que a falta de tempo fez com que eu não lhe desse a atenção merecida.

Por último, ao Cleuber que, apesar de tudo, foi quem me incentivou a começar...

RESUMO

Esta pesquisa foi realizada junto a 28 alunos de 6ª série do Ensino Fundamental e visa diagnosticar as concepções desses alunos sobre a divisão de Números Naturais. Examina três questões: a) se eles conhecem a técnica da divisão; b) se eles sabem utilizar a divisão como ferramenta para a resolução de problemas; c) quais as relações que eles fazem entre dividendo, divisor, quociente e resto. Para isso foram elaboradas 12 questões: 4 formais - de aplicação direta ou inversa da técnica da divisão; 4 contextualizadas - em que a idéia de divisão deverá ser usada como ferramenta -, e 4 formais, que o aluno pode resolver utilizando, ou não, propriedades da divisão de Números Naturais. Os dados foram coletados através de um instrumento escrito e entrevistas com alguns sujeitos. Esses resultados foram analisados á luz da Teoria APOS, desenvolvida por Ed Dubinsky. Concluiu-se que, embora os alunos de 6ª série tenham utilizado a operação de divisão para resolver pelo menos um dos problemas, menos da metade demonstrou conhecer a técnica da divisão, segundo nossos critérios. Além disso, a maior parte dos alunos que estabeleceram alguma relação correta entre divididendo, divisor, quociente e resto está entre os que conhecem a técnica.

ABSTRACT

This research was carried out with 28 students from the 6th grade of Elementary School and it aims to detect their conceptions about division of Natural Numbers. It investigates three questions: a) do they know techniques division?; b) do they know how to work with division as a tool to solve problems? c) which relations do they establish involving the terms: dividend, divisor, quotient and remainder?. That's why 12 questions were drawn up: 4 formal questions - of direct or inverse application of the division technique; 4 contextualized questions - in which division should be used as a tool -, and 4 other formal questions, that the student can solve by using, or not, division properties. Data were obtained from written instruments and clinical interviews. The results were analyzed according to APOS theory, developed by Ed Dubinsky. We concluded that although 6th grade students have used natural number division to solve at least one of the problems, less than half of them have shown to know the division technique, according to our criteria. Besides, most of the students that established some correct relation involving dividend, divisor, quotient and remainder is among those who know the technique.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, abordamos três itens. O primeiro é a justificativa: explica porque escolhemos a divisão de números naturais como tema desta pesquisa. O segundo é a problemática: introduz o leitor ao tema, mostrando algumas pesquisas sobre o assunto e apresenta importantes resultados para o desenvolvimento do estudo. Finalmente, destacamos o quadro teórico utilizado para a análise dos dados colhidos, os objetivos que pretendemos alcançar ao final da investigação e sua relevância.

1.1 JUSTIFICATIVA E PROBLEMÁTICA

Durante quatro anos, lecionei para alunos de sextas séries do Ensino Fundamental de uma escola da rede particular de ensino, situada na zona norte da Capital. A clientela da escola é composta de alunos das classes média e média alta e venho observando que os alunos apresentam dificuldades para efetuar as operações simples de divisão.

Na vida escolar como também fora da escola, sabemos que sempre haverá necessidade de resolver esta e outras operações (adição, subtração e multiplicação). Desse modo, inicio o ano letivo, fazendo diagnósticos e trabalhando com a revisão os conteúdos que percebo não terem atingido os objetivos esperados para aquela série.

Normalmente, são as operações de divisão no conjunto dos Números Naturais, multiplicação e divisão de Números Racionais na forma decimal e adição, subtração e divisão de frações que apresentam mais dificuldades. No entanto, observo que, ao final do ano, os alunos voltam ao estágio do início– daí surgiu a necessidade de investigar a compreensão dos educandos nessas operações para, posteriormente, fazer intervenções que venham a contribuir com o aprendizado.

Em 2002, ministrei aulas de Prática de Ensino para alunos do último ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade situada na zona leste de São Paulo. Alguns alunos eram professores do Ensino Fundamental I, tendo cursado magistério, assim, solicitaram que eu discorresse sobre o ensino da divisão. Percebi que alguns de meus alunos haviam esquecido o algoritmo (diziam que usavam a calculadora e, por isso acabaram esquecendo), outros como não sabiam o significado de cada passo da técnica da divisão, percorriam as etapas automaticamente, o que acabava acarretando dúvidas em algumas contas, como $31 \div 3$ e $2\ 288 \div 11$, no conjunto dos Números Naturais. Uma resolução comum é obter quociente 1 e resto 1 no primeiro caso e quociente 28 e resto 0, no segundo. Será que esses alunos não percebem ser absurdo que $31 \div$

3 resulte em quociente 1? Será que se estivessem diante de uma situação concreta, como dividir 31 balas por três crianças, também responderiam 1 (uma bala para cada criança)?

Estes fatos geraram meu interesse por investigar a divisão. Desse modo, o objetivo deste estudo é investigar concepções de alunos de sexta série a respeito desse conceito. Decidi dar esse enfoque a minha pesquisa, depois de conversar com a orientadora e ler o primeiro artigo indicado por ela.

Mack (1990) descreve uma parte de sua pesquisa de doutorado, que trata da construção do conhecimento formal apoiado no conhecimento informal, no contexto de adição e subtração de frações. Particularmente, interessei-me pelo trecho que mostra a necessidade de se partir do conhecimento informal do aluno. As entrevistas com os sujeitos, alunos de sexta série, mostraram que eles não dominavam a técnica; entretanto, acertavam o resultado quando a mesma operação (adição ou subtração de frações) era inserida em um contexto.

Depois de ler os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), decidi que o tema de minha pesquisa seria a divisão de Números Naturais. O texto ressalta que, no 3º ciclo (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental), a criança ainda não tem domínio total da técnica operatória da divisão de Números Naturais e que a resolução de situações-problema com diferentes tipos de números é pouco trabalhada. Esta situação não contribui para que o aluno amplie e construa novos significados para as operações.

Optei por uma pesquisa diagnóstica, pois - segundo Luckesi - é necessário um diagnóstico para que se possa fazer uma intervenção em que o aluno tenha condições de produzir um resultado mais satisfatório do que o produzido anteriormente. Os PCN também explicitam a importância de fazer um diagnóstico:

> (...) ocorre muitas vezes que esses alunos não conseguem exprimir suas idéias usando adequadamente a linguagem matemática; isso não significa que não tenham construído nenhum tipo de conceito ou desenvolvido procedimentos. Por isso, é fundamental diagnosticar o domínio que cada aluno tem sobre os diferentes conteúdos que serão explorados e identificar quais são suas possibilidades e dificuldades diante da aprendizagem desses conteúdos. (PCN, 1998, p. 62).

Minha experiência em sala de aula possibilitou constatar que muitos alunos encontram dificuldades ao se depararem com situações, nas quais precisam utilizar divisão de Números Naturais.

Existem várias pesquisas que podem nos auxiliar nesta investigação e que abordam as dificuldades dos estudantes. Abaixo descreverei algumas, de forma sucinta, destacando as partes mais relevantes para este estudo.

Mack (1990) trabalhou individualmente com oito alunos de sexta série, durante seis semanas, investigando adição e subtração de frações. O foco de sua pesquisa era investigar se o conhecimento informal trazido pelos alunos pode prover uma base para gerar a compreensão de símbolos formais (escrita das frações) e de procedimentos (algoritmos) de adição e subtração de frações.

Assumindo a terminologia de vários autores, Mack entende por conhecimento informal o conjunto de conhecimentos que os alunos constroem nas situações da vida real. Esse conhecimento também é chamado de “matemática informal das crianças”, conhecimento “intuitivo”, conhecimento “situado” e conhecimento “informal” ou ”prévio”, sempre se referindo ao tipo de conhecimento que pode ser aplicado.

Mack conclui que:

a) os alunos que aprendem os algoritmos apenas como uma ação mecânica e não como apoio no conhecimento informal sentem mais dificuldade em construir algoritmos significativos.

Como exemplo, a autora cita a primeira sessão de Tony, em que ela perguntou se ele sabia como somar frações. Ele respondeu que “era só somar o de cima com o de cima e o de baixo com o de baixo”[1]. A professora solicitou que ele pensasse quantos pedaços de pizza teria se ele tivesse $\frac{3}{8}$ de uma pizza e ganhasse mais $\frac{2}{8}$**.** Ele respondeu: $\frac{5}{8}$ e completou: “Eu não acho que está certo! Eu não sei! Eu acho que deveria ser 16. Eu acho que deve ser $\frac{5}{16}$.”[2] Mack,

[1] “Add the top numbers across and the bottom numbers across” (MACK, 1990, p. 27) - Gostaríamos de ressaltar que esta e todas as outras traduções constantes nesta dissertação foram feitas pela autora da dissertação, Cristiane Attili Castela, com a ajuda da sua orientadora, Prof. Dra. Sônia Pitta Coelho.

[2] “I don’t think that’s right. I don’t know. I think this (the 8 in $\frac{5}{8}$) just might be 16. I think this’d be $\frac{5}{16}$” (MACK, 1990, p. 27).

então, apresentou um material concreto (os círculos de frações). Tony reuniu $\frac{3}{8}$ do círculo com $\frac{2}{8}$. Quando lhe foi perguntado quanto resultou, ele respondeu: "$\frac{5}{8}$. Mas parece que deveria ser 16 ... É difícil!"[3].

b) Em conseqüência disso, a autora afirma que os conhecimentos que os alunos trazem para a escola, não devem ser ignorados; os alunos devem ser encorajados a fazer "pontes" e a construir seus próprios algoritmos com base em seu conhecimento, para que os algoritmos tornem-se mais significativos.

O trabalho de Mack (1990) evidenciou a importância de situações-problema; em nossa pesquisa, as situações-problema serão utilizadas como um contexto de investigação de concepções do aluno de sexta série, no que diz respeito à divisão de Números Naturais. O trabalho de Carraher et al (2003) vai ao encontro dos resultados de Mack. Em seu livro, "Na vida dez, na escola zero", os autores descrevem uma pesquisa em que participaram algumas crianças que trabalham no comércio; estas foram submetidas, primeiro, a um teste informal (oral e em seu ambiente de trabalho), no qual constavam questões do dia-a-dia (envolvendo preço dos produtos, quanto custa determinada quantidade do mesmo produto, troco a ser dado a um cliente, etc.). Depois, foram submetidos a um teste escrito constituído de questões aritméticas e questões:

> (...) sob a forma de problemas do tipo escolar, como 'Maria comprou... bananas, cada banana custava..., quanto dinheiro ela gastou?'. Em ambos os casos, utilizou-se para cada criança os mesmos números com os quais a criança havia operado na situação informal (...) (CARRAHER et al, 2003, p. 33).

[3] "Five eighths. It seems like it would be sixteenths... This is hard" (MACK, 1990, p. 28).

Os autores observaram que o desempenho das crianças foi *"melhor nos problemas com situações imaginárias do que nas operações simples"* (CARRAHER et al, 2003, p. 34); e afirmam:

> Podemos supor, à vista desses resultados, que a análise lógica implicada na solução de um problema facilita a realização da operação, por inseri-la num sistema de significados bem compreendidos, ao invés de constituir uma habilidade isolada que é executada numa seqüência de passos, os quais levariam à solução. (p. 35)

Campbell (2002) estudou a compreensão de futuros professores, participantes de um curso de Fundamentos de Matemática sobre a divisibilidade de Números Naturais; para isso, propôs problemas abstratos, envolvendo decomposição em primos.

Algumas das questões usadas pelo autor em sua pesquisa são:

- Se você dividir 21 por 2, o que você encontra por quociente? E por resto?[4]

- Considere o número 6 x 147 + 1, que chamaremos de A. (a) Se você dividir A por 6, o que você irá obter como resto? E como quociente? (b) Se você dividir A por 2, o que você irá obter como resto? E como quociente? (c) Considere o número 6 x 147 + 2. Quando ele é dividido por 2, qual o resto? Qual o quociente?[5]

Eis as conclusões:

---

[4] If you divide 21 by 2, what would the quotient be? What would be the remainder?

[5] Consider the number 6 x 147 + 1, which we will refer to as A. (a) If you divide A by 6, what would be the remainder? What would be the quotient? (b) If you divide A by 2, what would be the remainder? What would be the quotient? (c) Consider the number 6 x 147 + 2. When it is divided by 2, what is the remainder? What is the quotient?

a) os futuros professores demonstraram uma ausência de familiaridade nas conexões entre números inteiros, fracionários e decimais e suas expressões simbólicas; tendem a interpretar referentes formais da divisão aritmética, usando linguagem informal.

Como exemplo, podemos tomar o caso de Jim. Este sujeito afirma que, na operação 21 $\div$ 2, o quociente é 10,5 e, portanto, o resto é 0,5. Para explicar como fez essa operação, Jim cita que imaginou uma figura representando o 21 e a dividiu em duas partes (linguagem informal).

b) os sujeitos apresentam falta de discernimento entre aritmética de Números Racionais e Naturais.

Por exemplo, Dana, ao resolver a segunda questão, escreveu: $\frac{6\times147+1}{6}=\left(6\times\frac{147}{6}\right)+\frac{1}{6}$. Perfeito, não é mesmo? Isso se ela não tivesse respondido que $\frac{1}{6}$ era o resto.

As questões de Campbell mostram as dificuldades dos futuros professores para identificar quociente e resto, quando o dividendo não é apresentado em sua representação decimal usual. De fato, dos 19 participantes da pesquisa, apenas 4 não calcularam explicitamente o dividendo em nenhuma delas. Desses 4, apenas 2 participantes identificaram corretamente quocientes e restos em todas as questões. Nosso instrumento de pesquisa contém questões semelhantes a estas.

Trabalhando com alunos de 5ª e 7ª séries do Ensino Fundamental de uma escola particular, Cunha (1997) investigou as concepções de que “multiplicação sempre aumenta” e “divisão sempre diminui”. Pesquisou como estas concepções interferem quando os alunos passam a trabalhar com tais operações, não só no domínio dos Números Naturais, mas também com os Números Racionais na forma decimal.

A pesquisadora concluiu que o ensino da técnica não é conduzido de modo que os alunos possam fazer conexões entre os conceitos e os processos, confirmando o que já foi citado no trabalho de Mack. Para verificar se os alunos estabelecem relações entre dividendo, divisor, quociente e resto, Cunha realizou um teste diagnóstico. Uma das questões era: “Resolva as questões propostas abaixo: (a) 414 ÷ [ ] = 23 e (b) [ ] ÷ 59 = 27. Como você poderia me convencer de que sua resolução para as questões acima apresentadas é a correta?” As resoluções apresentadas levaram Cunha a observar que a maior dificuldade dos alunos foi descobrir o valor desconhecido, pois deve-se efetuar a operação inversa à que aparece.

Diversas pesquisas (Greer, 1992) apontam uma diferença de desempenho dos estudantes com relação a certos tipos de problemas de divisão. O autor classifica esses problemas com base nos problemas de multiplicação que lhes são correlatos. Descreveremos a classe de problemas de multiplicação a partir da qual ele classifica os problemas de divisão. Essa classe é denominada “grupos iguais”.

Normalmente, esse tipo de situação representa o primeiro contato das crianças com problemas de aplicação de multiplicação e divisão. No caso multiplicativo, são situações em que existem vários grupos com o mesmo número de objetos em cada um, e deseja-se saber a quantidade total de objetos.

Exemplo:

Três crianças têm 4 laranjas cada uma. Quantas laranjas elas têm juntas?

Resolução: 3 crianças x 4 laranjas/criança = 12 laranjas.

Para Greer (1992), o número 3 representa o multiplicador e o 4 o multiplicando. O multiplicador é aquele que age e o multiplicando o que sofre a ação. Neste caso, efetuamos 4 + 4 + 4 = 12. Em nosso exemplo, o número 3 age sobre o 4, fazendo com que esta multiplicação seja uma soma de parcelas iguais a 4.

Outro modo de identificar o multiplicando é observar que este representa uma grandeza de mesma natureza que o resultado. Em nosso caso, o que queremos é o número de laranjas, então, o multiplicando seria o número de laranjas que cada criança ganhou.

Como podemos observar, só identificamos multiplicador e multiplicando em situações-problema. Se propuséssemos a questão formal: 3 x 4, poderíamos pensar em 4 + 4 + 4 ou 3 + 3 + 3 + 3, pois 3 x 4 = 4 x 3 . Portanto, não poderíamos identificar multiplicador e multiplicando.

Nas situações-problema, nas quais conseguimos identificar multiplicador e multiplicando, dizemos que há uma assimetria entre os dados. Nesse caso, podemos discernir dois tipos de problemas de divisão:

I) Problema partitivo: divisão do total pelo multiplicador (o quociente é entendido como o número de elementos de cada "conjunto").

Exemplo:

12 laranjas foram divididas igualmente entre 3 crianças. Quantas laranjas cada uma recebeu?

Como vimos anteriormente, 12 e 3 representam grandezas de naturezas distintas.

II) Problema quotitivo: divisão do total pelo multiplicando (o quociente é entendido como o número de vezes que o divisor "cabe" no dividendo).

Exemplo:

12 laranjas foram divididas entre algumas crianças, de forma que cada uma recebeu 4. Quantas crianças havia?

Neste caso, observamos que os dados são grandezas de mesma natureza.

Para Greer, nem todos os problemas multiplicativos exibem dados assimétricos. Abaixo, apresentamos um tipo de problema com simetria entre os dados, no qual não é possível discernir dois tipos correspondentes de problemas de divisão.

Exemplo:

Se quatro meninos e três meninas estão dançando, quantos pares diferentes poderão ser formados?

De fato, se o número de pares possíveis é 12, não há uma diferença essencial entre:

a) dar o número de meninos e perguntar o número de meninas;

b) dar o número de meninas e perguntar o número de meninos.

Para Greer (1992), os problemas que envolvem divisão quotitiva são considerados mais difíceis pelos alunos do que aqueles que envolvem divisão partitiva. Em sua pesquisa, o autor cita dois motivos:

a) a divisão partitiva é a mais comum no dia-a-dia;

b) os problemas de divisão partitiva são mais trabalhados no contexto escolar.

Cunha (1997) faz uma breve análise de livros didáticos brasileiros e observa que os problemas quotitivos aparecem com menos freqüência do que os partitivos.

Para nós, a pesquisa de Greer foi importante para a elaboração das questões contextualizadas, pois possibilitou diversificar nosso instrumento, que inclui problemas partitivos e quotitivos.

1.2 QUADRO TEÓRICO

Para a análise de nossos dados, utilizaremos a Teoria APOS (do inglês: Action, Process, Object and Schema), desenvolvida por Ed Dubinsky com base na Teoria de Abstração Reflexiva, introduzida por Piaget. Desde que Dubinsky (1991) lançou as bases de sua teoria no texto “Reflective abstraction in advanced mathematical thinking”, vários educadores matemáticos empregaram-na em suas pesquisas.

Em sua teoria, Piaget (1975) descreve o desenvolvimento do pensamento lógico de crianças, e o esforço de Dubinsky (1991) tem o intuito de estender essa descrição para analisar como o desenvolvimento do pensamento matemático acontece quando se trata de conceitos de matemática avançada.

Para descrever o pensamento de crianças, Piaget utiliza-se de três tipos de abstração: empírica, pseudo-empírica e reflexiva. Abaixo, os três tipos são descritos brevemente:

a) Abstração empírica: o indivíduo extrai propriedades de objetos apoiado em seu manuseio (por exemplo: peso, textura, cor, tamanho, etc.).

b) Abstração pseudo-empírica: é um tipo intermediário entre a empírica e a reflexiva: a criança faz relações dos objetos (do qual já extraiu propriedades) com o espaço, com sua utilidade, etc. Extrai ainda propriedades das configurações desses objetos no espaço e das relações existentes entre eles.

c) Abstração reflexiva: é construída baseada nas coordenações gerais de ações do indivíduo sobre os objetos e as propriedades já internalizadas. As relações feitas são internas ao indivíduo. Um exemplo seria quando são organizados objetos em conjunto para formar sucessivamente: um conjunto unitário; um conjunto com um par de objetos, outro com três, etc. A interiorização e a coordenação dessas ações ajudam a construir o conceito de número.

Estes três tipos de abstração não são completamente independentes. Na abstração empírica, o sujeito observa os objetos e abstrai suas propriedades. Na abstração pseudo-empírica, o sujeito realiza ações sobre os objetos a fim de extrair novas propriedades. Para isso, é preciso que o indivíduo já tenha conhecimento das propriedades dos objetos. Na abstração reflexiva, como já foi citado anteriormente, o indivíduo, baseado nas propriedades já internalizadas, coordena novas ações e, assim, pode fazer relações e extrair novas propriedades. Piaget verificou que a habilidade para realizar um ou outro tipo de abstração depende de vários fatores, alguns dos quais podem ser estimulados. Isso justifica a necessidade de conhecer, o que o aluno sabe para que, posteriormente, possamos estimulá-lo a fazer novas descobertas.

“O desenvolvimento das estruturas cognitivas é próprio da abstração reflexiva” (Piaget, 1985, p. 143). Conforme o autor, o estudo dessas abstrações é muito importante para o pensamento cognitivo, em geral, e para a matemática, em particular.

A abstração reflexiva, em um passo mais avançado, está envolvida no pensamento matemático, no qual, em geral, os processos são desvinculados de conteúdos e convertidos em objetos matemáticos.

Apoiado no exposto acima, Dubinsky percebeu que essa teoria poderia ser estendida para investigar o que ocorre no desenvolvimento do pensamento matemático avançado. Para ele, a abstração reflexiva conduz à construção de níveis de concepções sobre os objetos matemáticos e permite a realização de ações mentais nesses níveis. Para isso, o autor propõe diferentes interpretações aos termos: ação, processo, objeto e esquema que caracterizam estes níveis de concepções; daí o nome: Teoria APOS.

Aos que se utilizam da teoria APOS,

> *“o conhecimento matemático de um indivíduo é sua tendência a responder a uma situação-problema matemática refletindo sobre os problemas e suas soluções em um contexto social e construindo ou reconstruindo ações matemáticas, processos e objetos matemáticos, e organizando-os em esquemas para uso futuro em outras situações”*[6] (Asiala et al, 1996).

Cada um dos termos constantes na teoria (ação, processo, objeto, esquema) define, tanto o tipo de construção mental feita para se compreender um objeto matemático quanto o nível de concepção de um indivíduo sobre esse

---

[6] “An individual’s mathematical knowledge is her or his tendency to respond to perceived mathematical problem situations by reflecting on problems and their solutions in a social context and by constructing or reconstructing mathematical actions, processes and objects and organizing these in schemas to use in dealing with the situations”.

objeto. Segundo a teoria, o sujeito começa a construção de um conceito matemático por meio de ações. Abaixo, descreveremos sucintamente cada nível de concepção identificado pela teoria:

a) AÇÃO: a compreensão do indivíduo sobre um objeto matemático está limitada à execução de ações, a fim de transformar esse objeto em outros objetos (matemáticos). Na ação, cada passo realizado é desencadeado pelo anterior (instruções passo a passo) e, por isso, o indivíduo a percebe como um movimento dirigido para o exterior.

Quando uma ação é repetida, e o indivíduo reflete sobre o procedimento que está executando, a ação é interiorizada e torna-se uma construção mental interna chamada processo.

b) PROCESSO: o sujeito é capaz de descrever e reverter os passos feitos na ação sem necessidade de efetivamente executá-los. Se compararmos ação com processo, este é percebido como um procedimento interno e controlado pelo indivíduo.

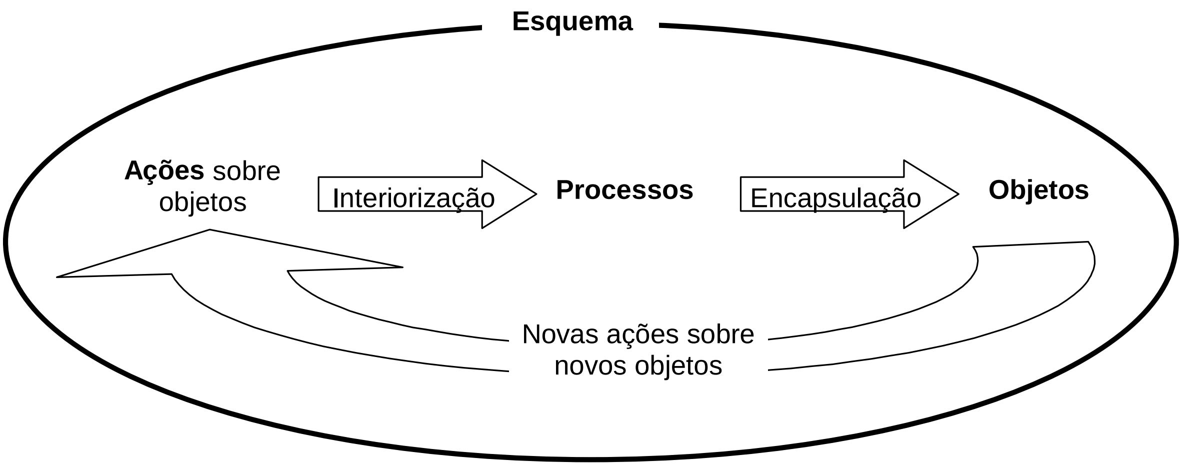
Quando dizemos que o sujeito é capaz de reverter uma ação internalizada, não estamos nos referindo, necessariamente, a ele ser capaz de desfazer uma conta, mas sim, à capacidade de ele imaginar essa possibilidade, construindo um novo processo.

Quando o indivíduo reflete sobre o que ele faz durante um processo e torna-se consciente deste como um todo, dizemos que ele encapsulou o processo como um objeto.

c) OBJETO: o indivíduo é capaz de realizar ações sobre um processo interiorizado e raciocinar sobre suas propriedades; neste caso, torna-se capaz de tratá-lo como um objeto cognitivo.

d) ESQUEMA: é uma coleção de ações, processos, objetos e outros esquemas, todos articulados de forma a compor um referencial coerente na mente do indivíduo, para que ele possa disponibilizá-lo quando necessário, para, por exemplo, resolver uma determinada situação-problema.

A compreensão de um conceito matemático começa com a realização de construções mentais ou físicas de objetos sob ações bem definidas. Estas são interiorizadas para formar processos que, por sua vez, são encapsulados para formar objetos. Finalmente, ações, processos e objetos podem ser organizados em um esquema.



Vale ressaltar que esses objetos matemáticos sofrem novas ações que produzem novos objetos, de uma forma cíclica, em um crescente de conhecimento; ainda, o desenvolvimento cognitivo de um conceito não se dá de forma linear como o apresentamos, e sim, diferente em cada indivíduo.

Desse modo, a teoria APOS será útil para identificar o tipo de construção cognitiva, nos diversos momentos da investigação das concepções sobre a divisão de números naturais. Ao discorrer sobre a divisão de Números Naturais em seu artigo, Campbell (2002) faz uma distinção entre o que ele chama de "divisão longa" e "algoritmo da divisão". Para ele, o algoritmo da divisão consiste no Teorema : dados números naturais A e D (com D diferente de zero), chamados de dividendo e divisor, respectivamente, existem números naturais Q - chamado quociente e R – resto, únicos, tais que $0 \leq R < D$ e $A = QD + R$. (p. 37)

A relação $A = QD + R$ é empregada pelos estudantes para verificar se "a conta está certa" (Prova Real).

Por outro lado, a expressão "divisão longa" é empregada para se referir ao algoritmo usual de dividir um número natural por outro não nulo, obtendo um quociente e um resto.

Nós empregaremos a terminologia de Campbell e, também, a expressão "técnica da divisão" para nos referirmos à divisão longa comumente ensinada nas escolas brasileiras.

Consideraremos que um indivíduo está em um nível de concepção-ação da divisão de Números Naturais, se ele estiver limitado à aplicação da técnica da divisão, em questões relacionadas com a divisão de números naturais. Por exemplo, dado o número natural 6 x 147 + 1, o indivíduo realiza uma ação, quando obtém primeiramente a representação decimal do número para, em seguida, obter o quociente e o resto da divisão por 6.

Por outro lado, a capacidade de reverter mentalmente ações para obter D, conhecidos A, Q e R na relação: A = QD + R, ou ainda, de obter A, conhecidos Q, D e R, será tomada como indício de que as ações foram interiorizadas em processos. Outro indício seria a habilidade de identificar quociente e resto, quando o dividendo não é apresentado na forma decimal usual, mas na forma: QD + R (como no exemplo acima). Neste caso, diremos que o indivíduo está em um nível de concepção-processo da divisão de números naturais.

Um indivíduo apresenta uma concepção-objeto da divisão, quando a entende como uma propriedade no conjunto dos Números Naturais que associa a dois naturais A, D, com D diferente de 0, outros dois números naturais Q, R, únicos, nas condições do teorema do algoritmo da divisão. Esta propriedade independe dos procedimentos particulares da divisão empregados para obter os naturais Q e R. Investigar esta concepção não é o foco deste trabalho.

Evidentemente, poderemos, após uma investigação cuidadosa dos resultados, por meio da análise dos protocolos e de algumas entrevistas, apenas sugerir em que nível de concepção encontra-se o indivíduo.

Levantadas estas pesquisas e descrito o quadro teórico, apresentamos os objetivos de nossa pesquisa:

a) Investigar se o aluno de 6ª série do ensino fundamental conhece a técnica da divisão.

b) Investigar se ele recorre à divisão para resolver as questões contextualizadas.

c) Analisar relações que ele estabelece entre dividendo, divisor, quociente e resto na divisão de Números Naturais.

Esta investigação visa a contribuir com o projeto de pesquisa: "Qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática?", desenvolvido pelas professoras doutoras Sílvia D. A. Machado , M. Cristina S. A. Maranhão, Sônia Pitta Coelho, Bárbara Lutaif Bianchini e Leila Zardo Puga, do qual faço parte. O projeto parte do princípio de que, para ensinar, é preciso que tenhamos *"entendimento sobre como o estudante constrói o conhecimento e como o professor pode favorecer esse processo"* (Coelho et al, 2003, p. 1).

Dessa forma, teremos maiores condições de traçar quais mudanças, quanto ao que é ensinado aos futuros professores, são adequadas para tornar a álgebra acessível a mais estudantes. Com relação à polarização entre o conhecimento cotidiano e o científico, o texto do Projeto menciona que, segundo Brzezinski e Garrido (2002),

> "existe a necessidade de serem esclarecidas a especificidade e as relações entre diferentes sentidos do termo conhecimento. Questões como "Quais as diferenças entre o conhecimento cotidiano trazido pelo aluno, a ciência ensinada nas escolas e a ciência produzida na comunidade científica?" passam a ser objeto de estudos" (Coelho et al, 2003, p.3).

Nesses termos, ensinar passa a exigir do professor nova postura sobre a construção do conhecimento científico.

O texto do projeto ressalta que o desempenho de alunos nas avaliações oficiais deixa muito a desejar, citando os porcentuais de acerto do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica). Menciona ainda que embora essas avaliações sejam discutíveis, parecem indicar a existência de um certo descompasso entre o que se espera que estudantes do ensino básico saibam e o que eles realmente conhecem de matemática.

Outra preocupação explícita dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), citada no texto do Projeto, é a dimensão pragmática dos conhecimentos a serem ensinados...

> “... estes devem constituir um conjunto de referências capaz de orientar o aluno a tomar decisões em sua vida prática e como membro consciente de uma coletividade. Grande atenção tem sido dada ultimamente a esta última recomendação, e seus reflexos estão presentes nas salas de aula de matemática. Em contrapartida, tem-se dedicado menos consideração a contextos formais concernentes a propriedades e estruturas de números propriamente ditos. No entanto, o entendimento matemático não é apenas uma questão de fundar conceitos em experiências familiares do dia-a-dia. Ele também exige desenvolver fundamentos conceituais para fazer distinções abstratas gerais e claras.” (Coelho et al, 2003. p. 7)

Sabemos que os alunos sentem dificuldade para resolver operações com Números Naturais, sobretudo no que diz respeito à operação de divisão.

Conforme o texto do Projeto, uma leitura dos títulos das dissertações e teses em Educação Matemática produzidas no Brasil, de 1998 a 2001, deixa transparecer que a produção científica que segue essa orientação é incipiente, o que justifica a relevância do projeto no qual que estamos inseridos.

Este estudo visa a investigar as concepções do aluno de sexta série, no que diz respeito à divisão de Números Naturais; posteriormente, novas pesquisas serão desenvolvidas, com o objetivo de tornar esse conteúdo mais acessível aos estudantes; além disso, a investigação pretende fornecer subsídios ao ensino de números nos cursos de formação de professores.

CAPÍTULO II

2. METODOLOGIA

Neste capítulo, abordaremos o universo de nosso estudo, a escola e a série escolhida, tanto no que diz respeito ao estudo-piloto, como ao estudo principal. Dentro deste último item, serão destacados o embasamento teórico da metodologia utilizada, o perfil dos participantes do estudo e o material utilizado para coleta dos dados. Em detalhes, descreveremos cada questão do instrumento, assim como os procedimentos adotados para sua aplicação e a escolha dos alunos entrevistados.

2.1 UNIVERSO DE ESTUDO

A pesquisa foi realizada com 28 alunos de sexta série de uma escola da rede pública de ensino, do Município de São Paulo, localizada no campus de uma Universidade Pública, na zona oeste. Os alunos têm 4 aulas semanais no currículo de matemática, todas com uma hora de duração. São duas salas por série (de 5ª a 8ª), com 30 alunos cada uma. Os professores desta escola são contratados em regime de dedicação exclusiva por 40 horas semanais, sendo 30 cumpridas na escola e dez de aperfeiçoamento.

Das trinta horas em que estão na escola, 12 horas semanais são empregadas em sala de aula e 18 dedicadas a reuniões gerais (com todos os professores da unidade), reuniões com os professores da série em que lecionam, reuniões de área (são quatro professores de matemática), recuperações, plantões de dúvidas, etc. Estas reuniões, em sua maioria, são semanais.

Os alunos são provenientes de três setores: um terço é constituído de filhos de professores da Universidade, um terço de filhos de funcionários dessa referida Universidade e o outro um terço de crianças da comunidade (desde crianças que moram em favelas até as de classe média alta). Vale ressaltar que os alunos são todos escolhidos por sorteio; as classes sociais, econômica e cultural dos alunos são bastante diversificadas.

Em sua grande maioria, os alunos começam na primeira série do Ensino Fundamental I e permanecem na escola até a finalização de seus estudos (3ª série do Ensino Médio). Além disso, a instituição não sofre grande rotatividade de professores como as outras escolas públicas, pois estes são escolhidos por meio de um teste de seleção feito, especialmente, para esta escola.

2.2 Estudo-piloto

O estudo-piloto foi aplicado em uma turma de sexta série de 32 alunos de um Colégio particular de São Paulo. Nosso intuito foi verificar se as questões, tal como foram propostas, estavam claras aos alunos e se as respostas apresentadas, próximas ou distantes das que esperávamos. Após a aplicação, analisamos os resultados e conversamos informalmente com alguns alunos que participaram do teste-piloto. Em conseqüência, modificamos a apresentação das questões 9 a 12. As versões nova e antiga e o motivo pelo qual houve a mudança serão explicitados mais adiante.

2.3 Estudo principal

Os alunos foram examinados por meio de dois tipos de questões: as formais (oito questões) e as contextualizadas (quatro). Entendemos por questões contextualizadas o que Carraher e Schliemann (2003, p. 33) descreve como *“problemas do tipo escolar”*, já descritos na Introdução. As questões formais são as de aplicação de algoritmos, chamadas *“operações aritméticas”* e definidas como: *“operações aritméticas a serem resolvidas sem qualquer contexto e a partir de sua representação no papel”*.

Em outro trecho de seu livro, a autora citada denomina essas mesmas questões de *“exercícios de computação”* e as define como *“continhas a serem resolvidas”* (Carraher, 2003, p. 48).

Em sua pesquisa, o autor citado aplicou um teste oral com questões do cotidiano das crianças e utilizou, nas questões escritas, os mesmos números usados no teste oral. Em nosso estudo, empregamos estratégia semelhante: as questões contextualizadas envolvem os mesmos números e podem ser resolvidas com as mesmas operações utilizadas nas formais, para que os números apresentados não constituam outra variável para nossa análise.

2.3.1 SUJEITOS

Como já mencionamos, nossos sujeitos de pesquisa foram alunos de uma escola pública, já descrita na seção Universo de Estudo.

Os sujeitos estudavam na sexta série, correspondente à faixa etária de 11 a 13 anos. A classe escolhida e as outras salas da escola têm 30 alunos. Esta pesquisa foi aplicada em 28 alunos, pelo fato de dois terem faltado em uma das etapas.

2.3.2 EMBASAMENTO TEÓRICO DA METODOLOGIA

A pesquisa consistiu em um estudo do tipo diagnóstico. Segundo Rudio, o diagnóstico compõe-se de uma pesquisa descritiva, na qual o *"pesquisador procura conhecer e interpretar a realidade, sem nela interferir para modificá-la"* (RUDIO, 1992, p. 55). O interesse da pesquisa descritiva está em descobrir e observar fenômenos, tentando descrever, classificar e interpretá-los. Os dados obtidos podem ser descritos de forma qualitativa, ou ainda, de forma quantitativa, expressando o fenômeno numericamente, por meio de tabelas e estatística.

Em nosso caso, tratamos os dados por esses dois vieses – quantitativo e qualitativo.

Conforme LÜDKE e ANDRÉ (2003), a pesquisa qualitativa tem características um pouco diferentes da pesquisa quantitativa. Uma de suas diferenças é o tamanho da amostra que, no estudo qualitativo, pode ser menor que no quantitativo. A seguir, apresentamos uma citação em que aparece essa característica e como os dados devem ser trabalhados:

> Em lugar dos questionários aplicados a grandes amostras, ou dos coeficientes de correlação, típicos das análises experimentais, são utilizadas mais freqüentemente neste novo tipo de estudo a observação participante, que cola o pesquisador à realidade estudada; a entrevista, que permite um maior aprofundamento das informações obtidas; e a análise documental, que complementa os dados obtidos através da observação e da entrevista e que aponta novos aspectos da realidade pesquisada. (LÜDKE e ANDRÉ, 2003, p. 9)

Na presente investigação, a metodologia empregada está de acordo com as características de uma pesquisa qualitativa, conforme o texto acima.

Quanto ao uso de protocolos, as autoras ressaltam que estes possibilitam:

a) ser consultados várias vezes.

b) servir de base a diferentes estudos.

c) que sejam retiradas evidências que fundamentam afirmações e declarações do pesquisador.

d) um baixo custo, requerendo apenas investimento de tempo e atenção por parte do pesquisador para selecionar e analisar os dados mais relevantes.

e) acesso aos dados, quando o acesso ao sujeito é impraticável ou quando a interação com os sujeitos puder alterar seu comportamento ou seus pontos de vista.

f) detectar problemas que devem ser mais bem explorados por intermédio de outros métodos.

g) complementar as informações obtidas por outras técnicas de coleta.

Para Holsti, existem, pelo menos, três situações em que é apropriado o emprego de protocolos. Uma delas justifica o uso dos protocolos em nossa pesquisa:

> Quando o interesse do pesquisador é estudar o problema a partir da própria expressão dos indivíduos, ou seja, quando a linguagem dos sujeitos é crucial para a investigação. Nesta situação incluem-se todas as formas de produção do sujeito em forma escrita, como redações, dissertações, testes projetivos, diários pessoais, cartas, etc. (Holsti (1969) apud, LÜDKE e ANDRÉ, 2003, p. 17)

Lüdke e André citam também algumas particularidades das entrevistas em trabalhos de pesquisas em educação. Conforme as autoras, essas entrevistas devem:

a) estar mais próximas dos esquemas mais livres e menos estruturados.

b) ter um caráter de interação entre quem pergunta e quem responde.

c) permitir o aprofundamento dos pontos levantados pelos protocolos.

d) ter respeito pelo entrevistado, desde respeito a local e horário da entrevista até a garantia de sigilo e anonimato do entrevistado.

e) estimular o fluxo natural de informações.

Quanto à análise dos dados qualitativos, segundo Paton (1980), tem-se:

> *“é um processo criativo que exige grande rigor intelectual e muita dedicação. Não existe uma forma melhor ou mais correta. O que se exige é sistematização e coerência do esquema escolhido com o que pretende o estudo”* (apud Lüdke e André, 2003, p. 42).

Para esta análise, deve-se:

a) organizar os dados.

b) detectar temas e temáticas mais freqüentes.

c) construir categorias, que serão modificadas ao longo do estudo em um processo dinâmico de confronto constante entre teoria e empiria.

2.3.3 MATERIAL UTILIZADO

O material usado na coleta de dados do estudo foi um instrumento diagnóstico impresso em folha A4, constituído de cinco páginas. As quatro primeiras páginas continham duas questões cada uma; a última, quatro, em um total de 12. As questões 1 a 4 eram contextualizadas; as correspondentes questões formais eram numeradas de 5 a 8. As questões 9 a 12 eram formais, mas sem correspondentes contextualizadas.

Na primeira aula, foram aplicadas as questões 1 a 4 e 9 a 12, e na segunda aula, as demais.

A seguir, apresentaremos o instrumento diagnóstico em detalhes, discutindo cada uma das questões.

2.3.3.1 INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO

Para facilitar a descrição dos objetivos de cada questão, alteramos a ordem. Primeiro, serão descritas as questões 5 a 8 (formais), depois as questões 1 a 4 (contextualizadas, análogas às formais 5 a 8) e, por fim, as questões 9 a 12.

Nós classificamos as questões 5 a 8 como formais.

05. Resolva a operação 42 ÷ 4. Qual o resultado (quociente)? Qual o resto?

06. Resolva a operação 541 ÷ 5. Qual o quociente? Qual o resto?

O principal objetivo destas questões foi procurar indícios da presença da concepção-ação, descrita no quadro teórico; ou seja, analisar se ele conhece e domina a técnica da divisão de números naturais e se sabe o que são resto e quociente.

Para a questão 5, a resposta correta seria quociente 10 e resto 2; para a questão 6, quociente 108 e resto 1. No entanto, acreditamos que alguns alunos possam responder: quociente 1, resto 2 para a questão 5 e quociente 18, resto 1 para a questão 6, sobretudo em razão de dois fatores:

a) falta de familiaridade com a(s) técnicas(s) da divisão de números naturais; e/ou

b) não observação de coerência entre as grandezas dos resultados e dos números dados.

Uma outra resposta possível seria: quociente 10,5 e resto 0 para a questão 5, e quociente 108,2 e resto 0 para a questão 6. Isso pode acontecer por causa de dois fatores:

a) na sexta série, o aluno dificilmente faz operações nas quais são pedidos quociente e resto e, mesmo na divisão de números naturais, ele quer encontrar quociente decimal; e/ou

b) eles não conhecem a definição de resto. Campbell (2002) constata que, mesmo entre alunos de licenciatura, não se verifica uma percepção global do algoritmo da divisão.

Uma outra resolução possível seria encontrar como resposta: quociente 1,5 para a questão 5 e quociente 18,2 para a questão 6. As possíveis justificativas para essas resoluções são as mesmas descritas anteriormente.

07. Que número deve ser colocado no lugar do ?

. . .	15
	21
3	

08. Que número deve ser colocado no lugar do ?

115 . . .	
	23
1	

As questões formais 7 e 8 visam a verificar se os alunos, frente a situações envolvendo divisão, são capazes de estabelecer algumas relações, próprias da concepção-processo, entre dividendo, divisor, quociente e resto, sintetizadas na expressão: A=DQ+R, mencionada no teorema do algoritmo da divisão.

A questão número 7 pode ser resolvida baseada na "operação inversa". . A resposta para esta questão é 318 e o aluno poderá chegar a esse resultado usando a estratégia: dividendo = quociente x divisor + resto e resolvendo 21 x 15 + 3. A questão número 8 admite como resposta o número 18. Trata-se aqui de outra forma de reversão: obter o divisor, conhecidos o dividendo, o quociente e o resto. Pensamos que o aluno poderia utilizar a seguinte estratégia: (415 – 1) ÷ 23. Esta resolução nos indica que o aluno já processa interiormente algumas relações entre dividendo, divisor, quociente e resto.

Uma outra forma de resolução seria fazer o cálculo: 415 ÷ 23 – 1, levando à resposta incorreta igual a 17.

Outra estratégia seria efetuar a divisão de 415 por 23 e apresentar como resposta o quociente. No entanto, esta resolução não garante que ele tenha utilizado a informação: resto 1. O fato poderá ser aclarado em posterior entrevista.

Outra possível resolução seria efetuar: 415 x 23. Para Cunha (1997, p. 67), isso acontece em razão da concepção dos alunos de que "para descobrir o valor desconhecido, devemos efetuar a operação inversa àquela que aparece".

A questão da pesquisa de Cunha era: 414 ÷ [ ] = 23. Nela, uma dupla de alunos apresentou, inicialmente, a resolução 414 x 23; em seguida, observou que o resultado encontrado era "muito grande" e optou por dividir ao invés de multiplicar. Pela presença desse tipo de concepção, os alunos, em geral, podem apresentar muito mais dificuldades para resolver a questão 8 do que a 7.

A questão proposta por nós é bem parecida com a de Cunha; assim, acrescentamos 1 ao dividendo, apenas com o intuito de que haja um resto diferente de zero.

Neste caso, Cunha (1997, p. 65) escolhe números maiores que 20, pois este fato pode influenciar as resoluções dos alunos da seguinte forma: como esses números não são tão “pequenos” (por essa expressão, Cunha entende números da ordem de grandeza das dezenas e das centenas), ela acredita que isso irá *“desencorajar os alunos a buscarem a solução por meio de cálculos mentais e sim efetuarem os cálculos usando papel e lápis. Isto permite que consigamos saber as estratégias usadas pelos alunos na resolução da questão”*.

Como já mencionamos, as quatro questões contextualizadas descritas, a seguir, exibem os mesmos dados das questões formais descritas anteriormente. Ao elaborar as questões contextualizadas, tomamos o cuidado de incluir os dois tipos de problemas de divisão: partitivo e quotitivo, conforme classificação de Greer (1992), descrita na problemática.

01. Tenho 541 camisetas para dividir igualmente entre 5 orfanatos. Quantas camisetas cada orfanato vai receber?

Esta questão consiste em um problema de divisão partitiva e tem os mesmos dados numéricos da questão formal número 6.

Acreditamos que a maioria dos alunos não teria dificuldades para reconhecer que a operação adequada para resolver a questão fosse a divisão

Por meio desta questão, observamos:

a) se o aluno que encontrou resultado 18, ao invés de 108, na correspondente questão formal, percebeu que esse número de camisetas por orfanato é "muito pequeno". Neste caso, há indícios de que esse aluno tem idéia da ordem de grandeza do quociente e, portanto, estabelece alguma relação entre dividendo e divisor, na presença de contexto.

b) como os alunos poderiam interpretar o resto 1. As possibilidades seriam: i) ignorar o resto; ii) citar que sobrou uma camiseta ou iii) responder 18,2 ou 108,2, revelando falta de interpretação do enunciado e falta de familiaridade em trabalhar com unidades indivisíveis. Por unidades divisíveis, entendemos aquelas que podem ser subdivididas (como uma folha de papel, um chocolate, etc.); por unidades indivisíveis, são as que não temos como subdividir (uma caneta, uma camiseta, uma pessoa, etc.).

02. Em um prédio, 42 pessoas estão esperando para tomar o elevador. Sabe-se que o elevador só suporta 4 pessoas por vez. Qual o número mínimo de viagens que o elevador deverá fazer para levar todas as pessoas?

A questão exibe os mesmos dados numéricos da questão formal número 5.

Julgamos que o aluno terá mais dificuldade para identificar a operação a ser feita (de divisão), por ser este um problema quotitivo.

Esta questão exige que o aluno leve em consideração o resto 2 da divisão para dar a resposta. Seu principal objetivo, além de investigar se o aluno recorre à divisão, é verificar se ele se dá conta disso. Uma possível resposta: dez viagens ao invés de 11, apresentando assim, pura e simplesmente, o quociente inteiro da divisão.

Outro objetivo foi verificar se os alunos que responderam 1 ou 1,5 na questão número 5, apresentaram aqui o resultado correto. O fato revelaria a importância de um contexto que envolvesse a operação para a validação do resultado.

Por outro lado, a resposta 10,5 pode indicar que o aluno não tenha considerado o contexto para verificar de que tipo de grandeza se tratava. De fato, assim como no problema anterior, temos uma grandeza indivisível.

Para responder esta questão, o aluno poderia usar estratégias diferentes de simplesmente “montar a conta”; poderia fazer cálculos mentais como, por exemplo, “se fossem 40 pessoas, precisaríamos de dez viagens; como são 42, serão necessárias 11 viagens”. Na entrevista, será possível verificar se alguma estratégia desse tipo foi usada.

Outras resoluções possíveis seriam:

a) emprego de modelos que representassem o elevador e as pessoas;

b) utilização da soma de parcelas repetidas: adicionam-se parcelas iguais a 4 até obter o menor valor inteiro maior ou igual a 42 e apresenta-se como resultado o número de parcelas.

Embora o aluno não domine os procedimentos de divisão, todas estas estratégias são indicativas de que não os emprega como ferramenta na resolução de problemas.

03. Maria deu uma certa quantia, em reais, para sua filha Nathália comprar 15 presentes para o Natal. Nathália gastou exatamente 21 reais em cada presente e voltou para casa com 3 reais. Quanto Maria havia dado para Nathália?

A questão apresenta os mesmos dados numéricos da questão formal número 7.

Este seria um problema multiplicativo comum do tipo “grupos iguais”, não fosse pelo dado dos 3 reais com que Nathália voltou para casa. Seu objetivo é verificar se esse dado pode ser incorporado às resoluções.

Uma solução esperada seria que o aluno efetuasse a multiplicação de 15 por 21 e depois somasse 3 unidades ao resultado, relacionando todos os dados do problema. Uma possibilidade seria eles esquecerem de somar 3 e apresentarem como resposta apenas o resultado da conta de multiplicação. Outra possibilidade seria subtrair 3 ao invés de somar.

04. Com 415 reais Márcio comprou presentes para todos os seus clientes, gastando 23 reais por presente, e aproveitou para tomar um café com um real que sobrou. Quantos clientes tem Marcio?

Esta questão apresenta os mesmos dados numéricos que a questão formal número 8.

A menos do “um real que sobrou”, trata-se de um problema quotitivo clássico; o que pode ser um fator de maior dificuldade nesta questão do que na anterior. Seu principal objetivo é verificar se os alunos utilizam a divisão para resolvê-lo.

Comparando as questões 7 (correspondente formal da questão 3) e 8 (correspondente formal da questão 4) com as questões 3 e 4, observamos que as questões 4 e 8 são, respectivamente, mais difíceis que as 3 e 7 mas, segundo Cunha, os motivos são diferentes:

- A questão formal 8 é mais difícil que a 7, como já foi dito anteriormente, pois os alunos tendem a fazer a operação inversa da que é apresentada.

- A questão contextualizada 4 é mais difícil do que a 3 por se tratar de um problema quotitivo.

De acordo com Mack, acreditamos que, ao contextualizar a questão número 8, fazemos com que o aluno consiga refletir melhor sobre as relações entre os valores dados. Por esse motivo, julgamos que alguns alunos que não resolveram a respectiva questão formal, tenham condições de resolver a 4.

Quanto às possíveis estratégias de resolução para este problema, podemos citar duas, semelhantes às descritas para a de número 8:

a) subtrair do total de dinheiro o que sobrou (415 – 1 = 414) e dividir o resultado encontrado por 23 reais (414 ÷ 23 = 18), obtendo como resposta 18 clientes;

b) dividir 415 por 23, encontrando como quociente o número de presentes comprados por Márcio (que é igual ao número de clientes) e como resto o número 1 (que representa um real, com o qual Márcio tomou café).

09. Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+6 por 7 ?

a) quociente 7, resto 6

b) quociente 6, resto 7

c) quociente 13, resto 6

d) quociente 13, resto 7

10. Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+6 por 13 ?

a) quociente 7, resto 6

b) quociente 6, resto 7

c) quociente 13, resto 6

d) quociente 13, resto 7

11. Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+9 por 13 ?

a) quociente 7, resto 9

b) quociente 9, resto 7

c) quociente 13, resto 9

d) quociente 13, resto 7

12. Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+9 por 7 ?

a) quociente 13, resto 9

b) quociente 9, resto 13

c) quociente 13, resto 2

d) quociente 14, resto 2

Estas foram questões inspiradas nas de Campbell (2002), já citadas em nossa problemática: “Considere o número 6 x 147 + 1, que chamaremos de A. (a) Se você dividir A por 6, qual o quociente e qual o resto que você obterá? (b) Se você dividir A por 2, qual o quociente e qual o resto que você obterá? (c) Considere o número 6 x 147 + 2. Quando ele é dividido por 2, qual é o resto? E o quociente?”

As questões 9 a 12 estavam formuladas da seguinte forma:

- Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+6 por 7? Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do mesmo número por 13?

- Qual é o quociente e o resto da divisão de 13x7+9 por 13? Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do mesmo número por 7?

Seu objetivo é verificar se os alunos recuperam a representação decimal do número dado ou se eles conseguem identificar quociente e resto imediatamente, sem fazer contas.- um indicativo de concepção-processo.

As questões foram reformuladas, após a aplicação do estudo-piloto em alunos de um segundo ano do Ensino Médio. Apenas um dos alunos respondeu sem fazer as contas, ficamos intrigados e resolvemos reaplicar as questões em dois alunos considerados muito bons do terceiro ano do Ensino Médio.

Ao verificar que eles obtiveram a representação decimal do número dado para depois efetuar a divisão, perguntamos por quê, ao que eles responderam que já sabiam a resposta, mas aprenderam que, em uma questão escrita, é necessário justificar de alguma forma e, por isso, apresentaram a operação.

Acreditamos que, com as alternativas, o aluno ficaria mais livre para efetuar, ou não, operações. Para reforçar isto, colocamos um espaço acompanhado da observação: “**Se necessário**, utilize este espaço para suas contas”.

Mas por que três questões tão semelhantes? O objetivo das três primeiras é verificar se o aluno percebe que pode identificar os diversos quocientes e restos sem precisar obter o dividendo em sua representação decimal.

Observada esta regularidade, na última questão, queremos verificar se o aluno percebe que o resto não pode ser 9, pois 9 é maior que 7. A resposta: quociente 14, resto 2, não acompanhada de cálculos constitui um forte índice de concepção-processo. As entrevistas fornecerão dados para que possamos confirmar a hipótese.

No entanto, os alunos que não observaram que o quociente e o resto podem ser encontrados, sem que se obtenha o dividendo em sua representação decimal, não perceberão diferença entre a questão número 12 e as anteriores. Para nossa pesquisa, isso sugeriria a presença de concepção-ação. Isso não quer dizer que ele não conheça algumas relações entre quociente, divisor, dividendo e resto. Só uma entrevista poderá esclarecer o fato.

Já os alunos que não conseguiram resolver essas questões ou deixaram-nas em branco, mostraram sérios indícios de falta de familiaridade com os números naturais, suas relações e operações.

2.3.4 PROCEDIMENTOS

Entramos em contato com a coordenação da escola escolhida e uma reunião foi marcada com os professores de matemática da instituição, para que pudéssemos apresentar nosso projeto de pesquisa. Após essa reunião, aguardamos um e-mail da coordenação da escola com a autorização, para que a pesquisa fosse feita.

Após a chegada da autorização, entramos em contato com o professor. Agendamos com ele duas aulas de 50 minutos cada, em semanas consecutivas, para que pudéssemos aplicar o instrumento.

Os alunos foram orientados a resolver as questões a caneta; em caso de engano recomendamos que passassem um risco sobre o que haviam feito e fizessem o que achassem certo ao lado, que não usassem borracha nem corretor. Eles deveriam resolver as questões individualmente, sem consulta e, em caso de dúvidas, não deveriam fazer perguntas, colocando a dúvida no papel.

Na primeira aula, os alunos receberam duas folhas de papel, contendo, na primeira as questões 1 a 4 e na segunda as questões 9 a 12 (todas na mesma página), tal como está apresentado no anexo.

Na segunda aula, receberam uma folha de papel com as questões 5 a 8, duas por página.

As questões contextualizadas foram aplicadas antes das formais, a fim de que os alunos não fossem influenciados pelas segundas. De fato, eles poderiam perceber que todas as questões formais eram de divisão e, assim, concluírem que todas as questões contextualizadas também seriam. O fato poderia também induzir o aluno ao erro na questão 3 (em que se deve utilizar a multiplicação).

Nossa pesquisa foi aplicada a 28 alunos, pois dois faltaram em uma das etapas.

Após analisar os protocolos, escolhemos alguns alunos para participarem das entrevistas individuais, com o objetivo de esclarecer os dados constantes nos mesmos e nos aprofundarmos nas estratégias cognitivas escolhidas para resolução das questões.

Quando estávamos preparados para começar as entrevistas, entramos em contato com a escola e marcamos duas terças-feiras consecutivas para realizá-las.

Na semana que antecedeu nossa ida à escola, a direção encarregou-se de enviar aos pais dos alunos escolhidos uma circular, solicitando autorização para que seus filhos pudessem ser entrevistados.

Antes das entrevistas, o professor relembrou os alunos do dia em que eles responderam o instrumento; em seguida, acrescentou que alguns alunos tinham recebido uma circular para que os pais os autorizassem a participar de uma entrevista; estes foram chamados um a um para a entrevista, e cada aluno foi encaminhado a um local, especialmente reservado para o encontro com o entrevistador.

Na entrevista foi usado o seguinte material: uma cópia do protocolo do aluno, uma cópia do instrumento em branco, um roteiro de entrevista e um gravador. A cópia do protocolo serviu para que o aluno pudesse relembrar o que ele fez, de modo que se ele viesse a fazer qualquer anotação, esta não prejudicaria o arquivamento de suas primeiras resoluções. O instrumento em branco serviu para que o aluno pudesse escrever, fazer anotações ou contas de forma mais organizada. O roteiro de entrevista, continha os pontos mais importantes a serem esclarecidos; o gravador foi usado para registrar a entrevista para posterior transcrição.

CAPÍTULO III

3. ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, apresentamos uma análise dos resultados obtidos com a aplicação do instrumento escrito.

3.1 ANÁLISE PARCIAL DOS RESULTADOS

Esta descrição será apresentada da seguinte forma: analisaremos uma questão contextualizada, depois sua correspondente formal e, em seguida, faremos a comparação dos resultados.

3.1.1 COMPARAÇÃO DAS QUESTÕES FORMAIS COM AS CONTEXTUALIZADAS

3.1.1.1 QUESTÕES 1 E 6

Questão 1:

Tenho 541 camisetas para dividir igualmente entre 5 orfanatos.

Quantas camisetas cada orfanato vai receber?

TIPO DE RESOLUÇÃO	Nº DE ALUNOS QUE RESPONDERAM À QUESTÃO DESSA FORMA	OBSERVAÇÕES
541 ÷ 5 = 108 camisetas para cada orfanato e sobra uma	6	2 alunos encontraram resultado 18 e depois fizeram certo.
541 ÷ 5 = 108 camisetas para cada orfanato	9	1 aluno encontrou resultado 18 e depois fez certo.
108 para 4 orfanatos e 109 para o outro	2	
541 ÷ 5 = 108,2 camisetas para cada orfanato	1	
541 ÷ 5 = 18 camisetas para cada orfanato e sobra uma	5	Um aluno acertou e depois refez a conta, apresentando 18 como resultado.
541 ÷ 5 = 18 camisetas para cada orfanato	3	
541 ÷ 5 = 18 18 para 4 orfanatos e 19 para o outro	1	
541 ÷ 5 = 17 camisetas para cada orfanato	1	Considerou: 7x5=40

Com relação a esta questão, 26 alunos resolveram-na usando a operação de divisão. Dos dois alunos que responderam que dariam 108 camisetas para quatro orfanatos e 109 camisetas para um, um deles simplesmente fez a operação $541 \div 5 = 108$, e o outro, fez: $5 \times 100 = 500$, $5 \times 8 = 40$ e $108 \times 5 = 540$. Esse aluno foi convidado a participar da entrevista, para que pudéssemos ouvir dele a explicação da estratégia utilizada.

Conforme os dados da tabela acima, dos 28 alunos, consideramos que 18 apresentaram resultado satisfatório nessa questão, com relação à técnica da divisão. Dentre esses 18, dois sujeitos responderam que quatro orfanatos receberiam 108 camisetas e o outro, 109, demonstrando não terem atentado para o fato de a questão pedir que as camisetas fossem divididas igualmente entre os orfanatos; e um aluno respondeu que cada orfanato receberia 108,2 camisetas. Levando em consideração a operação de divisão, podemos afirmar que este aluno a fez corretamente. No entanto, se levarmos em consideração que existia uma situação-problema, cuja unidade envolvida era camiseta (unidade indivisível), podemos afirmar que esse aluno não observou a unidade que constava no problema. Dos 18 alunos que a resolveram corretamente, 17 reconheceram que o problema poderia ser resolvido com essa operação e um deles utilizou uma outra estratégia. Posteriormente, na entrevista, constatamos que este aluno sabia resolver por divisão, mas, neste caso, achou mais fácil resolver por multiplicação (fazendo estimativas). Afinal de contas, a expressão “dividir igualmente”, sugere o uso dessa operação (embora essa expressão possa aparecer em situações-problema que envolvam outras operações).

Os outros dez alunos tiveram problemas com a colocação do zero na casa das dezenas, apresentando a resposta 18; ainda, um desses alunos respondeu que quatro orfanatos receberão 18 camisetas cada um e um orfanato, 19.

Nesta questão, vale ressaltar que 15 alunos mencionaram o resto (pelo menos citaram que houve sobra de uma camiseta), enquanto os demais não citaram a camiseta que sobrou, respondendo, simplesmente, 108 (ou 18). Observamos que o enunciado desta questão não pedia o número de camisetas que sobrou e, portanto, induzia o aluno a só dar a resposta do número de camisetas recebidas pelos orfanatos.

Questão 6:

Resolva a operação 541 ÷ 5. Qual o quociente? Qual o resto?

TIPO DE RESOLUÇÃO	Nº DE ALUNOS QUE RESPONDERAM À QUESTÃO DESSA FORMA
541 ÷ 5 = 108, resto 1	13
541 ÷ 5 = 18, resto 1	7
541 ÷ 5 = 18,2 resto zero	1
541 ÷ 5 = 19, resto 1	1
541 ÷ 5 = 190, resto 1	1
541 ÷ 5 = 5, resto 1	2
541 ÷ 5 = 112, resto 1	1

541 ÷ 5 = 181, resto 1	1
541 ÷ 5 = 100, resto zero	1

Dos vinte e oito alunos envolvidos, 13 realizaram corretamente a operação. Dentre os 15 alunos restantes, dez deles claramente tiveram problemas com a colocação do zero representando as dezenas. Em uma primeira análise, percebemos que esses alunos aparentam não dominar a técnica da divisão. Conforme mencionado na análise a priori, esta questão foi concebida para que pudéssemos verificar a freqüência com que aparece esse tipo de erro e se os alunos, quando frente a um contexto, percebem a incoerência desse resultado, o que será visto na comparação dos resultados.

Os demais apresentaram resultados aparentemente absurdos, como quociente 5, resto 1 e quociente 112, resto 1.

Pelos dados da tabela abaixo, podemos ter uma idéia do desempenho dos alunos, quando comparamos as resoluções da questão formal com a resolução de sua respectiva questão contextualizada:

TIPO DE RESOLUÇÃO	Nº DE ALUNOS QUESTÃO CONTEXTUALIZADA	Nº DE ALUNOS QUESTÃO FORMAL
Resultado 108	17	13
Resultado 108,2	1	
Resultado 18	9	7

Resultado 17	1	
Resultado 18,2		1
541 ÷ 5 = 19, resto 1		1
541 ÷ 5 = 190, resto 1		1
541 ÷ 5 = 5, resto 1		2
541 ÷ 5 = 112, resto 1		1
541 ÷ 5 = 181, resto 1		1
541 ÷ 5 = 100, resto zero		1

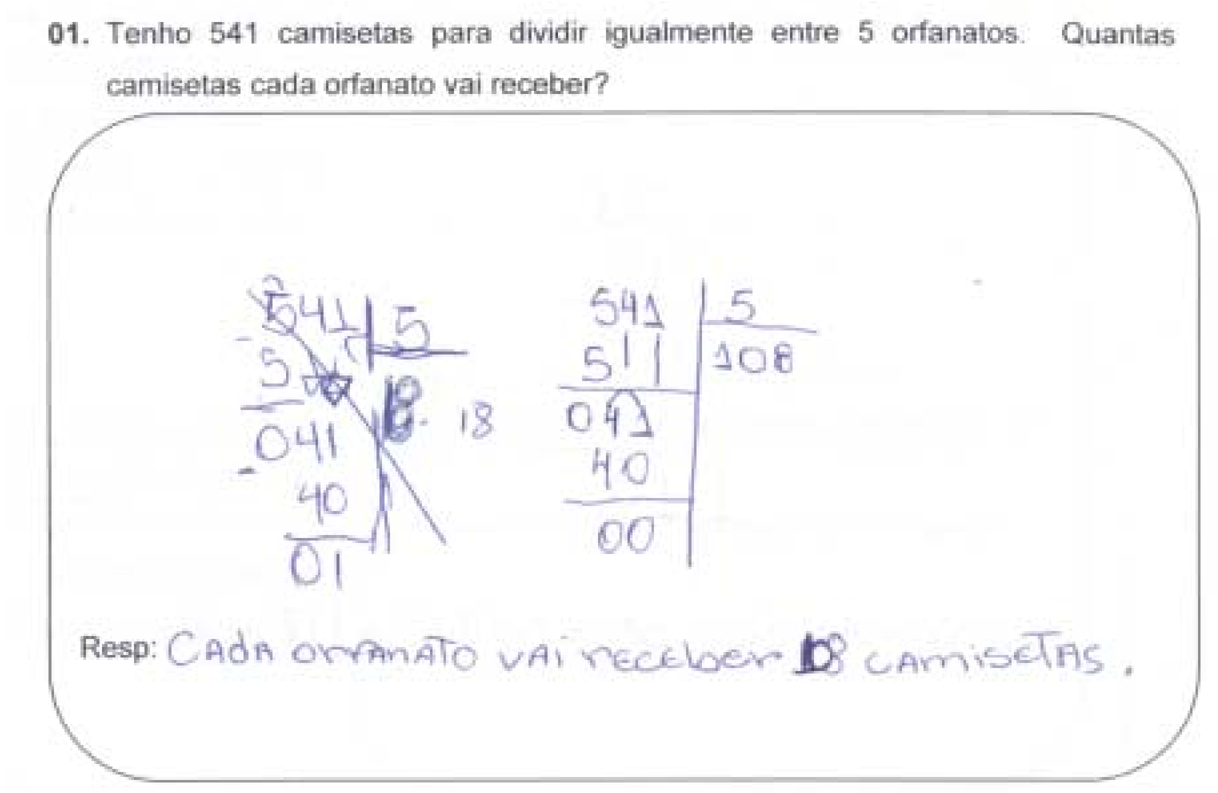
Na questão formal, observamos uma diversidade de resultados se comparada com a questão contextualizada. Nesta, apenas um aluno enganou-se em uma tabuada; os demais, que não acertaram, omitiram o zero da casa das dezenas.

Como mencionamos anteriormente, na análise dos dados obtidos nas questões 1 e 6, dez alunos tiveram problemas com a colocação do zero na casa das dezenas em ambas as questões. Embora esses sujeitos não fossem os mesmos, a maioria (7 alunos) apresentou este problema em ambos os tipos de questões, o que sugere que o engano na técnica é independente do tipo de questão.

Foi interessante notar que cinco alunos, tendo resolvido primeiro a questão contextualizada e depois a formal, acertaram a primeira (considerando como correta a resposta 108,2) e erraram a segunda. Isso pode ser observado por meio da análise dos protocolos desses alunos. Um de nossos objetivos era verificar se os alunos percebiam a incoerência da ordem de grandeza do resultado obtido, quando estão frente a uma questão contextualizada.

Assim, podemos afirmar que alguns percebem: dois alunos, ao resolverem a questão contextualizada, obtiveram primeiro o resultado 18 e depois refizeram a conta e apresentaram o resultado correto. O interessante foi que, após uma semana, ao resolverem a questão formal, re-apresentaram o resultado 18.

Outro sujeito que fez o mesmo, resolveu a formal corretamente. Ainda com relação a essa questão, o aluno que havia respondido que cada orfanato iria receber 108,2 camisetas, apresentou 18,2 como resultado da questão formal. Isso confirma os resultados de Carraher et al (2003) ao mencionarem que muitos alunos resolvem corretamente a questão contextualizada, não solucionando da mesma forma a questão formal. Ilustramos abaixo, com um trecho de protocolo, esse tipo de resposta.


01. Tenho 541 camisetas para dividir igualmente entre 5 orfanatos. Quantas camisetas cada orfanato vai receber?

Resp: Cada orfanato vai receber 108 camisetas.

FIGURA 3.1 – Protocolo do aluno 10

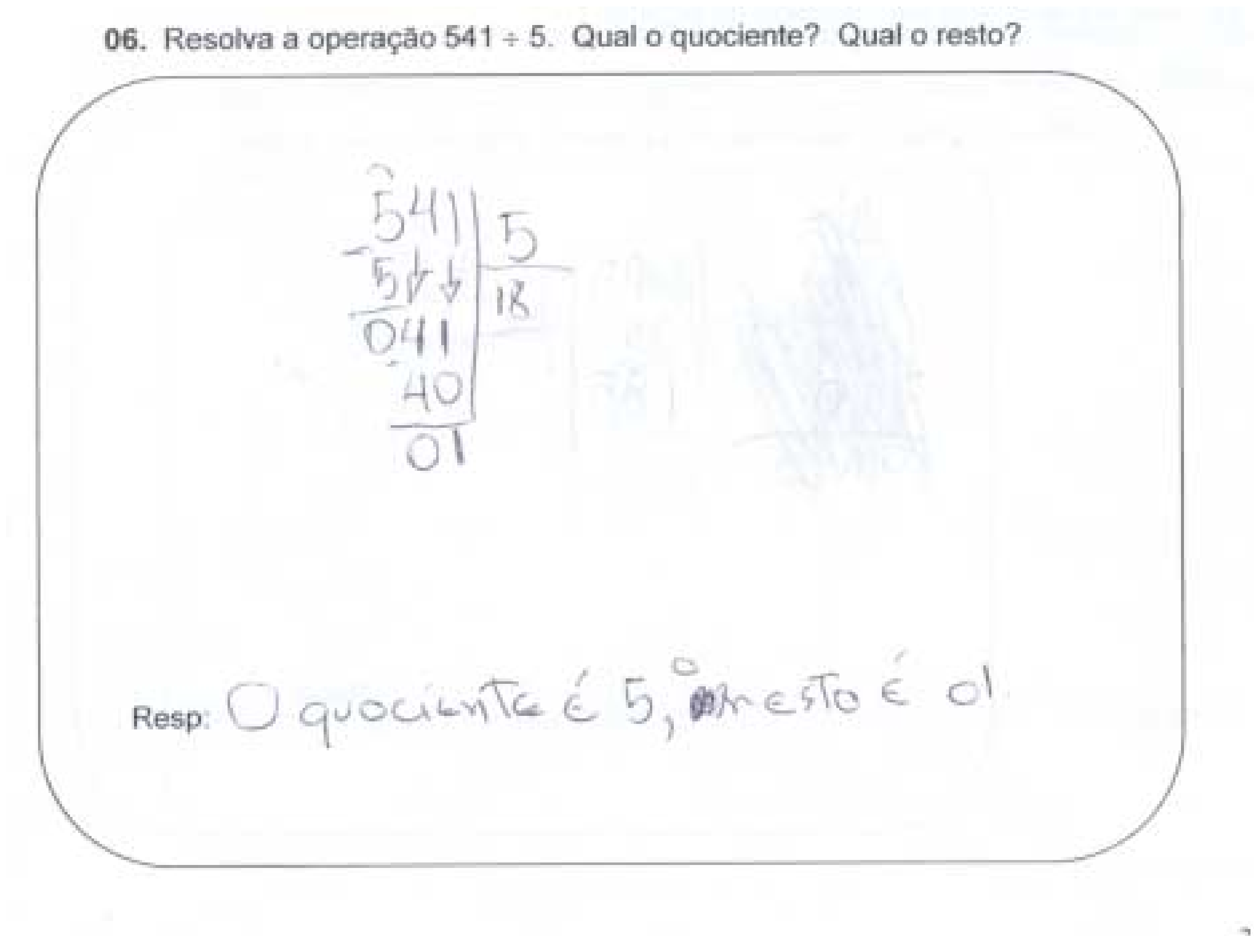


Figura 3.2 – Protocolo do aluno 10

Finalmente, mencionamos que este aluno não conhece, aparentemente, o significado da palavra quociente, pois apresentou como resposta o divisor.

3.1.1.2 QUESTÕES 2 E 5

Questão 2:

Em um prédio, 42 pessoas estão esperando para tomar o elevador. Sabe-se que o elevador só suporta 4 pessoas por vez. Qual o número mínimo de viagens que o elevador deverá fazer para levar todas as pessoas?

TIPO DE RESOLUÇÃO	Nº DE ALUNOS QUE RESPONDERAM À QUESTÃO DESSA FORMA	OBSERVAÇÕES
11 viagens	10	
10 viagens e sobram 2 pessoas	1	
10 viagens	6	
10 viagens com 4 pessoas e 1 com duas	3	Um dos alunos deu ainda outra sugestão: que se fizessem somente 10 viagens, sendo que duas levariam 5 pessoas.
40 viagens	1	
40 viagens mais uma com duas pessoas	1	
Em branco	3	
Outras respostas	3	

Dos vinte e oito alunos, 17 utilizaram a operação de divisão para abordar a questão; três alunos que obtiveram a resposta correta empregaram outras estratégias como: apresentar simplesmente a operação 4 x 10 = 40 e responder 11 viagens.

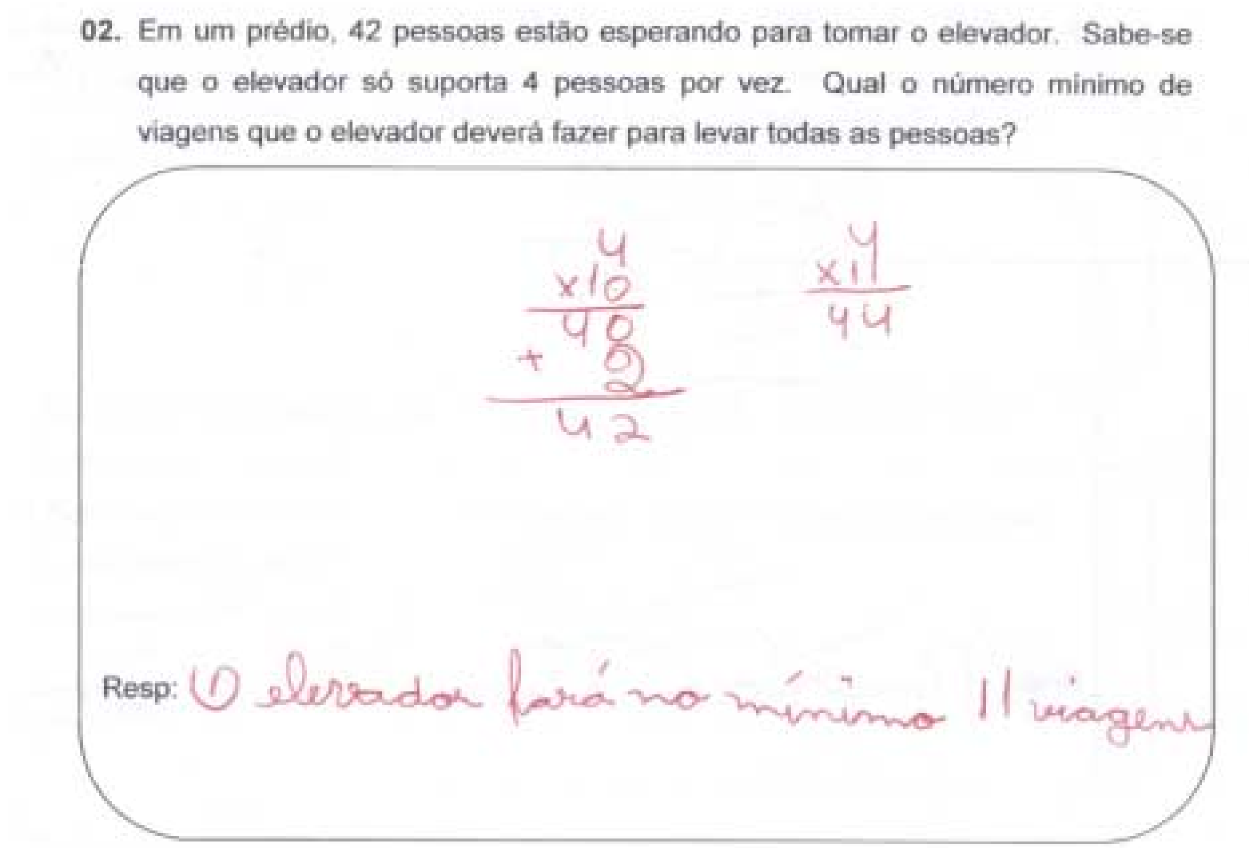
Os outros alunos deram respostas aparentemente incoerentes, como: resposta 8 e 38, sem apresentarem nenhum cálculo; dois apresentaram a resposta 40, e um deles acrescentou que seriam 40 viagens mais uma com duas pessoas!

Três alunos deixaram a questão em branco.

Dos vinte e oito alunos, 13 responderam corretamente à questão; dez responderam 11 viagens e os outros três que o elevador faria dez viagens com quatro pessoas e ressaltaram que a outra viagem seria só com duas pessoas.

Com relação à operação de divisão, 20 alunos resolveram-na corretamente. Destes, dez sujeitos disseram que o elevador precisaria fazer 11 viagens; seis, dez viagens (colocando simplesmente o quociente encontrado), sem perceber que sobraram duas pessoas; três alunos que faria dez viagens com quatro pessoas e uma com duas pessoas, não concluindo o número total de viagens e, talvez, nem atentando para o fato de que uma viagem com duas pessoas é também uma viagem! Um desses três, além de apresentar esta resposta, disse que também poderiam ser dez viagens, e duas seriam com cinco pessoas. Este aluno mostrou ter entendido o problema e procurou soluções para ele, mas esqueceu um detalhe: “o elevador só suporta quatro pessoas por vez”; e um aluno afirmou que o elevador faria dez viagens, mas sobrariam duas pessoas, não levando em consideração que o enunciado dizia que o elevador deveria levar <u>todas</u> as pessoas.

Um dos alunos respondeu que o elevador deveria fazer no mínimo 11 viagens; ele utilizou uma estratégia diferente dos demais. Veja o que ele fez:



02. Em um prédio, 42 pessoas estão esperando para tomar o elevador. Sabe-se que o elevador só suporta 4 pessoas por vez. Qual o número mínimo de viagens que o elevador deverá fazer para levar todas as pessoas?

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 10 \\ \hline 40 \\ + 2 \\ \hline 42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ \times 11 \\ \hline 44 \end{array}$$

Resp: O elevador fará no mínimo 11 viagens

Figura 3.3 – Protocolo do aluno 6

Questão 5: **Resolva a operação 42 ÷ 4. Qual o resultado (quociente)? Qual o resto?**

TIPO DE RESOLUÇÃO	Nº DE ALUNOS QUE RESPONDERAM A QUESTÃO DESSA FORMA	OBSERVAÇÕES
10 resto 2	18	Um deles fez a conta corretamente, mas depois riscou e escreveu: “Eu cei mais eu não quero fazer”.
1 resto 2	7	
12 resto zero	1	
105 resto zero	1	
18 resto zero	1	

Dos vinte e oito alunos, observamos que 18 acertaram o quociente 10 e sete responderam que o quociente era 1. Ambos os grupos responderam corretamente o resto: 2. Dois dos alunos que obtiveram: quociente 1, resto 2, responderam que o quociente era 4, o resultado 1 e o resto 2.

Dois outros alunos apresentaram as respostas: 18, resto 0 (coincidentemente resposta da questão 4) e 12, resto 0. Ambos fizeram a conta, passo a passo e, aparentemente, ao computarem 2 dividido por 4, obtiveram 8 e 2, respectivamente.

Apenas um aluno apresentou como resposta 105, resto zero que seria o quociente “decimal sem a vírgula”.

Na tabela abaixo, comparamos as resoluções da questão formal com a de sua respectiva questão contextualizada:

TIPO DE RESOLUÇÃO	Nº DE ALUNOS QUESTÃO CONTEXTUALIZADA	Nº DE ALUNOS QUESTÃO FORMAL
Quociente 10 resto 2	20	18
Quociente 1 resto 2		7
Em branco	3	
Outras respostas	5	3

Encontramos aqui o mesmo fenômeno, já observado quando comparamos as questões 1 e 6: enquanto sete alunos obtiveram quociente 1 e resto 2 na questão formal, nenhum aluno respondeu que o elevador faria uma única viagem (pois a incoerência é óbvia). O resultado corrobora a pesquisa de Mack (1990), apresentada na introdução.

Todos os alunos responderam a questão formal, mas três deixaram em branco a questão contextualizada, o que pode significar dificuldade de leitura e interpretação.

Na questão contextualizada, tivemos maior diversidade de respostas. Isso ocorreu porque alguns alunos utilizaram outras operações que não a divisão nessa questão.

3.1.1.3 QUESTÕES 3 E 7

Questão 3:

Maria deu uma certa quantia, em reais, para sua filha Nathália comprar 15 presentes para o Natal. Nathália gastou exatamente 21 reais em cada presente e voltou para casa com 3 reais. Quanto Maria havia dado para Nathália?

TIPO DE RESOLUÇÃO	Nº DE ALUNOS QUE RESPONDERAM A QUESTÃO DESSA FORMA	OBSERVAÇÕES
21x15+3	12	3 alunos chegaram a resultado incorreto
21x15	6	1 aluno chegou a resultado incorreto
21x15-3	1	
21x3 = 53	1	
15+3 = 18	1	
24	4	
Outras resoluções	2	
Em branco	1	

Do total de alunos, 12 resolveram esta questão utilizando as operações 21 x 15 + 3, e três desses cometeram enganos em suas operações. Dos demais, seis resolveram apenas 21 x 15 e um deles ao invés de somar 3 subtraiu. Outros alunos apresentaram respostas aparentemente absurdas como 53 e 18.

Um dos alunos respondeu que Nathália recebeu 24 reais, mostrou, durante a entrevista, não ter atentado para o fato dela ter gasto 21 reais em cada presente, tendo considerado 21 como o gasto total e somado 3 para obter o resultado 24.

Questão 7:

Que número deve ser colocado no lugar do ?

$$\begin{array}{l|l} \vdots & \mathbf{15} \\ \hline & \mathbf{21} \\ \mathbf{3} & \end{array}$$

Tipo de Resolução	Nº de alunos que responderam a questão dessa forma
21x15+3 = 318	11
21x15-3	1
21x15	12
318 ÷ 15	1
48 (sem conta)	1
Em branco	2

Do total de alunos, 11 responderam a questão corretamente (21x15+3), 12 fizeram somente 21 x 15 ignorando o resto e apenas um subtraiu 3 ao invés de somar. Um aluno fez somente a operação 318 ÷ 15 em seu protocolo. Isso nos leva a crer que ele tenha feito suas contas em outro lugar, efetuando a operação acima no protocolo apenas para conferir. Apenas um aluno colocou resposta sem efetuar nenhuma operação e, aparentemente, uma resposta aleatória: 48.

Dois alunos deixaram essa questão totalmente em branco.

Abaixo podemos observar a comparação dos resultados da questão formal e sua correspondente contextualizada:

TIPO DE RESOLUÇÃO	Nº DE ALUNOS QUESTÃO CONTEXTUALIZADA	Nº DE ALUNOS QUESTÃO FORMAL
21x15+3	12	11
21x15	6	12
21x15-3	1	1
21x3	1	
15+3	1	
Outras respostas	6	2
Em branco	1	2

O número de alunos que respondeu corretamente às questões, foi bem equilibrado, quando comparamos a questão contextualizada com a formal: 12 e 11, respectivamente. No entanto, apenas cinco sujeitos acertaram ambas as questões.

Dos sete sujeitos restantes que acertaram a questão contextualizada, cinco não somaram o resto 3 na questão formal; o que nos leva a crer que o contexto contribuiu, para que esses sete alunos incorporassem o resto em sua resolução.

Entre os seis que acertaram somente a questão formal, apenas dois não somaram, na questão contextualizada, os 3 reais que sobraram; os outros quatro apresentaram resoluções aparentemente absurdas.

Se compararmos o número de alunos que fez 21 x 15 (não importando como deram continuidade, ou não, à sua resolução), temos 19 na contextualizada e 24 na formal. Isso nos leva a crer que os alunos tiveram mais facilidade para perceber que operação utilizar nas questões formais do que na presença de um contexto, talvez pelo fato de que a resolução consistia na aplicação da operação inversa àquela que foi apresentada e os alunos estavam acostumados a esse tipo de resolução a que chamam de “prova real”.

3.1.1.4 QUESTÕES 4 E 8

Questão 4:

Com 415 reais Márcio comprou presentes para todos os seus clientes gastando 23 reais por presente e aproveitou para tomar um café com um real que sobrou. Quantos clientes têm Marcio?

TIPO DE RESOLUÇÃO	Nº DE ALUNOS QUE RESPONDERAM A QUESTÃO DESSA FORMA
$415 \div 23 = 18$	11
$415 \div 23 = 108$	3

415 ÷ 23 = 111	1
415 x 23 = 9545	4
415 – 23	3
Aproximadamente 20	1
Outras respostas	3
Em branco	2

Dos vinte e oito alunos, 15 resolveram a questão utilizando a operação 415 ÷ 23. Desses 15, 11 encontraram o resultado correto 18, três acharam como quociente o número 108 e um obteve 111. O aluno que obteve 111 como resultado, fez duas contas de dividir rabiscadas, uma de multiplicação, que também rabiscou e, finalmente, deixou uma conta de dividir sem rabiscar com o resultado 111. Seu protocolo apresenta diversas resoluções, todas contendo incorreções na técnica da divisão.

Os demais alunos escolheram outras operações para resolver esta questão; quatro fizeram multiplicação ao invés de fazer divisão e três, subtração. Nenhum deles chegou ao resultado correto.

Uma outra questão interessante a ressaltar é que nenhum aluno subtraiu o café do total do dinheiro disponível para depois fazer a divisão, como havíamos previsto na análise a priori.

Questão 8:

Que número deve ser colocado no lugar do ?

415 | **23**

.
.
.

1

Tipo de Resolução	Nº de alunos que responderam a questão dessa forma	Observações
415 ÷ 23 = 18	6	
108	9	Um deles colocou só a resposta e os demais fizeram 415 ÷ 23.
415 ÷ 23 = 1	1	
415 x 23 – 1 = 9544	1	Colocou 44 como resposta.
415 – 23 +1 = 393	2	
170	1	
Em branco	8	

Dos vinte e oito alunos, 15 fizeram 415 ÷ 23, desses 15, seis obtiveram o resultado correto 18; oito, 108 e um obteve resultado 1. Outro aluno colocou resposta 108, mas não apresentou nenhuma conta (ao compararmos os resultados obtidos na questão contextualizada e, nesta, consideramos que este aluno fez a operação de divisão). Convidamos para entrevista os alunos que obtiveram 18 e 108 na operação indicada acima.

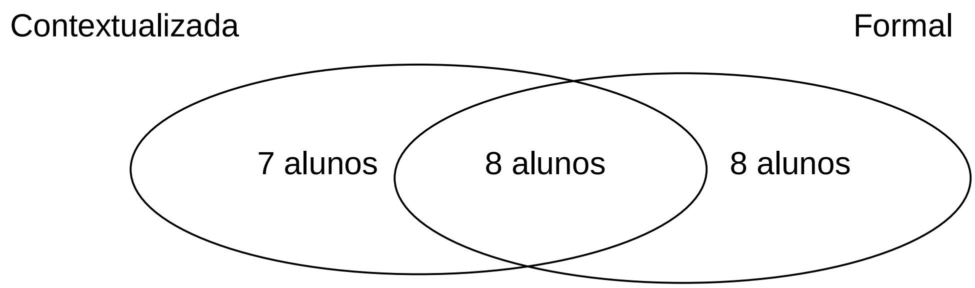
Oito alunos deixaram a questão em branco e nenhum subtraiu o resto do dividendo, antes de efetuar a divisão.

Na tabela abaixo, podemos ter uma idéia do desempenho dos alunos, quando comparamos as resoluções da questão formal com a resolução de sua respectiva questão contextualizada:

TIPO DE RESOLUÇÃO	Nº DE ALUNOS QUESTÃO CONTEXTUALIZADA	Nº DE ALUNOS QUESTÃO FORMAL
415 ÷ 23 = 18	11	6
415 ÷ 23 = 108	3	9
415 ÷ 23 = 1		1
415 ÷ 23 = 111	1	
415 x 23 = 9545	4	
415 x 23 – 1 = 9544		1
415 – 23	3	
Outras respostas	4	3
Em branco	2	8

Comparando as resoluções apresentadas nas questões formal e contextualizada, percebemos que uma quantidade muito parecida de alunos resolveu essas questões pela divisão.

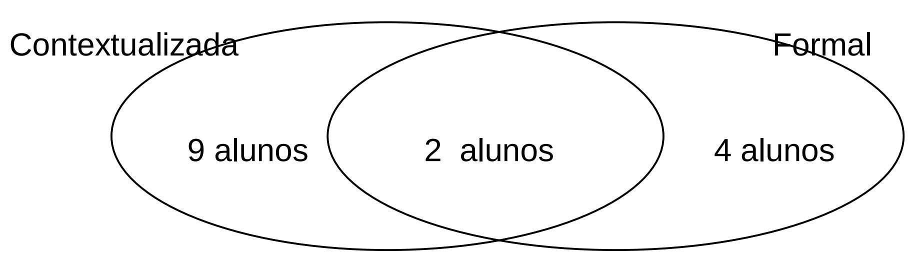
O diagrama abaixo mostra como se distribuíram os alunos que utilizaram a operação de divisão para resolver, pelo menos, uma das questões:



Pelo diagrama, percebemos que o número de alunos que resolveu as questões contextualizada e formal através da divisão ser praticamente o mesmo, 15 e 16, apenas 8 deles o fizeram nas duas. Entre os outros, encontramos diversas soluções: alguns alunos resolveram a contextualizada por multiplicação; e por divisão, a formal; outro aluno deixou em branco a contextualizada e utilizou a divisão na formal, encontrando o resultado 108.

Entre os alunos que fizeram a divisão, a quantidade que chegou ao resultado correto 18, foi praticamente o dobro na questão contextualizada, quando comparada com os alunos que acertaram a questão formal: 11 e 6, respectivamente.

Observemos agora este outro diagrama, que mostra como foram distribuídos os alunos que encontraram o resultado correto 18 em, pelo menos, uma das questões:



Notamos outro resultado interessante: só dois alunos acharam o resultado correto 18 nos dois contextos. Além disso, quatro alunos encontraram 18 só na formal e nove perceberam esse resultado só na contextualizada. Aparentemente, a presença de um contexto ajudou alguns alunos na obtenção do resultado correto 18; pois desses nove alunos, três deixaram em branco a questão formal e dois apresentaram resultado 108.

Pelos protocolos dos três alunos que encontraram resultado 108 na questão contextualizada, percebemos que eles fizeram o mesmo tipo de resolução na questão formal. Nesta última, temos outros seis alunos que acharam o resultado 108; destes, apenas dois verificaram o resultado correto na questão contextualizada. Os demais não utilizaram a operação de divisão.

Os sujeitos que encontraram resultado 108, em alguma das questões, apresentaram o mesmo tipo de resolução. Observe, na página seguinte, a figura 3.5 - resolução da questão 8 de um desses alunos.

Só um aluno fez multiplicação na questão formal, enquanto quatro realizaram multiplicação na contextualizada.

O número de alunos que deixou a questão formal em branco foi quatro vezes maior do que os que deixaram a contextualizada.

Verificamos também maior diversidade de resoluções na questão contextualizada, em razão do uso de outras operações, quando comparamos com a questão formal: 11 e 4, respectivamente.

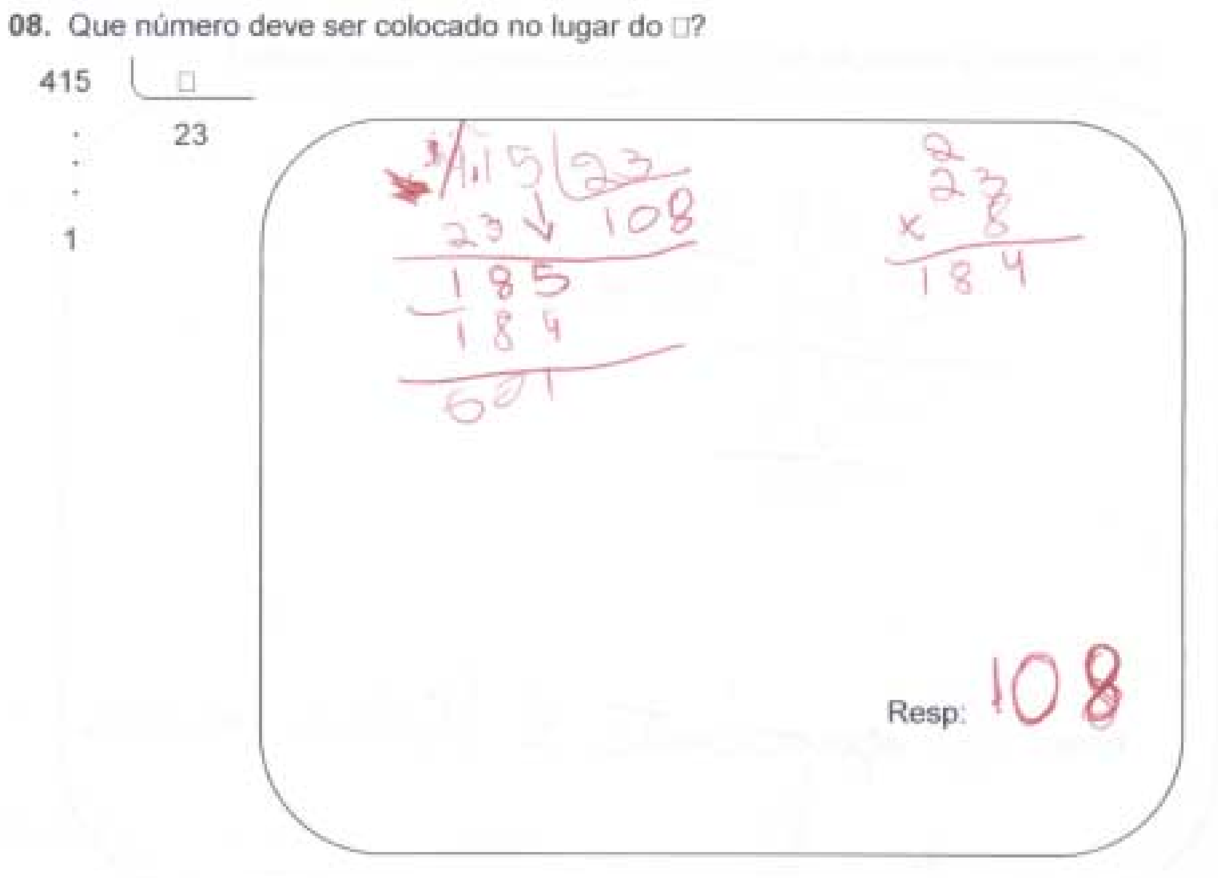


Figura 3.5 – Protocolo do aluno 6

Comparando os acertos das questões formais e das contextualizadas, podemos dizer que 24 alunos acertaram maior ou igual número de questões contextualizadas do que formais; destes, 15 acertaram o mesmo número de questões nos dois blocos. Sendo assim, apenas quatro acertaram maior número de questões formais. Esta diferença nos leva a concluir que os alunos têm mais facilidade para resolver questões quando estas estão inseridas em um contexto do que nas operações simples.

3.1.2 QUESTÕES FORMAIS

3.1.2.1 QUESTÕES 5 E 6

Ao compararmos os desempenhos dos alunos nas questões formais 5 e 6, percebemos que 19 alunos acertaram, pelo menos, uma dessas duas questões. Desses 19, 12 acertaram as duas, o que nos leva a concluir que esses realmente conhecem a técnica da divisão. Dos sete restantes, só um aluno acertou apenas a questão 6 (resultado 108), enquanto os demais acertaram só a questão 5 (resultado 10).

Entre os alunos que acertaram apenas a questão 6, o engano mais freqüente foi a colocação do zero, na casa das dezenas, na questão 5.

3.1.2.2 QUESTÕES 7 E 8

Ao compararmos os resultados obtidos nestas questões, levamos em consideração seu principal objetivo: verificar se os alunos conhecem as relações entre dividendo, divisor, quociente e resto. Para observar isso, utilizamos questões em que o aluno precisaria empregar a reversão da operação de divisão.

Na questão 7 era pedido que o aluno encontrasse o dividendo e, na questão 8, o divisor. Segundo Cunha (1997), é mais fácil encontrar o dividendo do que o divisor, pois, para isso o aluno utiliza a noção de operação inversa (que ele conhece como prova real).

Para realizar esta análise, consideramos na questão 7, que todo aluno que apresentou, pelo menos, a resolução 21 x 15, fez a reversão de forma correta, não importando se este somou 3, subtraiu 3 ou desconsiderou o resto. Para a questão 8, consideramos que todo aluno que apresentou 415 ÷ 23, fez a reversão de forma correta, não importando se este encontrou o resultado 18 (correto) ou 108.

Verificamos pelos resultados que dos 25 alunos que acertaram, pelo menos, uma das duas reversões, 15 acertaram ambas, demonstrando conhecer as relações entre dividendo, divisor, quociente e resto. Um apresentou reversão correta apenas na questão 8 e nove alunos apresentaram reversão correta apenas na questão 7. Como prevíamos, houve maior número de alunos que acertou a reversão na questão 7, quando comparamos com a questão 8: 24 e 16, respectivamente.

3.1.2.3 QUESTÕES 5 A 8

Com esta seção, pretendemos comparar os 15 alunos que reverteram corretamente as questões 7 e 8 com os 19 alunos que acertaram, pelo menos, uma das questões 5 e 6.

Desses quinze alunos, 12 estão entre os que acertaram, pelo menos, uma das questões 5 e 6. Desses 12, oito acertaram as duas. Com isso, podemos perceber que a capacidade de reverter uma operação está ligada com a de efetuar a operação de forma direta. Os demais foram convidados para a entrevista. Um desses alunos declarou ter olhado para a questão de um amigo e outro, embora tenha obtido 1 e 18 nas questões 5 e 6, respectivamente, obteve 10 e 108 nas correspondentes formais, de onde podemos concluir que ele conhece a técnica da divisão.

3.1.2.4 QUESTÕES 9 A 12

Abaixo analisaremos as quatro questões formais sem correspondente contextualizada. Para esta análise, excluiremos os três sujeitos que deixaram todas elas em branco.

Primeiro observamos que, pelo menos a metade das respostas assinaladas, para cada questão, é correta.

Questão 9:

Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+6 por 7 ?

a) quociente 7, resto 6.

b) quociente 6, resto 7.

c) quociente 13, resto 6. *(correta)*

d) quociente 13, resto 7.

Alternativas	Número de alunos que fez conta(s)	Número de alunos que não fez conta(s)
A		05
B		01
C	12	03
D	02	01
Com conta e sem resposta	01	
Em branco	03	

Questão 10:

Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+6 por 13 ?

a) quociente 7, resto 6. *(correta)*

b) quociente 6, resto 7.

c) quociente 13, resto 6.

d) quociente 13, resto 7.

Alternativas	Número de alunos que fez conta(s)	Número de alunos que não fez conta(s)
A	09	04
B	02	03
C		03
D		02
Com conta e sem resposta	02	
Em branco	03	

Em ambas as questões, conforme mostram as tabelas, pelo menos metade dos alunos assinalou a alternativa correta. Dentre estes, a maioria obteve primeiro o dividendo na forma decimal.

Questão 11:

Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+9 por 13 ?

a) **quociente 7, resto 9.** *(correta)*
b) **quociente 9, resto 7.**
c) **quociente 13, resto 9.**
d) **quociente 13, resto 7.**

Alternativas	Número de alunos que fez conta(s)	Número de alunos que não fez conta(s)
A	08	09
B		02

C		02
D		
Em branco	07	

Questão 12:

Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+9 por 7 ?

a) quociente 13, resto 9.

b) quociente 9, resto 13.

c) quociente 13, resto 2.

d) quociente 14, resto 2. *(correta)*

Alternativas	Número de alunos que fez conta(s)	Número de alunos que não fez conta(s)
A	01	02
B	01	03
C		
D	06	08
Em branco	07	

Na questão 11, tivemos um aumento do número de respostas corretas em relação às questões 9 e 10, ao passo que na questão 12, a média manteve-se.

O número de respostas corretas obtidas nas questões 11 e 12, sem nenhum registro escrito, aumentou consideravelmente em relação ao número de respostas corretas obtidas nas questões 9 e 10, usando o mesmo procedimento. De fato, somando as respostas corretas, sem contas, das questões 9 e 10 e das questões 11 e 12, obtemos, respectivamente, os totais: 7 e 17.

Nas questões 11 e 12, observamos um aumento das respostas em branco, em relação às questões 9 e 10.

Dos vinte e cinco sujeitos, 12 responderam corretamente, pelo menos, uma questão sem apresentar registro escrito. Entrevistamos alguns desses sujeitos para esclarecer a estratégia utilizada.

O diagrama 3.1, na próxima página, apresenta os sujeitos, numerados de 1 a 28, distribuídos, de acordo com as respostas corretas apresentadas nas questões.

Notamos que nove alunos acertaram todas as questões, e seis não assinalaram a resposta correta em nenhuma delas.

Dos alunos que acertaram todas, seis obtiveram os dividendos na forma decimal e dois não apresentaram nenhuma conta em sua resolução, o que sugere que eles conhecem algumas relações entre dividendo, divisor, quociente e resto. O outro aluno fez a questão 9, obtendo o dividendo na forma decimal e as demais sem lançar mão de recurso escrito.

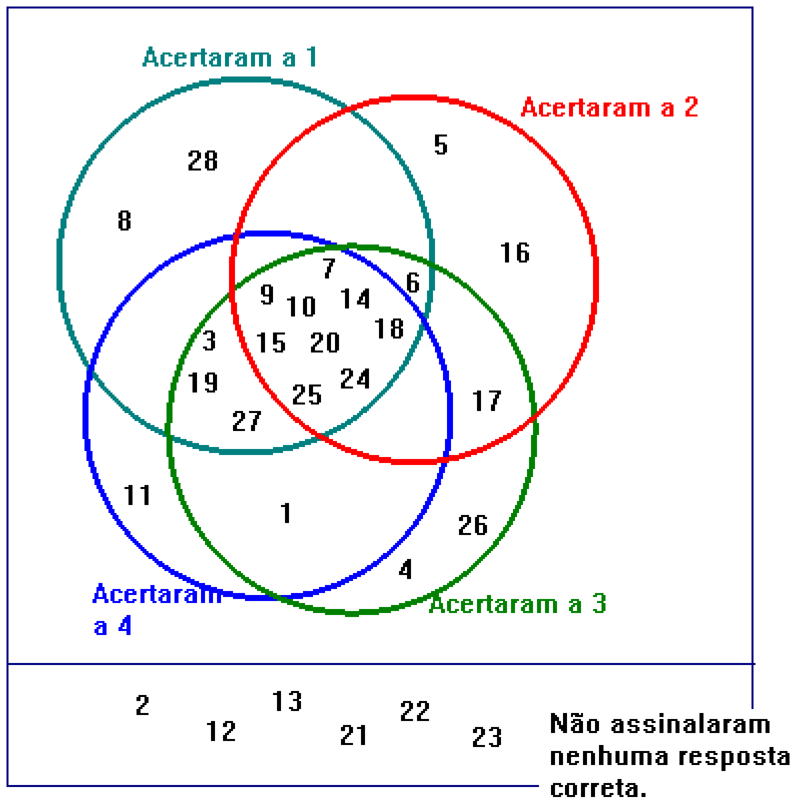


Diagrama 3.1

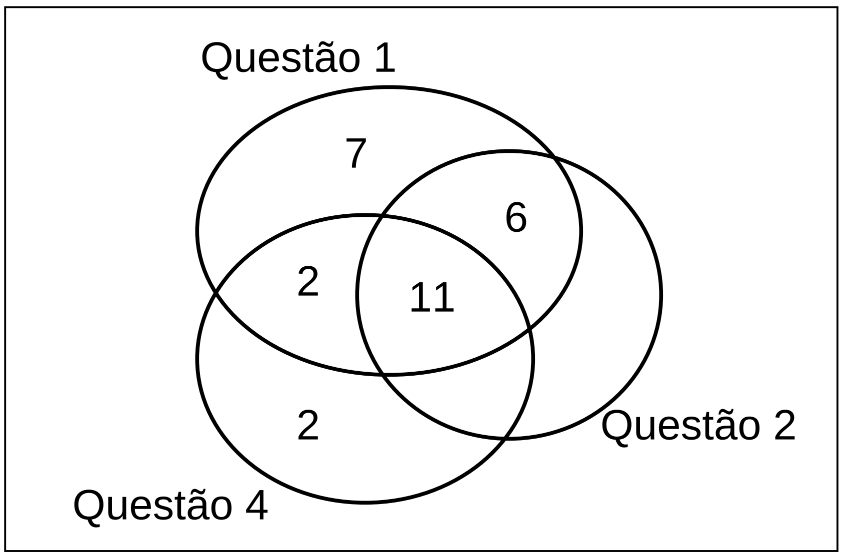
Finalmente, analisando em conjunto essas quatro últimas questões, verificamos uma propensão a se engajar em contas: dos 25 sujeitos que apresentaram algum registro escrito, 15 engajaram-se em contas em algum momento. Além disso, todos esses sujeitos apresentaram contas para resolver a primeira questão, sugerindo que esse é o primeiro recurso utilizado pela maioria.

Ainda que determinados alunos tenham assinalado alguma alternativa em algumas dessas questões sem registro escrito, são poucos os resultados satisfatórios: dentre as 59 respostas bem sucedidas nestas quatro questões, apenas 24 não são acompanhadas de registro, e 35 nasceram de cálculos.

3.1.3 QUESTÕES CONTEXTUALIZADAS

Nesta seção analisaremos as questões 1, 2 e 4, que podem ser resolvidas através da operação de divisão.

O diagrama abaixo mostra o número de alunos que escolheram resolver cada uma dessas questões pela operação de divisão:



Podemos perceber que toda nossa amostra utilizou a operação de divisão para resolver, pelo menos, uma dessas três questões. Dos 28 sujeitos, 11 utilizaram a operação de divisão em todas as questões e 19 em, pelo menos, duas.

O número de alunos que escolheu a operação de divisão em cada uma das questões foi 26, 17 e 15, respectivamente, para as questões 1, 2 e 4. Achamos natural que o maior número de alunos esteja na questão 1, pois no enunciado dessa questão havia menção à palavra dividir. Quanto às outras duas questões, são problemas quotitivos. Na problemática, havíamos mencionado que os problemas que envolvem divisão quotitiva são considerados mais difíceis pelos alunos do que os que envolvem divisão partitiva.

3.2 PRIMEIRAS CONCLUSÕES

Agora, podemos formular as primeiras conclusões às nossas questões de pesquisa. Comecemos com a questão:

Investigar se o aluno de sexta série do ensino fundamental conhece a técnica da divisão.

Conforme nossos dados, consideraremos que os 12 alunos que acertaram as questões 5 e 6, conhecem a técnica da divisão. O engano mais freqüente foi quanto à colocação do zero, não só nessas questões, como também em todas as divisões semelhantes.

Quanto à questão:

Investigar se o aluno recorre à divisão para resolver as questões contextualizadas.

Tivemos um resultado expressivo: todos os alunos de nossa amostra utilizaram a operação de divisão para resolver, pelo menos, uma das três questões contextualizadas examinadas na seção 1.3. Dos 28 alunos, 11 empregaram essa operação para resolver todas as três questões e 26 alunos resolveram por meio da operação de divisão o único problema partitivo: o primeiro.

Um resultado curioso apresenta-se, pois, nem todos os alunos que conhecem a técnica da divisão, segundo nosso critério, utilizam a operação nas questões contextualizadas: dois desses alunos, só utilizaram essa operação na questão 4.

Passemos à terceira questão de pesquisa:

Analisar as relações que o aluno estabelece entre dividendo, divisor, quociente e resto na divisão de Números Naturais.

Dos 25 sujeitos que tiveram sucesso em pelo menos uma das questões em que era necessário usar a reversão, 15 fizeram a reversão tanto para encontrar o dividendo, como para encontrar o divisor, ao passo que nove sujeitos apenas fizeram a reversão para encontrar o dividendo. O outro sujeito apenas fez a reversão para encontrar o divisor.

Dos quinze alunos que fizeram a reversão em ambas as questões citadas acima, 12 acertaram, pelo menos, uma das questões de divisão: questões 5 e 6. Como já observamos, esse dado parece indicar que a capacidade de reverter uma operação está ligada com a capacidade de efetuar a operação de forma direta.

O resto parece ser o termo mais difícil de relacionar com os demais. De fato, dos 24 sujeitos que consideramos terem acertado a reversão na questão 7, 13 utilizaram o resto de forma inadequada; e todos os 16 que reverteram corretamente na questão 8, ignoraram completamente o resto.

Ainda com relação à questão 8, percebemos que nenhum dos sujeitos subtraiu o resto do dividendo antes de efetuar a divisão. Todos os 16 alunos que chegaram ao resultado correto nesta questão, fizeram 415 dividido por 23. Esclarecemos que esses alunos chegaram ao resultado correto, pois o resto era menor que o quociente apresentado na questão.

Observamos que a maioria dos alunos só conseguiu obter quociente e resto, nas questões 9 a 12, recuperando o valor do dividendo na forma decimal, o que nos indica que este tipo de relação não é acessível a alunos de sexta série. De fato, Campbell, em sua pesquisa com futuros professores, mencionada na Introdução, obteve resultados semelhantes. Lembramos que apenas 2 professores, dos 19 que participaram da pesquisa identificaram corretamente quociente e resto em todas as questões, sem recorrer à expressão decimal do dividendo.

CAPÍTULO IV

4. ANÁLISES COMPLEMENTARES

Neste capítulo descrevemos como foi a escolha dos alunos para a entrevista e faremos uma análise dos resultados obtidos com as mesmas. Nosso objetivo é duplo: enriquecer nossas conclusões do capítulo anterior com dados qualitativos sobre sujeitos, e dar exemplos de concepções-ação e de concepções-processo com relação à divisão de números naturais.

4.1 ESCOLHA DOS ENTREVISTADOS

A escolha dos alunos para entrevista não foi aleatória. Procuramos selecionar os que apresentaram respostas significativas diante da amostra, ou seja, cujas respostas apareceram mais de uma vez; alunos cujas respostas eram esperadas por nós; alunos que apresentaram um bom desempenho; e alunos que mostraram dificuldades na compreensão da divisão e no desenvolvimento do algoritmo.

Abaixo, detalhamos como foi feita a escolha dos alunos para a entrevista, a representatividade de cada aluno escolhido diante de nossa amostra e algumas de suas especificidades.

Para selecioná-los, dividimos nossas questões em três blocos: a) questões formais com correspondentes contextualizadas (questões 5 a 8); b) questões contextualizadas (questões 1 a 4); e c) questões 9 a 12.

	Questões 5 a 8	Questões 1 a 4	Questões 9 a 12
NÚMERO DE ALUNOS QUE...			
...ERRARAM TODAS	6	2	7
...ACERTARAM UMA	7	6	6
...ACERTARAM DUAS	4	8	2
...ACERTARAM TRÊS	10	10	4
...ACERTARAM TODAS	1	2	9
TOTAL	28	28	28

Depois da análise quantitativa, numeramos os alunos de 1 a 28 e observamos em que célula desta tabela cada um se encontrava. Obtivemos o seguinte quadro descritivo:

ALUNOS QUE...	Questões 5 a 8	Questões 1 a 4	Questões 9 a 12
...ERRARAM TODAS	4, 5, **10**, 13, 18, 25	5, 13	**2**, 4, 12, 13, 21, 22, 23
...ACERTARAM UMA	1, 11, 17, **19**, 22, **26**, **27**	1, **2**, 4, 16, 21, **26**	5, 8, 11, 16, **26**, 28
...ACERTARAM DUAS	12, 15, 21, 28	12, 15, 18, 22, 23, 25, **27**, 28	1, 17
...ACERTARAM TRÊS	**2**, 3, **6**, 7, 8, 9, 14, 16, 20, 23	3, **6**, 7, 8, 9, **10**, 14, 17, **19**, 20	3, **6**, **19**, **27**
...ACERTARAM TODAS	**24**	11, **24**	7, 9, **10**, 14, 15, 18, 20, **24**, 25

Os alunos marcados, em negrito, na tabela acima (2, 6, 10, 19, 24, 26 e 27) foram os sujeitos escolhidos.

Assim, observamos que só quatro alunos (2, 16, 21, 23) dentre os 28, acertaram maior número de questões formais do que contextualizadas (considerando as questões 1 a 8).

Dentre esses, o aluno número 2 chamou nossa atenção, pois ele só resolveu a questão contextualizada que acertou, as demais estão em branco e, das quatro questões formais, ele acertou três; na questão em que se deveria achar o divisor, ele acertou a operação, mas não a resolveu de forma correta. Para completar, também deixou em branco as questões 9 a 12. Parece-nos ser um aluno que sente segurança do que sabe e só resolve o que tem certeza; por isso, achamos que seja um sujeito interessante para representar os quatro alunos desse grupo.

O restante dos alunos (24) ou acertaram mais questões contextualizadas do que formais ou o mesmo número de questões. Destes, dois nos chamaram mais a atenção: os alunos números 10 e 11, pois as diferenças no número de acertos foram mais significativas: enquanto o aluno 10 não resolveu de forma correta nenhuma das questões formais e acertou três das quatro contextualizadas, o aluno número 11 acertou somente uma das quatro formais e todas as contextualizadas. Para ambos, o módulo da diferença do número de acertos é três e esta diferença é máxima, visto que nenhum aluno acertou todas de um tipo e errou todas do outro.

Resolvemos escolher o aluno número 10 para entrevista, por apresentar resultados interessantes em seu protocolo: nas divisões, cujos resultados eram 108, esse aluno obteve 18 em ambas as questões, a formal e a contextualizada, além disso, na questão contextualizada, ele riscou e resolveu novamente a operação, encontrando o resultado correto. Quanto às questões, cujas divisões tinham 10 como resultado, ele acertou a contextualizada, mas apresentou quociente 1 na formal. Ele resolveu corretamente a questão contextualizada, cuja resolução poderia ser feita por meio da operação $415 \div 23$, mas não resolveu a correspondente formal, embora tenha se mostrado capaz de fazer corretamente a reversão. Além disso, este aluno respondeu as questões 9 a 12 corretamente sem utilizar o espaço para "contas".

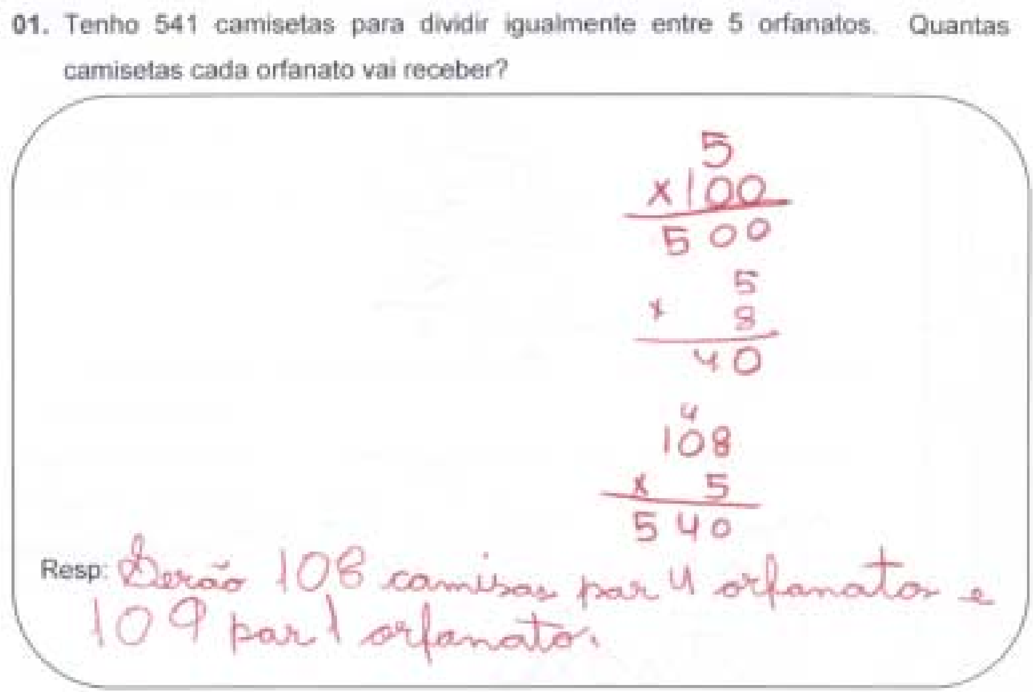
O aluno de número 24 chamou nossa atenção, pois foi o único que acertou todas as 12 questões do instrumento. Resolvemos entrevistá-lo para investigar as relações que fez; além disso, resolveu as questões 9 a 12 por meio das operações. Gostaríamos de saber se ele tem condições de resolvê-las sem as operações e, se sim, o porquê de ele ter optado por esse tipo de resolução.

Dentre os alunos que acertaram entre uma e três questões em cada bloco, temos quatro que nos pareceram interessantes para entrevista: os alunos de números 6, 19, 26 e 27.

O aluno número 6 chamou nossa atenção por não ter chegado ao resultado correto em exatamente uma questão de cada um dos blocos. Resolvemos olhar mais detalhadamente, quais foram as resoluções apresentadas por ele. Três fatos chamaram nossa atenção em seu protocolo: ele não resolveu as duas primeiras questões, utilizando a operação de divisão, mas outra estratégia. Observemos seu protocolo nas figuras 4.1 e 4.2 que estão na página seguinte.

Além disso, ele resolveu da mesma forma o primeiro e o segundo blocos de questões, assim, obteve 108 ao invés de 18, como quociente da operação 541 ÷ 5, o que o torna um representante entre os 12 que chegaram a esse resultado na questão contextualizada e os seis na questão formal.

O terceiro e último fato que chamou a atenção, foi o que fez no terceiro bloco de questões (as questões 9 a 12). Ele obteve as respostas dessas questões por meio das operações de divisão.



01. Tenho 541 camisetas para dividir igualmente entre 5 orfanatos. Quantas camisetas cada orfanato vai receber?

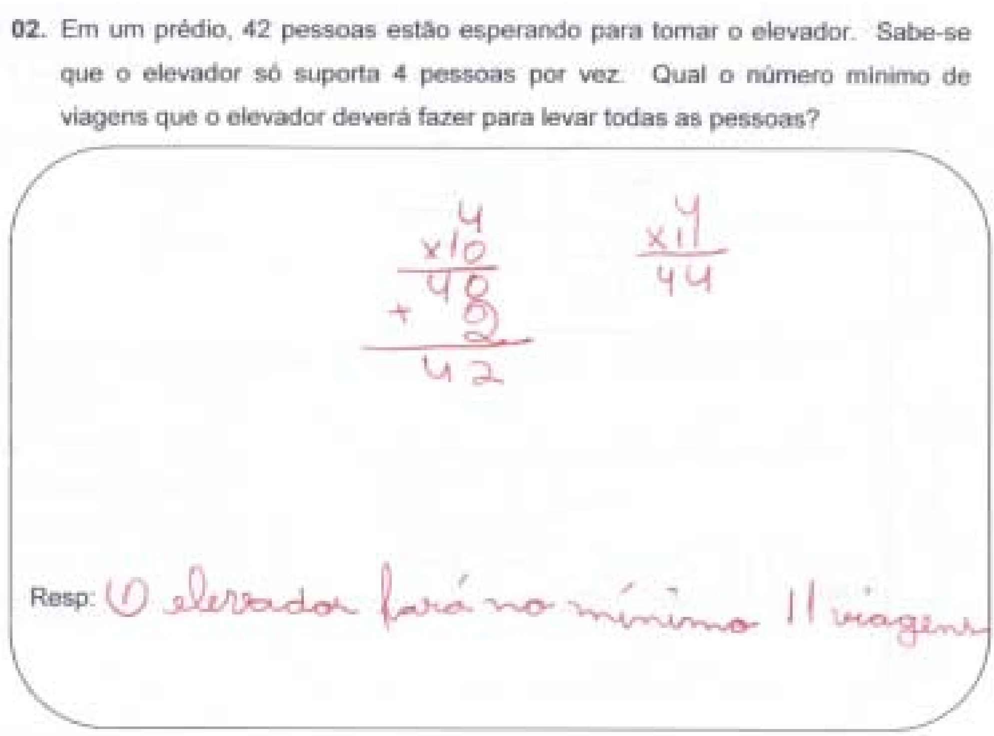
$5 \times 100 = 500$

$5 \times 8 = 40$

$108 \times 5 = 540$

Resp: Serão 108 camisas par 4 orfanatos e 109 par 1 orfanato.

Figura 4.1 – Protocolo do aluno 6



02. Em um prédio, 42 pessoas estão esperando para tomar o elevador. Sabe-se que o elevador só suporta 4 pessoas por vez. Qual o número mínimo de viagens que o elevador deverá fazer para levar todas as pessoas?

$4 \times 10 = 40$, $40 + 2 = 42$

$4 \times 11 = 44$

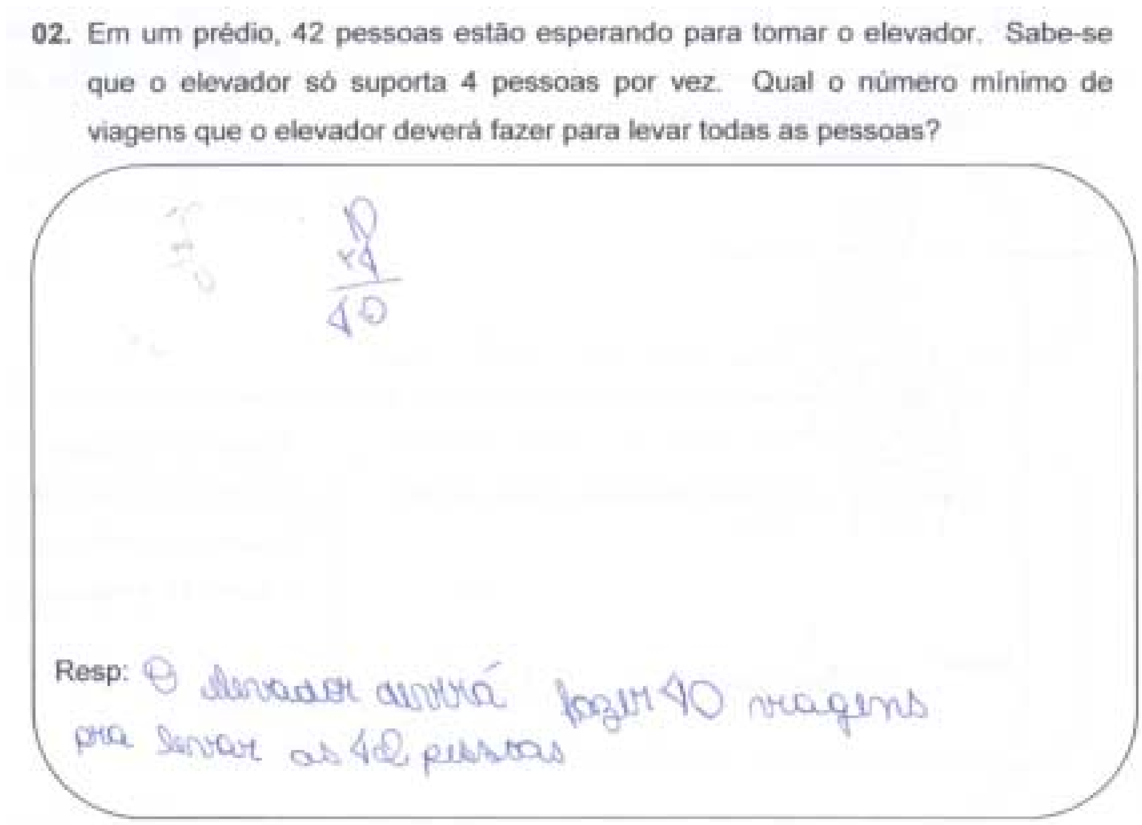
Resp: O elevador fará no mínimo 11 viagens

Figura 4.2 – Protocolo do aluno 6

Em nossa análise a priori, dissemos que o aluno que resolvesse essas questões desse modo, provavelmente, não encontraria o resto 9 (menor que o divisor); mas este aluno fez a operação 100 ÷ 7 e obteve quociente 13 e resto 9. Julgamos que ele procedeu desse modo influenciado pela forma como estava representado o número 100: 13 x 7 + 9; ele não teria percebido o engano que foi, de certa forma, “levado a” cometer. Isso foi esclarecido na entrevista.

Todos esses fatos fizeram com que este aluno fosse escolhido para a entrevista. Vale ressaltar que o aluno número 3 também acertou exatamente três questões em cada bloco, mas o protocolo de número 6 era mais representativo por causa da resposta 108 ao invés de 18 nas questões 4 e 8.

Outro aluno que chamou a atenção, no grupo dos que acertaram entre uma e três questões em cada bloco, foi o de número 26; ele acertou apenas uma questão em cada um dos blocos de quatro questões. Aparentemente, esse aluno possui concepções errôneas a respeito das operações com Números Naturais, pois: resolveu a quarta questão contextualizada, utilizando a operação de multiplicação ao invés de usar a divisão; ignora os R$ 3,00 que sobraram com Nathália, após comprar os presentes de Natal na questão número 3; e, na questão número 2, a do número de viagens que o elevador deve fazer, ele fez: 10 x 4 = 40 (aparentemente encontrou o 10 por intermédio de uma operação mental) e respondeu:



02. Em um prédio, 42 pessoas estão esperando para tomar o elevador. Sabe-se que o elevador só suporta 4 pessoas por vez. Qual o número mínimo de viagens que o elevador deverá fazer para levar todas as pessoas?

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 4 \\ \hline 40 \end{array}$$

Resp: O elevador deverá fazer 10 viagens pra levar as 42 pessoas

Figura 4.3 – Protocolo do aluno 26

Assim como o aluno número dez, obteve 18 para a conta 541 ÷ 5, na questão contextualizada; em seguida, rasurou e fez de novo, obtendo o resultado correto. Mas, na mesma operação, na questão formal, obteve resultado 181.

Ao resolver a questão formal 42 ÷ 4, este mesmo aluno que, aparentemente, resolveu por cálculo mental a contextualizada, obteve quociente 105 e resto zero. Como observação, ressaltamos que o resultado 10,5 estaria correto se tratasse de uma divisão no conjunto dos Números Racionais.

No protocolo desse aluno, outro fato interessante foi a resolução apresentada nas questões 7 e 8. A questão 7 pedia o dividendo na operação em que o divisor é 15, o quociente 21 e o resto 3. Veja a resolução apresentada:

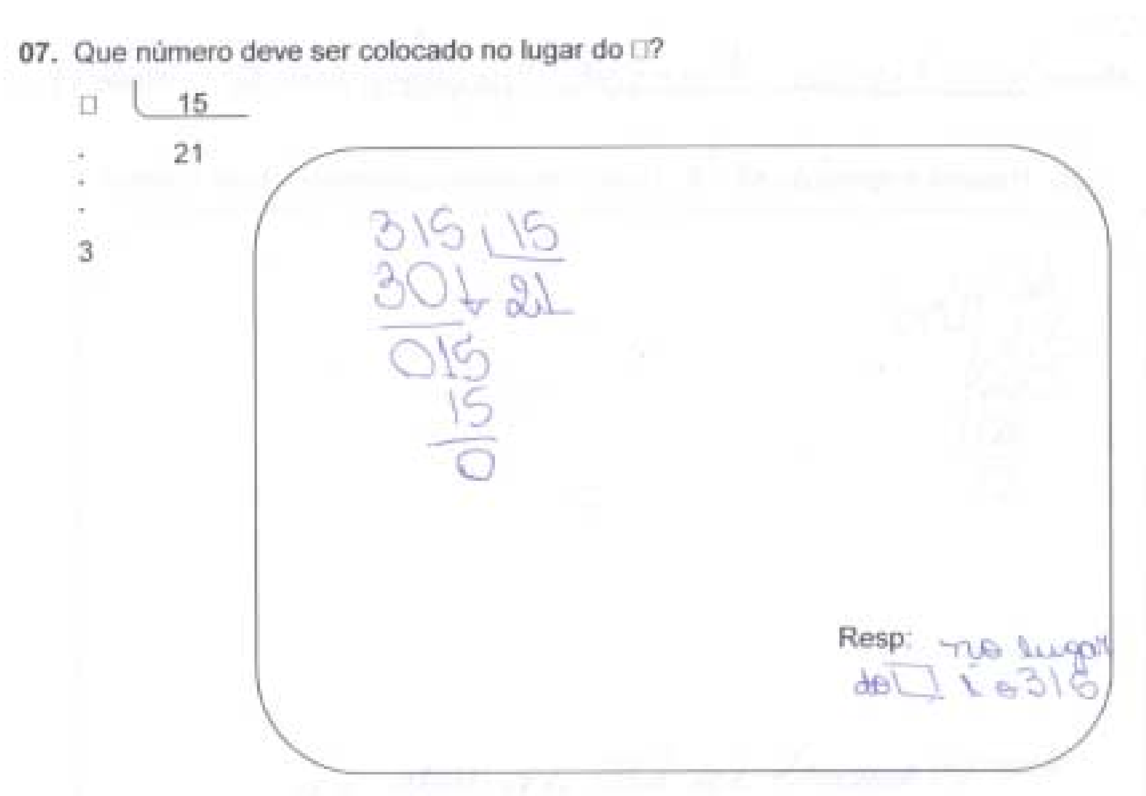


Figura 4.4 – Protocolo do aluno 26

Aparentemente, o 315 foi encontrado por cálculo mental.

O mesmo se verificou na questão 8, em que se pedia o divisor da operação em que o dividendo era 415, o quociente 23 e o resto 2; o divisor 18 parece ter sido obtido também por cálculo mental:

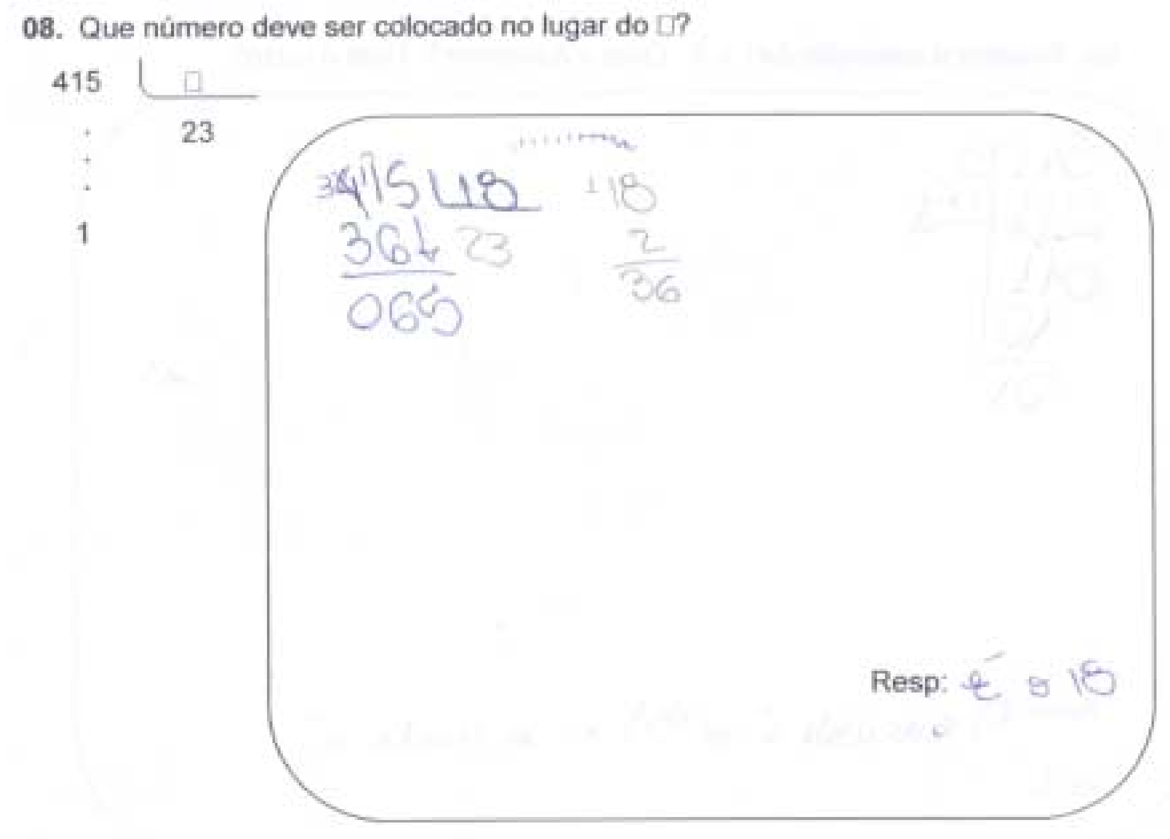


Figura 4.5 – Protocolo do aluno 26

Julgamos ser necessário escolher, pelo menos, mais um aluno que tivesse tido entre um e dois acertos nos dois primeiros blocos. Analisando os protocolos, escolhemos o aluno número 27, pois este apresentou um tipo de resposta esperada por nós: obteve quociente 10 na operação 42 ÷ 4 na questão contextualizada, e quociente 1 na correspondente formal. Além disso, obteve quociente 18 na operação 541 ÷ 5 nos dois contextos.

O aluno também foi um dos 4 que apresentou a seguinte resolução da questão 3: 21 + 3 = 24, ao invés de 21 x 15 + 3 = 318.

Mas o que torna o protocolo desse aluno mais interessante é o que ele apresenta nas questões 9 a 12. Parece-nos que ele percebeu a lógica desses exercícios ao fazer a décima questão, resolvendo os demais sem efetuar as operações. É interessante também o fato de ele ter escrito que “chutou” as duas últimas, pois as respostas apresentadas foram as corretas. Conjeturamos que ele deve ter raciocinado para assinalar os resultados corretos.

Após os seis alunos selecionados, achamos necessário escolher um sétimo para o caso de haver alguma restrição por parte de algum dos escolhidos, a participar da entrevista. Escolhemos o aluno número 19 por apresentar em seu protocolo, algumas características comuns com outros já selecionados, que são: o fato de ele ter acertado duas questões contextualizadas a mais do que as formais; o fato típico de ter apresentado resultados 1, 18 e 108 nas formais 5, 6 e 8, respectivamente, ao invés de 10, 108 e 18. O terceiro fato interessante é que, nas questões 9 a 12, ele resolveu a primeira por meio da operação e as demais sem a operação, tendo acertado as duas últimas.

O aluno número 24 não pode participar da entrevista, pois saiu da escola no período decorrente entre a aplicação do teste e o convite para a entrevista.

4.2 ANÁLISE DE CASOS COM ENTREVISTA

Este item será organizado por aluno. Analisaremos alguns trechos dos protocolos dos alunos número 6, 2, 10, 27 e 26, nessa ordem, à luz das entrevistas.

O aluno 6 foi escolhido, pois não chegou ao resultado correto em exatamente uma questão em cada bloco, ou seja, é um daqueles 15 alunos que acertou o mesmo número de questões formais e contextualizadas.

Quanto às questões contextualizadas e suas correspondentes formais, este aluno resolveu corretamente as duas primeiras formais e, apesar disso, utilizou outras estratégias, que não envolvem explicitamente divisão, para resolver as duas primeiras questões, como já dissemos, na seção 4.1.

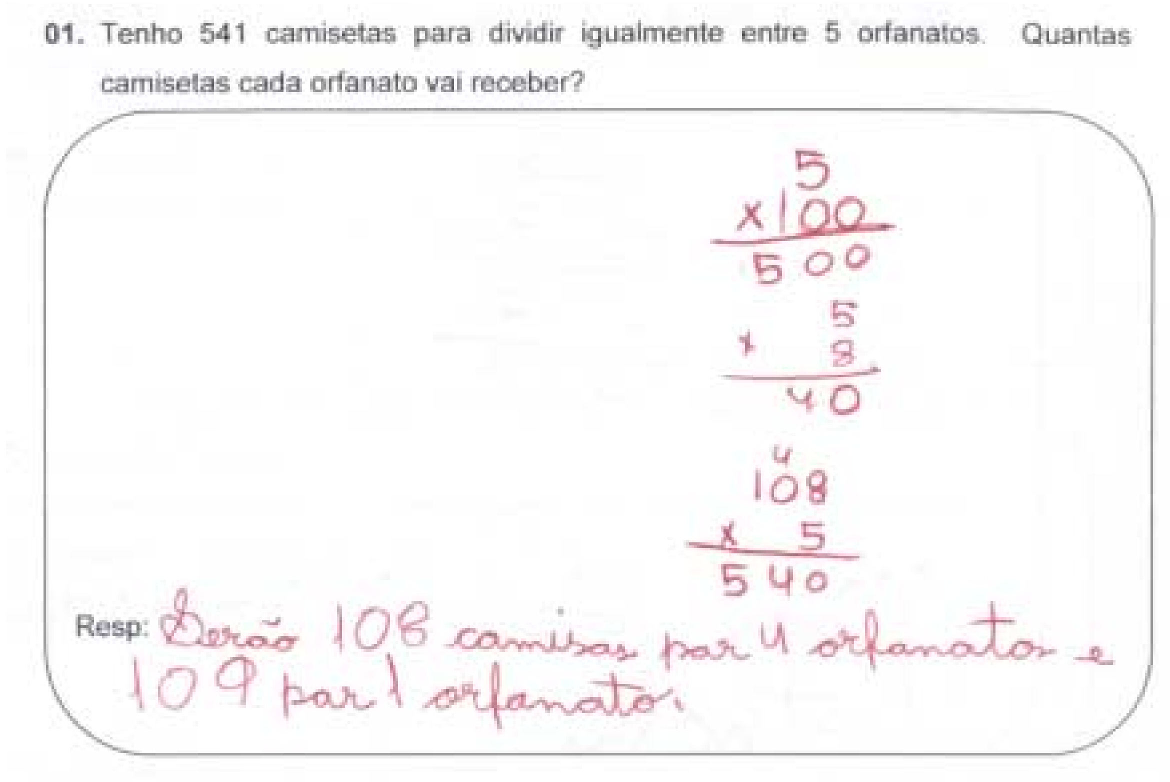


Figura 4.6 – Protocolo aluno 6

Veja o que ele diz sobre a primeira questão:

<u>Aluno 06</u>: Aqui eu tentei aproximar assim... tentei aproximar quanto mais do número 540 que é o número mais perto de 541. Aí eu pensei que, como era número ímpar, não ia dar certo pra todos os orfanato, aí ou eu colocava de um em um ou ficava uma pra nenhum.
<u>Entrevistador</u>: Nenhum número ímpar daria pra dividir entre os cinco orfanatos?
<u>Aluno 06</u>: Não.
<u>Entrevistador</u>: Não? 25 é ímpar?
<u>Aluno 06</u>: É.
<u>Entrevistador</u>: Se eu tivesse 25 camisetas pra os cinco orfanatos...
<u>Aluno 06</u>: Dá sim.
<u>Entrevistador</u>: Tá. Então, o que você pensou aí? Por que que então o 541 não dá?
<u>Aluno 06</u>: Ah, por que ele não tá na tabuada do cinco, né?

Na segunda questão, o aluno utilizou uma estratégia semelhante:

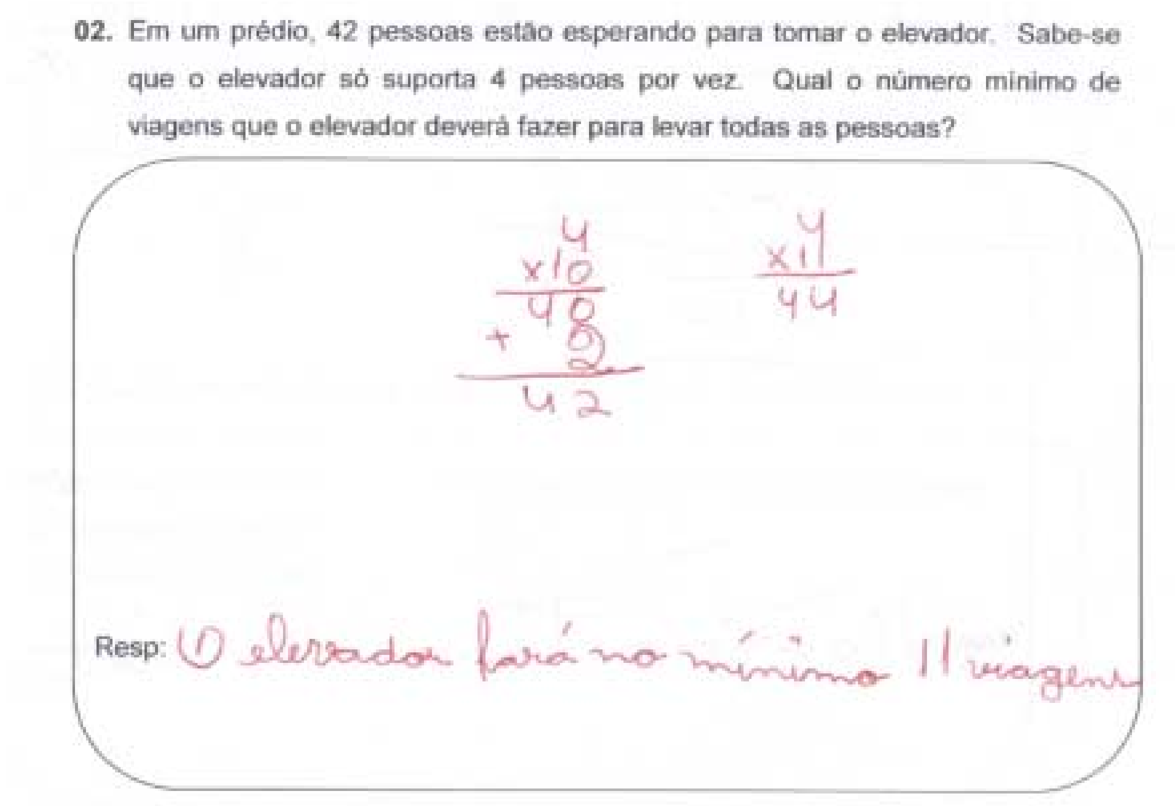
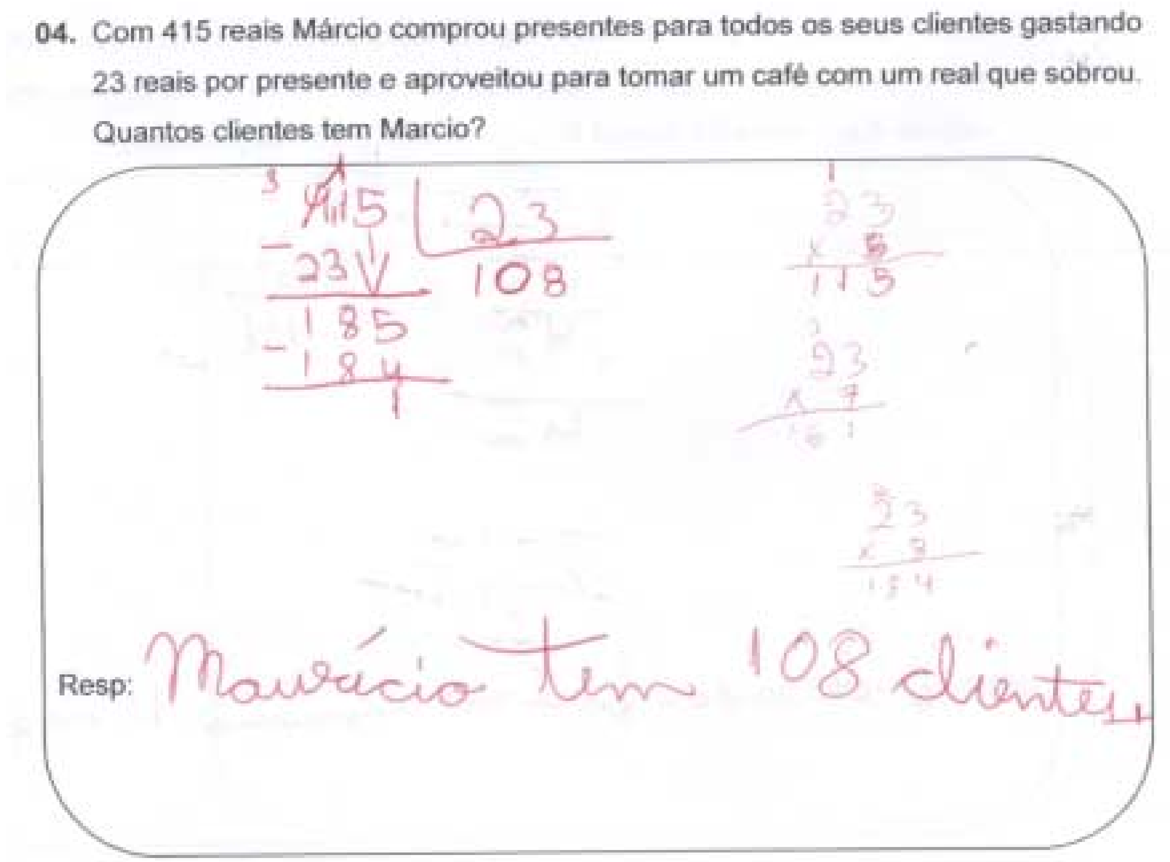


Figura 4.7 – Protocolo aluno 6

Em seguida, perguntamos por que ele não utilizou a operação de divisão nessas duas questões. Veja o que ele nos disse:

<u>Aluno 06</u>: Na hora eu achei que essa era mais fácil.
<u>Entrevistador</u>: Você sempre faz assim, ou...
<u>Aluno 06</u>: Depende, às vezes eu acho mais fácil fazer assim, às vezes ... depende da conta.

Na questão 4 (que o aluno havia resolvido utilizando a divisão), ele declarou que achava mais fácil fazer a divisão. A seguir, perguntamos o que faria se tivesse que verificar a veracidade do resultado encontrado por ele, pois o resultado correto seria 18 e ele encontrou 108 (também na correspondente formal):



04. Com 415 reais Márcio comprou presentes para todos os seus clientes gastando 23 reais por presente e aproveitou para tomar um café com um real que sobrou. Quantos clientes tem Marcio?

Resp: Maurício tem 108 clientes.

Figura 4.8 – Protocolo do aluno 6

Ele disse que faria a prova real, e nós perguntamos por que:

<u>Aluno 06</u>: Porque a divisão é o inverso da multiplicação.
<u>Entrevistador</u>: Sempre?
<u>Aluno 06</u>: eu acho que é.
<u>Entrevistador</u>: é?
<u>Aluno 06</u>: Eu acho.
<u>Entrevistador</u>: Você sabe me dizer por que a divisão é o inverso da multiplicação?
<u>Aluno 06</u>: Ah, porque sempre que você faz uma divisão, o resultado... eu não sei!

Após fazer a prova real, e perceber que seu resultado não estava correto, o aluno deu a seguinte explicação:

Aluno 06: Não tinha que ter esse zero aqui.
Entrevistador: Por que?
Aluno 06: Por que uma vez 23, 23, abaixa o 5, 8 vezes 23, 184, aí dá um, aí 18 vezes 23, eu acho que vai dar.
Entrevistador: Você acha ou tem certeza?
Aluno 06: Ah, tem que fazer a conta, mas eu acho que dá.
Entrevistador: Por que você acha que dá?
Aluno 06: por que... ah, por que 20 x 23 dá 460 e o mais perto é 18.
Entrevistador: Tá. E por que você pôs esse zero?
Aluno 06: Ah eu devo ter me confundido por que, como eu pulei uma parte aqui, eu achei que era o zero.
Entrevistador: Você pulou uma parte aonde que eu não vi?
Aluno 06: Eu abaixei o cinco aqui ó, e eu achei que tinha que por o zero.

Com este trecho da entrevista, podemos perceber que este aluno consegue identificar a colocação incorreta do zero no quociente. Vale ressaltar que o mesmo foi feito na questão 8.

Além disso, este aluno não tem problemas quanto à interpretação dos enunciados.

Mas, sem dúvida, o trecho mais interessante da entrevista refere-se às questões 9 a 12:

Este aluno resolveu corretamente, por meio da obtenção da forma decimal do dividendo, as questões 9, 10 e 11. Eis a resolução da questão 12:

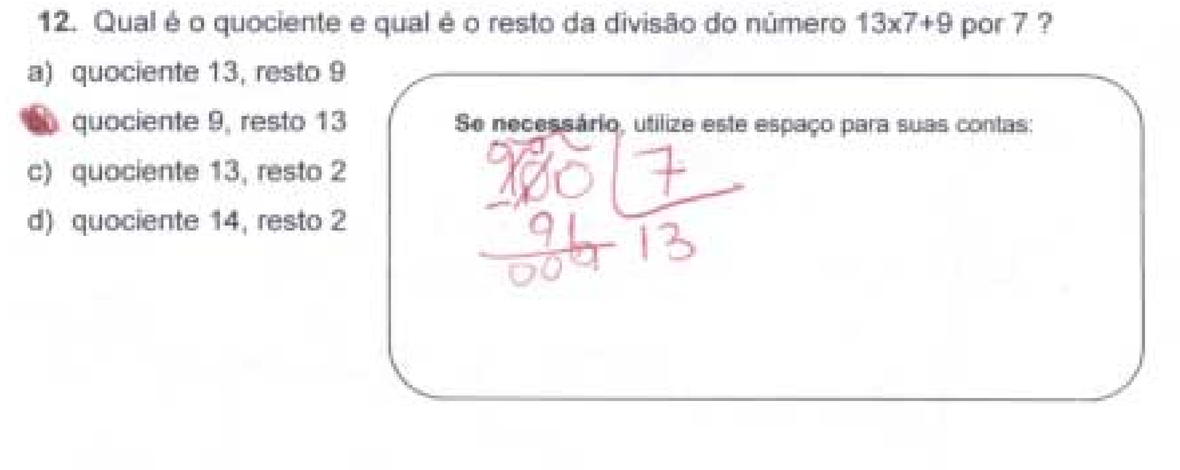


Figura 4.9 – Protocolo do aluno 6

Observamos que, embora tenha “armado a conta”, obteve quociente 13 e resto 9; não esperávamos este resultado vindo de um aluno que fez cálculos e, sim, dos que não precisaram utilizar esse recurso.

<u>Entrevistador</u>: Eu queria que você olhasse a questão 9 e me explicasse o que você fez nessa questão.
<u>Aluno 06</u>: Ah, primeiro nessa daqui eu fiz 13 x 7 mais 6, dividido por 7 e aí deu 13 e eu coloquei aqui.
<u>Entrevistador</u>: Você acha que essa sua resposta está certa?
<u>Aluno 06</u>: Tá.
<u>Entrevistador</u>: Teria como, sem fazer essa conta, saber que a resposta é esta?
<u>Aluno 06</u>: Acho que sim.
<u>Entrevistador</u>: Como?
<u>Aluno 06</u>: Eu acho que não pode dar igual ou mais que 7 (se referindo ao resto) e se aqui fosse 7 vezes 7 (apontando a alternativa a), não ia dar 97, ia ser outro número.
<u>Entrevistador</u>: Tá. Então como o resto não pode ser 7 você excluiria a <u>b</u> e a <u>d</u>, e a <u>a</u> você excluiria por que 7 vezes 7 é igual a 49 e tá muito longe daqui.
<u>Aluno 06</u>: É.

Este sujeito dá indícios de conhecer o fato de que o resto deve ser menor que o divisor – uma relação correta entre divisor e resto.

Entrevistador: E a outra? A questão 10 tem como saber sem fazer a conta?
Aluno 06: Teria.
Entrevistador: Como?
Aluno 06: É o inverso... Assim: aqui tá 97 dividido por 7 dá 13, então aqui, 97 dividido por 13 dá 7.
Entrevistador: Sempre eu posso inverter?
Aluno 06: Eu acho que sim. Na minha opinião, sempre eu posso inverter.

O sujeito dá indícios de que pensa ser verdadeira a seguinte relação: se a, b são naturais e se divide a por b, obtendo um quociente q, então ao dividir a por q, obtém-se um quociente b.

Entrevistador: E a 11?
Aluno 06: Eu acho que dá também porque isso aqui ó (refere-se à questão anterior), se aqui é 97 e dá 7, aqui, se o quociente der 9 (refere-se à alternativa b) vai passar muito de 100 (refere-se ao resultado 100 da conta 13 x 7+9), então, o número mais perto é 7 vezes 13, porque se aqui fosse 8, já passa.

O sujeito procede por análise de alternativas, considerando três possibilidades para o quociente: 7, 9 e 13. Sua estratégia mostra que o quociente só pode ser 7. Seu argumento demonstra certo controle sobre a ordem de grandeza do resultado do cálculo com números naturais.

Entrevistador: Então na questão 11 você também aproveitou o resultado, e a última?
Aluno 06: Aqui eu fiz errado. Aqui era 14 (aponta o quociente), aqui dava 98 (aponta no protocolo o número 91, resultado de sua conta: 13x7), e sobrava dois.
Entrevistador: E por que você acha que você fez errado?
Aluno 06: Por que eu olhei nesta daqui (aponta a questão 11).
Entrevistador: Por que você aproveitou o resultado de cima. Tá. Então é isso...

Ao aplicar aqui a relação explicitada na discussão da questão 2, o aluno concluiu erroneamente que o quociente é 13 e o resto é 9.

Aluno 06: Porque dá pra colocar mais 7 (refere-se a acrescentar 1 no quociente), dá 98, que fica mais perto de 100. Aqui tá 3 vezes 7 e devia ter colocado 4 (aponta o quociente). Fiz 13 direto, se tivesse posto 14...

O sujeito dá novos indícios de sua capacidade de estimativa com cálculos com Números Naturais.

<u>Entrevistador</u>*: Aí estaria certo. Teria como, só olhando, perceber que a conta tá errada?*
<u>Aluno 06</u>*: Teria. Porque aqui deu maior que 7 (referindo-se ao resto 9 de seu protocolo)*
<u>Entrevistador</u>*: E esse número não pode ser maior que 7?*
<u>Aluno 06</u>*: Não.*

Novamente, o sujeito dá indícios de que conhece o fato de que o resto deve ser menor que o divisor.

Esta entrevista indica que, apesar de este aluno não ter utilizado nenhuma estratégia antecipada por nós, ele internalizou algumas propriedades da divisão, além de mostrar certo controle sobre a ordem de grandeza dos resultados de multiplicações e divisões de Números Naturais.

Embora tenha a concepção correta de que o resto deve ser menor que o divisor, não demonstrou ter condições de concluir qual é o quociente com base na expressão do dividendo apresentada nos enunciados. Mas mesmo assim acreditamos que podemos considerar que este aluno está no nível cognitivo de processo para a divisão de números naturais, pois ele é capaz de reverter, ou seja, desfazer os passos feitos em uma divisão; além disso, é capaz de utilizar a divisão como ferramenta.

O aluno número 2 foi escolhido entre os quatro que acertaram mais questões formais do que contextualizadas; além disso, ele acertou apenas uma questão contextualizada e as demais deixou em branco. As respostas das questões 9 a 12 também estão em branco.

Conversando sobre as questões contextualizadas que ele não resolveu, o aluno imediatamente concluiu que, na segunda e na quarta questões, a operação a ser feita seria a de divisão, e, na segunda, obteve resultado 1 e, após questionado se em uma viagem o elevador conseguiria levar todas as pessoas, concluiu que o resultado deveria ser 10. E, o que nos chama a atenção, é o fato de que a questão formal foi resolvida corretamente por ele em seu protocolo.

No caso acima, percebemos que o sujeito, em um primeiro momento, resolveu corretamente a questão formal e obteve quociente 1 na contextualizada. Abaixo, poderemos observar o mesmo aluno obtendo quociente correto na questão contextualizada e obtendo 108 na formal. Isso nos dá indícios de que o contexto não contribui, sobremaneira, para a obtenção do resultado correto, em um primeiro momento.

Quanto à questão 4, este aluno a resolveu corretamente durante a entrevista. O que nos chamou a atenção em seu protocolo foi o fato de que ele, na questão formal correspondente, utilizou a operação correta para resolve-la, apesar de ter obtido quociente 108.

Veja seu protocolo:

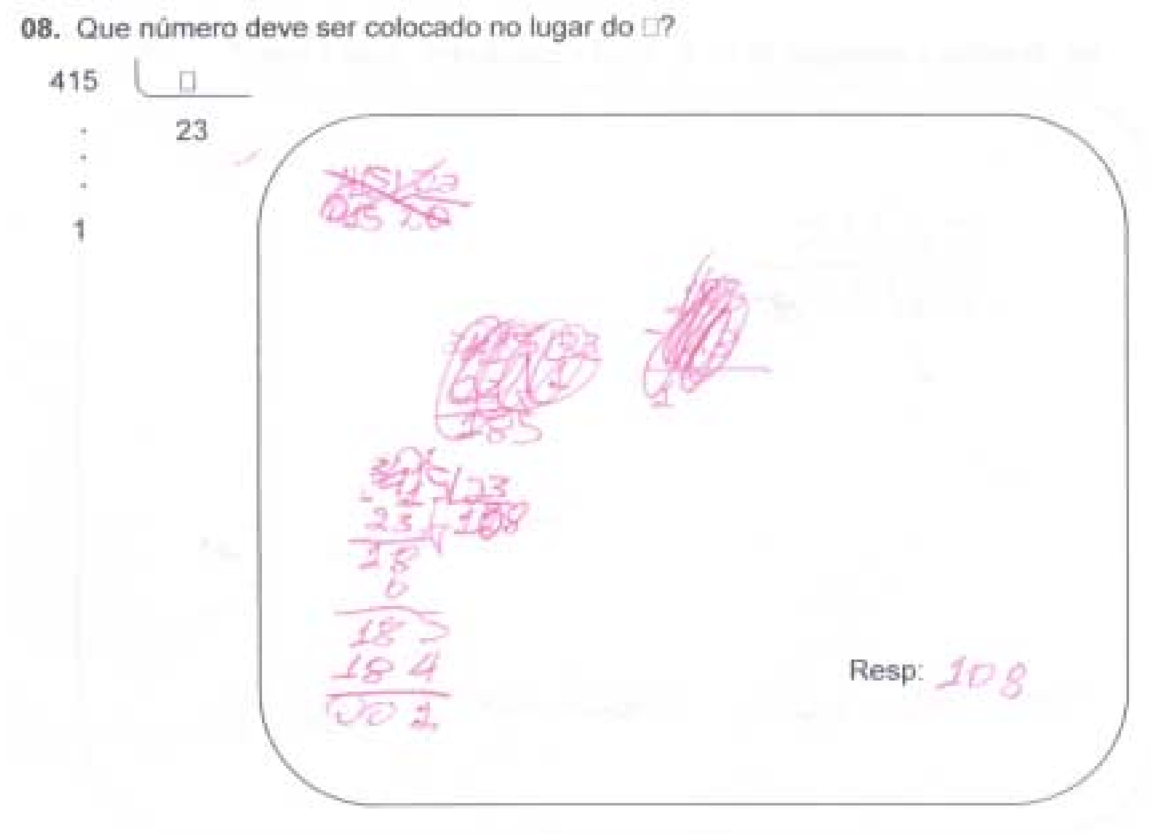
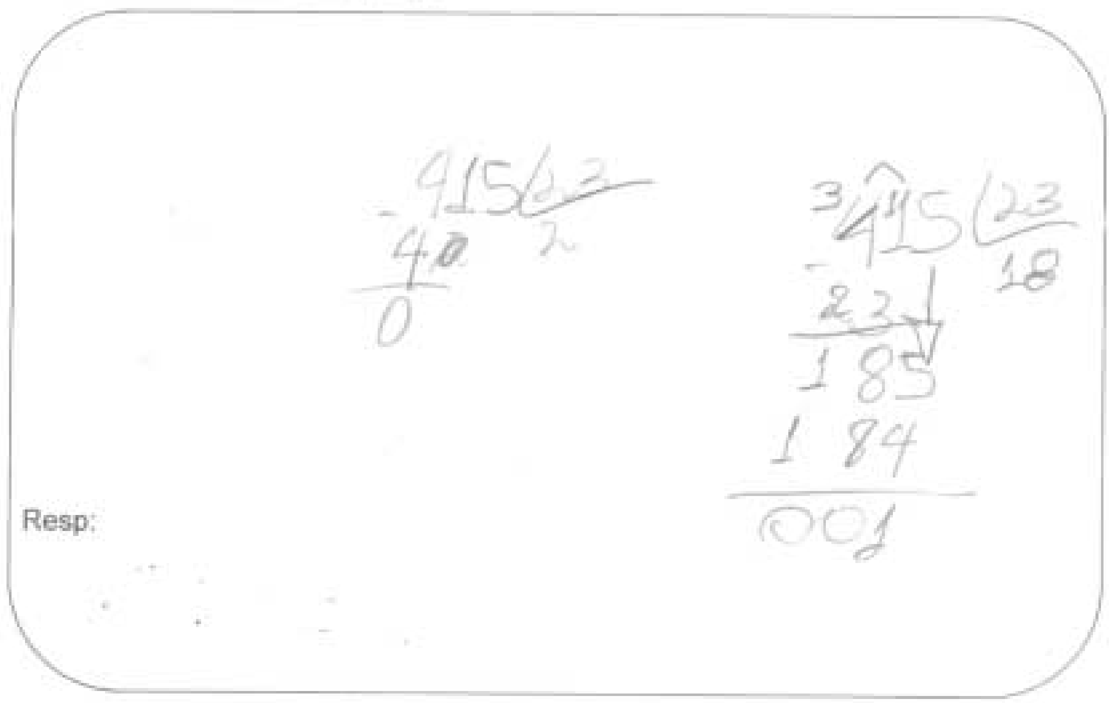


Figura 4.10 – Protocolo do aluno 2

Entretanto, para resolver a operação 415 dividido por 23, durante a entrevista, obteve a dezena 1 no quociente pelo método usual e, para obter a unidade 8 (resultado de 185 dividido por 23), utilizou cálculos mentais de forma desembaraçada, apesar de ficar em dúvida do resultado em alguns momentos por distração:

<u>Aluno 02</u>: 23 mais 23… 46, 46 mais 46… 80…92, mais 46… 42 mais 46… 138, mais 46, 138 mais 46… 70, 80 e … 5, não, 84… 184…46…mais 46… acho que foi 8, né?
...
<u>Entrevistador</u>: Você faz conta muito bem de cabeça.
<u>Aluno 02</u>: Ele tem… 18 clientes. É isso?
<u>Entrevistador</u>: É isso. E esse um aqui? <referindo-nos ao resto>
<u>Aluno 02</u>: Ele tomou o café.

Veja o que ele fez:



04. Com 415 reais Márcio comprou presentes para todos os seus clientes gastando 23 reais por presente e aproveitou para tomar um café com um real que sobrou. Quantos clientes tem Marcio?

Resp:

Figura 4.11 – Protocolo de entrevista do aluno 2

Ainda vale a pena observar que na estratégia utilizada por esse aluno para resolver 185 dividido por 23, podemos perceber que ele utilizou a idéia de cota, como foi previsto na elaboração da questão.

Em seguida, apresentamos ao aluno a resolução de seu exercício 8 e perguntamos o que ele achava, visto que, ao efetuar essa mesma operação, o aluno encontrou resultado 108. Ele nos disse que a resposta certa era 18, porque ele tinha acabado de fazer. Perguntamos, então, porque ele não tinha dúvidas de que o resultado 18 estava certo; como ele não respondeu, perguntamos o que ele faria se pedíssemos para ele conferir se seu resultado (108) estava certo ou errado. Ele respondeu:

<u>Aluno 02</u>: Eu esqueci como é que fazia. Tem que fazer 108 vezes 415... dividido por 23. Vezes 23. E aí... deixa eu ver…

Estimulado a pensar, fez corretamente a operação 108 vezes 23, obtendo 2484, de onde concluiu que o resultado 108 estava incorreto, mas não soube explicar o resultado obtido anteriormente.

Ainda com relação às questões contextualizadas deixadas em branco no protocolo, ao ser convidado a refletir sobre a questão 3, inicialmente, esse aluno cometeu um erro comum a outros quatro alunos, encontrando resposta 24.

Quando perguntamos porque, descobrimos que ele não prestou atenção no fato de que Nathália havia gasto 21 reais <u>por presente</u>, achando que ela havia gasto esse dinheiro em <u>todos</u> os 15 presentes, precisando, então, somente somar os 3 reais que sobraram:

<u>Entrevistador</u>: Por que 24 reais?
<u>Aluno 02</u>: Se ela gastou 21 reais e voltou pra casa com 3... 21 mais 3... 24.
<u>Entrevistador</u>: Certo. E… mas quantos presentes ela comprou?
<u>Aluno 02</u>: 15.
<u>Entrevistador</u>: 15. E ela gastou 21 reais nos 15?
<u>Aluno 02</u>: 21 reais nos 15.
<u>Entrevistador</u>: É isso?
<u>Aluno 02</u>: É.

Entrevistador: Dá uma lidinha de novo.
Aluno 02: Maria deu uma certa quantia em reais para a sua Nathália para comprar 15 presentes para o Natal. Nathália gastou exatamente 21 reais em cada presente... e voltou para casa com 3 reais. Quanto Maria havia dado para Nathália?
Entrevistador: Então é 24?
Aluno 02: Não.
Entrevistador: Por que não?
Aluno 02: É 21,… 21… 15 vezes 21.
Entrevistador: Por que mudou de repente?
Aluno 02: Por que eu não tinha lido direito.

Após ler novamente o enunciado, o aluno resolveu corretamente esta questão. Percebemos que esse aluno, ao contrário do anterior, apresenta dificuldades para interpretar enunciados, o que pode ser um motivo para ter deixado as questões contextualizadas em branco.

Quanto às questões 9 a 12, inicialmente, o aluno declarou não se lembrar do que é quociente. Esclarecida a dúvida, o aluno resolveu as questões por meio da obtenção do dividendo na forma decimal. Questionado se era possível resolver a questão 9, sem encontrar o dividendo na forma decimal, ele respondeu que isso não era possível.

Este aluno parece-nos estar no nível cognitivo processo pois, além de resolver corretamente as duas questões formais de divisão, o sujeito foi capaz de reverter os passos implícitos nos enunciados das questões 7 e 8. Observe seu protocolo nas figuras 4.12 e 4.13.

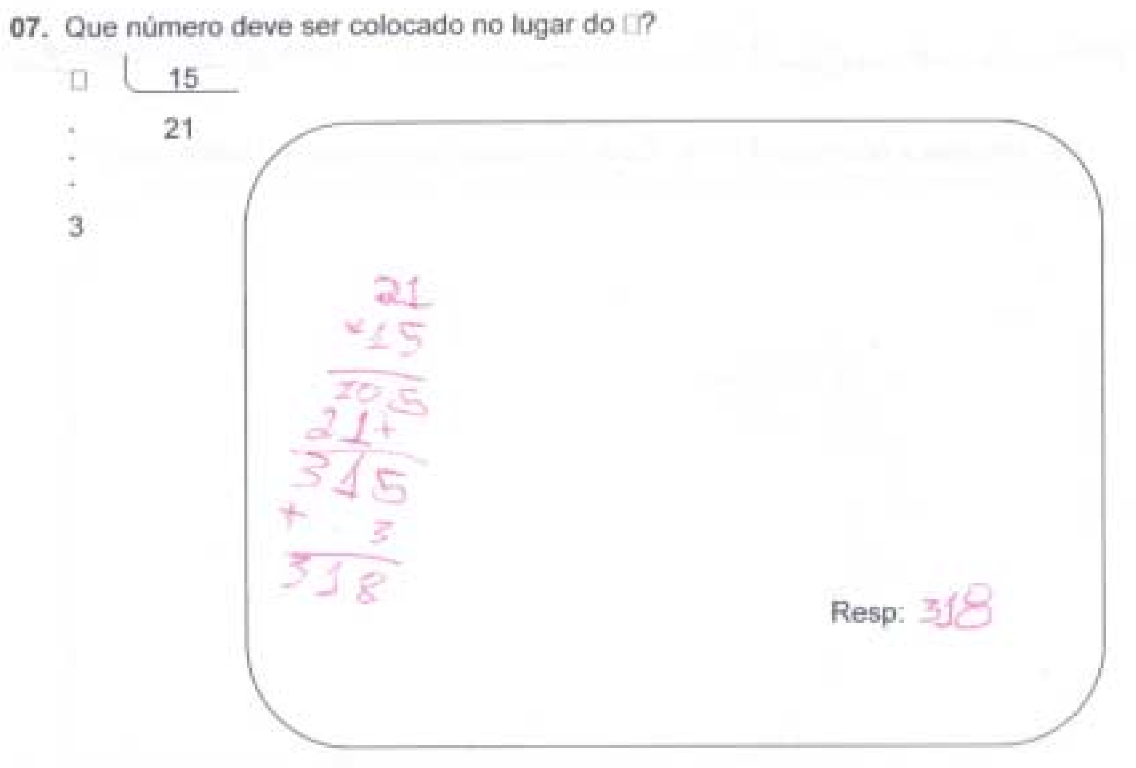


Figura 4.12 – Protocolo do aluno 2

Vale a pena mencionar que, ao ser chamado para entrevista, esse aluno saiu da sala virando cambalhota e jogando-se no chão. O fato começou a nos dar indícios de que ele era muito agitado.

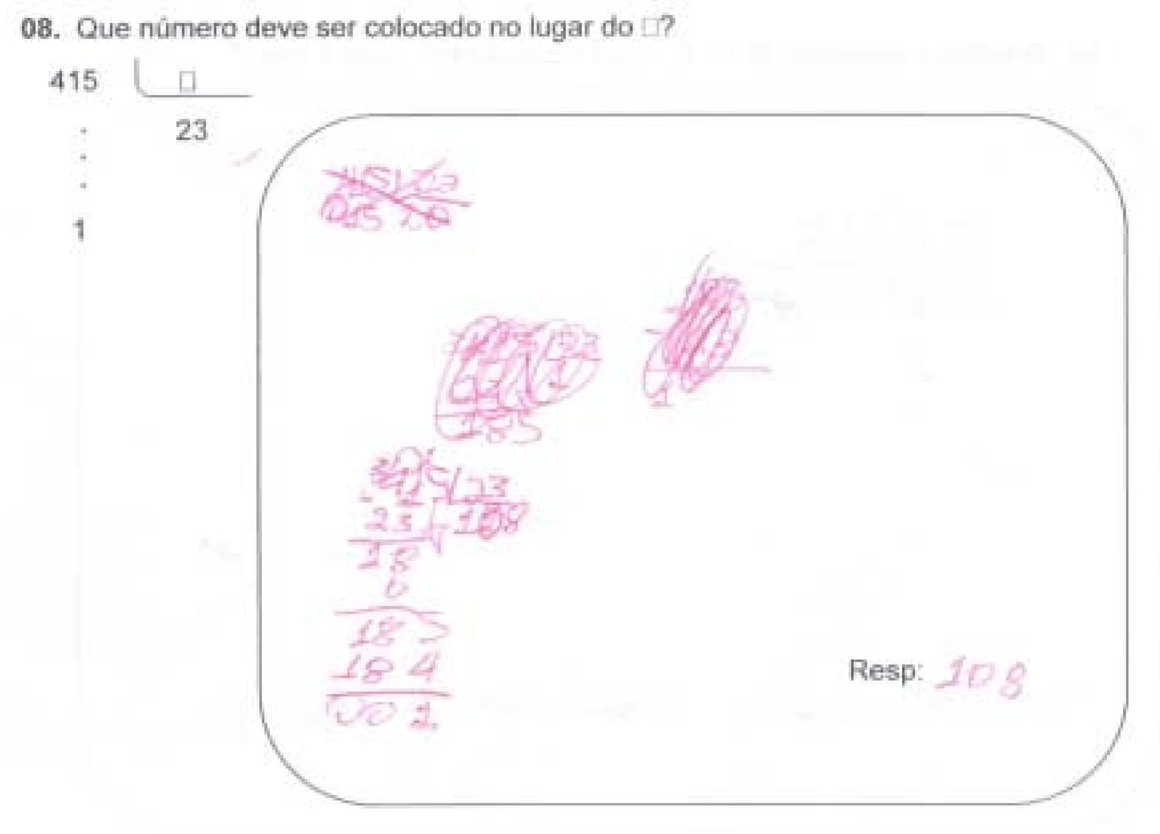
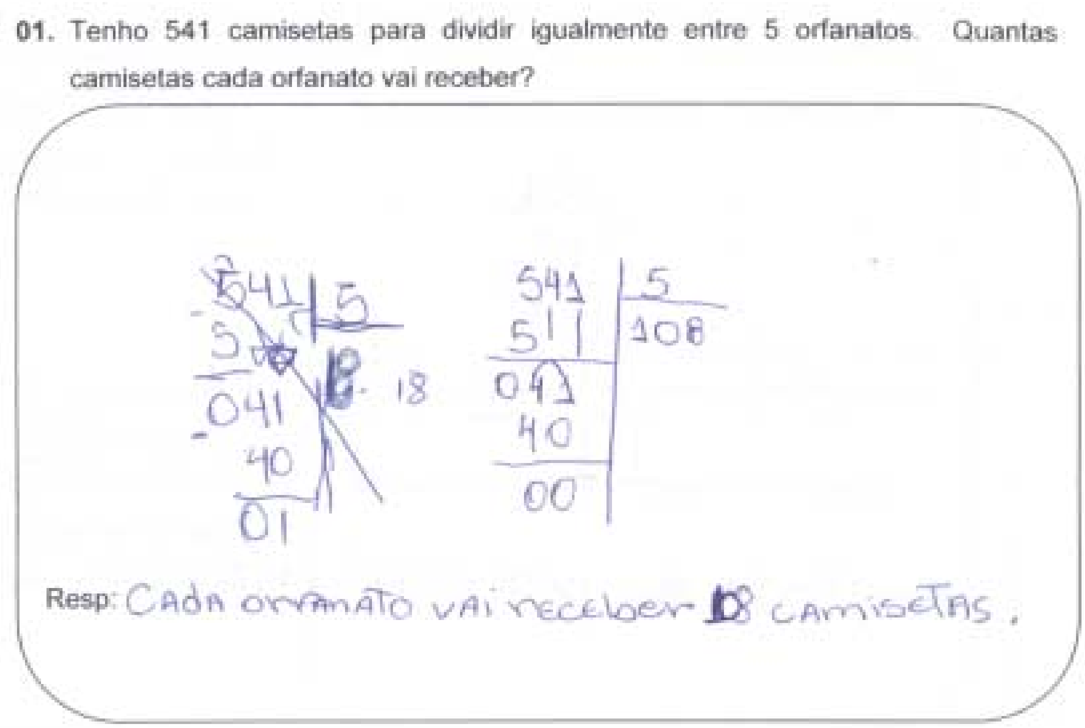


Figura 4.13 – Protocolo do aluno 2

O próximo entrevistado foi o aluno de número 10. Este foi um dos 9 que acertaram maior número de questões contextualizadas, quando comparamos com o número de acertos das correspondentes questões formais. Ele foi escolhido por ter acertado três questões contextualizadas e nenhuma formal.

Observe as resoluções das questões 1 e 6 nas figuras 4.14 e 4.15.

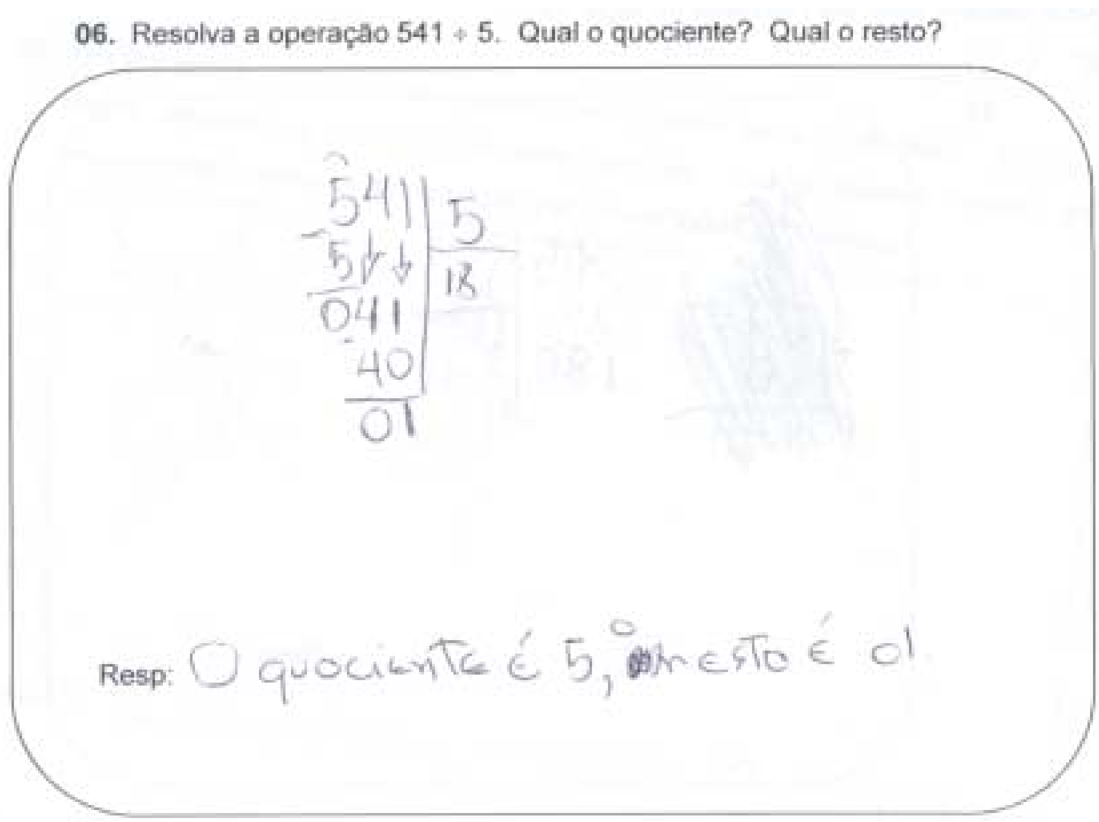

01. Tenho 541 camisetas para dividir igualmente entre 5 orfanatos. Quantas camisetas cada orfanato vai receber?

541 | 5
-5 | 18
041
-40
01

541 | 5
5 | 108
041
40
00

Resp: Cada orfanato vai receber 108 camisetas.

Figura 4.14 – Protocolo do aluno 10


06. Resolva a operação 541 ÷ 5. Qual o quociente? Qual o resto?

541 | 5
-5 | 18
041
-40
01

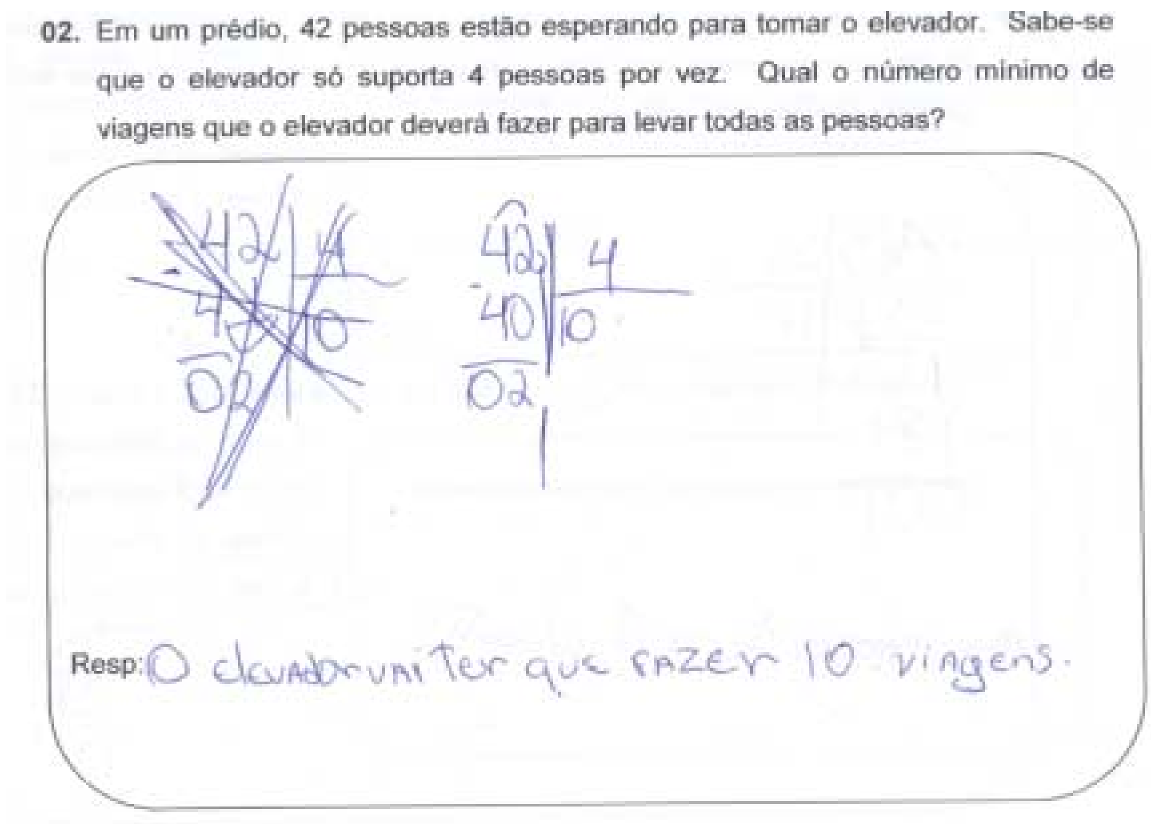
Resp: O quociente é 5, resto é 01

Figura 4.15 – Protocolo do aluno 10

Na entrevista, ele afirmou ter riscado a primeira operação feita na questão 1 “porque não era a resposta certa”. Quando perguntamos como ele percebeu que o resultado estava incorreto, ele disse que fez as contas na cabeça e mostrou segurança, pois sabia que o resultado 108 estava correto.

Quanto à questão 6, ele afirmou inicialmente: “É a mesma conta, né? Mas aqui eu risquei, né? E tava certa!” – afirmando ser 18 o resultado correto. Ele ficou bem confuso para decidir qual das duas estava certa, só percebendo que a resposta correta era 108, quando se remeteu ao contexto e tomou consciência de que 18 camisetas para 5 orfanatos eram poucas, considerando o número de camisetas que deviam ser distribuídas.

Quanto às questões 2 e 5, cujo quociente era 10, ele acertou a contextualizada, mas apresentou quociente 1 na formal. Na entrevista, o aluno, assim como nas questões analisadas acima, percebeu que a operação era a mesma e que o resultado não poderia ser 1. Observou também que, neste caso, “é mais fácil fazer de cabeça do que no papel!”. Este aluno, ao apresentar a resposta da questão 2, apresentou 10, como sendo a resposta correta, não atentando para o fato de que com 10 viagens sobrariam 2 pessoas:


02. Em um prédio, 42 pessoas estão esperando para tomar o elevador. Sabe-se que o elevador só suporta 4 pessoas por vez. Qual o número mínimo de viagens que o elevador deverá fazer para levar todas as pessoas?

42 | 4
-40 | 10
02

Resp: O elevador vai ter que fazer 10 viagens.

Figura 4.16 – Protocolo do aluno 10

Incentivado a explicar a que ele deve o fato de ter acertado as questões contextualizadas e errado as formais, ele respondeu: “Deve ser por causa da questão, da coisa aqui. Como é que fala? Não sei... deve ser por que aqui tá escrito e lá pra resolver... eu nem percebi isso aí”. Sua entrevista dá indícios de que ele acha mais fácil perceber a grandeza do resultado quando há a presença de um contexto.

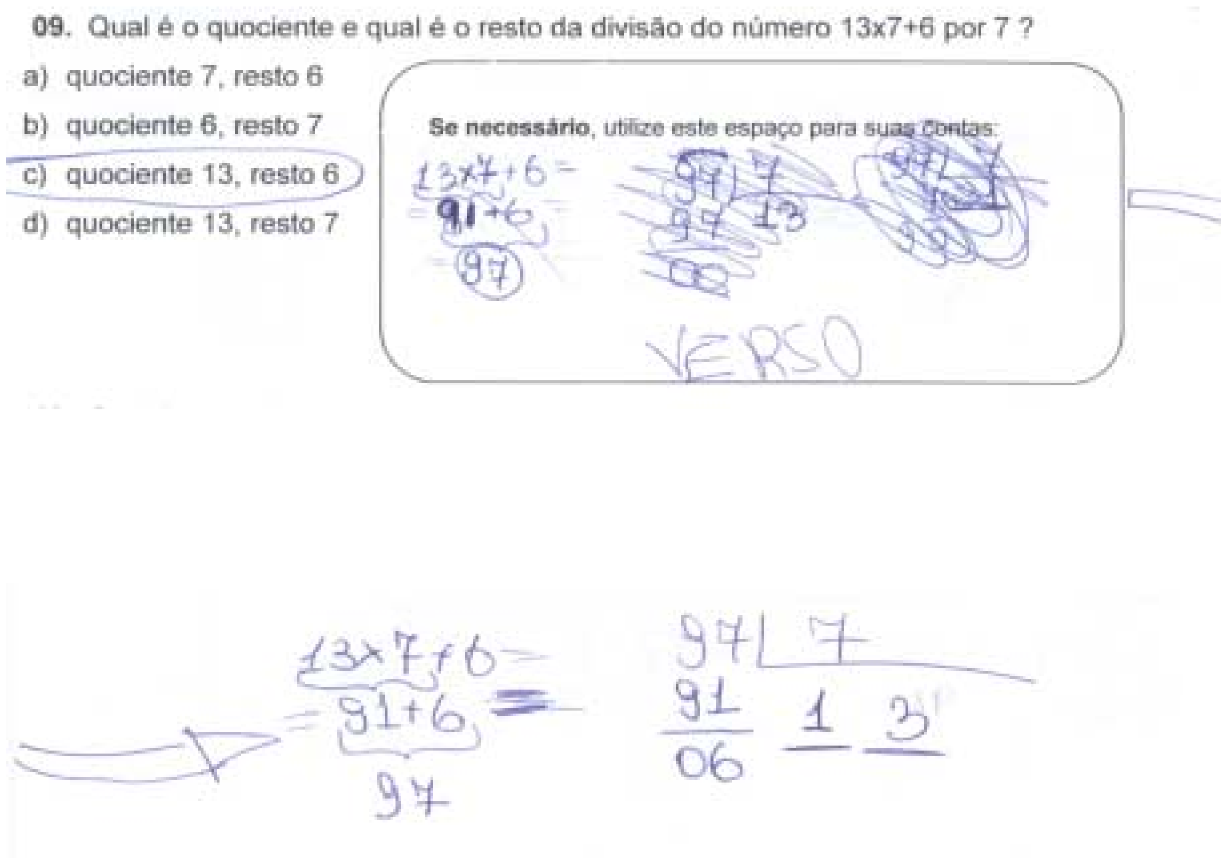
Ele acertou as questões 9 a 12 e não apresentou nenhum registro escrito, o que sugere que ele já teria internalizado algumas relações entre dividendo, divisor, quociente e resto.

No entanto, a entrevista esclareceu que o aluno não havia obedecido a uma norma colocada para a resolução do teste: todas as contas deveriam ser feitas no papel. Ele usou sua mesa para resolver, por divisão, as questões, depois da obtenção do dividendo na forma decimal. Estimulado pelo entrevistador a obter as respostas sem lançar mão desse recurso, o aluno declarou que isso só seria possível por meio de cálculo mental.

O aluno não chegou ao resultado correto nas questões 7 e 8, embora tenha demonstrado saber efetuar reversões. Também não demonstrou conhecer a técnica da divisão. Além disso, este aluno não percebe a possibilidade de resolver as questões 9 a 12 sem a obtenção do dividendo em sua forma decimal. Assim, não achamos apropriado considerá-lo no nível de processo, apesar de demonstrar saber fazer reversões.

O quarto sujeito entrevistado foi o de número 27. Nas questões 9 a 12, parece-nos que esse aluno percebeu que não precisava obter o dividendo na forma decimal enquanto resolvia as questões, pois começou fazendo contas e, nas duas últimas, escreveu que chutou, mas assinalou as alternativas corretas. Entretanto, a entrevista não confirmou nossa hipótese.

Veja inicialmente seu protocolo:



09. Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+6 por 7 ?

a) quociente 7, resto 6
b) quociente 6, resto 7
c) quociente 13, resto 6
d) quociente 13, resto 7

Se necessário, utilize este espaço para suas contas:

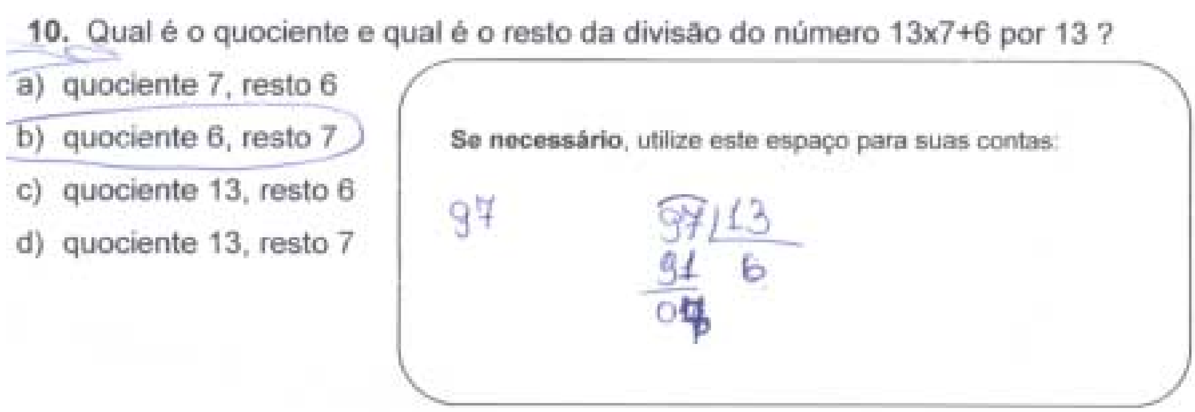
13x7+6 =
= 91+6 =
= 97

VERSO

13x7+6 =
= 91+6 =
97

97 | 7
91   13
06

Figura 4.17 – Protocolo do aluno 27



10. Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+6 por 13 ?

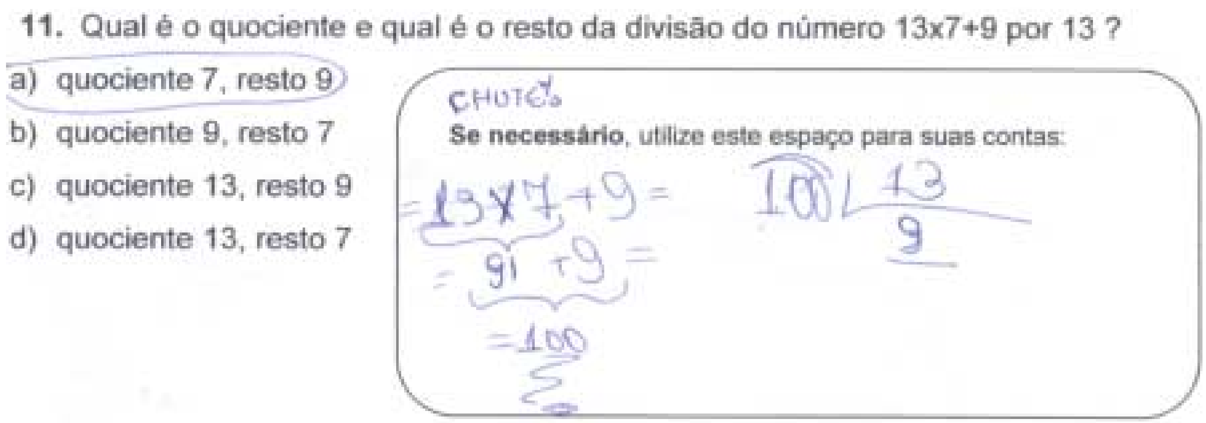
a) quociente 7, resto 6
b) quociente 6, resto 7
c) quociente 13, resto 6
d) quociente 13, resto 7

Se necessário, utilize este espaço para suas contas:

97

97 | 13
91   6
06

Figura 4.18 – Protocolo do aluno 27



11. Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+9 por 13 ?

a) quociente 7, resto 9
b) quociente 9, resto 7
c) quociente 13, resto 9
d) quociente 13, resto 7

CHUTEI

Se necessário, utilize este espaço para suas contas:

$= \underbrace{13 \times 7}_{} + 9 =$

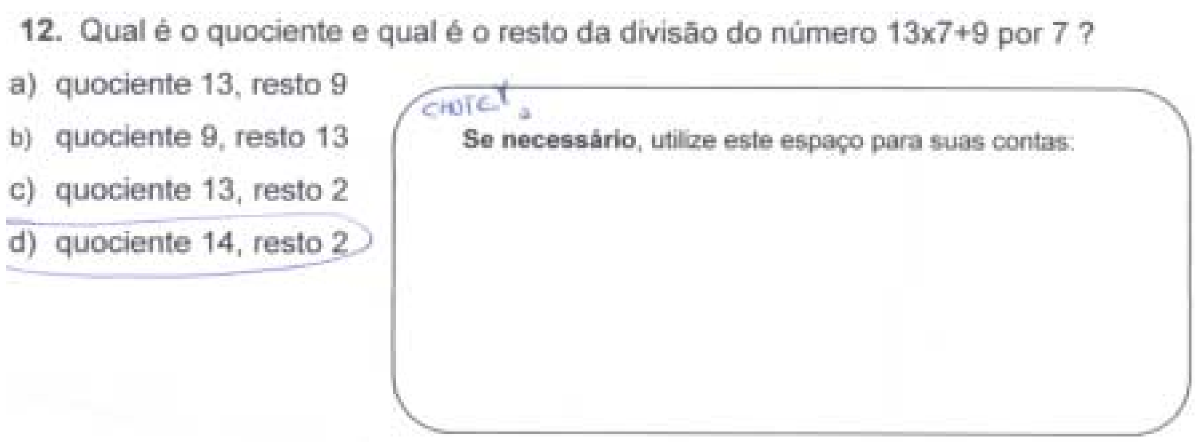
$= \underbrace{91 + 9}_{} =$

$= 100$

100 | 13

9

Figura 4.19 – Protocolo do aluno 27



12. Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+9 por 7 ?

a) quociente 13, resto 9
b) quociente 9, resto 13
c) quociente 13, resto 2
d) quociente 14, resto 2

CHUTEI

Se necessário, utilize este espaço para suas contas:

Figura 4.20 – Protocolo do aluno 27

Mas, quando perguntamos, o que ele pensou para resolver estas questões, ele disse:

Aluno 27: Ah, eu acho que eu tentei fazer mais ou menos de cabeça, ...

Quando solicitamos que ele se explicasse melhor, ele não conseguiu. Este aluno escreveu nas duas últimas questões que havia chutado. Conjeturamos que ele teria percebido que não havia necessidade de fazer operações, pois assinalou as alternativas corretas. Entretanto, não soube explicar o que pensou e, quando indagado se era possível resolver esse exercício sem contas, disse que não conseguiria. Solicitado a verificar se o seu resultado estava certo na questão 9, o aluno multiplicou 13 por 7 chamando o procedimento de prova real; disse também que a multiplicação é o inverso da divisão, mas não conseguiu perceber, de início, que estava refazendo a primeira operação feita (quando obteve o dividendo na forma decimal). O fato nos dá indícios de que o aluno pode ter feito alguma conta de cabeça ou na carteira, mas, provavelmente, não percebeu que não precisava fazer operações.

Este aluno, assim como o sujeito de número 10, obteve o quociente correto 10 na questão 2 (contextualizada) e obteve 1 na sua correspondente formal (questão 5). Na questão contextualizada, não percebeu que dez viagens seriam insuficientes para levar todas as pessoas. Quando perguntamos se a resposta apresentada respondia o problema, o aluno respondeu:

Aluno 27: Eu acho que responde.
Entrevistador: Então, se eu perguntar para você: qual o número mínimo de viagens que o elevador deve fazer para levar todas as pessoas? Qual é a resposta?
Aluno 27: Aqui tá 10.
Entrevistador: Com 10 ele consegue levar todas as pessoas?
Aluno 27: Não. Porque sobram duas pessoas.
Entrevistador: Sobram duas, então se você tivesse que responder: qual o número mínimo de viagens que o elevador deverá fazer para levar todas as pessoas?
Aluno 27: 12, por que daí são mais... não, são 11.

Entrevistador: Então, a resposta seria...
Aluno 27: 12.

Apesar de rapidamente perceber que a resposta dada na questão não estava correta, o aluno não se deu conta de que mais uma viagem seria suficiente, ou seja, não interpretou de forma correta o resto em relação à situação-problema apresentada.

Quando pedimos para o aluno olhar sua questão número 5 (análoga formal), este inicialmente disse que sua resposta estava certa. Quando pedimos que ele comparasse as duas contas, perguntamos o que ele achava, inicialmente ele disse que ambas estavam erradas e depois disse que a 2 poderia estar certa. Quando perguntamos por que, ele respondeu:

Aluno 27: Porque eu acho que é mais provável que 42 dividido por 4, dê 10.

Neste caso, pareceu-nos que este aluno demonstra certa capacidade de estimativa na divisão de Números Naturais. Mas vejamos o que o mesmo responde quando indagamos se ele sabia explicar por que a conta do exercício 5 estava errada:

Aluno 27: A <u>resposta</u> tá errada, a conta tá certa.

O aluno mostra claramente não ter domínio sobre esta operação e as relações entre seus elementos. Faz muita confusão quando pedimos para explicar o que fez, ou chegar a alguma conclusão.

Perguntamos, então, qual das duas questões ele achava mais fácil. Eis sua resposta:

Aluno 27: Eu acho que esta, porque está explicando direitinho. (referindo-se à questão contextualizada) (...) apesar que a 5 também tá fácil porque já tá mostrando a conta que você tem que fazer, né?

Aqui também percebemos o quanto este aluno é indeciso para fazer escolhas.

O aluno também foi um dos quatro que apresentou a seguinte resolução da questão 3: 21 + 3 = 24, ao invés de 21 x 15 + 3 = 318. Quando perguntamos porque ele fez 21 mais 3, ele primeiro disse que foi falta de atenção, porque deveria fazer subtração ao invés de adição; depois reiterou:

Aluno 27: Não, tá certo porque a pergunta é quanto Maria havia dado para Nathália? Quanto ela havia dado. Se ela gastou 21 e sobrou 3, tem que fazer a soma para você poder descobrir quanto.

Mais uma vez podemos perceber a confusão que este aluno faz entre os dados do problema.

Um comentário que ainda gostaríamos de fazer com relação a esse aluno, é a estratégia utilizada por ele para resolver a questão 8 durante a entrevista. Vejamos primeiro a resolução que apresentou em seu protocolo:

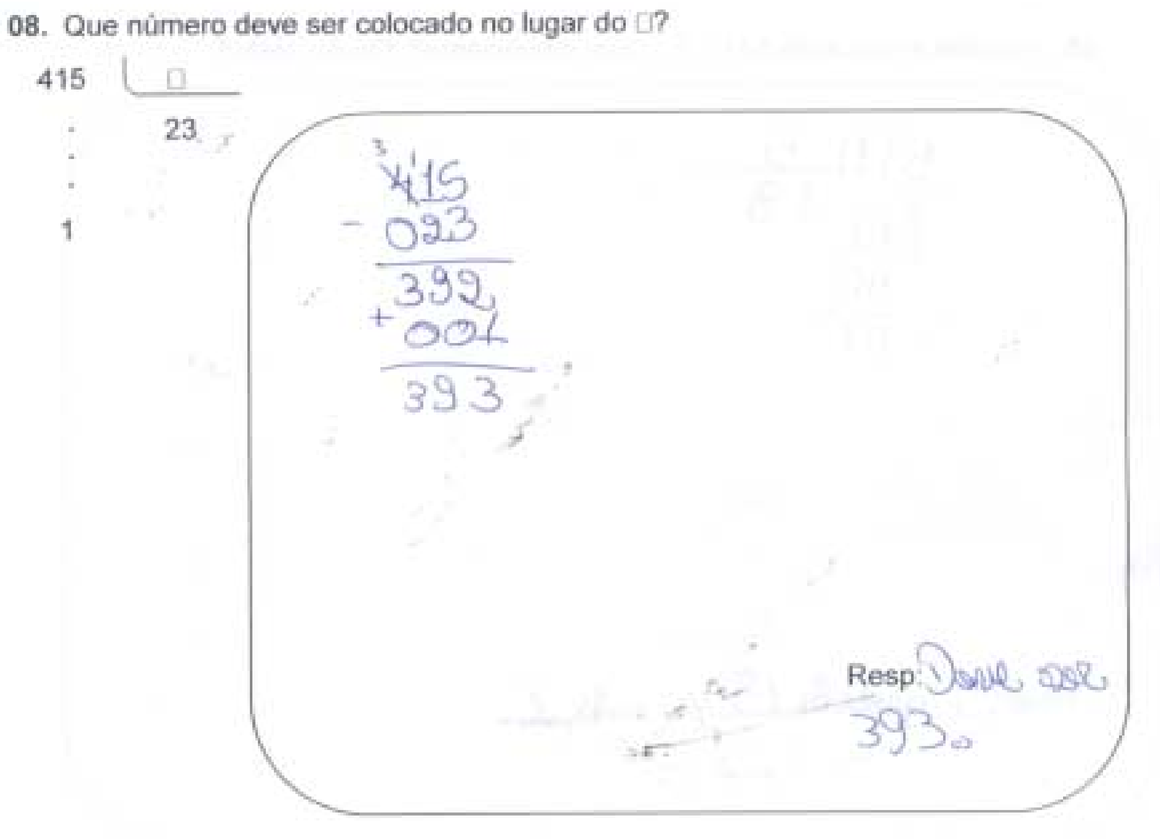


Figura 4.21 – Protocolo do aluno 27

Podemos perceber que ele não utilizou a operação correta para a resolução da questão.

Perguntamos, então, o que ele faria para verificar se o resultado obtido por ele nessa questão está correto. Ele disse que não, porque o número obtido era muito grande; acrescentou que se o colocássemos no lugar do quadradinho, encontraríamos como quociente em número um pouco menor que 23: “*Uns 15...*”. Com essa estimativa, para multiplicações, podemos perceber que as relações que este aluno faz, aparentam fragilidade.

Incitado a refazer a questão, já que chegou à conclusão de que seu resultado estava incorreto, esse aluno disse: "*tem que ver quantos 23 cabem dentro desse número*" (referindo-se ao 415).

Pedimos que ele encontrasse, então, esse número. O aluno fez 23 vezes 4, depois 23 vezes 6, 23 vezes 8 e "pulou" para o 23 vezes 12 "*porque o número tá muito baixo* (refere-se ao resultado do produto)*, então, vou tentar o 12, se for muito, aí eu vou diminuindo*". Continuamos a perceber, neste outro trecho de entrevista, o quanto suas estimativas para multiplicação são imprecisas. Depois efetuou 23 vezes 14 e disse "*Ainda deu baixo; eu acho que é 15...*"; fez, então, 23 vezes 15, 23 vezes 16, 23 vezes 17 e, finalmente, 23 vezes 18: "*414, aí mais um que sobrou: 15*".

Perguntamos se ele achava que existia uma maneira mais fácil ao que ele respondeu: "*Não sei, acho que se eu tivesse visto logo que tava muito baixo e pegado um número maior*"...

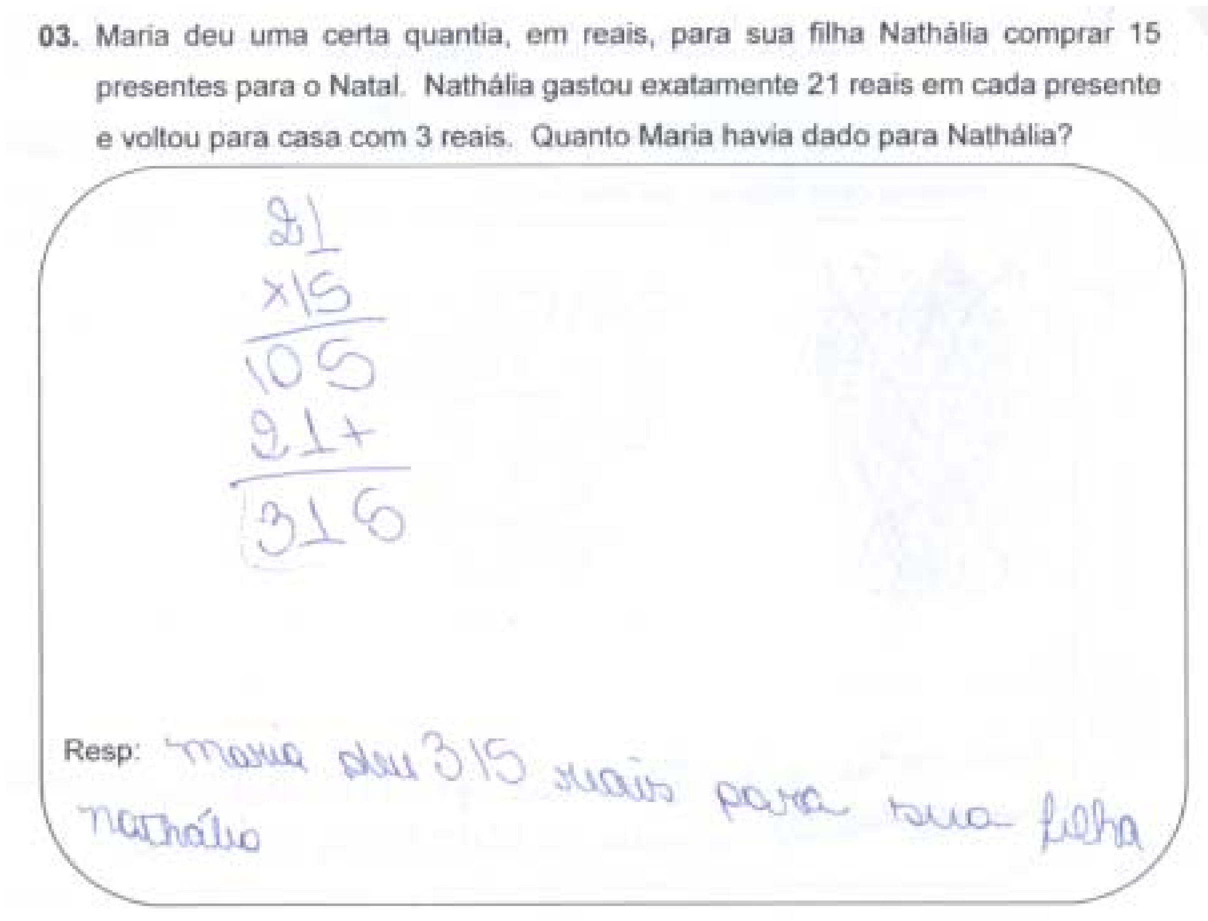
Entrevistador: Você não consegue imaginar um outro jeito de fazer sem ser conta de vezes?
Aluno 27: Soma.
Entrevistador: Ia fazendo 23 mais 23, mais 23, mais 23...
Aluno 27: Só que aí demoraria bastante, mais do que vezes.
Entrevistador: Outra conta não?
Aluno 27: Não, acho que só essas duas.

Neste trecho da entrevista, podemos perceber que o aluno não relaciona a operação de divisão com a idéia de cota, e que ele não é muito hábil com estimativas, embora, durante a entrevista, tenha estimado corretamente o resultado da divisão de 42 por 10. Essas indicações e as demais descritas anteriormente sugerem que este sujeito está no nível cognitivo de ação para divisão de Números Naturais.

O quinto e último aluno que citaremos, é o número 26. Começamos a entrevista pela questão 4, em que o aluno efetuou 415 vezes 23 ao invés de 415 dividido por 23. Perguntamos o que ele faria para verificar se o resultado encontrado (9545) estava correto. Assim como outros alunos entrevistados, este aluno respondeu que faria a prova real (apesar de não lembrar como é que se faz). De forma geral, quando solicitamos aos alunos que verifiquem se o resultado apresentado está correto, eles não duvidam da conta que escolheram, e sim, procuram apenas verificar se a conta foi feita corretamente. Assim, procuram fazer a prova real da conta, mas não voltam ao enunciado a fim de verificar se a resposta apresentada é coerente com os dados. Por exemplo: como Márcio pode ter 9545 clientes e, portanto, ter comprado 9545 presentes a 23 reais cada um e ter gasto somente R$ 415,00?

Pedimos então que verificasse se aquela conta respondia corretamente à questão, e não se a conta estava certa, ao que ele respondeu que dividiria 9545 por 415 e teria de obter o resultado 23. Ressaltamos que este aluno só conseguiu concluir que o resultado estava incorreto a partir de uma reflexão sobre os dados do problema, ou seja, quando questionamos diretamente se ele achava que 415 reais eram suficientes para comprar 9545 presentes a 23 reais cada um.

Veja seu protocolo da questão 3:



03. Maria deu uma certa quantia, em reais, para sua filha Nathália comprar 15 presentes para o Natal. Nathália gastou exatamente 21 reais em cada presente e voltou para casa com 3 reais. Quanto Maria havia dado para Nathália?

21
x15
105
21+
316

Resp: maria deu 315 reais para sua filha nathália

Figura 4.22 - Protocolo do aluno 26

Solicitado a verificar se o seu resultado estava correto, ele efetuou 315 vezes 21. Obtendo 6615, chegou à conclusão de que a conta feita anteriormente estava errada.

Ao perceber que não havia levado em consideração o resto 3, chegou à conclusão que a resposta não era 315, e sim, 312, demonstrando não relacionar corretamente o resto com os demais termos.

Quanto à questão 2, tínhamos suposto que o aluno tinha procedido por meio de cálculos mentais e que havia efetuado a operação 10 vezes 4 para verificar a veracidade do resultado obtido. Veja seu protocolo:

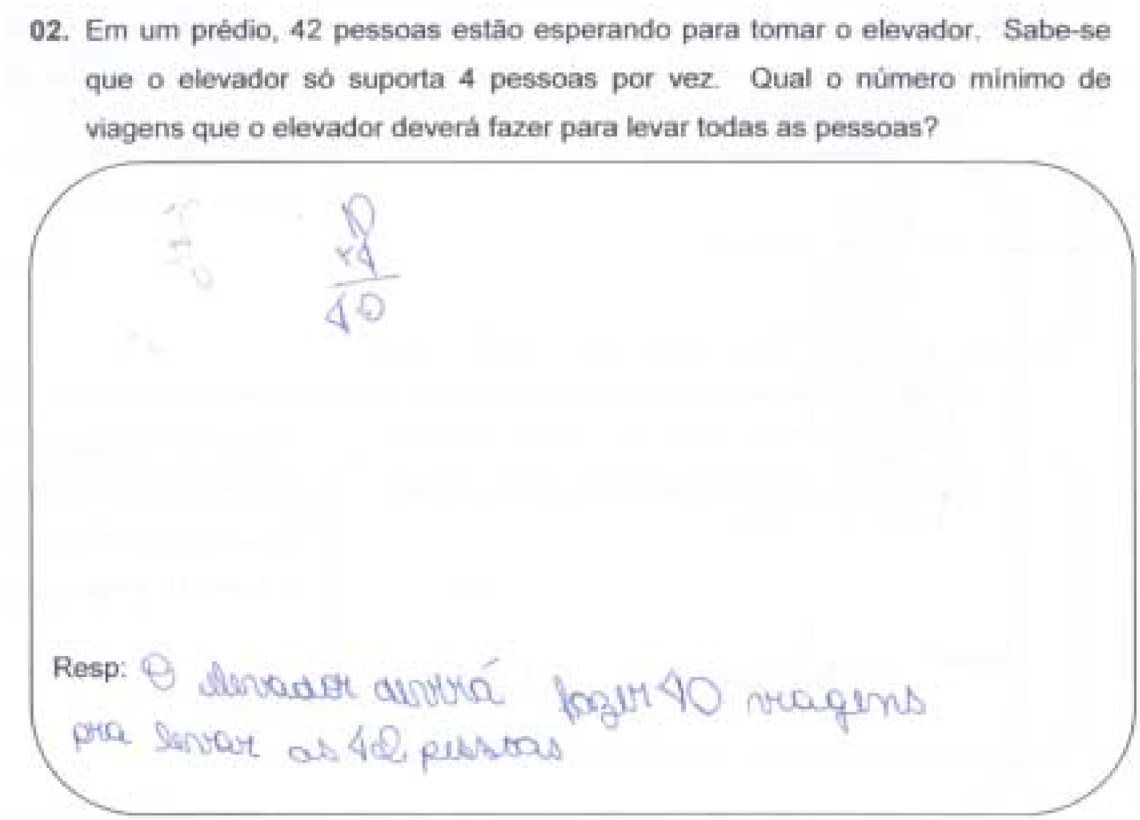


Figura 4.23 - Protocolo do aluno 26

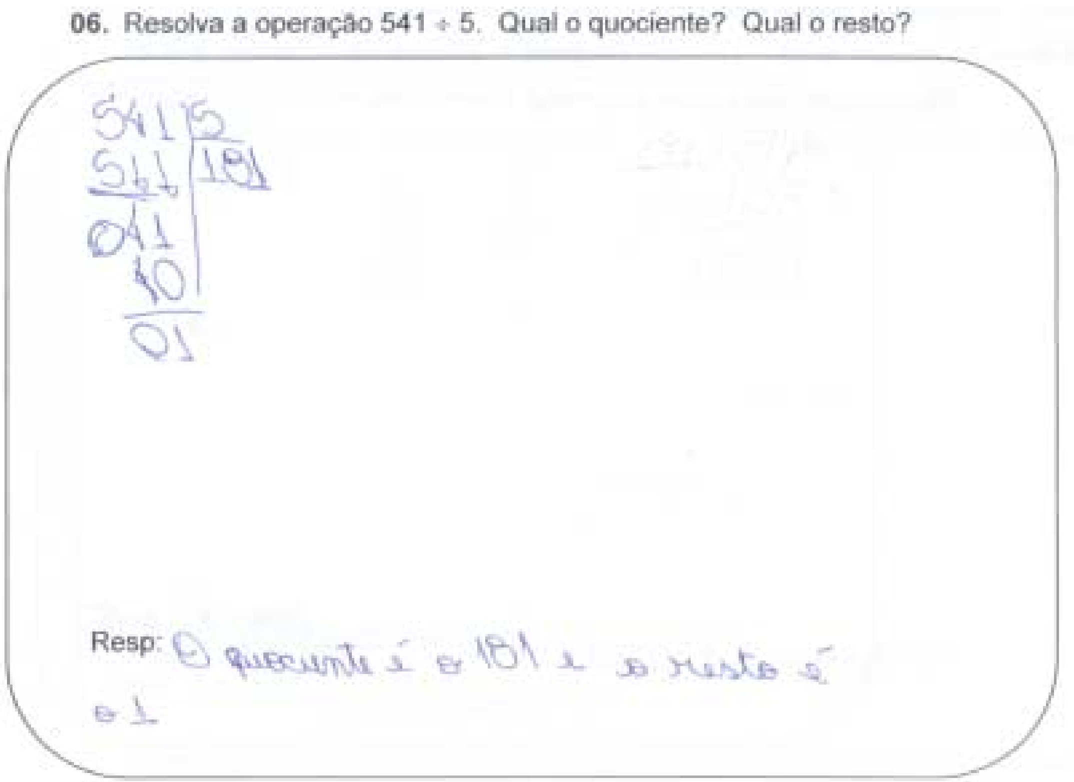
Quando indagado se a sua resposta estava correta, o aluno disse que o elevador não precisaria fazer tantas viagens (referindo-se as 40 viagens respondidas por ele), mas não soube dizer quantas seriam realmente necessárias. Depois perguntamos como ele resolveria, naquele momento, a mesma questão, ele respondeu que faria 42 dividido por 4 e que, sem montar a conta, não saberia dizer qual o resultado que iria obter.

Ao fazer o cálculo, obteve resultado 1, mas, como percebeu que uma viagem não era suficiente, resolveu fazer 42 vezes 4. Assim, observou que 168 era muito, disse que, em algumas viagens, ele já conseguiria levar todas as pessoas. Perguntamos quantas seriam a fim de, mais uma vez, analisar se este aluno poderia ter resolvido a questão com cálculos mentais, como havíamos suposto, ao que ele respondeu: “*mais ou menos umas... 30 viagens*”.

Insistimos para que ele resolvesse a questão. Ele, então, foi contando de 4 em 4, fazendo um “risquinho” para cada quatro pessoas, chegando à conclusão de que seriam 10 viagens e, posteriormente, 11.

Quanto a primeira questão, o aluno também encontrou resultado 18, riscou e depois fez novamente encontrando então o resultado correto 108. Ele afirmou ter riscado porque tinha feito errado, mas não teve segurança para afirmar que 108 estava correto.

Mostramos ao aluno a resolução feita por ele na questão 6, e pedimos que comparasse com a operação feita para a questão 1. Veja seus protocolos:

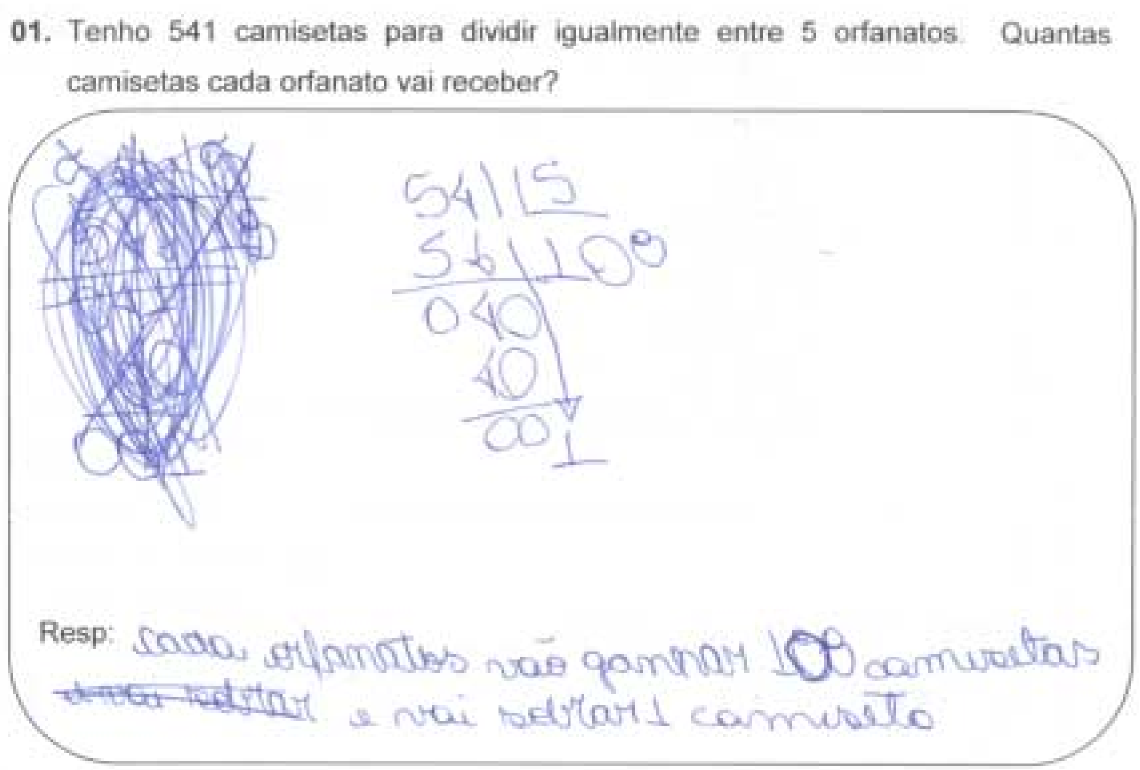


06. Resolva a operação 541 ÷ 5. Qual o quociente? Qual o resto?

541 | 5
5 | 181
041
40
01

Resp: O quocente é o 181 e o resto é o 1

Figura 4.24 – Protocolo do aluno 26



01. Tenho 541 camisetas para dividir igualmente entre 5 orfanatos. Quantas camisetas cada orfanato vai receber?

541 | 5
5 | 108
040
40
001

Resp: cada orfanatos vão ganhar 108 camisetas ~~sobra sobrar~~ e vai sobrar 1 camiseta

Figura 4.25 – Protocolo do aluno 26

Ele afirmou que a questão 1 estava certa e, com a explicação dada por ele, ficou evidente a que ele achava correta: a resolução da operação feita na questão 6, ou seja, demonstrou insegurança e confusão ao responder uma pergunta.

Com essa entrevista, o aluno apresenta fortes indícios de que se encontra no nível cognitivo de ação.

Quanto ao aluno número 19, um dado interessante seria ele ter acertado 3 das 4 questões do terceiro bloco (questões 9 a 12). Ele fez a primeira questão obtendo o dividendo na sua forma decimal e as demais sem apresentar nenhum resultado escrito. O fato nos leva a pensar que este aluno percebeu que não precisava utilizar esse recurso. A entrevista esclareceu, no entanto, que este sujeito copiou resolução da primeira questão e as respostas das demais.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSÃO

5.1 - RELACIONANDO ANÁLISES DE ENTREVISTAS COM QUESTÕES DE PESQUISA

Apresentamos aqui informações sobre os sujeitos entrevistados, com relação a nossas questões de pesquisa.

Localizando o sujeito número 10 com relação às conclusões do capítulo anterior, temos:

- Está entre os 16 que não demonstraram conhecer a técnica da divisão (segundo nosso critério); além disso, incorreu várias vezes em engano quanto à colocação de 0 no quociente.

- Está entre os 11 alunos que empregaram a operação de divisão para resolver as 3 questões contextualizadas nas quais a divisão era uma operação apropriada.

- Está entre os 15 que se mostraram capazes de efetuar ambas as reversões, e entre os 13 que utilizaram o resto de forma inadequada na questão 7.

A entrevista mostrou que ele é um dos sujeitos para os quais o contexto parece estimular não só o emprego da operação de divisão como a resolução correta do algoritmo, pois resolveu corretamente as 3 questões contextualizadas. Embora seja capaz de efetuar reversões, não obtém os resultados corretos. Não foi classificado quanto ao nível cognitivo, pois os dados parecem ser insuficientes para fazê-lo. Entretanto, merece menção o fato de que nossa análise tenha apontado sujeitos capazes de reversão que não demonstram conhecer a técnica da divisão.

Passemos ao sujeito de número 2:

- Está entre os 12 que conhecem a técnica da divisão.

- É um dos 2 alunos que empregaram a operação de divisão apenas na questão contextualizada 4.

- Está entre os 15 que se mostraram capazes de efetuar ambas as reversões

Estimulado durante a entrevista, esse aluno foi capaz de identificar a operação de divisão como adequada para resolver as outras questões contextualizadas. Além disso, utilizou cálculos mentais que lembram a idéia de divisão quotitiva para resolver uma delas. Foi considerado no nível cognitivo de processo.

Passemos aos sujeitos de números 6, 19, 26 e 27:

- O sujeito 6 está entre os 12 que conhecem a técnica da divisão; os sujeitos 19, 26 e 27 encontram-se entre os 16 que não demonstraram conhecer a técnica da divisão

- O aluno 26 está entre os 26 sujeitos que utilizaram a operação de divisão apenas para resolver o problema partitivo; o 6 entre os 2 que utilizaram a divisão para resolver apenas o quarto problema; os sujeitos 19 e 27 encontram-se entre os 11 que empregaram a operação de divisão para resolver as 3 questões contextualizadas nas quais a divisão era uma operação apropriada.

- Os alunos 6, 19 e 26 encontram-se entre os 15 que efetuaram ambas as reversões; o sujeito 27 encontra-se entre os 9 alunos que efetuaram a reversão apenas para encontrar o dividendo.

Na entrevista, o sujeito número 6 declarou que “achou mais fácil” resolver os outros problemas empregando estimativas. Mostrou que, estimulado, consegue identificar colocações incorretas do 0 no quociente. Faz várias relações entre dividendo, divisor, quociente e resto. Foi considerado no nível de concepção-processo.

As entrevistas dos sujeitos de número 19, 26 e 27 não acrescentam muito aos protocolos. Nossa análise considerou que esses alunos estariam no nível cognitivo de concepção-ação.

5.2 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Passemos agora às conclusões finais relacionadas às nossas questões de pesquisa.

Primeiramente responderemos à nossa primeira questão de pesquisa: *Investigar se o aluno de 6ª série do ensino fundamental conhece a técnica da divisão*, cujo principal objetivo seria o de procurar indícios de que os sujeitos têm conhecimento e dominam a técnica da divisão de Números Naturais e se sabem o que significam os termos: quociente e resto.

Percebemos que 12 sujeitos dominam a técnica da divisão. O engano mais freqüente com relação a essa técnica é o uso incorreto do zero no quociente. Entretanto, há alunos capazes de identificar rapidamente o engano, se adequadamente estimulados. É o que mostra a entrevista do aluno número 6 que, após fazer a prova real, percebe rapidamente que o problema era o zero mal utilizado e, por estimativa, nos explica qual seria o resultado correto.

Quanto a conhecerem, ou não, os termos quociente e resto, os alunos, em sua maioria, sabem que quociente é o resultado da divisão e resto “o que sobra”. Mesmo os alunos que não encontraram quocientes e restos corretos, responderam de forma coerente com a resposta encontrada por eles. Apenas dois alunos, na hora de apresentar a resposta, apresentaram o divisor como sendo o quociente.

Quanto à nossa segunda questão de pesquisa: *Investigar se ele recorre à divisão para resolver as questões contextualizadas*, de modo geral, pudemos constatar que todos os alunos da nossa amostra utilizaram a operação de divisão para resolver pelo menos uma das três questões contextualizadas: 1,2 e 4. Desses, 11 utilizaram essa operação para resolver todas as três questões.

Observamos que o número de alunos que escolheu a operação de divisão para resolver a primeira questão foi consideravelmente maior do que o número de alunos que escolheu esta operação para resolver as outras duas questões que poderiam ser resolvidas dessa forma: 26 para 17 e 15, respectivamente. Atribuímos esse fato à questão 1 ser a única que consistia num problema partitivo. Como já havíamos mencionado, estes são considerados mais fáceis pelos alunos do que os que envolvem divisão quotitiva. A entrevista do aluno 26 mostrou que é possível levar os alunos a estender a aplicação da divisão aos outros problemas, com instruções apropriadas.

Passemos então para a nossa terceira questão de pesquisa: *Analisar relações que eles estabelecem entre dividendo, divisor, quociente e resto na divisão de Números Naturais*.

Observamos que 15 sujeitos estabelecem corretamente algumas relações entre dividendo, divisor, quociente e resto, tanto quando é pedido que se encontre o dividendo, como quando pedimos que seja encontrado o divisor. Nove outros alunos apenas conseguem estabelecer relações quando é pedido que se encontre o dividendo. Atribuímos isso ao fato de que, para encontrar o dividendo, basta aplicar a operação inversa à operação dada, procedimento conhecido pelos alunos como prova real.

Dos 15 alunos que estabeleceram relações corretas entre os termos da divisão, temos que 12 estão entre os que conhecem a técnica da divisão. Desses 12, 8 foram classificados por nós como alunos que dominam essa técnica. Pudemos perceber então que, de modo geral, a capacidade de estabelecer relações entre os termos de uma operação é um passo posterior à habilidade de resolver a operação direta. No entanto, temos 3 sujeitos que fizeram ambas as reversões de forma correta e, segundo nossa análise, não conhecem a técnica da divisão. Um desses alunos, apesar de não ter resolvido corretamente as operações nas questões formais, procedeu corretamente nas questões contextualizadas, o que sugere que, para uma análise mais apurada, tenhamos que levar em consideração outras variáveis, como as entrevistas, onde ele demonstrou conhecer e dominar essa técnica.

Gostaríamos de ressaltar aqui que nenhum aluno relacionou corretamente o resto com os demais termos quando era pedido que se encontrasse o divisor. Todos os alunos que estabeleceram alguma relação parcialmente correta entre os termos dividiram o dividendo pelo quociente; nenhum aluno, antes de efetuar a divisão, subtraiu o resto do dividendo. Esta relação estabelecida por 15 alunos de nossa amostra, só é verdadeira quando o resto é menor que o quociente apresentado. Concluímos que o resto é o termo que os alunos têm maior dificuldade de relacionar com os demais.

REFERÊNCIAS

ASIALA, Mark; BROWN, Anne; DEVRIES, David J.; DUBINSKY, Ed; MATHEWS, David & THOMAS; Karen. **A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education.** In: CBMS Issues in Mathematics Education, vol. 6, 1996.

BRZEZINSKI, I., GARRIDO, E. **Análise dos trabalhos do GT Formação de professores: o que revelam as pesquisas do período 1992-1998**, Revista Brasileira de Educação, n. 18, p. 82 a 100, Editora Autores Associados, ESSN 1413-2478, Rio de Janeiro, Brasil (apoio CNPq), 2002.

CAMPBELL, Stephen R. **Coming to terms with division: preservice teachers' understanding.** In Learning and teaching number theory: research in cognition and instruction. Ablex publishing. Westport, EUA, 2002.

CARRAHER, Terezinha & CARRAHER, David & SCHLIEMANN, Analúcia. **Na vida dez, na escola zero**. 13 ed. São Paulo: Cortez, 2003.

COELHO, S. P., MARANHÃO, M. C., MACHADO, S. D. A., **Qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores?** In: Anais do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), Santos, 2003.

CUNHA, M. C. **As operações de multiplicação e divisão junto aos alunos de 5ª e 7ª séries.** Dissertação (Mestrado) São Paulo, 1997, Pontifícia Universidade Católica.

DUBINSKY, Ed. **Reflective abstraction in advanced mathematical thinking.** In: D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking. Boston: Kluwer academic, 1991.

GREER, Brian. **Multiplication and division as models of situations.** In: D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. p. 276-295. New York: Macmillan. 1992.

LÜDKE, Menga & André, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.** Coleção: Temas básicos de Educação e Ensino. 6ª reimpressão. São Paulo: EPU, 2003.

LUCKESI, Cipriano C. **Avaliação da aprendizagem: análise crítica e proposições.** Vídeo Série encontros (Atta mídia e educação).

MACK, Nancy K. **Learning fractions with understanding: building on informal knowledge.** In: Journal for research in mathematics education. vol. 21, n. 1, 16-32. Northern Illinois University, 1990.

MONTANGERO, Jacques & NAVILLI, Danielle Maurice. **Piaget ou a inteligência em evolução.** Tradução de Tânia Beatriz Iwaszko Marques e Fernando Becker. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Brasil – Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação fundamental. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS – Matemática. 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. Brasília, 1998.

PIAGET, J. **The equilibration of cognitive structures** (T. Brown and K. J. Thampy, trans.). Harvard University Press, Cambridge MA, 1985 (original published 1975).

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2ª edição. Interciência, 1978.

RUDIO, Franz Victor. **Introdução ao projeto de pesquisa científica.** 17ª ed. São Paulo: Vozes, 1992.

ZAZKIS, Rina & CAMPBELL, Stephen. **Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: preservice teachers' understanding.** In: Journal for research in mathematics education. Canadá, 1996, vol. 27, n. 5, 540-563.

ANEXO

A partir da próxima página temos o instrumento, usado para a parte escrita da nossa pesquisa, exatamente como foi utilizado.

Nome: ____ Série:______ Idade: ____

01. Tenho 541 camisetas para dividir igualmente entre 5 orfanatos. Quantas camisetas cada orfanato vai receber?

Resp:

02. Em um prédio, 42 pessoas estão esperando para tomar o elevador. Sabe-se que o elevador só suporta 4 pessoas por vez. Qual o número mínimo de viagens que o elevador deverá fazer para levar todas as pessoas?

Resp:

03. Maria deu uma certa quantia, em reais, para sua filha Nathália comprar 15 presentes para o Natal. Nathália gastou exatamente 21 reais em cada presente e voltou para casa com 3 reais. Quanto Maria havia dado para Nathália?

Resp:

04. Com 415 reais Márcio comprou presentes para todos os seus clientes gastando 23 reais por presente e aproveitou para tomar um café com um real que sobrou. Quantos clientes tem Marcio?

Resp:

Nome: ____ Série:______ Idade: ____

05. Resolva a operação 42 ÷ 4. Qual o resultado (quociente)? Qual o resto?

Resp:

06. Resolva a operação 541 ÷ 5. Qual o quociente? Qual o resto?

Resp:

07. Que número deve ser colocado no lugar do ?

$$\begin{array}{r|l} & 15 \\ \hline \vdots & 21 \\ 3 & \end{array}$$

Resp:

08. Que número deve ser colocado no lugar do ?

$$\begin{array}{r|l} 415 & \\ \hline \vdots & 23 \\ 1 & \end{array}$$

Resp:

Nome: ______________________________________ Série:______ Idade: ____

09. Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+6 por 7 ?

a) quociente 7, resto 6
b) quociente 6, resto 7
c) quociente 13, resto 6
d) quociente 13, resto 7

Se necessário, utilize este espaço para suas contas:

10. Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+6 por 13 ?

a) quociente 7, resto 6
b) quociente 6, resto 7
c) quociente 13, resto 6
d) quociente 13, resto 7

Se necessário, utilize este espaço para suas contas:

11. Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+9 por 13 ?

a) quociente 7, resto 9
b) quociente 9, resto 7
c) quociente 13, resto 9
d) quociente 13, resto 7

Se necessário, utilize este espaço para suas contas:

12. Qual é o quociente e qual é o resto da divisão do número 13x7+9 por 7 ?

a) quociente 13, resto 9
b) quociente 9, resto 13
c) quociente 13, resto 2
d) quociente 14, resto

Se necessário, utilize este espaço para suas contas: