

LEONEL VALPEREIRO MOUTINHO

**FRAÇÃO E SEUS DIFERENTES SIGNIFICADOS
UM ESTUDO COM ALUNOS DAS 4ª E 8ª SÉRIES
DO ENSINO FUNDAMENTAL**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**PUC/SP
São Paulo
2005**

LEONEL VALPEREIRO MOUTINHO

**FRAÇÃO E SEUS DIFERENTES SIGNIFICADOS:
UM ESTUDO COM ALUNOS DAS 4ª E 8ª SÉRIES
DO ENSINO FUNDAMENTAL**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como
exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da
Profa. Dra. Sandra Maria Pinto Magina*

**PUC/SP
São Paulo
2005**

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

Dedico este trabalho:

**Ao meu pai José Leonel e a minha mãe Maria Júlia
pelo grande apoio que sempre me deram**

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora professora Dra Sandra Maria Pinto Magina, pela orientação, dedicação, companheirismo e acolhimento.

À professora Dra Bárbara Lutaif Bianchini, pelas valiosas sugestões, comentários e críticas que contribuíram para elaboração e evolução desta pesquisa.

À professora Dra Adair Mendes Nacarato, por seus apontamentos e por suas sugestões, que muito contribuíram para evolução desta dissertação.

Aos meus amigos de mestrado, Fábio, Cristiane, Alécio, Wilson, Angélica, Raquel e em especial ao Aparecido e à Vera, que tanto contribuíram para realização deste trabalho.

À minha querida Rita de Cássia, pela grande ajuda e incentivo nos momentos mais difíceis dessa jornada.

À minha filha Carolina, pelos sorrisos que tanto me animam.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente auxiliaram na elaboração e desenvolvimento deste trabalho.

E finalmente, agradeço a Deus por ter me dado força, saúde, garra e perseverança para que eu pudesse conquistar mais essa vitória.

RESUMO

Esta pesquisa trata do ensino do conceito de Fração, teve por objetivo identificar as concepções que alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental utilizam frente a problemas que abordam este conceito. O estudo propôs-se a responder a seguinte questão de pesquisa: “Quais as concepções que são possíveis de se identificar com relação aos cinco diferentes significados da fração (Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador Multiplicativo), a partir da aplicação de um estudo diagnóstico, com alunos das 4ª e 8ª séries do ensino fundamental?” A fundamentação teórica da pesquisa contou com a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1993) e as idéias teóricas de Nunes et al (2003) com relação aos diferentes significados da fração. A metodologia constou de um estudo descritivo realizado com a elaboração de um instrumento diagnóstico que foi aplicado a 65 alunos da 4ª e 58 alunos da 8ª séries do Ensino Fundamental, distribuídos em duas escolas da rede pública estadual da cidade de São Paulo. Os resultados foram analisados, observando-se o desempenho e as estratégias utilizadas pelos alunos, quando resolveram de forma errônea as questões propostas. Algumas concepções usadas pelos alunos foram identificadas e variaram, conforme a situação e o significado abordado nas questões. Os alunos da 4ª série demonstraram possuir a concepção Parte-todo, como central para resolução dos problemas; já os das 8ª, além desta, buscaram resolver os problemas com um uso mais intenso de operações sem, contudo, atingir um índice de acerto favorável, o que resultou em um desempenho geral menor na 8ª do que a 4ª série. Conclui-se pela necessidade de se abordar um trabalho mais amplo do Campo Conceitual da Fração, com base no uso de diferentes situações, abordando os distintos significados da fração propostos por Nunes et al. (2003) na busca de um melhor aprendizado desse conceito ao longo das séries do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Fração, significados, estudo diagnóstico, Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This research is about the concept of fraction teaching. Its aim is identify the conceptions 4th and 8th grade students of Basic Education use when facing problems using this concept. The research intended to answer the following question: "Which conceptions can be identified in relation to the five different kinds of fraction (number, quotient, multiplying operator, Part-Whole and proportion), based on an applied diagnostic study, with students from the 4th and 8th grades of Basic Education?". The theoretical fundamentals of the research were based on Vergnaud's theory of Conceptual Field (1993) and the theoretical ideas of Nunes et al (2003) in relation to the different kinds of fraction. The methodology consisted in a descriptive study done with the elaboration of a diagnostic instrument, which was applied in 65 4th grade students and 58 8th grade students of Basic Education, divided in two State-public schools in São Paulo, the city. The results were analyzed observing the performance and the strategies used by students, when they solved erroneously the proposed questions. Some concepts used by them were identified and they varied according to the situation and the meaning given to the questions. The 4th grade students seemed to have the Part-Whole concept as the center to solve their problems; while the 8th grade ones, besides the Part-Whole concept, they tried to solve the problems using the operations more intensely without, however, getting a favorable rate of right answers, and it resulted in an inferior general performance in the 8th grades than in the 4th grades. One can conclude that it's necessary to find a more open production in the conceptual field of fraction, based on the use of different situations, approaching the different kinds of fraction proposed by Nunes et al. (2003) searching for better teaching of this concept throughout the grades of Basic Education.

Key words: fraction, meanings, diagnostic study, Basic Education

SUMÁRIO

CAPÍTULO I – APRESENTAÇÃO

1.1 Introdução	1
1.2 Objetivo e Questão de Pesquisa	4
1.3 As Frações na Matemática	5
1.4 Breve descrição da Dissertação	10

CAPÍTULO II – A SUSTENTAÇÃO DE UMA BOA TEORIA

2.1 Os Campos Conceituais de Vergnaud	12
2.2 Os estudos de Nunes	27
2.3 Frações: seus cinco diferentes significados	32
2.4 Considerações sobre: Razão, Porcentagem e Probabilidade	38

CAPÍTULO III – FRAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E NA ESCOLA

3.1 Fração na Educação Matemática	42
3.1.1 Estudos Correlatos	47
3.2 Fração e os PCN	64
3.3 Descrição dos Livros Didáticos em relação às Frações	69

CAPÍTULO IV – METODOLOGIA

4.1 Discussão teórico-metodológica	82
4.2 Universo de Estudo	85
4.2.1 Universo do Estudo Piloto	86
4.2.2 Universo Do Estudo Principal	87
4.3 O Estudo Piloto	87

4..4 O Estudo Principal	90
4.4.1 Sujeitos	90
4.4.2 Material Utilizado	90
4.4.3 Instrumento Diagnóstico	90
4.4.4 Procedimentos	92
4.4.4.1 Análise a Priori do Instrumento Diagnóstico	93

CAPÍTULO V –ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.1 Análise Quantitativa	127
5.1.1 Os cinco significados de fração	127
5.1.2 As variáveis: quantidades contínua e discreta, representação icônica e não icônica	132
5.1.3 Os diferentes significados e as variáveis: quantidade contínua e discreta, representação icônica e não icônica	135
5.1.4 Os Invariantes	146
5.2 Análise Qualitativa	149

CAPÍTULO VI – CONCLUSÃO

6.1 Síntese dos Principais Resultados	178
6.2 Resposta à Questão de Pesquisa	186
6.3 Sugetões para Futuras Pesquisas	188

CAPÍTULO VII – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	190
---	-----

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1: Quantidade de atividades em relação à classificação dos cinco significados de fração.	71
--	----

Tabela 3.2: Quantidade de atividades em relação à classificação dos cinco significados de fração.	76
Tabela 4.1: Distribuição das questões em relação aos significados e as variáveis de pesquisa, abordadas em nosso estudo.	84
Tabela 4.2: Distribuição das questões em relação aos significados e as variáveis de pesquisa, abordadas em nosso estudo.	125
Tabela 5.1: Distribuição das questões em relação aos cinco significados de fração.	127
Tabela 5.2: Total de acertos em relação ao total de itens das 4 ^a e 8 ^a séries.	128
Tabela 5.3: Desempenho dos alunos da 4 ^a série em relação aos cinco significados abordados	129
Tabela 5.4: Desempenho dos alunos da 8 ^a série em relação aos cinco significados abordados.	130
Tabela 5.5: distribuição das questões em relação as variáveis.	133
Tabela 5.6: Desempenho dos alunos da 4 ^a série em relação às variáveis de pesquisa.	133
Tabela 5.7: Desempenho dos alunos da 8 ^a série em relação às variáveis de pesquisa	134
Tabela 5.8: Desempenho dos alunos da 4 ^a e 8 ^a com relação aos invariantes do conceito de fração.	147
Tabela 5.9: Distribuição total das respostas em relação aos acertos, erros, itens em brancos e respostas do tipo não sei das 4 ^a e 8 ^a séries.	150
Tabela 5.10: Distribuição total das respostas errôneas classificadas dentre as estratégias, pictórica e inconsistente.	152
Tabela 5.11: Relação das Categorias de Análise	152
Tabela 5.12: Distribuição total das respostas errôneas classificadas dentre as estratégias.	152
Tabela 5.13: Distribuição do E1 nas questões da 4 ^a série.	153
Tabela 5.14: Distribuição do E1 nas questões da 8 ^a série.	154
Tabela 5.15: Distribuição do E2 nas questões da 4 ^a série.	157

Tabela 5.16: Distribuição do E2 nas questões da 8ª série.	158
Tabela 5.17: Distribuição do E3 nas Questões.	160
Tabela 5.18: Distribuição do E3 nas Questões.	160
Tabela 5.19: Distribuição do E4 nas Questões.	164
Tabela 5.20: Distribuição do E4 nas Questões.	164
Tabela 5.21: Distribuição do E5 na questão 8b das duas séries.	167
Tabela 5.22: Distribuição do E6 nas Questões.	169
Tabela 5.23: Distribuição do E6 nas Questões.	169
Tabela 5.24: Distribuição do E7 nas Questões.	170
Tabela 5.25: Distribuição do E7 nas Questões.	170
Tabela 5.26: Distribuição do E8 nas questões	171
Tabela 5.27: Distribuição do E8 nas questões	171
Tabela 5.28: Distribuição do E9 nas questões	174
Tabela 5.29: Distribuição do E9 nas questões	174

LISTA DE QUADROS

Quadro 1.1: Enquadramento da teoria dos campos conceituais ao conceito de fração.	22
Quadro 5.1: Desempenho, em quantidade e percentuais de acertos, dos alunos das 4ª e 8ª séries em relação aos cinco significados.	131
Quadro 5.2: O gráfico apresenta as porcentagens de acertos e a tabela apresenta as questão abordadas, as quantidades de acertos por total de itens e as porcentagens de acertos, levando-se em consideração quatro significados de fração e as variáveis: quantidades contínuas e discretas e as representações icônica e não icônica.	135

Quadro 5.3: O gráfico apresenta as porcentagens de acertos e a tabela apresenta as questão abordadas, as quantidades de acertos por total de itens e as porcentagens de acertos, levando-se em consideração quatro significados de fração e as variáveis: quantidades contínuas e discretas e as representações icônica e não icônica.	142
---	-----

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1: Situações propostas por Campos citada por Nunes, Bryant (1997, p.193)	51
Figura 3.2: Situação proposta por Merlini et. al (2005)	63
Figura 3.3: Exemplo da p. 120 do livro de Dante	72
Figura 3.4: Exemplo da p. 123 do livro de Dante	73
Figura 3.5: Exemplo e exercício da p. 162 do livro de Dante	74
Figura 3.6: Exemplo e exercício da p. 125 do livro de Dante	74
Figura 3.7: Exemplo e exercício da p. 103 do livro de Sosso	75
Figura 3.8: Exemplo e exercício da p. 165 do livro de Sosso	77
Figura 3.9: Exercícios das p. 137 e 111 do livro de Sosso	77
Figura 5.1: Exemplos das questões 4 e 12 na formalização da resposta.	138
Figura 5.2: Exemplos das questões 13 e 2 na formalização da resposta.	139
Figura 5.3: Exemplo da Questão 9 na formalização da resposta.	140
Figura 5.4: Pictórica, aluno 65, 4ª série.	151
Figura 5.5: Inconsistente, aluno 48, 8ª série.	151
Figura 5.6: Exemplos do erro E1 cometido por alunos da 4ª e 8ª.	154
Figura 5.7: E1, aluno 48, 8ª série.	156
Figura 5.8: E1, aluno 56, 8ª série.	156

Figura 5.9: Exemplos do erro E2 cometido por alunos da 4 ^a e 8 ^a séries	158
Figura 5.10. Exemplos do erro E2 cometido por alunos das 4 ^a e 8 ^a .	159
Figura 5.11: E3, aluno 34, 4 ^a série.	161
Figura 5.12: E3, Aluno 50, 4 ^a série.	162
Figura 5.13: E3, aluno 34, 4 ^a série.	163
Figura 5.14: E4, aluno 34, 4 ^a série.	165
Figura 5.15: E4, aluno 6, 8 ^a série.	165
Figura 5.16: E5, aluno 7, 4 ^a série.	168
Figura 5.17. Exemplos do estratégia E6, usada por alunos da 4 ^a e 8 ^a séries.	168
Figura 5.18. Exemplos da estratégia E7 usada por alunos da 4 ^a e 8 ^a séries.	170
Figura 5.19. Exemplos de ocorrência da estratégia E8, usada por alunos da 4 ^a e 8 ^a séries.	172
Figura 5.20: E8, aluno 48, 8 ^a série.	173
Figura 5.21. Exemplos de ocorrência da estratégia E9, usada por alunos da 4 ^a e 8 ^a séries.	175

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1 - O Instrumento Diagnóstico

CAPÍTULO I

APRESENTAÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

O foco de nossa pesquisa é o Ensino de Fração, isto é, o Número Racional na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros, e b deve ser não nulo, isto é, $b \neq 0$.

As Frações fazem parte dos conteúdos desenvolvidos pelas escolas a partir do 2º ciclo do Ensino Fundamental (3ª e 4ª séries), vêm sendo consideradas, pela comunidade acadêmica (professores e pesquisadores), como um dos mais problemáticos conteúdos na aprendizagem da Matemática nas séries iniciais.

Na vida cotidiana, as frações surgem quase, essencialmente, como representações de quantidades expressas, tanto na linguagem falada como na escrita, pois são manipuladas em diferentes campos como: na música, na biologia, na química, na culinária, na engenharia, entre outros.

Seu ensino ainda desempenha um papel fundamental no desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos, como equações e cálculos algébricos. Consideramos também que o aprendizado desse conceito favorece o

desenvolvimento mental e cognitivo dos alunos, pois seu entendimento está ligado a uma das premissas mais importantes da Matemática, qual seja, estabelecer relações, e estas estão fortemente estabelecidas entre o numerador e o denominador das frações.

No entanto, percebemos que essa importante idéia de relação perde-se no ensino das frações que fica limitado, quase totalmente a um conjunto de regras e procedimentos para realização das operações básicas, quando muito, existem situações que apresentam um todo dividido em partes iguais, utilizando ou não desenhos para representar este todo.

Consciente das grandes dificuldades que, os alunos dos Ensinos Fundamental, Médio e até mesmo Superior enfrentam, quando se deparam com este tópico, interessei-me pelo assunto, passando a considerá-lo como um grande desafio. Assim, integrei-me a um projeto de pesquisa, que é desenvolvido dentro do programa de cooperação entre Oxford Brookes University e o Centro das Ciências Exatas e Tecnologia da PUC – SP que tem como objetivo estudar o processo de ensino e aprendizagem da fração.

Sob o guarda-chuva desse projeto maior estão sendo desenvolvidas cinco dissertações de mestrado e duas teses de doutorado que se dividem, segundo seu foco de interesse, algumas voltadas ao aluno -- seja do ensino fundamental, médio ou superior -- e outras, ao professor -- seja generalista ou especialista em matemática. Com relação às dissertações, seus autores responsabilizaram-se pelos estudos diagnósticos sobre o conceito Fração, tanto com relação aos alunos nos diversos níveis e ciclos como também aos professores generalistas. Elas têm como objetivo, portanto, fazer um mapeamento das concepções e

desempenhos de alunos dos Ensinos Fundamental e Médio e de dos professores que atuam nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

No que nos diz respeito, neste trabalho, estaremos focando os alunos das 4^a e 8^a séries do Ensino Fundamental que estudam em escolas públicas, já o estudo de Merlini volta-se aos alunos de 5^a e 6^a séries, também, do Ensino Fundamental e de escolas públicas. O estudo de Rodrigues está sendo desenvolvido com alunos de 8^a séries do Ensino Fundamental e 3^a séries do Ensino Médio.

O estudo de Santos tem focado os professores polivalentes que atuam de 1^a a 4^a séries do Ensino Fundamental sem, necessariamente, possuir curso superior e que não são professores especialistas em matemática. O estudo de Canova busca complementar o estudo de Santos, no que se refere a aprofundar o mapeamento das concepções e desempenhos de professores generalistas, abordando não só suas concepções e competências, bem como suas crenças a respeito da fração.

Assumimos como justificativa os baixos resultados de desempenho dos alunos, das 4^a e 8^a séries do Ensino Fundamental, no SAEB (2001) – Matemática e as ressalvas feitas pelos PCN sobre o fato dos alunos chegarem ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número.

Diante dos objetivos do SAEB em oferecer subsídios, para que gestores de políticas públicas, diretores e professores efetuem mudanças necessárias à melhoria da qualidade da educação, e como pesquisadores, pudemos, com base nesses resultados gerais centralizar nossos estudos, aqui no Brasil.

Portanto, estes estudos justificam-se pelo baixo desempenho dos alunos, pela abordagem de apenas um significado de fração (sob nossa teoria), apresentado pelo SAEB (2001) - Matemática e pela interpretação de vários pesquisadores como, por exemplo, Kieren (1988), Ohlsson (1989) Behr et al. (1983) e Nunes et al. (2003), ao considerarem que para formação do conceito de fração devem ser trabalhadas várias situações-problema que abordem diversos significados de fração.

1.2 OBJETIVO E QUESTÃO DE PESQUISA

A realização desse estudo tem como objetivo identificar as concepções que alunos das 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, de escolas públicas, apresentam em relação à fração no que tange a cinco diferentes significados: Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador Multiplicativo.

Com base nessas considerações, nosso estudo direciona-se a responder a seguinte questão de pesquisa:

“QUAIS AS CONCEPÇÕES QUE SÃO POSSÍVEIS DE SE IDENTIFICAR COM RELAÇÃO AOS CINCO DIFERENTES SIGNIFICADOS DA FRAÇÃO (NÚMERO, PARTE-TODO, QUOCIENTE, MEDIDA E OPERADOR MULTIPLICATIVO), A PARTIR DA APLICAÇÃO DE UM ESTUDO DIAGNÓSTICO, COM ALUNOS DAS 4ª E 8ª SÉRIES DO ENSINO FUNDAMENTAL?”

Ressaltamos que, embora já existam muitos estudos e pesquisas sobre o assunto, o ensino de fração ainda parece estar permeado por muitas dúvidas. Portanto, devemos continuar estudando esse conceito, a fim de entender sua importância e descobrir melhores formas de seu ensino nas escolas. Considerando nossa responsabilidade, como pesquisadores, este trabalho é parte dessa busca.

Antes de expormos o presente trabalho que trata dos cinco significados de fração, é preciso estabelecer o que é, como se originou e como é concebida a fração na Matemática.

Portanto, a seguir faremos uma breve descrição histórica sobre a fração e, em seguida, apresentaremos o objeto matemático – a fração, do ponto de vista formal da própria matemática.

1.3 AS FRAÇÕES NA MATEMÁTICA

UM POUCO DE HISTÓRIA DOS NÚMEROS

A noção de número está associada através dos tempos, a todos os tipos de atividade humana. As primeiras informações sobre a idéia de número são do período paleolítico; no entanto, poucos progressos se fizeram nesse campo até se dar a transição para o período neolítico, durante o qual já existia uma atividade comercial importante entre diversas povoações.

Nesse período, as idéias de número basearam-se na formação de linguagens, cujas palavras exprimiam coisas muito concretas e poucas abstrações, mas, onde já havia lugar para alguns termos numéricos simples (distinção entre um, dois e muitos). Depois de ter utilizado, durante muitos séculos, os números para contar, medir, calcular, o homem começou a especular sobre a natureza e propriedades dos próprios números.

Assim, a origem dos números racionais positivos está intrinsecamente ligada à expressão numérica da medição de segmentos de reta: os gregos faziam cálculos com números por meio de sua representação, como comprimento de segmentos. A adição e a subtração de números reduziam-se à adição e subtração dos segmentos que os representavam, para a multiplicação e divisão recorriam ao teorema de Thales.

Mas, os números racionais (inteiros ou fracionários) não são suficientes para a medição de segmentos de reta. Como foi constatado pelos pitagóricos, no século VI, antes de Cristo, quando usaram o Teorema de Pitágoras para calcular a medida da diagonal de um quadrado de lado 1.

Isso porque a diagonal divide o quadrado em dois triângulos retângulos isósceles cujos catetos têm comprimento 1 e, assim, pelo teorema de Pitágoras, a medida da hipotenusa é igual à raiz quadrada de dois que não pode ser expressa como quociente de inteiros.

Ao descobrirem que a diagonal de um quadrado de lado unitário não era uma razão entre dois inteiros (em linguagem atual, que a raiz quadrada de 2 é um *número irracional*), os Pitagóricos consideraram quebrada a harmonia do universo, já que não podiam aceitar a raiz quadrada de dois como um número,

mas, não podiam negar que esta raiz era a medida da diagonal de um quadrado unitário.

No entanto, Aristóteles (384-322 a.C.), como exemplo de uma demonstração por redução ao absurdo, demonstrou que a raiz quadrada de 2 não é um número racional, isto é, não se pode escrever como uma fração de dois inteiros. Usando também a redução ao absurdo, o conhecido matemático Tom Apostol demonstrou essa impossibilidade recorrendo apenas a argumentos geométricos.

O QUE É UM NÚMERO RACIONAL?

Um número racional é o que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ onde a e b são números inteiros, e b deve ser não nulo, isto é, $b \neq 0$.

Freqüentemente, usamos $\frac{a}{b}$ para significar a divisão de a por b . Quando não existe possibilidade de divisão, simplesmente, empregamos uma letra como q para entender que este número é um número racional.

Como podemos observar, números racionais podem ser obtidos por meio da razão (em Latim: ratio=razão=divisão=quociente) entre dois números inteiros, razão pela qual, o conjunto de todos os números racionais é denotado Q .

Assim, é comum encontrarmos na literatura a notação:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \text{ com } a \text{ e } b \text{ em } Z, b \neq 0 \right\}$$

Quando há interesse, indicamos Q_+ para entender o conjunto dos números racionais positivos e Q_- o conjunto dos números racionais negativos. O número zero é também um número racional.

- **Representação dos racionais:**

Geometricamente, podemos representar o conjunto Q dos números racionais por meio de uma reta numerada. Consideramos o número 0 como a origem e o número 1 em algum lugar e tomamos a unidade de medida como a distância entre 0 e 1 e pelos números racionais.

Ao observar a reta numerada, notamos que a ordem obedecida pelos números racionais é crescente da esquerda para a direita, a mesma dos números N e Z . Esta consideração é adotada por convenção, o que nos permite pensar em outras possibilidades.

- **Ordem dos racionais:**

Dizemos que um número racional r é menor do que outro número racional s se a diferença $r-s$ for positiva. Quando esta diferença $r-s$ for negativa, dizemos que o número r é maior do que s . Para indicar que r é menor do que s , escrevemos:

$$r < s$$

Do ponto de vista geométrico, um número que está à esquerda é menor do que um número que está à direita na reta numerada.

- **Simétrico dos racionais:**

Todo número racional q exceto o zero possui um elemento denominado simétrico ou oposto $-q$, e é caracterizado pelo fato geométrico que tanto q como $-q$ estão à mesma distância da origem do conjunto Q que é 0. Assim, por exemplo, o oposto de $\frac{3}{4}$ é $-\frac{3}{4}$ e, o oposto de 5 é -5.

Do ponto de vista geométrico, o simétrico funciona como a imagem virtual de algo colocado à frente de um espelho que está localizado na origem. A distância do ponto real q a esta origem é a mesma que a distância do ponto virtual $-q$. Cabe lembrar aqui que os números inteiros Z , também apresentam elementos opostos ou simétricos. No entanto, nem o conjunto N ou Z apresentam elemento inverso, como definiremos a seguir.

- **O inverso de um número racional:**

Todo número racional q exceto o zero possui um elemento denominado $\frac{1}{q}$ ou q^{-1} inverso q e é caracterizado pelo fato de que $q \cdot \frac{1}{q} = 1$. Assim, por exemplo, o inverso de $\frac{3}{4}$ é $\frac{4}{3}$ e o inverso de 5 é $\frac{1}{5}$.

- **A soma e o produto de números racionais:**

Definimos a adição e o produto entre os números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, quaisquer, respectivamente, por meio da:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

operação que a cada par de números racionais associa sua soma, denomina-se *adição*, e a que associa o produto denomina-se *multiplicação*.

1.4 Breve descrição da Dissertação

Para responder nossa questão de pesquisa e alcançar os objetivos propostos, organizamos este trabalho em sete capítulos.

No capítulo I, evidenciamos nosso objetivo, fizemos algumas considerações sobre a importância do ensino de Frações e, por fim, explicitamos nossa questão de pesquisa.

No capítulo II, descrevemos a fundamentação teórica utilizada, com um breve relato sobre a formação do conceito, à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1983; 1988; 1990, 1993). Apresentamos, também, os estudos de Nunes, Bryant (1997); Nunes et al. (2003) em relação ao ensino e aprendizagem do conceito de Fração e os cinco diferentes significados de fração: Número, Parte-todo, Medida, Quociente e Operador Multiplicativo embasados nos estudos de Nunes et al. (2003).

No capítulo III, trataremos o conceito de fração sob dois enfoques: sob o ponto de vista da Educação Matemática, apresentando estudos relevantes e

correlatos com nossa pesquisa e conceito de fração na Escola, descrevendo as recomendações feitas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e a abordagem contida nos livros didáticos utilizados nas escolas, onde foi realizada parte do presente estudo.

No capítulo IV, apresentamos nossa metodologia usada na pesquisa. Para isso, descrevemos o universo de estudo, a população e o instrumento empregado na coleta de dados.

No capítulo V, encontra-se a análise quantitativa, com os índices de acertos totais, de acertos por significado abordado, por variáveis de pesquisa e por questões que abordaram diretamente os invariantes da fração e a análise qualitativa, na qual estabelecemos as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos ao resolverem erroneamente as questões apresentadas.

No capítulo VI, responderemos nossa questão de pesquisa e apresentaremos as nossas conclusões baseadas na análise dos resultados. Ainda, nesse capítulo, procuramos apresentar sugestões para futuras pesquisas.

CAPÍTULO II

A SUSTENTAÇÃO DE UMA BOA TEORIA

Este capítulo tem como objetivo apresentar as bases teóricas que sustentam nossa pesquisa. Inicialmente, trataremos da teoria dos campos conceituais, estabelecida por Vergnaud (1983; 1988; 1990, 1993), a seguir descrevemos sobre as idéias teóricas de Nunes, Bryant (1997), em relação ao ensino das frações e, por fim, apresentaremos os cinco diferentes significados de fração que, segundo Nunes et al. (2003), devem ser levados em consideração no seu ensino e aprendizagem e, por nós, utilizados neste estudo.

2.1 OS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD

Gerard Vergnaud (1983, 1988) estruturou a Teoria dos Campos Conceituais com o intuito de possibilitar uma estrutura consistente às pesquisas sobre atividades cognitivas, em especial, com referência às aprendizagens científicas e técnicas, permitindo situar e estudar as filiações e as rupturas entre conhecimentos, na perspectiva de seu conteúdo conceitual.

Além disso, essa teoria possibilita uma análise da relação existente entre os conceitos como conhecimentos explícitos e os invariantes operatórios implícitos nos comportamentos dos sujeitos frente a uma determinada situação, bem como sustenta um aprofundamento em uma análise entre significados e significantes.

Assim, Vergnaud (1990, 1993) define significado como sendo uma relação do sujeito com as situações e os significantes, estas relações são individuais por evocarem os esquemas presentes em cada sujeito. Já o significante pode ser caracterizado por signos e ou objetos e ou palavras presentes em uma determinada situação comum a todos os sujeitos.

Nesse sentido, a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud:

É uma teoria cognitivista que visa favorecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, notadamente das que revelam das ciências e das técnicas. (VERGNAUD 1990, p.133)

Assim, a Teoria dos Campos Conceituais, retoma e aprofunda os estudos de Piaget, no que tange à noção de esquema, tendo como um de seus pressupostos básicos que o conhecimento constitui-se e desenvolve-se ao longo de um período de tempo e com base na interação adaptativa do sujeito com as situações que experimenta. Cabe pontuar que, para Vergnaud, esquema refere-se à forma estrutural da atividade, isto é, diz respeito à organização invariante da atividade do sujeito sobre uma classe de situações dadas.

Diante do exposto, quais situações e ou conjunto de situações são necessárias para a construção de um dado conceito? Este questionamento resulta do fato de que o ser humano não se relaciona de forma mecânica ou

imediate com o outro e com a realidade. Para essas relações, faz-se preciso uma dimensão simbólica ou representacional. Nesse sentido, a Teoria dos Campos Conceituais busca compreender as relações existentes entre os conceitos dentro dos processos de aprendizagem.

Dessa forma, definiremos o que seja Campo Conceitual para Vergnaud, partindo de uma rápida discussão antes de apresentar uma definição direta. Se, por um lado, os conceitos que nós utilizamos estão embebidos na vida cotidiana e não surgem por simples apreensão sensível diretamente do real; por outro lado, os conceitos só funcionam, quando estão reunidos em proposições, sentenças, enunciados e teoremas e não operam em vão.

Em outras palavras, os conceitos são mobilizados no cotidiano para dar conta dos desafios enfrentados pelo sujeito. Daí, surge um aspecto importante do Campo Conceitual que diz respeito a um conjunto de situações. Os conceitos só adquirem sentido dentro de situações ou conjunto de situações; portanto, para Vergnaud um dos pilares de um campo conceitual é o conjunto de situações, cujo domínio progressivo exige uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas, todos em estreita conexão um com os outros.

Nesse sentido, o sujeito frente a uma nova situação mobilizará o conhecimento desenvolvido em sua experiência em situações anteriores e tenta adaptá-lo à nova situação. Cabe esclarecer que o termo “situação” utilizado por Vergnaud não tem o mesmo sentido da situação didática, utilizado por Brousseau (1996).

Para Vergnaud (1990), a situação tem a ver com o contexto, no qual o problema (ou tarefa) se encontra inserido, de forma a contribuir, para que os conceitos presentes nessa situação ganhem significado.

Portanto, nesse contexto, a aquisição do conhecimento dá-se por meio de situações-problema já conhecidos, e esse conhecimento tanto pode ser explícito – expresso de forma simbólica – quanto implícito – usado dentro de uma ação, na qual o sujeito escolhe as operações adequadas frente a uma determinada situação sem, contudo conseguir expressar as razões de suas escolhas – Vergnaud (1988).

Nesse ponto da teoria dos Campos Conceituais, mais do que qualquer outro é possível encontrar a forte influência que as idéias piagetianas, a respeito da aquisição do conhecimento, exercem sobre Vergnaud.

Deste modo, salientamos três idéias:

- O conhecimento dá-se pela adaptação do indivíduo ao meio, isto é, o processo de conhecimento é tratado como um caso particular do processo de equilibração. Assim, a apreensão de novas estruturas e novos objetos às estruturas já existentes por meio da ação do sujeito diz respeito à assimilação, enquanto a modificação dessas estruturas às novas características do objeto relaciona-se com a acomodação;
- O conhecimento, portanto, pode ser traçado pelo modo como um indivíduo atua sobre o objeto, isto é, a ação é o principal fator no processo do conhecimento;
- Os indivíduos desenvolvem diferentes tipos de conhecimento, dependendo do tipo de abstração que eles fazem. Para Piaget conhecimento lógico-matemático dá-se baseado na abstração reflexiva, isto é, consiste em se isolar as propriedades e as relações das próprias operações da pessoa.

Vergnaud retoma essa idéia, para explicar os invariantes, os quais com as situações e as representações simbólicas constituem o alicerce triangular da formação do conceito.

Ao considerar um campo conceitual como sendo um conjunto de situações, destacamos que uma das vantagens dessa abordagem pelas situações é permitir a produção de uma classificação apoiada na análise das tarefas cognitivas e dos procedimentos que podem ser adotados em cada um deles.

Nesse cenário, Vergnaud (1994) analisa os tipos de situações-problema matemáticos, seus tipos de formulação aliados às idades psicológicas e à maturação matemática, chegando às estruturas envolvidas na resolução dos problemas, a fim de entender as filiações e saltos dos conhecimentos dos estudantes, isto é, compreender as relações e a evolução das concepções e a prática do sujeito frente a uma dada situação.

Dentre muitas estruturas estudadas, destacam-se duas: as aditivas e as multiplicativas. O presente estudo encontra-se inserido dentro do campo conceitual das estruturas multiplicativas. Cabe explicitar que esse campo envolve o conjunto de situações, cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações e divisões, quanto ao conjunto dos conceitos e teoremas que permite analisar essas situações.

Entre outros conceitos identificamos a proporção simples e múltipla, as funções linear e não-linear, as razões escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, **fração**, número racional, múltiplo e divisor como conceitos pertencentes às estruturas multiplicativas.

Nesta perspectiva, Vergnaud considera que existe uma série de fatores que influenciam a formação e o desenvolvimento dos conceitos e o conhecimento conceitual deve emergir dentro de situações-problema. Por exemplo, para que percebamos quais os conhecimentos que o sujeito traz consigo, frente a um dado objeto matemático, é necessário buscar o entendimento do que o sujeito realiza e de como realiza, relacionando esses dois aspectos.

Nesse sentido, o estudo do desenvolvimento de um campo conceitual requer que um conceito seja visto como uma composição de uma terna de conjuntos, representada segundo Vergnaud (1983, 1988, 1990, 1993) por S, I,R:

- S – é um conjunto de situações que tornam o conceito significativo, isto é, a realidade;
- I – é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades, relações);
- R – é um conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar os invariantes.

Vergnaud (1990, 1993) deixa claro que os conceitos matemáticos traçam seus sentidos com base em uma variedade de situações e que cada situação, normalmente, não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito. Isto porque uma situação, por mais simples que seja, envolve mais que um conceito e, por outro lado, um conceito não pode ser apropriado com base da vivência de uma única situação.

Para ele, o conceito não pode ser reduzido à sua definição, sobretudo se nos interessarmos por seu ensino e aprendizagem, pois é fundamentado nas situações e nos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para o sujeito. Nessa perspectiva, duas classes de situações podem ser distinguidas:

- uma em que o sujeito dispõe no seu repertório, em dado momento, de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
- outra no qual o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso.

Nesse sentido, o conceito de esquema, para Vergnaud, interessa às duas classes de situações, mas não funciona do mesmo modo nos dois casos. No primeiro caso, observa-se para uma mesma classe de situações comportamentos automatizados, organizados por um só esquema. Ao passo que, no segundo caso, percebe-se a sucessiva utilização de vários esquemas que podem entrar em competição e que, para atingir a solução desejada, devem estar acomodados.

Dessa forma, os conhecimentos contidos nos esquemas podem ser designados pelas expressões conceito-em-ação e teorema-em-ação, ou também, pela expressão mais global, “invariantes operatórios”.

Assim,

Os invariantes são componentes cognitivos essenciais dos esquemas. Eles podem ser implícitos ou explícitos. São implícitos quando estão ligados aos esquemas de ação do aluno. Neste caso, embora o aluno não tenha consciência dos invariantes que está utilizando, esses podem ser reconhecidos em termos de objetos e propriedades (do problema) e relacionamentos e procedimentos feitos pelo aluno. Os invariantes são explícitos quando estão ligados a uma concepção. Nesse caso eles são expressos por palavras e/ou outras representações simbólicas. (VERGNAUD, 1988 citado por MAGINA et al. 2001, p.13)

Nesta perspectiva, o teorema-em-ação está relacionado com as estratégias tomadas e utilizadas pelo sujeito em situação de solução de um dado problema, sem que ele seja capaz de explicá-las ou justificá-las. Aparecem de modo intuitivo e, na maioria das vezes são implícitos, passíveis de serem verdadeiros ou falsos, portanto, tendo um domínio de validade restrito. O conceito-em-ação é a manifestação do próprio conceito com suas propriedades e definições, quando são manifestados geralmente são explícitos.

Reside nesse contexto o porquê de se estudar um conceito dentro do campo conceitual e, é justamente, nesse *mote*, que Vergnaud encontra respaldo para defender que o conhecimento de um determinado campo conceitual desenvolve-se ao longo de um período de tempo. Para ilustrar tal argumentação, vamos tomar o exemplo da multiplicação.

A aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com idéias construídas pelos alunos a respeito dos números naturais e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada. No campo dos números naturais, os alunos vivenciam um conjunto de situações que formam uma concepção¹ de que a multiplicação sempre aumenta, ou seja, o produto é sempre maior do que os dois fatores. Ao raciocinar sobre os números racionais, faz-se necessário um outro conjunto de situações que dê conta de superar essa dificuldade, provocando a ruptura dessa expectativa, por exemplo: 10 multiplicado por $\frac{1}{2}$.

À luz desse exemplo, podemos afirmar que o campo conceitual multiplicativo abrange um número maior de situações que necessitam ser

¹ Concepção refere-se ao conhecimento explícito do sujeito e é apresentada por representações simbólicas assumidas pelo mesmo, tais como expressões orais ou escritas. Essas expressões podem retratar o estado que se encontra o conceito para o sujeito.

melhores elucidadas e analisadas com cuidado, a fim de facilitar a hierarquia das competências² possíveis desenvolvidas pelos alunos, dentro e fora da escola, pois resolver algumas operações de multiplicação, não representa quase nada, isso pode ser apenas a ponta do iceberg conceitual.

A seguir, a situação apresentada é uma tentativa de aplicar sistematicamente a teoria de Vergnaud (1983, 1988, 1990, 1993) para a análise do conceito de fração. Dessa forma, acreditamos, como sugere Vergnaud que possa ser possível construir o conceito de fração, coordenando a interação entre os três conjuntos da terna: Situações, Invariantes e Representações.

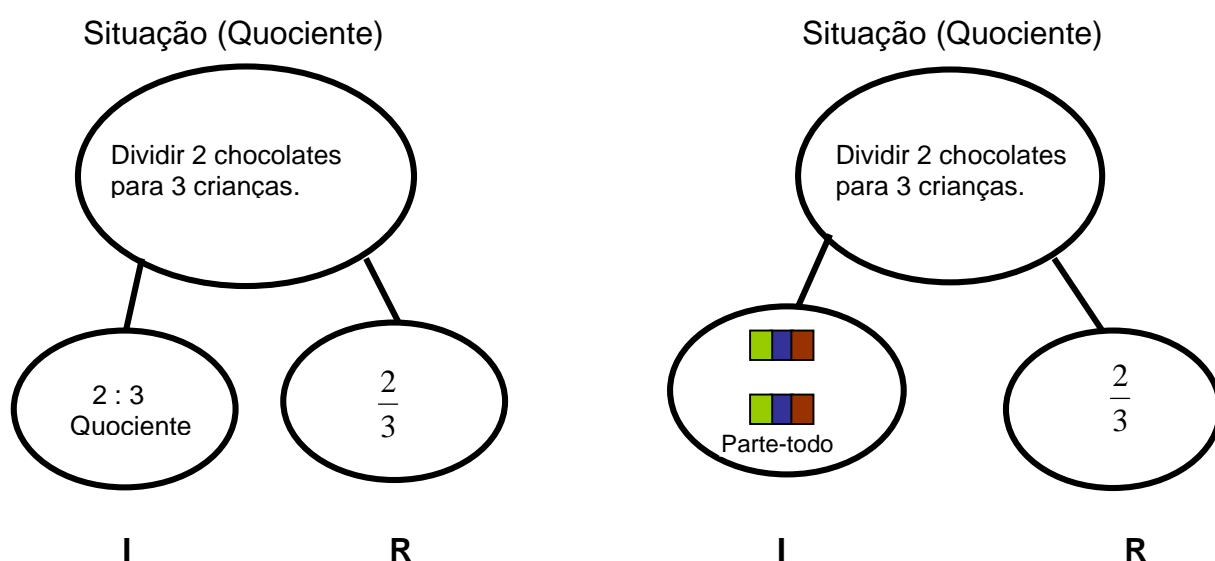
Dessa forma, em nosso estudo o conjunto de Situações refere-se a problemas contemplando os cinco significados da fração: Número, Parte-todo, Medida, Quociente e Operador Multiplicativo. O conjunto de Invariantes Operatórios, isto é, concernente às propriedades do conceito – equivalência e ordenação –, objetos e relações que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar as situações; e o conjunto de Representações, o qual permite que o sujeito represente as situações por meio de signos e símbolos matemáticos.

É importante esclarecer, que ao enquadrar nosso estudo à teoria dos campos conceituais, o fato de apresentarmos, a priori, uma classificação para situações no conjunto S (Referente) ela não tem sentido em si mesma e, sim, mantém uma estreita relação com as estratégias escolhidas pelo sujeito para resolver tal situação (Invariantes operatórios); com os símbolos matemáticos que

² Competência refere-se à ação do sujeito cujo conhecimento ainda está implícito, isto é, pode ser traçada pela ação do sujeito diante das situações.

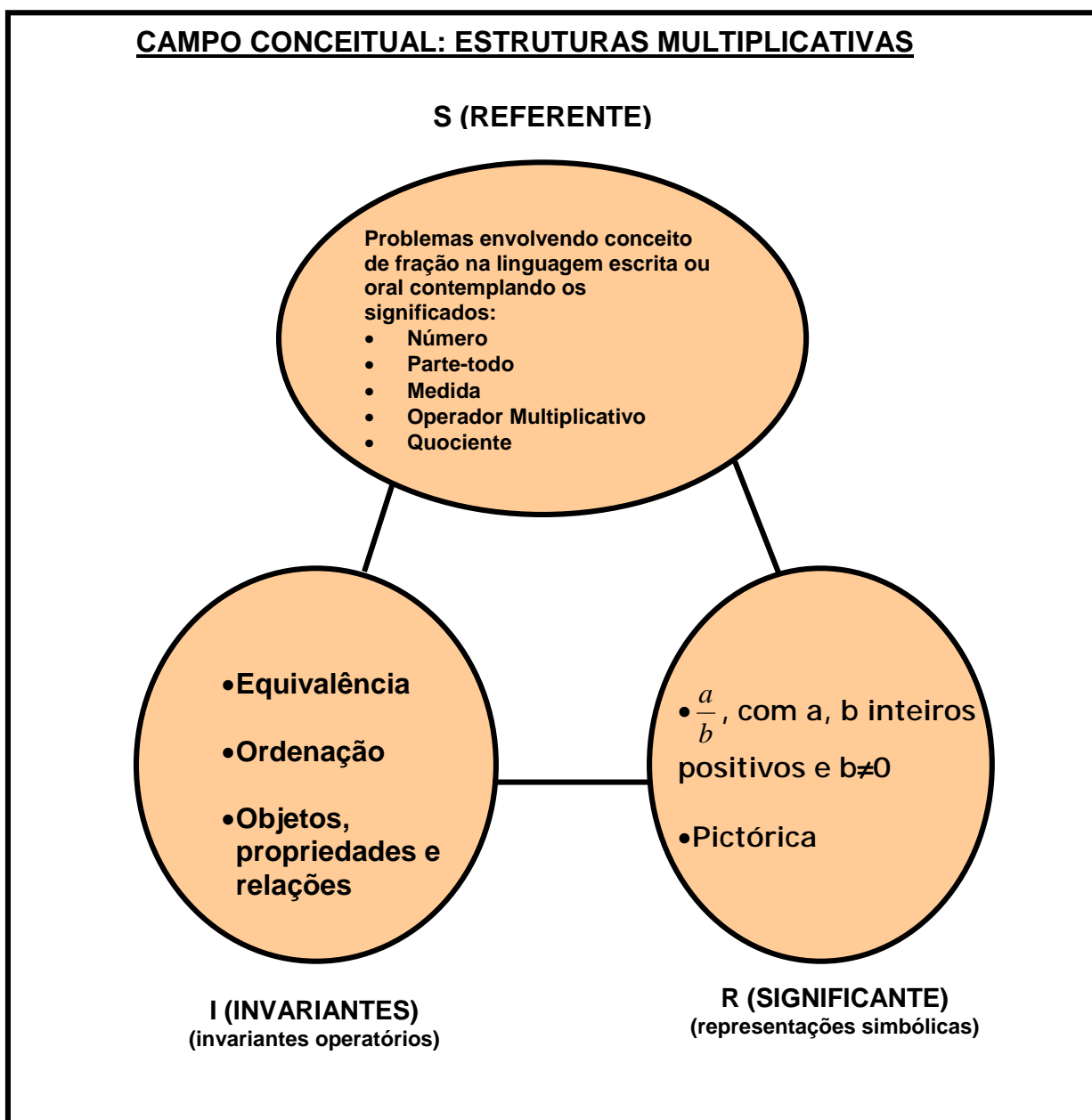
o sujeito dispõe em seu repertório para representar tal situação – (Representações).

Para exemplificar o que acabamos de afirmar, tomemos a seguinte situação: *Dividir 2 barras de chocolate para 3 pessoas*. Esta situação classificaríamos, a priori, como uma situação tipicamente com significado Quociente, pois a divisão ($2 : 3 = \frac{2}{3}$) seria uma estratégia bem adaptada para resolver tal situação. Entretanto, o sujeito poderá recorrer à estratégia de dividir o todo (cada chocolate) em partes iguais (3 pessoas) e apoiando-se na correspondência um-para-um e na dupla contagem, responder a situação de maneira correta, porém utilizando-se de outro significado, o de Parte-todo.



A seguir, apresentaremos, de maneira geral, um esquema inspirado em Santos (2003), representando a terna S, I, R e sua relação com o presente estudo:

Quadro 1.1: Enquadramento da teoria dos campos conceituais ao conceito de fração.



Nesse arcabouço teórico, apoiar-nos-emos para compreender o conceito de *fração*. Para exemplificar o que acabamos de afirmar, tomemos a fração $\frac{2}{3}$. Podemos encontrar essa representação, como solução de diversas situações problema, cujo domínio cognitivo para sua resolução, difere em cada uma das situações como pode ser constatado nos cinco exemplos que apresentaremos abaixo:

Exemplo 1: Represente na reta numérica a fração $\frac{2}{3}$.

O sujeito frente a esse problema (situação) deverá reconhecer, a princípio, a fração $\frac{2}{3}$ como um número (significado) e não uma superposição de dois números naturais. Deverá perceber, ainda, que todo número tem um ponto correspondente na reta numérica e que sua localização depende do princípio de ordenação (invariante), isto é, $\frac{2}{3}$ é um número compreendido entre 0 e 1. Mesmo considerando esse intervalo, há necessidade que o sujeito compreenda que à direita e à esquerda de $\frac{2}{3}$ há ainda infinitos números.

Exemplo 2 : Isabelle ganhou uma barra de chocolate, partiu em 3 partes iguais e deu 2 partes para Maurício. Que fração representa a parte de chocolate que Maurício recebeu?



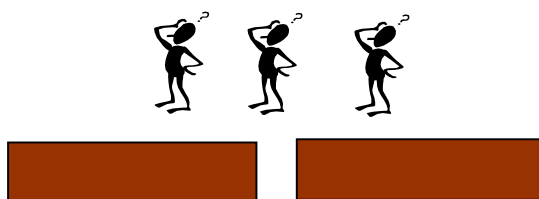
O sujeito frente a essa situação deverá identificar que o todo foi dividido em três partes iguais, portanto, trata-se de uma comparação parte-todo (significado); bem como deve identificar que o número total de partes refere-se ao

denominador e que as partes pintadas do chocolate correspondem ao numerador. Nessa situação-problema o aluno necessita, previamente, desenvolver algumas competências, como: a identificação de uma unidade (que o todo é tudo aquilo que se considera como unidade em cada caso concreto), de realizar divisões (o todo se conserva, mesmo quando dividimos em partes, há a conservação da quantidade), manipular a idéia da conservação da área (no caso das representações contínuas).

Exemplo 3: João terá que passar por uma prova de fogo. Seu amigo colocou dentro de uma caixinha 3 bolas coloridas, duas azuis e 1 branca, e apostou com João: se você tirar uma bola dessa caixa sem ver, e ela for azul, você ganha o jogo. Que fração representa a chance de João ganhar o jogo?

Nesta situação, a possibilidade de João ganhar o jogo é expressa por uma medida (significado) obtida pelo quociente entre, o número de bolinhas azuis e o número total de bolinhas da caixa, ou seja, pela fração $\frac{2}{3}$.

Exemplo 4: Divida 2 chocolates para 3 pessoas. Que fração representa o que cada pessoa recebeu de chocolate?



Nesta situação-problema, o sujeito deverá perceber que a divisão é uma boa estratégia para resolvê-la, isto é, o quociente (significado) representa a quantidade de chocolate que cada criança irá receber.

Deverá admitir, então, que $2 : 3$ é igual a $\frac{2}{3}$, bem como aceitar o número $\frac{2}{3}$ como uma resposta bem adaptada à tal situação, ao invés de $2 : 3 = 0,6666\dots$

Situações envolvendo quociente pressupõem, ainda, extrapolar as idéias presentes no significado parte-todo, pois nas situações de quociente temos duas variáveis (2 chocolates para 3 crianças), enquanto que no significado parte-todo temos referência a uma variável (o inteiro ou a unidade).

Exemplo 5: Na quinta série “A” há 36 alunos. Numa avaliação de Matemática sobre frações, $\frac{2}{3}$ dos alunos obtiveram resultados satisfatórios.

Quantos alunos obtiveram bons resultados?

O esquema abaixo retrata tal situação

Estado Inicial	Operador	Estado Final
36 alunos	(dividir por 3, multiplicar por 2) ou o inverso: multiplicar por 2 e dividir por 3	24 alunos

Nesta situação, o sujeito deverá perceber que a fração desempenha o papel de transformação, ao mesmo tempo em que conduz a idéia de que os números racionais formam um corpo (estrutura algébrica) em relação às operações de adição e multiplicação. Encontramos, assim, nessa situação, um contexto natural para a composição de transformações (funções, operador – significado), a idéia de inversa (o operador que reconstrói o estado inicial) e a idéia de identidade (o operador que não modifica o estado inicial).

Pontuamos os exemplos acima para alegar, como sugere Vergnaud, que se o que quisermos é a construção do conceito de fração, um dos possíveis

caminhos de entrada será explorar esse conceito em diversas e diferentes situações, que combinadas favoreçam o entendimento do tal conceito de maneira sólida.

A afirmação acima encontra sustentação na teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1983; 1988), quando esta destaca que a análise das tarefas matemáticas no estudo da conduta do sujeito frente a essas tarefas (invariantes operatórios) permitem que analisemos sua competência, pois conforme ele refere-se à capacidade do sujeito na resolução de uma dada situação-problema ao escolher estratégias adequadas e bem adaptadas para fazer frente à situação, podendo ainda ser avaliada considerando três aspectos:

- acerto e erro, assim competente é aquele que acerta;
- análise do tipo de estratégia utilizada;
- análise da capacidade de escolher a melhor forma para resolver um problema de uma situação particular.

Na análise dos acertos e erros, encontraremos subsídios para avaliar os meios utilizados pelos sujeitos para realizar uma determinada tarefa, bem como, conhecer as reais dificuldades enfrentadas pelos sujeitos.

Finalmente, nesse cenário, a teoria dos campos conceituais de Vergnaud contribui de maneira ímpar para a Educação Matemática, visto que ela oferece uma sólida e plausível explicação ao surgimento e desenvolvimento do conceito.

2.2 OS ESTUDOS DE NUNES

Para Nunes, Bryant (1997), com as frações, as aparências podem ser tão enganosas, sendo possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações sem que ninguém perceba, pois, às vezes, as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações, usando os termos fracionais corretamente, falando sobre frações coerentemente, resolvendo alguns problemas fracionais, mesmo assim alguns aspectos essenciais das frações ainda lhes escapam.

Nesse sentido, Nunes, Bryant (1997) alegam que a falsa impressão de que as crianças têm algum domínio no conceito de fração, está associada à forma com que esse conteúdo é apresentado às crianças – todos divididos em partes. Nessa situação, as crianças são informadas que o número total de partes é o denominador e as partes (pintadas), o numerador.

Além disso, algumas instruções sobre poucas regras de calcular são fornecidas às crianças, pois permitem que elas transmitam a impressão de que sabem muito sobre fração sem, contudo, compreender o significado desse novo tipo de número.

Nesse contexto, os autores citados retomam pesquisas relevantes, cujos resultados confirmam a suspeita de que as crianças podem usar a linguagem das frações sem compreender completamente sua natureza. Estes estudos, servem como uma advertência dos perigos que existem por trás da complexidade e da diversidade dos conceitos envolvidos em frações.

Nunes e Bryant, ainda sugerem que existe uma conexão entre divisão e fração, ficando, especialmente, claro quando se pensa em um tipo de problema envolvendo quantidades contínuas, pois se pensarmos em um problema como, por exemplo, 3 barras chocolates divididos para 4 pessoas, o resultado da divisão será fração. Esta conexão não é acidental, faz referência a uma análise matemática de números racionais feita por Kieren (1988, 1994), em que sugere que as frações são números produzidos por divisões e que, portanto, são números do campo dos quocientes.

Diante de tal reflexão, Nunes, Bryant (1997) argumentam que, se isso estiver certo, então, deveremos buscar a origem da compreensão do conceito de fração nas crianças, em um contexto que propicie situações de divisão.

Nesse cenário, como poderíamos praticar um ensino que levasse as crianças a compreender o conceito de fração? Os autores citados argumentam que, de fato existe uma lacuna entre a compreensão que as crianças têm das propriedades básicas de frações e as tarefas resolvidas nos contextos das avaliações educacionais. Assim Nunes, Bryant referem que:

... quando as crianças resolvem tarefas experimentais sobre divisão e números racionais, elas se engajam em raciocinar sobre as situações. Em contraste, quando elas resolvem tarefas matemáticas em avaliações educacionais elas vêem a situação como um momento no qual elas precisam pensar em que operações fazer com números, como usar o que lhes foi ensinado na escola, concentrando-se nas manipulações de símbolos, os alunos poderiam desempenhar em nível mais baixo do que teriam desempenhado se tivessem se preocupado mais com a situação problema. (NUNES, BRYANT 1997 p. 212)

Para ilustrar esta situação, os autores citados fazem referência a um estudo realizado por Mack (1993), com estudantes de 6ª série nos Estados Unidos.

Neste estudo, sua técnica consistiu em apresentar às crianças os mesmos problemas alternadamente como situações que elas poderiam encontrar na vida cotidiana e como problemas simbólicos, ou vice-versa.

Assim, a pergunta de tal situação era a seguinte: “suponha que você tem duas pizzas do mesmo tamanho e você corta uma delas em 6 pedaços de tamanhos iguais e você corta a outra em 8 pedaços de tamanhos iguais. Se você receber um pedaço de cada pizza, de qual você ganhará mais?” Foi seguida pela pergunta “diga-me que fração é maior, $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{8}$?”. Mack (1993, citado por NUNES, BRYANT 1997, p.212), observou que os estudantes tiveram sucesso nas situações da vida cotidiana, contudo em situações em que os estudantes depararam-se com problemas simbólicos mostram muitas dificuldades - respostas por meio de algoritmos falhos ou comparações inadequadas. Por exemplo, ao comparar $\frac{1}{8}$ com $\frac{1}{6}$, muitos estudantes alegaram que $\frac{1}{8}$ era maior que $\frac{1}{6}$, pois 8 é maior que 6.

Nesse contexto, Mack (1993, citado por NUNES, BRYANT 1997) afirma que a desconexão feita pelas crianças entre a compreensão da divisão e a fração desenvolvida fora da escola e as representações simbólicas aprendidas na escola devem-se à forma como estes conteúdos são introduzidos na aprendizagem das crianças.

Esta lacuna poderia ser superada “movendo-se para trás e para frente em seu conhecimento desenvolvido fora da escola e as representações simbólicas, os alunos deveriam vir a compreender quais conexões têm de ser feitas” (NUNES, BRYANT 1997, p. 213)

Desse modo, para todas as dificuldades até aqui deduzidas, tanto do ponto de vista do ensino como da aprendizagem, Nunes (2003) destaca dois invariantes, considerados centrais no conceito de fração: noções de ordenação e de equivalência.

Na noção de ordenação de fração, existem duas idéias básicas e centrais que devem ser levadas em consideração no ensino de fração. A primeira idéia é que, para um mesmo denominador, quanto maior for o numerador, maior será a fração, contudo, - a segunda idéia diz respeito a uma situação na qual, para um mesmo numerador, quanto maior o denominador menor será a fração.

A primeira idéia é relativamente simples, pois a estratégia usada para resolver a situação é semelhante à comparação de dois números naturais, pois, a afirmação de que o denominador deve ser constante para uma comparação direta a ser feita entre os numeradores, pode oferecer alguma dificuldade. A segunda idéia pode oferecer mais dificuldade, pois as crianças precisam pensar em uma relação inversa entre o denominador e a quantidade representada pela fração.

Quanto à noção de equivalência de fração, devem ser considerados dois aspectos essenciais: equivalência em quantidades extensivas e em quantidades intensivas.

As quantidades extensivas referem-se à comparação de duas quantidades de mesma natureza e na lógica Parte-todo. Portanto, são suscetíveis de ser adicionadas e medidas por uma unidade de mesma natureza. Uma típica situação de Parte-todo, o todo é uma área dividida em áreas iguais. Se adicionarmos $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$ do todo equivalente o total será $\frac{2}{3}$.

Já as quantidades intensivas referem-se às medidas baseadas na relação entre duas quantidades diferentes, portanto não suscetíveis de adição e são medidas de uma relação de duas magnitudes, cada uma vindo de diferente quantidade intensiva. Por exemplo, a concentração de suco de laranja, pode ser descrita como $\frac{1}{3}$ de concentrado e $\frac{1}{3}$ de água e cada uma dessas quantidades não é por ela mesma a concentração. Se adicionarmos o suco de laranja em uma jarra, onde a concentração é $\frac{1}{3}$ de água para suco, em outra jarra onde a concentração, também, será $\frac{1}{3}$, a concentração da mistura não será $\frac{2}{3}$.

Para Nunes, Bryant (1997) ao tratar de equivalência de fração em contexto de quantidades extensivas em situação de Parte-todo, a classe de equivalência depende do tamanho do todo (ou da unidade), por exemplo, as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ só pertencerão a uma classe de equivalência de frações se os dois todos forem equivalentes. Se nós estivéssemos nos referindo a $\frac{1}{4}$ de um todo e $\frac{2}{8}$ de um todo não equivalente, $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ não poderiam pertencer à mesma classe de equivalência de frações.

A equivalência de fração em contexto de quantidades intensivas difere das quantidades extensivas, pois nesse contexto podemos falar em equivalência entre duas frações referindo-se a todos diferentes. Por exemplo, se fizermos 1 litro de suco usando 1 copo de concentrado para 3 copos de água, o suco terá a mesma concentração e gosto que dois litros de suco feito com 2 copos de

concentrado e 6 copos de água. Em situações de quantidades intensivas, $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ são equivalentes mesmo que o todo não seja o mesmo.

Finalmente, esses estudos, por nós analisados, possibilitaram uma maior compreensão dos diversos aspectos relevantes, envolvidos no ensino e na aprendizagem do conceito de fração, contribuindo essencialmente ao desenvolvimento do nosso estudo.

2.3 FRAÇÕES: SEUS CINCO DIFERENTES SIGNIFICADOS

Retomando as idéias teóricas de Vergnaud que afirma que um conjunto de situações que dá significado ao conceito, passaremos a discutir o que é significado, então?

O significado é uma relação do sujeito com as situações e os significantes, assim, são os esquemas evocados no sujeito individual por uma situação ou por um significante que constitui o significado dessa situação ou desse significante para aquele indivíduo. Estes esquemas são, portanto, os comportamentos e suas organizações.

Uma situação dada ou um simbolismo particular não evoca em um indivíduo todos os esquemas disponíveis, isto é, quando se diz que uma palavra tem determinado significado, estamos recorrendo a um subconjunto de esquemas e, dessa forma, operando uma restrição ao conjunto dos esquemas possíveis.

Para ilustrar o que acabamos de discutir, tomemos como exemplo o significante $\frac{1}{4}$. O significado desse símbolo dependerá dos esquemas que o sujeito possui para dar significado a essa representação, bem como a situação em que ele está envolvido.

O sujeito poderá dar como significado à fração $\frac{1}{4}$ uma relação Parte-todo, ou seja, uma pizza dividida em 4 partes congruentes e uma parte foi tomada, ou ainda, uma pizza dividida igualmente para 4 pessoas, isto é, $\frac{1}{4}$ significando o quociente da divisão entre duas variáveis. Poder-se-ia interpretar, ainda, a fração $\frac{1}{4}$ como um número na reta numérica, ou seja, 0,25; como operador, $\frac{1}{4}$ de litro de leite, ou seja, 250 ml de leite e, finalmente, a interpretação de $\frac{1}{4}$ como sendo medida, isto é, a “chance” de tirar uma bola branca de um total de uma bola branca e três bolas azuis.

Desta forma, acreditamos que o conceito de fração poderá ser construído se contemplado um conjunto de situações, explorando seus diferentes significados, dentro de um contexto de quantidades contínuas e discretas.

Cabe explicitar que entendemos por quantidades contínuas aquelas que são passíveis de serem divididas de modo exaustivo, sem que, necessariamente percam as suas características. Por exemplo: um chocolate pode ser dividido em inúmeras partes sem deixar de ser chocolate.

Por outro lado, quantidades discretas dizem respeito a um conjunto de objetos idênticos, que representa um único todo, cujo resultado da divisão deverá produzir subconjuntos com o mesmo número de unidades.

Assim, em uma situação, por exemplo, na qual precisamos dividir 7 bolinhas para 3 crianças, teremos como resultado dessa divisão 2 bolinhas para cada criança e sobrar 1 bolinha. Portanto, as frações não funcionam como ferramenta bem adaptada para resolver tal situação. Em contrapartida se lançarmos mão de uma situação em que devemos distribuir 7 chocolates para 3 crianças encontraremos na fração uma ferramenta bem adaptada para expressar o resultado de tal situação, isto é, cada criança receberá $2\frac{1}{3}$ de chocolate.

Desta forma, fica explícito que existem diferentes classificações a priori dos tipos de situações e de significados das frações, sem que a importância dessas classificações para o ensino tenha sido esclarecida.

Assim, assumiremos em nosso estudo, como Nunes et al. (2003) que identificam, pelo menos, cinco significados possíveis que devem ser levados em consideração no ensino e aprendizagem de frações: Número, Parte-todo, Medida, Quociente e Operador Multiplicativo.

A seguir, descreveremos detalhadamente cada um desses cinco significados:

- **Fração como Parte-Todo:**

A idéia presente nesse significado é a da partição de um todo (contínuo ou discreto) em n partes iguais, na qual cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$. Assim, assumiremos como significado Parte-todo um dado todo (contínuo ou discreto) dividido em partes iguais em situações estáticas, em que o uso de um procedimento de dupla contagem dá conta de chegar a uma representação

correta, isto é, esse procedimento consiste em quantas partes o todo foi dividido (denominador) e o número de partes tomadas (numerador).

Exemplos: Uma barra de chocolate foi dividida em 4 partes iguais. João comeu 3 dessas partes. Que fração representa o que João comeu? (quantidade contínua).

Na doceria, há 4 bolos de chocolate e 2 bolos de morango de mesmo formato. Que fração representa a quantidade de bolos de chocolate em relação ao total de bolos? (quantidade discreta).

- **Fração como medida:**

Algumas medidas envolvem fração por se referirem a quantidades intensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis. Por exemplo, a probabilidade de um evento é medida pelo quociente número de casos favoráveis, dividido pelo número de casos possíveis. Portanto, a probabilidade de um evento varia de 0 a 1, e a maioria dos valores com os quais trabalhamos são fracionários. Exemplos: Para fazer uma certa quantidade de suco são necessárias 2 medidas de concentrado de laranja para 5 medidas de água. Que fração representa a medida de concentrado de laranja em relação ao total de suco? (quantidade contínua).

Fizemos uma rifa na escola. Foram impressos 150 bilhetes. Minha avó comprou 20 bilhetes. Qual a sua chance de ganhar o prêmio? (quantidade discreta).

- **Fração como Número:**

As frações, como os inteiros, são números que não precisam necessariamente referir-se a quantidades específicas. Existem duas formas de representação fracionária, ordinária e decimal. Um exemplo de exercício usado no ensino de matemática, no qual a fração é trabalhada sem um referente específico é apresentado abaixo. Exemplo: Represente o número $\frac{1}{2}$ na forma decimal. (quantidade contínua).

- **Fração como Operador Multiplicativo:**

Associamos a esse significado o papel de transformação, isto é, a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor nesse processo. Conceber a fração como um operador multiplicativo é admitir que a fração $\frac{a}{b}$ funciona em quantidades contínuas como uma máquina que reduz ou amplia essa quantidade no processo, ao passo que em quantidades discretas sua aplicação atua como um multiplicador ou divisor.

Exemplos: Maria ganhou um chocolate e comeu $\frac{2}{5}$. Pinte a quantidade de chocolate que Maria comeu. (quantidade contínua).



Otávio tinha uma coleção de 15 soldadinhos de chumbo e deu a seu primo André $\frac{3}{5}$ de sua coleção. Quantos soldados de chumbo Otávio deu a André? (quantidade discreta).

- **Fração como Quociente:**

Esse significado está presente em situações, nas quais a divisão surge como uma estratégia para resolver um problema com a idéia de divisão ou partilha. Isso significa que conhecido o número do grupo a ser formado, o quociente representa o tamanho de cada grupo. Pressupõe, ainda, extrapolar as idéias presentes no significado Parte-todo, pois nas situações de quociente temos duas variáveis (3 chocolates para quatro crianças), admitimos na representação de uma dada situação o numerador maior, menor, ou igual ao denominador e que representa diferentes objetos.

Exemplos: foram divididas igualmente para 4 crianças, 3 barras de chocolate. Cada criança receberá 1 chocolate inteiro? Cada criança receberá pelo menos metade de um chocolate? Que fração de chocolate cada criança receberá? (quantidade contínua).

Tenho 30 bolinhas de gude e vou dividir igualmente para 5 crianças. Quantas bolinhas cada criança ganhará? Que fração representa essa divisão? (quantidade discreta).

Apresentada a categoria de classificação, concordamos com Nunes (2003) que, por trás do ensino e aprendizagem de frações, existe uma diversidade e complexidade de conceitos envolvidos e que ainda não está claro que nível de detalhe essas classificações deveriam incluir, pois - segundo ela, ainda não há

pesquisas suficientes para decidirmos quais distinções são centrais e quais não são.

Assim, em nosso estudo, vamos considerar que, as situações de ensino que de fato têm como objetivo a construção do conceito de fração, devem levar em conta os diferentes significados nos diferentes contextos que a fração pode assumir: Número, Parte-todo, Medida, Quociente e Operador Multiplicativo.

2.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE: RAZÃO, PORCENTAGEM E PROBABILIDADE

Existem algumas situações, nas quais as frações podem ser interpretadas como razão, como probabilidade e como porcentagem. Então, seriam esses outros significados para a fração? Em nosso estudo acreditamos que não, pois, por de trás de tais interpretações estão os significados medida e operador multiplicativo.

No contexto que se refere à probabilidade como, por exemplo, em uma caixa há 3 bolas verdes e 8 bolas vermelhas, qual a probabilidade de sortear ao acaso uma bola verde? A resposta da situação é $\frac{3}{11}$, ou seja, de cada 11 bolas contidas na caixa, 3 são verdes. De fato, está implícito nesta situação o significado Medida. A fração $\frac{3}{11}$ representa a probabilidade de ocorrência desse

evento, que é medida pelo número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis.

Nas situações que se referem à porcentagem como, por exemplo, João teve aumento de seu salário de 12%, isto é, $\frac{12}{100}$, está implícito em tal situação o significado Operador Multiplicativo. Nesse caso, só tem sentido dizer 12% ou $\frac{12}{100}$ referindo-se a uma quantidade, discreta ou contínua, como destaca Ciscar, Garcia (1988), as porcentagens têm aparecido como operador no sentido de que $\frac{a}{100}$ de x ou $a\%$ significa aplicar a fração $\frac{a}{100}$ sobre x .

No caso das razões, devemos fazer uma análise mais cautelosa, pois nem sempre as razões estão presentes nos contextos em que lhes podemos atribuir o “status” de fração. Para esclarecer o que acabamos de afirmar, tomemos, por exemplo, dois contextos que podem ser expressos em forma de razão.

Exemplo 1: Para fazer um determinado suco é necessário 1 copo de concentrado para 3 copos de água. Esta situação nos remete a idéia de que a receita do suco pode ser expressa por uma razão: 1 para 3, ou $\frac{1}{3}$. A situação poderia ser expressa ainda por uma fração como, por exemplo, $\frac{1}{4}$ que expressaria não mais o concentrado em relação à quantidade de água, mas sim a quantidade de concentrado em relação à quantidade total da mistura. Nesta situação, queremos ressaltar que, unir num mesmo todo duas unidades distintas, representará de forma implícita, o significado Medida.

Todavia, existem diversas situações, nas quais não podemos pensar a razão como fração, por exemplo, quando nos referimos à seguinte situação: dois reais a cada 3 quilos de cebola, em termos de razão representaríamos como sendo 2 para 3, ou ainda, $\frac{2}{3}$.

Em que pesem todas essas considerações sobre razão, há outro aspecto que gostaríamos de discutir nesse momento. Podemos somar duas razões?

Para começar discutir esse aspecto, tomemos, como exemplo, a seguinte situação: Dois recipientes iguais contêm sucos nas seguintes razões: o recipiente A tem 1 copo de concentrado para 3 copos de água; e o recipiente B tem 2 copos de concentrado para 3 copos de água. Se juntarmos as quantidades dos dois recipientes, qual será a razão da nova quantidade de suco? Nessa situação problema, as razões serão:

$$\text{Recipiente A} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Recipiente B} = \frac{2}{3}$$

A tendência seria somar as razões para indicar a razão da nova quantidade de suco. Mas é possível somarmos razão? Não, pois sabemos que, nesta situação só seria possível somar razões se elas fizessem referência ao mesmo todo. Nesse caso, sabemos que só é possível somar as razões (quantidades intensivas), se elas puderem ser transformadas em frações (quantidades extensivas), expressando uma relação Parte-todo de um mesmo todo ou todos iguais, o que não ocorre no caso das razões sugeridas acima, isto é, em que há uma relação Parte-parte, concentrado e água.

Então, para resolver esta situação poderíamos recorrer, por exemplo, a transformação das razões em frações, ou seja, constituir o todo, visto que as quantidades (concentrado e água) podem ser reunidas em um mesmo todo.

*Linguagem de Razões**Quantidade intensiva*

Recipiente A : $\frac{1}{3}$ (razão)

Recipiente B : $\frac{2}{3}$ (razão)

*Linguagem de Frações**Quantidade extensiva*

Fração correspondente $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \text{concentrado} \\ \frac{3}{4} \text{água} \end{array} \right\}$

Fração correspondente $\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{5} \text{concentrado} \\ \frac{3}{5} \text{água} \end{array} \right\}$

Dessa forma, teríamos:

$$\text{Concentrado da Mistura: } \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{13}{20}$$

$$\text{Água da Mistura: } \frac{3}{4} + \frac{3}{5} = \frac{27}{20}$$

$$\text{Razão da Mistura: } \frac{\text{concentrado}}{\text{água}} = \frac{\frac{13}{20}}{\frac{27}{20}} = \frac{13}{27}$$

Esta discussão foi feita e alguns exemplos foram destacados para justificar o fato de não estarmos considerando razão, probabilidade e porcentagem, como sendo outros significados de fração, pois essas interpretações emergem de situações, cuja resolução de determinados problemas pode recorrer às frações, como tratamento didático estando implícita a relação medida e operador multiplicativo.

CAPÍTULO III

FRAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E NA ESCOLA

No presente capítulo, abordaremos o conceito de fração sob dois enfoques. O primeiro, diz respeito ao conceito de fração do ponto de vista da Educação Matemática, momento que revisaremos estudos relevantes e correlatos com nossa pesquisa.

O segundo enfoque, refere-se à fração na Escola, momento que descreveremos as recomendações feitas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN 1997) e a abordagem contida nos livros didáticos.

3.1 FRAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Entre vários pesquisadores, há um consenso de que a construção do conceito do número racional e, especialmente, o conceito de fração, não ocorre de maneira natural. Uma abordagem que, de fato, leve à construção de maneira significativa desse importante conceito matemático deverá contemplar um conjunto de situações que dê sentido a esse objeto matemático.

Para tanto, as frações quando aplicadas a problemas reais e analisadas do ponto de vista pedagógico assumem várias “interpretações”. Nesse sentido, encontramos diversos educadores matemáticos cujos estudos caminham nessa direção.

Kieren (1976) foi pioneiro em introduzir a idéia de que os números racionais consistem em vários constructos, sendo que para a compreensão da noção de número racional torna-se necessário um claro entendimento da confluência desses constructos. O autor citado sugere, nesse trabalho, que a compreensão desses diversos constructos é necessária para obter um completo entendimento da natureza do número racional. Em sua lista de constructos, analisa sete interpretações para os números racionais:

- Os números racionais são frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas, multiplicadas e divididas;
- Os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural dos números naturais;
- Os números racionais são classes de equivalência de frações;
- Os números racionais são números da forma $\frac{a}{b}$ onde a e b são inteiros e $b \neq 0$;
- Os números racionais são operadores multiplicativos;
- Os números racionais são elementos de um campo quociente ordenado e infinito, isto é, há números da forma $x = \frac{a}{b}$, onde x satisfaz a equação $bx = a$;
- Os números racionais são medidas ou pontos sobre a reta numérica.

Posteriormente, Kieren (1988) analisa os números racionais por meio de cinco idéias que considera básicas:

- Relação parte-todo;
- Quociente;
- Medida;
- Razão;
- Operador.

O referido autor em seu artigo, *Personal Knowledge of Rational Numbers*, Kieren (1988), retoma a discussão, apresentando um modelo teórico de construção do conhecimento matemático relacionando-o, especificamente, ao conhecimento de número racional. Um dos aspectos de sua teoria é a suposição da existência de uma rede ideal de conhecimento pessoal de número racional que consiste em seis níveis.

O primeiro, o nível mais elementar (inicial), contém constructos que são mais locais e próximos ao nível de ação do sujeito. O segundo nível compreende constructos de partição, equivalência e formação de unidades divisíveis. Os quatro constructos de números racionais, medida, quociente, número proporcional (razão) e operador formam um terceiro nível.

No quarto nível, Kieren (1988) pressupõe conhecimento de relações funcionais e escalares, do qual o constructo mais formal de fração e equivalência de número racional depende. No quinto nível, sintetiza os constructos de números racionais e relaciona noções para gerar o constructo geral do campo conceitual multiplicativo. E, por fim, essa rede de estrutura de conhecimento é completada

pelo conhecimento de números racionais, como um elemento de um campo infinito de quocientes.

De forma mais ampla BEHR et al (1983) propõe sete interpretações para as frações, chamadas por eles de subconstructos:

- O subconstructo da medida fracionária que indica a questão de quanto há de uma quantidade relativa a uma unidade especificada daquela quantidade. Eles propuseram isso, como uma reformulação da noção parte-todo.
- O subconstructo razão, os autores não esclarecem as idéias inerentes a esse subconstructo.
- O subconstructo taxa que define uma nova quantidade como uma relação entre duas outras quantidades. Há, no entanto, que fazer uma distinção entre taxas e razões. Essa distinção decorre do fato que as primeiras são possíveis de serem somadas ou subtraídas, enquanto as razões não o são.
- O subconstructo quociente vê o número racional como resultado de uma divisão;
- O subconstructo das coordenadas lineares interpreta o número racional, como um ponto na reta numérica, isto é, os números racionais formam um subconjunto dos números reais. As propriedades associadas à topologia métrica da reta numerada racional estão entre densidade, distância e não completividade;
- O subconstructo decimal enfatiza as propriedades associadas ao nosso sistema de numeração;

- O subconstructo operador vê a fração como uma transformação.

Outra análise que consideramos importante, nesse contexto, foi a apresentada por Ohlsson (1989) que analisa os números racionais, levando em consideração quatro interpretações.

- $\frac{a}{b}$ é uma comparação em que a e b são quantidades em que uma é descrita em relação à outra;
- $\frac{a}{b}$ é uma partição em que a é uma quantidade e b é um parâmetro. O numerador é operado num caminho que é denominado pelo denominador;
- $\frac{a}{b}$ corresponde a idéia de operações compostas, parâmetro e quantidade. O numerador é o multiplicador e o denominador é um divisor aplicado à mesma quantidade;
- O quarto caso é parâmetro / parâmetro, o qual não é interpretado nessa análise.

Todos os trabalhos que citamos, apontam para um considerável avanço no que diz respeito a uma semântica das frações, pois podemos observar que há uma concordância entre os estudos aqui citados, de que quociente, razão, operador e alguma versão da relação parte-todo são conceitos centrais. No entanto, as análises aqui apresentadas não são fáceis de serem conciliadas. A primeira razão é que elas diferem em relação aos objetos da análise: frações X números racionais, e uma segunda razão é que os critérios usados para fazer as distinções dentro de cada análise não têm sido especificados.

3.1.1 ESTUDOS CORRELATOS

Nesta seção, apresentaremos a revisão de literatura focalizando alguns estudos que consideramos relevantes, cujos resultados contribuirão efetivamente para o desenvolvimento de nosso trabalho. Nesse sentido, os estudos que fazem parte da presente revisão, têm como enfoque principal a aquisição do conceito de número racional.

Kerslake (1986), em seus estudos, realizados na Inglaterra com 1000 crianças na faixa etária entre 11 e 15 anos, investigou com profundidade uma série de problemas trabalhados com alunos analisando suas estratégias de resolução e seus erros, sendo que alguns desses problemas envolviam o conceito de fração.

Na busca de encontrar informações a respeito dos caminhos, pelos quais os alunos pensam nas as frações, o estudo possibilitou perceber três aspectos que emergiram dos dados obtidos. O primeiro referia se os alunos eram capazes de pensar frações, como números ou se eles pensavam que a palavra “número” implicaria somente números inteiros. Os segundo e terceiro aspectos possibilitaram a descoberta de que modelos de frações as crianças dispunham e como elas visualizavam a idéia de equivalência.

Kerslake propôs, entre outros, um mesmo problema de dois diferentes modos: com contexto e sem contexto. O problema sem contexto pedia aos alunos a resolução de $3 : 5$, e o problema com contexto foi: “Três barras de chocolate foram divididas igualmente para cinco crianças. Quanto cada uma recebeu?”

A pesquisadora constatou que, aproximadamente, 65% dos alunos tiveram sucesso no problema com contexto, ao passo que no problema sem contexto o índice de sucesso foi significativamente menor.

A autora analisa algumas dificuldades apresentadas pelos alunos ao conceber 3:5 (sem contexto) como sendo $\frac{3}{5}$. A pesquisadora argumenta esta dificuldade pode estar relacionada ao fato de que os alunos não conectam a divisão (3:5) à representação fracionária $\frac{3}{5}$. Além disso, ela observa que um número relativamente grande de alunos interpreta 3:5 como 5:3.

Nas observações das frações e números inteiros, notou que, quando perguntava-se aos alunos “Quantas frações se escondem entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$?” eles respondiam: “Uma”, referindo-se a $\frac{1}{3}$. Dessa forma, concluir-se que os alunos observam apenas os denominadores das frações e não se dão conta das frações existentes entre elas, ou seja, entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

Kerslake (1986) em seus estudos observou ainda, durante as entrevistas, que o diagrama freqüentemente ajuda na resolução de determinados problemas como, por exemplo, entender a fração como parte de um todo por meio de um círculo dividido em partes iguais e sombreado algumas delas. No entanto, o uso de diagramas no modelo parte-todo nem sempre possibilita a visualização imediata de determinadas situações, como por exemplo $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$. Nessa situação, são necessárias outras divisões da mesma figura para sua compreensão.

Frente a estas evidências, a autora, baseada nas idéias de Kieren, argumenta que o conceito de número racional é diferente de número natural, uma vez que eles não fazem parte do meio natural dos alunos e as diversas interpretações do número racional resultam em uma variedade de experiências necessárias. Assim, Kerslake conclui que o entendimento dos números racionais como elemento do campo quociente requer a oportunidade de experiências dos aspectos partitivos da divisão. Nesse sentido, há necessidade de se estender o modelo parte-todo e incluir o aspecto quociente da fração. A autora, finalizando, conclui que as frações representadas como pontos sobre a reta numeradas podem ser discutidas.

Uma das questões propostas era: “Aqui estão três doces. Há quatro crianças que desejam a sua parte. Como você pode fazer?” Os alunos dividem os três doces para quatro pessoas, mas não se preocupam se as partes são iguais ou não. Na intenção de observar o processo de divisão realizado pelo aluno avaliou-se que elas não fazem a conexão entre 3:4 e $\frac{3}{4}$. Só um dos alunos teve

mais dificuldade e traçou três retas sobre as três bolas (doces), os demais desenharam uma cruz sobre cada bola. Quando perguntaram ao aluno que traçou três retas sobre as três bolas, se todos os pedaços tinham o mesmo tamanho, ela respondeu: “O desenho não está muito correto.” Ela não pensou na maneira de



como fazer, mas, quando lembrou-se do modelo



realizou a divisão de

forma mais adequada que a anterior.

A estratégia utilizada por 11 alunos foi criar um desenho representando a situação, ou seja, os três doces que seriam repartidos e as quatro crianças, distribuindo pedaço por pedaço para cada uma das crianças.

Em seus estudos, Kerlake (1986) encontrou também evidências da falta de compreensão dos alunos sobre equivalência de frações, mesmo quando eles tiveram sucesso em algumas situações que envolviam a equivalência de frações. Os estudos apontam que embora os alunos tivessem apresentado um bom desempenho nos itens de equivalência que ela apresentou, eles não necessariamente encontraram frações equivalentes com o mesmo objetivo de efetuar a adição e somavam frações com denominadores diferentes, por exemplo $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ deram como resultado $\frac{5}{7}$. A autora afirma que embora alguns alunos tenham transformado as frações em frações equivalentes com o mesmo denominador, parecem não perceber a conexão entre a equivalência de fração e a adição.

Finalmente, a autora citada verificou em seus estudos evidências consideráveis para constatar que o único modelo de fração com o qual os alunos se sentiram confortáveis e familiarizados foi o de fração, como parte de um todo.

A familiaridade com o modelo parte-todo dificultou que entendessem o aspecto da divisão ou da distribuição, isto é, por exemplo a fração $\frac{a}{b}$ pode ser vista como sendo coisas “a” distribuídas entre pessoas “b”. Mesmo que esse aspecto (divisão) apareça com influência em livros-texto e seja a base para o método freqüentemente utilizado para transformar fração em decimais, os alunos foram muito relutantes para reconhecer quaisquer conexões entre $\frac{a}{b}$ e $a : b$.

Em seus estudos realizados no Brasil, Campos citada por Nunes, Bryant (1997) foi capaz de mostrar claramente que a introdução da fração, pelo modelo parte-todo, simplesmente induz os alunos a aplicar um procedimento de dupla contagem sem necessariamente entender o significado da fração. Desse modo Campos trabalhou com um grupo de alunos com idade aproximada de 12 anos que haviam aprendido o procedimento de dupla contagem pedindo a eles que nomeassem as frações em três situações.

Na primeira situação, ela utilizou um modelo bem próximo daquele que os alunos habitualmente aprendem em sala de aula. Apresentou uma figura cujo todo foi dividido em partes iguais e as partes pintadas eram contíguas.

A segunda situação era menos típica em relação àquelas trabalhadas em sala de aula. Apresentava, como na primeira situação, um todo dividido em partes iguais, mas as partes pintadas não eram contíguas. A terceira situação não retratava uma situação típica de sala de aula, pois o todo não estava explicitamente dividido em partes iguais, e a região pintada da figura tinha de ser descoberta pelos alunos com base em uma análise da relação parte-todo. A figura abaixo apresenta as três situações propostas por Campos (1995):

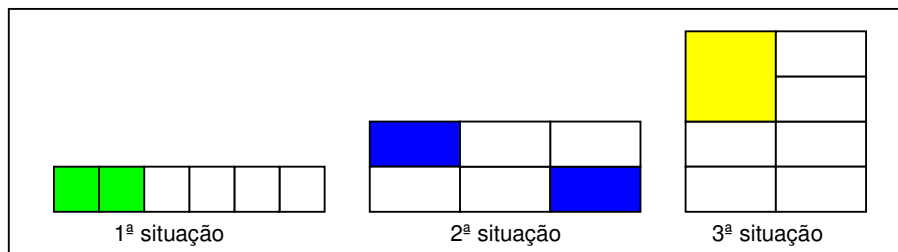


Figura 3.1: Situações propostas por Campos citada por Nunes, Bryant (1997, p.193)

Os resultados obtidos dos estudos apontam, para as situações 1 e 2, um desempenho bem próximo do “teto”, embora alguns alunos tenham se apoiado no

procedimento de dupla contagem nomearam as frações contando as partes pintadas para o numerador e as partes não pintadas para o denominador.

Com relação à terceira situação, o desempenho dos alunos foi significativamente inferior aos demonstrados nas situações 1 e 2, pois ao apoiarem as suas estratégias de resolução no procedimento de dupla contagem, 56% dos alunos escolheram $\frac{1}{7}$, como a fração correspondente.

Os resultados dos estudos de Campos confirmam a suspeita de que os alunos podem usar a linguagem das frações sem compreender completamente sua natureza.

Em seus estudos Pothier, Sawada (1990) ao investigarem sobre a partição, tanto em figuras geométricas quanto em grupos de objetos, como uma aproximação para o conceito de fração, apontam que os livros-texto limitam o uso de modelos físicos para um trabalho introdutório para as frações. Os autores citados evidenciam que os alunos completam tais exercícios, sem que necessariamente atentem para as propriedades geométricas de tais figuras (inteiro) ou das partes e, normalmente, nomeiam de frações para partes não iguais de um inteiro.

Assim, os autores citados argumentam que, exercícios baseados em diagramas de figuras previamente repartidas, as quais os alunos usam para identificar várias frações, ou para representá-las colorindo o número determinado de partes, podem representar parte das dificuldades enfrentadas por eles no trabalho com o conceito das frações.

Kieren, (1994) em seus estudos objetivando compreender as estratégias que crianças e adolescentes utilizam para resolver situações, nas quais os

números racionais aparecem como operadores, bem como se existiam estágios de desenvolvimento quanto ao significado número racional como operador, realizaram uma pesquisa junto a 45 sujeitos distribuídos de 4ª a 8ª séries.

Os resultados do estudo podem evidenciar para a existência de três níveis de desenvolvimento relacionados à fração como operador. No primeiro nível há uma concepção fracionária, por parte das crianças, que é denominado pelo operador $\frac{1}{2}$ ou metade. No segundo nível, chamado intermediário, os sujeitos conseguem manipular operadores unitários ($\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$) e compostos ($\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$). Só no terceiro nível é que se tem habilidade para manipular composição com todas as formas de operador. Os resultados do estudo apontam, também, que os sujeitos utilizam-se da estratégia de partição para controlar as situações de frações, como operador.

Com o objetivo de avaliar os efeitos de um trabalho de um ensino de frações, Tinoco, Lopes (1994) elaboraram uma proposta de ensino que contemplava situações didáticas que visavam minimizar o impacto das dificuldades apresentadas pelos alunos no processo de aprendizagem do conceito de fração.

O estudo foi realizado com um grupo de 101 alunos da 5ª série do Ensino Fundamental de escolas municipais e outro grupo formado por 30 alunos do 1º ano do curso de formação de professores “primários” (CFP) pertencentes às escolas estaduais, ambas do Rio de Janeiro.

A ênfase dada na proposta de ensino era centrada em três aspectos: (a) a construção do conceito de fração pelo aluno como um número; (b) a exploração

do conceito de fração em conjuntos discretos e (c) a noção de frações equivalentes como representações da mesma quantidade. Os sujeitos foram submetidos a um pré-teste e um pós-teste, além de entrevistas.

Da análise qualitativa dos dados obtidos, as autoras ressaltam alguns tipos de resolução. Na questão típica de fração em conjunto discreto, foram encontrados dois tipos de estratégia de resolução. “Silvia ganhou $\frac{3}{4}$ dessas balas. Pinte as balas que ela ganhou.” Abaixo do enunciado da questão desenhou 16 balas iguais.

A primeira estratégia identificada foi fazer cálculo, isto é, contar o total de balas determinando $\frac{3}{4}$ de 16 e pintando 12 balas, sem fazer agrupamentos.

Uma segunda estratégia identificada foi o agrupamento das balas em quatro grupos iguais e pintando três deles.

A terceira estratégia foi formar grupos de quatro balas e em cada um deles pintar três das balas. Esta última estratégia é completamente diversa daquela utilizada com as frações em conjuntos contínuos, mais relacionado com as razões.

Em outra questão enfocando a noção de frações equivalentes, o estudo propôs a seguinte questão:

$$\frac{2}{7} \quad \frac{\square}{14} \quad \frac{10}{\triangle}$$

Qual o valor do quadrado? Qual o valor do triângulo?”

Tinoco, Lopes (1994) levantaram como hipótese para esta questão que a dificuldade residia na presença da fração intermediária. A hipótese foi confirmada

na entrevista, uma vez que o aluno afirmou que o quadrado era quatro e o triângulo, ele não sabia qual o valor. Ao tampar a fração intermediária, as autoras refizeram a pergunta, obtendo a resposta 35. Esta evidência sugere, segundo as autoras, que os alunos não estão familiarizados com a transitividade da equivalência e que a dificuldade pode ser superada no processo de ensino, com situações que levem o aluno, por exemplo, obter uma fração equivalente a $\frac{3}{15}$ com denominador 10.

Com relação às questões envolvendo a ordenação de frações, os critérios utilizados pelos alunos basearam-se em três estratégias: (1) frações com o mesmo numerador; (2) frações com o mesmo denominador e (3) frações com numeradores e denominadores diferentes. No último caso os alunos recorrem ao uso de diagramas.

As autoras citadas evidenciam, em suas conclusões que, em relação ao pré e ao pós-testes houve uma diminuição significativa das respostas em branco, o que denota um maior encorajamento dos alunos para atacar os problemas; uma melhora sensível nas questões de conceitualização e equivalência.

Por outro lado, constataram que alguns tipos de erro persistiram, sugerindo que a maioria deles seja obstáculo epistemológico ou vício adquirido em sala de aula.

Ns estudos realizados por pesquisadores do Programa de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (PROEM), sob a orientação de Beatriz D'Ambrósio (1989), com o objetivo de analisar a concepção dos alunos quanto ao conceito de fração, realizaram uma investigação com 76 alunos com idades entre

9 e 12 anos, cursando a 4^a e 5^a séries do Ensino Fundamental de três escolas particulares da cidade de São Paulo.

Para a realização do estudo os pesquisadores aplicaram um teste seguido de entrevista. O teste continha questões convencionais (tratadas nos livros didáticos) e situações novas. Cada questão foi analisada e discutida individualmente.

Os resultados apontam algumas dificuldades dos alunos para trabalhar com o conceito de fração que são retratadas, por exemplo, pela confusão que eles fizeram com os significados de numerador e denominador (ora o numerador era o número total de partes, ora era o número de elementos).

Outra dificuldade diz respeito ao mecanismo de contagem de elementos (muito usado em quantidades discretas) na tentativa de transferir esse tipo de procedimento para quantidades contínuas, os alunos cometem o equívoco de não relacionar as partes entre si levando em consideração as suas áreas. Os resultados apontam ainda que os alunos demonstram uma facilidade ao lidar com frações com numerador 1.

Os pesquisadores do PROEM explicitam ainda em suas conclusões que tanto o currículo como a metodologia empregados tornam o ensino deficiente e a formação do professor é cada vez mais inadequada à educação. Pontuam ainda que as dificuldades encontradas pelos alunos de 4^a e 5^a séries não se reduzem a essa etapa de escolarização, mas também se estendem a alunos de séries mais avançadas e até mesmo são encontradas no curso de pedagogia.

Finalmente, os pesquisadores chamam a atenção para os erros cometidos pelos alunos, pois esses devem ser encarados como indicadores das

concepções e construções dos próprios alunos, ao invés de valorizar respostas e interpretações corretas visando apenas o “sucesso” na vida escolar.

Em seus estudos junto a futuros professores Silva (1997) teve como objetivo investigar as diferenças de tratamento entre as situações que envolvem o conceito de fração, nas concepções parte-todo, medida e quociente. A finalidade desse estudo era o de possibilitar aos futuros professores das séries iniciais a uma reflexão sobre os principais pontos da introdução do número fracionário no ensino, levando-os a trabalhar com diversas concepções do conceito.

Para a realização de seus estudos, a autora citada elaborou uma seqüência didática baseada na metodologia de pesquisa Engenharia Didática. Com base nos resultados obtidos a autora constatou que com relação aos aspectos didáticos, confirmando os resultados de Kieren (1988) e Campos (1989), a concepção dos professores ao associar a fração a uma figura, essa deveria estar, necessariamente, dividida em partes iguais, considerando a área e a forma dessa figura. Esta necessidade estabelece-se pelo uso da dupla contagem das partes na identificação da fração, ao mesmo tempo em que conduz a idéia, conforme denominou a autora, “discretização do contínuo”, pois a referência do inteiro inicial é substituída pelo número de partes conseguidas após a divisão.

Também foi observada a dificuldade dos professores perceberem o desenho e a divisão de figuras como suportes para a solução de algumas situações descritas no trabalho, que as figuras aparecem previamente divididas. Houve dificuldades em perceber as várias maneiras com que se pode dividir mais do que um inteiro ao mesmo tempo.

Silva (1997) destacou ainda a falta de entendimento do conceito de medição, o que dificultou efetuar medições com unidades não usais; uma tendência ao uso de algoritmos, em detrimento de um trabalho construtivo com a representação de figuras, principalmente para as operações de adição e subtração. Independente do contexto, os futuros professores apresentaram, normalmente, decimais nos resultados das divisões, ao invés de perceberem a representação de um quociente por meio de uma fração.

Com relação aos obstáculos de origem epistemológica, a autora constatou que o conhecimento dos números naturais conduz à crença de que a adição e a subtração de frações seguem uma lógica análoga a dos números naturais, ou seja, basta somar os numeradores e os denominadores das frações envolvidos na operação. Observou que, o uso constante de nosso sistema métrico, representado exclusivamente por números decimais, dificultou a percepção das representações fracionárias.

Finalmente, com base nos resultados obtidos a autora destaca como positivo o envolvimento dos futuros professores nas propostas, não havendo resistência a nenhuma discussão, o que levou a uma mudança de comportamento para quase todas dificuldades apresentadas.

Entretanto, a autora observa que alguns conhecimentos adquiridos anteriormente, apresentam raízes profundas, sugerindo a necessidade de um trabalho mais a longo prazo para que essas raízes possam ser removidas e pudesse crescer novamente com mais força em outras direções.

Bezerra (2001) apresentou seu trabalho com o objetivo de investigar uma abordagem de ensino das frações, que pretendeu estudar a aquisição do conceito

de fração e suas representações, com base em situações-problema que fossem significativas e desafiadoras aos alunos.

Para tanto, o autor realizou seus estudos em uma classe de alunos da 3ª série do Ensino Fundamental, considerando que o contato desses alunos com frações fosse inédito. Nesse sentido, abordou em sua seqüência de ensino as frações nas concepções parte-todo e quociente, contemplando tanto quantidade contínua como quantidade discreta.

Para validar seus estudos, Bezerra (2001), inicialmente, aplicou um pré-teste para duas turmas, uma denominada Grupo Experimental (GE) e outra Grupo de Controle (GC). No GE, o pesquisador utilizou doze encontros sendo dois para aplicação do pré e do pós-teste e dez encontros utilizados, efetivamente para a aplicação da seqüência de ensino.

No GC, houve apenas a aplicação dos pré e pós-testes, pois, nesse intervalo de tempo, os alunos pertencentes a esse grupo não tiveram contato com tal conteúdo, pois o autor visou observar se com esse grupo houve algum acréscimo significativo de aprendizagem que poderia ter ocorrido de modo informal fora da escola.

Da análise dos resultados, no GE, o autor citado concluiu que, apesar das crianças apresentarem, após a intervenção, avanços cognitivos, ainda perduraram alguns tipos de erros que o autor relacionou em seis categorias:

- E_1 – relacionar parte-parte, em quantidades discretas ou contínuas.

Esse erro foi observado em uma relação do tipo parte-todo na qual o aluno procedeu a contagem da parte destacada, e em seguida procedeu a contagem das demais partes, esquecendo de relacionar o todo. Para exemplificar,

Bezerra (2001) apresenta uma questão que mostra o desenho de três corações, dos quais, um deles foi pintado, cuja pergunta foi: “Como você pode representar numericamente o coração pintado em relação a todos os corações?” A resposta obtida foi $\frac{1}{2}$, que é característica do E_1 , ou seja, relacionar parte-parte.

- E_2 – relacionar todo-parte, em quantidades discretas ou contínuas.

Este erro compreende a inversão das posições do numerador com o denominador.

- E_3 – representar uma fração utilizando somente números naturais.

Este tipo de resposta, segundo o autor, evidencia que o aluno ainda não conseguiu operar com o novo conjunto numérico, assim representa com o conhecimento anterior a nova situação, isto é, o conjunto dos números naturais.

- E_4 – considerar a palavra usada na leitura de uma fração como sendo a quantidade a ser assinalada.

Este erro representa a ação do aluno quando lhe foi solicitado que circulasse a quinta parte de um conjunto de dez elementos. O procedimento utilizado em tal situação foi o de circular cinco elementos do conjunto.

- E_5 – com quantidades discretas, centrar-se em uma única figura (observação da quantidade contínua) e desprezar as demais que compõem o todo.

Bezerra (2001) destaca que esse tipo de erro está relacionado ao procedimento do aluno frente a uma quantidade discreta, fixa-se em apenas uma figura e a considera como contínua, efetuando a divisão dessa figura desprezando as demais.

- E_6 – realizar uma divisão de uma quantidade contínua, desprezando a conservação das áreas na figura e repartindo as partes, segundo um critério aleatório.

O autor citado conclui em seus estudos que uma maneira de introduzir os números fracionários seria aquela baseada em situações que procurassem dar significado ao aluno.

Nesse sentido, a seqüência de ensino proposta pelo autor contempla, inicialmente, situações que estão presentes o modelo quociente.

Embora no decorrer da intervenção, o autor apresente situações com o modelo parte-todo, este acredita que esse modelo é importante, mas não deve ser o único e tão pouco o início para o aprendizado dos alunos, pois, ele parece oferecer uma barreira maior entre os números naturais e os fracionários.

Bianchini (2001) aplicou uma seqüência didática para o ensino dos números decimais, com alunos de 3ª série do Ensino Fundamental. Durante algumas atividades, os alunos confundiram a vírgula com o traço de fração, fazendo 1,9 igual a $\frac{1}{9}$. Os alunos pensaram que 1,9 era o mesmo que ter um inteiro dividido em nove partes e, assim, separam uma parte.

Como sugestão, Bianchini explica que é necessário trabalhar com alunos de forma que eles percebam que 1,9 corresponde a um inteiro e nove décimos, enquanto que $\frac{1}{9}$ representa um número menor que a unidade, pois o inteiro foi dividido em nove partes iguais e foi destacado uma delas. Destaca ainda que, a troca da vírgula pelo traço de fração é um erro comum no ensino dos números decimais.

O estudo elaborado por Merlini et al (2005), teve por objetivo apresentar um estudo diagnóstico comparativo, realizado junto a 47 professores, sendo que 21 deles atuavam na 5ª série e 151 estudantes de 3ª, 4ª e 5ª séries, distribuídos em sete escolas da rede pública da cidade de São Paulo.

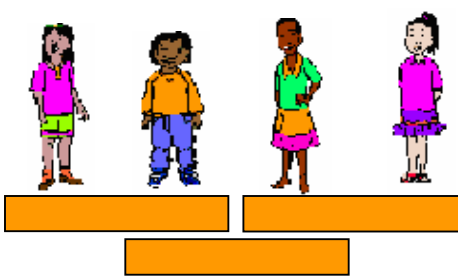
O estudo consistiu em investigar o ensino e aprendizagem do conceito de número racional na sua representação fracionária, com a utilização do significado quociente segundo a classificação teórica de Nunes (2003).

Foi solicitado aos professores que elaborassem, individualmente, seis problemas que contemplassem o conceito de número racional, na sua representação fracionária. Os professores da 5ª série elaboraram um total de 126 porém, 110 desse problemas que puderam ser analisados, segundo a classificação teórica de Nunes (2003). A diferença de 16 problemas corresponde aos problemas que apresentavam falta de clareza no enunciado.

Dos 110 problemas elaborados pelos professores que foram analisados, 16 problemas (14,5%) contemplavam o significado Número; 35 problemas (31,8%) contemplavam o significado Parte-todo; 3 (2,7%) problemas abordavam o significado Quociente; 1 (0,9%) problema abordou o significado Medida e 55 problemas (50%) abordaram o significado Operador Multiplicativo.

Quanto aos alunos, estes foram submetidos a um teste envolvendo os cinco significados da fração, o qual foi aplicado coletivamente em cada uma das séries, cabendo aos alunos respondê-lo individualmente. Para o efeito do referido estudo, somente uma das questões foi discutida.

FORAM DIVIDIDAS IGUALMENTE PARA 4 CRIANÇAS, 3 BARRAS DE CHOCOLATE.



A) CADA CRIANÇA RECEBERÁ 1 CHOCOLATE INTEIRO? SIM NÃO

B) CADA CRIANÇA RECEBERÁ PELO MENOS METADE DE UM CHOCOLATE?
SIM NÃO

C) QUE FRAÇÃO DE CHOCOLATE CADA CRIANÇA RECEBERÁ?

Figura 3.2: Situação proposta por Merlini et. al (2005)

Trata-se de uma questão, que o significado envolvido é quociente, uma vez que é preciso dividir o número de chocolate pelo número de crianças para achar a fração que cada criança irá receber, $\frac{3(\text{chocolates})}{4(\text{crianças})}$.

O desempenho dos estudantes nos itens *a* e *b* foi um índice expressivo de acerto (acima de 85%). Cabe ressaltar que esses itens exigiam dos alunos apenas uma estimativa, se cada criança receberia um chocolate inteiro, ou pelo menos metade do chocolate. Com relação ao item *c*, foi constatado que os alunos, embora tenham compreendido a situação, apresentaram dificuldade em expressar esta situação usando a representação fracionária $\frac{3}{4}$.

Os percentuais de acerto neste item foram: no grupo dos alunos de 3ª série 24,6%; 4ª série 21,2% e 5ª série 10,8%. Observou-se uma queda do desempenho, e tal resultado aponta para uma involução da representação

fracionária, o que provoca o questionamento sobre a pouca valorização da escola aos conceitos intuitivos de seus alunos.

Para o fato do significado Quociente ter sido pouco utilizado pelo professores na elaboração dos problemas Merlini et al argumentam que eles também não devem explorar esse significado em sala de aula. Esse argumento possa talvez, justificar a queda do nível de acerto dos alunos.

Além disso, isto pode ser um forte indicador de que, como o significado Quociente não é trabalhado no ensino das frações, a concepção intuitiva que o estudante apresentava no início do ensino de fração, na 3ª série, não é formalizada e, por conseqüência, vai se perdendo ao longo das séries subseqüentes, 4ª e 5ª séries.

3.2 FRAÇÃO E OS PCN

Nesta seção, descreveremos as recomendações feitas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), para a introdução do conceito de fração. Nesse sentido iniciaremos a nossa descrição a partir do segundo ciclo do Ensino Fundamental (3ª e 4ª séries), uma vez que é nessa etapa escolar que as frações são introduzidas.

Segundo os PCN, a abordagem dos números racionais tem como objetivo principal levar os alunos a perceberem que os números naturais, já conhecidos por eles, são insuficientes para resolver determinados problemas. Sendo assim,

os PCN recomendam que a construção da idéia do número racional deve estar relacionada à divisão entre dois números inteiros, excluindo-se o caso em que o divisor é zero.

No entanto, a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com as idéias construídas pelos alunos a respeito dos números naturais. Portanto, a aprendizagem dos números racionais demanda um certo tempo e uma abordagem adequada.

Dessa forma, os PCN sugerem que a introdução do estudo dos números racionais seja feita pelo seu reconhecimento no contexto diário. Assim, deve-se observar que eles aparecem no cotidiano das pessoas muito mais em sua representação decimal do que na forma fracionária.

Nesse sentido, propõem como um trabalho interessante, o uso da calculadora em atividades que os alunos são convidados a dividir 1 por 2, 1 por 3, 1 por 4, etc., nas quais eles perceberão que as regras do sistema de numeração decimal, utilizadas para representar números naturais, podem ser aplicadas para obter a escrita dos racionais na forma decimal, acrescentando-se ordens à direita da unidade e de forma decrescente.

Nesse cenário, percebemos que os PCN sugerem a abordagem dos números racionais iniciando-se pela sua representação decimal, uma vez que essa representação aparece com mais freqüência na vida cotidiana do aluno.

No que se refere à representação fracionária dos números racionais, os PCN evidenciam que o contato dos alunos com essa representação é bem menos freqüente, pois limita-se às metades, terços, quartos, na maioria das vezes pela via da linguagem oral do que das representações.

De todo modo, o documento pontua que a prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre a situações em que está implícita a relação Parte-todo. Neste caso, a fração indica a relação que existe entre o número de partes e o total de partes. Outro significado das frações é o do quociente; baseia-se na divisão de um número natural por outro ($a:b = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$).

Para o aluno, a situação diferencia-se da interpretação anterior (Parte-todo), pois dividir “um chocolate em 3 partes e comer 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 chocolates para 3 pessoas”. (BRASIL, 1997, p.103).

Os PCN (BRASIL, 1997) sugerem, também, uma terceira situação diferente das duas anteriores é aquela em que a fração é usada como espécie de índice comparativo entre duas quantidades e uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como Razão.

Podemos observar que além dessas três interpretações já descritas se acrescenta mais um significado da fração: Operador, isto é, quando ela desempenha um papel de transformação, ou seja, algo que atua sobre uma situação e a modifica, sugerindo que esse quarto significado seja explorado nos ciclos posteriores.

Resumidamente, constatamos que os PCN sugerem que as frações sejam abordadas no segundo ciclo do Ensino Fundamental, com os seguintes significados: relação Parte-todo, Quociente e Razão. E o outro significado, fração como Operador, a ser trabalhado nos ciclos posteriores.

No segundo ciclo, construção do conceito do número racional pressupõe uma organização de ensino que possibilite experiências com diferentes

significados e representações, o que demanda razoável espaço de tempo. Trata-se de um trabalho que apenas será iniciado no segundo ciclo do Ensino Fundamental e consolidado nos dois ciclos finais.

No terceiro e quarto ciclos, a abordagem dos números racionais deve ter como objetivo levar os alunos a perceber que os números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações problema, como as que envolvem medidas de uma grandeza e o resultado de uma divisão.

Sob essa perspectiva, os PCN (BRASIL, 1997) recomendam que, para abordar o estudo dos números racionais, dever-se-ia recorrer aos problemas históricos, envolvendo medidas, de forma a possibilitar bons contextos para o seu ensino.

Nesse sentido, poder-se-ia discutir com os alunos, por exemplo, como os egípcios já usavam a fração por volta de 2000 a.C., para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados. Eles utilizavam apenas frações unitárias, com exceção de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Assim, em uma situação na qual precisou dividir, por exemplo, 19 por 8 eles utilizavam um procedimento que, na nossa notação, pode ser expresso por: $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Desse modo, os PCN sugerem que esse tipo de problema pode ser explorado e discutido com os alunos, como por exemplo, pedir aos alunos que mostrem que a soma acima indicada é $\frac{19}{8}$.

Nos 3º e 4º ciclos, observamos que os PCN (BRASIL, 1997), reforçam a idéia já sugerida para o ensino dos números racionais no segundo ciclo, de que os números racionais assumem diferentes significados em diversos contextos:

relação Parte-todo, Divisor e Razão e acrescentam outras interpretações diferentes, tais como:

- O número racional usado como índice comparativo entre duas unidades, reforçando a idéia já explicitada anteriormente para o segundo ciclo;
- O número racional envolvendo probabilidades: a chance de sortear 1 bola verde de uma caixa em que há 2 bolas verdes e 8 bolas de outras cores é de $\frac{2}{10}$;
- O número racional explorado em contextos de porcentagem, como por exemplo: 70 em cada 100 alunos de uma Escola gostam de futebol: $\frac{70}{100}$, 0,70 ou 70%, ou ainda $\frac{7}{10}$, e 0,7.;
- O número racional com o significado de um operador, já sugerido anteriormente isto é, quando ele desempenha o papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica.

Os PCN (BRASIL, 1997) pontuam que, na perspectiva do ensino, não é desejável tratar isoladamente cada uma dessas interpretações, ou seja, a consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, ao longo dos 3º e 4º ciclos, que possibilite análise e comparação de variadas situações problema.

Finalmente, as recomendações feitas pelos PCN traduzem uma inovação para o ensino, se analisarmos do ponto de vista da construção do conceito de fração. Esta inovação é traduzida pela ênfase dada por esse documento, ao ensino de fração baseado na resolução de situações-problema, levando em consideração dois aspectos fundamentais – (a) os significados que a fração

poderá assumir em cada situação; (b) as diferentes formas para sua representação.

3.3 DESCRIÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS EM RELAÇÃO ÀS FRAÇÕES

Nesta seção, faremos uma descrição da abordagem contida nos livros didáticos em relação ao conceito de fração. Para tanto, analisamos quatro livros didáticos sendo que, dois destes livros foram indicados pela Escola A (Séries Iniciais do Ensino Fundamental) e os outros dois pela Escola B (5^a a 8^a e séries e Ensino Médio).

Cabe ressaltar que os professores, cujos alunos fizeram parte de nosso estudo, afirmaram não adotarem livro didático de Matemática como livro-texto, desta forma, esses professores indicaram alguns livros que são utilizados na elaboração de seus planejamentos.

Em relação à 4^a Série, foram apontadas as obras:

- Dante, L. R. Matemática. Editora Ática, 2001
- Sosso. J. Convivendo com a Matemática. Atual Editora, 2000

Em relação à 8ª Série:

- Andrini, A. e Vasconcellos M. J. *Praticando Matemática*. Editora do Brasil, 2002
- Jakubovic, J. e Lellis, M. *Matemática na medida certa*. Editora Scipione, 1999

Como o foco de nossa pesquisa não é a análise de livros didáticos, restringir-nos-emos a discuti-los do ponto de vista da classificação teórica de Nunes, abordado em nosso estudo, dos cinco significados da fração: Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador multiplicativo.

Além desta classificação, temos ainda duas variáveis, que serão levadas em consideração, para cada significado da fração: quanto à quantidade – contínua ou discreta; quanto à representação – icônica e não icônica¹. Ater-nos-emos ainda no que se refere aos invariantes da fração – ordem e equivalência.

Iniciaremos nossa descrição pelos livros da **4ª Série**.

Na obra **Matemática** de Dante foram destinados, para o assunto fração, 42 das 328 páginas do livro. O que equivale a 12,8% da obra.

A introdução do tema é realizada por meio da apresentação de quatro mapas do Brasil divididos em estados; sendo alguns destacados com cores diferenciadas e são expressas algumas relações de grandeza territorial entre estes estados, como por exemplo: Santa Catarina: $\frac{1}{2}$ ou 50% do Paraná.

¹ Referimo-nos à representação icônica, como sendo aquela representação que faz uso de figuras no enunciado de um problema.

Assim, são apresentados, fração de uma figura ou de um objeto, frações de um conjunto de elementos, fração de um número, situações-problema, frações e divisão, números mistos, frações impróprias, divisão e frações, frações e medidas, frações equivalentes, simplificação de frações, comparação de frações, adição e subtração de frações, situações-problema, multiplicação com frações, divisão de frações por número natural, revendo as operações com frações: situação-problema.

A seguir, o livro trata da temática da porcentagem ligada ao tema frações que em nosso estudo está conectada ao significado Operador Multiplicativo.

Enumeramos as atividades que o livro sugere de acordo com a classificação teórica de Nunes dos cinco significados de fração: Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador Multiplicativo de acordo com a tabela e descrições abaixo:

Tabela 3.1: Quantidade de atividades em relação à classificação dos cinco significados de fração.

Variáveis	Parte-todo	Quociente	Medida	Op.Multiplicativo
Contínua icônica	14	1	5	4
Contínua não- icônica	-	-	-	2
Discreta icônica	6	-	6	2
Discreta não-icônica	-	-	2	5

Ressaltamos ainda que sete atividades abordaram o significado Número em situações de conversão de registro da forma $\frac{a}{b}$ para forma decimal, bem como, dez atividades que focalizaram a noção de equivalência.

Mas, ainda devemos explicitar que, neste livro didático algumas atividades não foram levadas em consideração na totalização dos significados por não

tratarem diretamente de nenhum significado em específico, mas, sim de operações, simplificações ou definições.

Esse manual didático ainda possui um item denominado frações e divisão, no qual apresenta situações de divisão de todos contínuos, onde a representação fracionária ocorre por meio da relação das partes, divididas com o todo.

De acordo com nosso ponto de vista, estas atividades estão relacionadas com o significado Parte-todo e não quociente, por este motivo se justifica a existência de somente uma atividade atribuída ao significado quociente mesmo depois da análise desse sub item.

Desta forma, o significado mais abordado nesse livro foi o Parte-todo, com quantidade contínua e representação icônica por meio de atividades que apresentavam figuras geométricas (círculos, retângulos) divididas em partes iguais e algumas pintadas, seguidas da representação numérica na forma $\frac{a}{b}$, além da literária (como, por exemplo, um terço), conforme exemplo na figura:

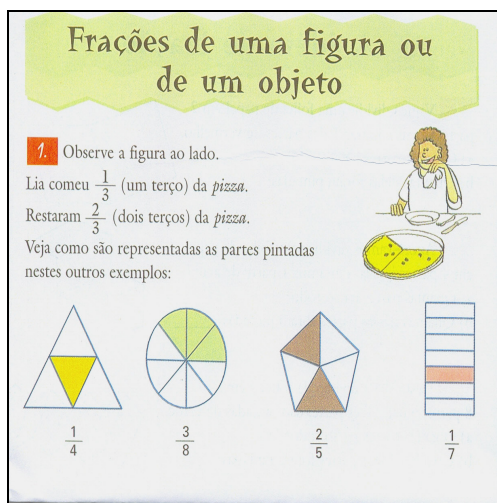


Figura 3.3: Exemplo da p. 120 do livro de Dante

Após, obtivemos seis ocorrências com este mesmo significado, na quantidade discreta e na representação icônica por meio de frações relacionadas com base nas partes de um todo, expresso por conjuntos de figuras (balões, flores, ferramentas, formas geométricas, brinquedos, ...), conforme figura:

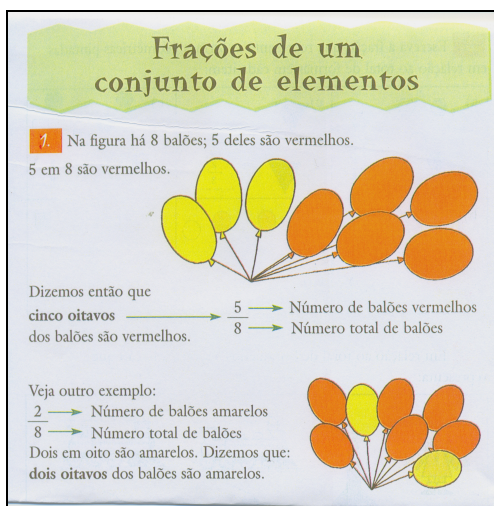


Figura 3.4: Exemplo da p. 123 do livro de Dante


Observamos, também, que após o significado Parte-todo, outro significado que se destacou foi o Medida inserido em um capítulo a parte, denominado de "Probabilidade". O livro desenvolve esse capítulo com situações semelhantes às abordadas em nosso estudo, além de citar em um tópico "Probabilidade: medida da chance", conforme figura ilustrativa:

Probabilidade: medida da chance

1. Observe o desenho. No vidro, há 3 bolas vermelhas e 1 azul, num total de 4 bolas.

A probabilidade de se retirar, sem olhar, uma bola vermelha é 3 em 4 ou $\frac{3}{4}$.

A probabilidade de se retirar uma azul é 1 em 4 ou $\frac{1}{4}$.



2. Agora é sua vez. Responda:

a) Qual é a probabilidade de se retirar, sem olhar, uma bola azul? $\frac{3 \text{ em } 7 \text{ ou } \frac{3}{7}$

b) E uma bola amarela? $\frac{1 \text{ em } 7 \text{ ou } \frac{1}{7}$

c) E uma bola vermelha? $\frac{2 \text{ em } 7 \text{ ou } \frac{2}{7}$

d) Qual a cor da bola que tem a maior probabilidade de sair? Azul

e) Bolas de que cores têm a mesma probabilidade de sair? Amarela e verde (1 em 7 ou $\frac{1}{7}$)







Figura 3.5: Exemplo e exercício da p. 162 do livro de Dante

O significado Operador Multiplicativo, por nós classificado, também, surgiu em quantidades contínuas e discretas e nas representações icônica e não-icônica por meio de atividades variadas, conforme figura:

Veja mais um exemplo e faça os demais:

$\frac{1}{2}$ de 6 = ? a) $\frac{1}{4}$ de 8 = ? b) $\frac{1}{3}$ de 9 = ?

$\frac{1}{2}$ de 6 = 3, pois $6 \div 2 = 3$.

$\frac{1}{4}$ de 8 = 2, pois $8 \div 4 = 2$.

$\frac{1}{3}$ de 9 = 3, pois $9 \div 3 = 3$.

5. Gisele usou $\frac{5}{6}$ de uma dúzia de ovos para fazer um doce. Quantos ovos ela usou?

1 dúzia = 12 ovos. $\frac{5}{6}$ de 12 = ?

Como $\frac{1}{6}$ de 12 = 2, para saber quanto é $\frac{5}{6}$ de 12 basta fazer $5 \times 2 = 10$

Logo, $\frac{5}{6}$ de 12 = 10.

Veja: $12 \div 6 = 2$ $5 \times 2 = 10$

Gisele usou 10 ovos.


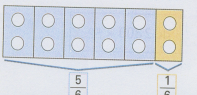



Figura 3.6: Exemplo e exercício da p. 125 do livro de Dante

O próximo livro a ser descrito é uma obra de SOSSO denominada **Convivendo com a Matemática**. Nesse livro, o tema frações é apresentado em três momentos distintos.

No primeiro, a autora realiza uma introdução desse conceito por intermédio das falas de três personagens que mencionam situações da vida cotidiana nas quais a fração está presente como, por exemplo: *“Comi um terço de uma barra de chocolate”*. A seguir, são apresentadas situações diversas envolvendo esta temática, em sua maioria relacionada ao significado Parte-todo.

Já, no segundo momento, após ter apontado algumas noções de números decimais, operações de multiplicação e divisão de números inteiros e de um breve estudo de retas, a autora volta a falar de fração novamente em situações que abordam o significado Parte-todo e Número além de algumas operações com frações.

Posteriormente, são tratados assuntos ligados a números decimais (estabelecendo algumas relações entre esses números e as frações por meio de mudanças de registros de representação considerados, por nós, como o significado número), medida de comprimentos, ângulos, gráficos áreas e perímetros.

No terceiro e último momento, a autora volta a apresentar situações Parte-todo estendendo-se para o significado Operador Multiplicativo, trabalhando com a escrita por extenso da leitura das frações e chegando às relações de equivalência.

Assim, das 240 páginas do livro, apenas 9,58% o que equivale a 23 páginas foram dedicadas a este tópico.

A seguir, apontaremos, na tabela abaixo, as atividades que o livro sugere, de acordo com a classificação teórica de Nunes dos cinco significados de fração: Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador Multiplicativo:

Tabela 3.2: Quantidade de atividades em relação a classificação dos cinco significados de fração.

Variáveis	Parte-todo	Quociente	Medida	Op.Multiplicativo
Contínua icônica	16	-	-	3
Contínua não- icônica	-	-	-	1
Discreta icônica	1	-	-	-
Discreta não-icônica	1	-	-	3

Ressaltamos ainda a existência de quatro atividades que abordam o significado Número, bem como, cinco situações de equivalência.

Mais uma vez, o significado Parte-todo obteve o maior índice de ocorrência e, mais uma vez, também, isso aconteceu nas quantidades contínua e discreta na representação icônica com concentração na quantidade contínua com representação icônica e de forma quase análoga ao livro analisado anteriormente.

Como o exemplo da figura:

2. Sílvia e duas amigas foram a uma pizzaria e pediram uma pizza, que foi dividida em 8 pedaços iguais. Cada uma das meninas comeu 2 pedaços da pizza.

a) Que fração da pizza representa cada pedaço? $\frac{1}{8}$

b) Que fração da pizza representa a parte que Sílvia comeu? $\frac{2}{8}$

c) Que fração representa a pizza toda? $\frac{8}{8}$

d) Que fração da pizza sobrou? $\frac{2}{8}$

Desenhe, no espaço ao lado, uma figura para representar a pizza e pinte a parte que as meninas comeram.

Figura 3.7: Exemplo e exercício da p. 103 do livro de Sosso

Outro fator comum entre as duas obras analisadas foi, novamente, o aparecimento do significado Operador Multiplicativo com o segundo maior índice de ocorrências, demonstrado em um exemplo:

2. Nesta atividade as frações foram utilizadas para indicar partes de uma quantidade. Observe na tabela abaixo o número de alunos das turmas de 4ª série de uma escola e encontre o que se pede.

4ª série	
Turma	Número de alunos
A	40
B	35
C	36

No dia da festa junina dessa escola, participarão da quadrilha os seguintes alunos:

$\frac{2}{5}$ dos alunos da 4ª série A $\frac{4}{7}$ dos alunos da 4ª série B

$\frac{5}{6}$ dos alunos da 4ª série C

A resolução desta atividade pode ser iniciada pela construção do seguinte diagrama:

Ver nas Orientações Pedagógicas outras maneiras de solucionar esta atividade.

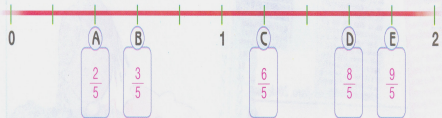
Quantos alunos da 4ª série A participarão da quadrilha? 16 alunos

$\frac{8}{2} \frac{8}{5} \frac{8}{8} \frac{8}{8}$


Figura 3.8: Exemplo e exercício da p. 165 do livro de Sosso

Cabe ressaltar que, o livro apresentou situações do tipo, reta numerada com unidades subdivididas que, embasado em nossa classificação, abordam o significado Parte-todo. E por fim, uma situação com o significado Número, semelhante às situações que utilizamos em nosso estudo, como demonstramos em exemplos abaixo:

12. Escreva as frações correspondentes às letras A, B, C, D e E.



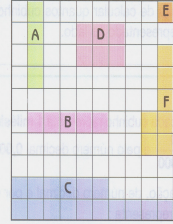
13. Observe a reta numerada abaixo.



Agora, localize nessa reta as seguintes frações:

$\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{14}{3}, \frac{1}{3}$

3. Complete a tabela escrevendo as frações e os números decimais correspondentes às partes coloridas da figura abaixo.



	A	B	C	D	E	F
Fração	$\frac{4}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{7}{100}$
Número decimal	0,04	0,05	0,16	0,06	0,01	0,07

Figura 3.9: Exercícios das p. 137 e 111 do livro de Sosso

A partir de agora, realizaremos a descrição pelos livros da **8ª Série**.

A obra de Andrini, A. e Vasconcellos M. J., intitulado **Praticando Matemática**, como era de se esperar, não aparece um capítulo específico para frações, visto que este tópico não faz parte do currículo desta série. No entanto, observamos alguns tópicos os quais o uso das frações está implícito:

Na Unidade 1, denominada “Potenciação e Radiciação” são apresentadas algumas potenciações, cuja base é um número inteiro positivo ou negativo e o expoente é negativo, gerando como resultado uma fração.

Além disso, posteriormente, são solicitadas que sejam realizadas algumas simplificações de certos números expressos em fração.

Ainda nesta Unidade, o tópico “expoentes racionais” é apresentado, no qual são trabalhados números inteiros com expoente racional, isto é, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Já na Unidade 2, que aborda os temas “Equação do 2º Grau e Trinômios Quadrados Perfeitos” bem como na Unidade 3 que trata do “Estudo de Funções”, as frações aparecem em alguns exemplos e exercícios.

A Unidade 4 enfatiza o tópico “Noções de Probabilidade” em que é apresentado a razão entre o número de possibilidades favoráveis pelo número total de possibilidades, isto é:

$$probabilidade = \frac{\text{número de possibilidades favoráveis}}{\text{número total de possibilidades}}$$

Cabe ressaltar que o manual didático enfatiza a escrita do resultado das questões que envolvem este tema tanto na representação fracionária como na decimal.

Na Unidade 5 que aborda a “Congruência e Semelhança de Figuras”, as frações aparecem nos sub itens: semelhança entre figuras geométricas e Teorema de Tales.

Já na Unidade 6, “Relações Métricas nos Triângulos Retângulos” e na Unidade 7 “Círculo e Cilindro” as frações aparecem nos cálculos das expressões de alguns exercícios.

Na Unidade 8, “Trigonometria no Triângulo Retângulo” as frações estão presentes nas fórmulas que envolvem as definições de seno, cosseno e tangente, bem como nos exercícios que seguem.

E, por fim, no tópico, “Porcentagem e Juro” tratado na Unidade 9, são realizadas transformações de expressões, envolvendo porcentagem em sua representação fracionária e decimal, como, por exemplo: $92\% = \frac{92}{100} = 0,92$.

Cabe ressaltar que, em nosso instrumento diagnóstico, foram propostas algumas atividades que envolviam os assuntos noções de probabilidade e porcentagem além das mudanças de registro da representação fracionária para a representação decimal que este manual didático enfatiza.

A outra obra indicada pelos professores que atuavam na 8ª série onde foi realizada a nossa pesquisa diagnóstica, é **Matemática na Medida Certa** de Jakubovic, J. e Lellis que é subdividida em quatro capítulos: Potências e raízes, Equações do 2º Grau, Geometria e Funções, respectivamente.

Nestes quatro capítulos as frações são apresentadas em alguns exemplos e exercícios; além de estarem presentes nas definições dos tópicos:

potências com expoentes racionais e propriedades das potências com expoentes racionais no Capítulo 1.

Na fórmula de Báskara e nos tópicos equações fracionárias, em que é definida, segundo esta obra, como toda equação que tem pelo menos uma variável no denominador de uma fração algébrica como, por exemplo,

$$\frac{2x-1}{4} + \frac{1}{x} = \frac{3x-1}{6}.$$

Além do Teorema de Tales, Semelhança, Relações Métricas no Triângulo Retângulo e Trigonometria nas definições de seno, co-seno e tangente no Capítulo 3.

CAPÍTULO IV

METODOLOGIA

Neste capítulo, apresentaremos o desenho metodológico de nosso estudo, cujo objetivo foi diagnosticar as concepções e desempenhos que os alunos da 4^a e 8^a séries apresentaram em relação aos cinco significados de fração.

Iniciamos pela discussão Teórico-Metodológica que embasa a aplicação de nosso instrumento, seguimos descrevendo o Universo de Estudo, tanto para aplicação do Estudo piloto como do Estudo principal. Cabe ressaltar que o Estudo principal receberá, obviamente, muito mais atenção de nossa parte, por ser ele nosso maior foco.

Dentro da seção do Estudo Principal, dedicaremos uma subseção para apresentar nosso instrumento diagnóstico, acrescido de uma análise a priori sobre sua apresentação e resolução.

4.1 DISCUSSÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

Nosso estudo está baseado em uma pesquisa diagnóstica quali-quantitativa, em que buscamos descrever os resultados obtidos com base na aplicação de um teste, tanto do ponto de vista da quantidade de sujeitos que responderam dessa ou daquela maneira como do ponto de vista da qualidade das respostas encontradas.

Segundo Rudio (1995, p.55), trata-se de uma pesquisa descritiva na qual o *“pesquisador procura conhecer e interpretar a realidade, sem nela interferir para modificá-la”*.

Assim o interesse da pesquisa descritiva está em descobrir e observar fenômenos, tentando descrever, classificar e interpretar esses fenômenos. Nessa perspectiva optamos por realizar um estudo diagnóstico com o objetivo de estudar o conhecimento do aluno de 4^a e 8^a séries em relação ao conceito de fração.

Para tanto, elaboramos um instrumento que procurou abordar cada um dos cinco diferentes significados, levando em consideração duas variáveis:

- a) a característica da quantidade (contínua ou discreta);
- b) a forma de apresentação dos problemas (com representação icônica¹ e sem a representação icônica).

Retomando as idéias teóricas de Vergnaud, no que tange à Teoria dos Campos Conceituais para formação de um dado conceito, no que diz respeito à forma pela qual ele sugere para sua aquisição. Destacamos a premissa de sua

1

Referimo-nos à representação icônica, como sendo aquela representação que faz uso de figuras no enunciado de um problema.

teoria na qual para ele o sujeito adquire e desenvolve seu conhecimento por meio da interação e da resolução de muitas situações-problema.

Acreditamos que, para se identificar as concepções, que os alunos possam ter em relação aos cinco diferentes significados de fração, por meio da aplicação de um instrumento diagnóstico, devemos desafiar o aluno em situações-problema nas quais devem variar em diversos aspectos.

Por esse motivo, distribuimos nossas questões de forma centrada nos diferentes significados abordados, utilizando as seguintes variáveis, exceto o significado Número:

- Utilização de Ícone: a utilização do ícone tem o objetivo de levar o aluno a interagir com o problema de forma perceptiva, a partir daí vamos avaliar se o ícone pode ajudar ou não na resolução do problema.
- Não utilização do ícone: as questões que não possuem ícone têm o objetivo de comparação com as questões icônicas, como também, levar o aluno a agir em relação mais direta com os dados do problema.
- Quantidade contínua: acreditamos que as estruturas mentais que o aluno faz uso para resolver problemas com quantidades contínuas sejam diferentes, das quais ele usa para resolver questões com quantidades discretas, portanto temos o objetivo de analisar em qual situação o aluno tem um melhor entendimento.
- Quantidade discreta: da mesma forma que a quantidade contínua, objetivo de comparação e desempenho do aluno na resolução.

Para os significados: Parte-Todo, Quociente, Medida e Operador Multiplicativo, temos quatro formas de apresentação, conforme mostra o quadro abaixo, e para o significado Número consideramos apenas a representação icônica (Q 11a, Q 11b) e não icônica (Q 18a, Q 18b), pois consideramos que a noção de número, apenas, não pode ser relacionada a quantidade discreta ou contínua.

Tabela 4.1: Distribuição das questões em relação aos significados e as variáveis de pesquisa, abordadas em nosso estudo.

SIGNIFICADOS	PARTE-TODO	QUOCIENTE	MEDIDA	OP. MULTIPLICATIVO
QUANTIDADES				
CONTÍNUA ICÔNICA	Q 8a, 8b	Q 6c	Q 5b, 5c	Q 7
CONTÍNUA NÃO ICON	Q 4	Q 13	Q 9	Q 19a
DISCRETA ICÔNICA	Q 1	Q 2b	Q 17a, 17b	Q 14
DISCRETA NÃO ICON	Q 12	Q 10b	Q 3	Q 16

Procuramos, assim, embasados na teoria de Vergnaud, no que diz respeito à abordagem de várias formas possíveis em Situações-problema estabelecer características para nossa análise qualitativa que além das citadas acima, ainda se ampliam em outras, tais como: os invariantes de ordem e equivalência e a noção de divisão.

4.2 UNIVERSO DO ESTUDO

O universo deste estudo foi composto por estudantes de escolas públicas estaduais, localizadas na região central da cidade de São Paulo.

Optamos pelo sistema de educação pública, porque ele atende a grande maioria dos estudantes da Educação Básica do Brasil, segundo dados do INEP/MEC, a rede pública responde pelo atendimento de 91% de todos os alunos matriculados no Ensino Fundamental do Brasil, o que significa que a escolarização em massa dos brasileiros ocorre em escolas da rede pública.

Após a realização do estudo-piloto, escolhemos aplicar nosso estudo principal com alunos das 4^a e 8^a séries do Ensino Fundamental, já que na 4^a série o ensino de frações está mais presente.

A opção pela 8^a série deu-se, também, pelo fato dessa série encerrar o Ensino Fundamental e, desta forma, poder identificar as concepções que os alunos apresentam em relação aos cinco diferentes significados de fração quando concluem este nível de ensino.

Já a escolha das escolas deu-se, inicialmente, por poder contemplar o universo por nós descrito e também a acessibilidade às séries desejadas.

Nossa pesquisa foi realizada em duas escolas onde tivemos acesso dentro desse universo de estudo que ficam aproximadamente a 400 metros de distância uma da outra. A primeira escola atende apenas às séries iniciais 1^a a 4^a séries, e a outra 5^a a 8^a séries do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

O motivo que nos levou a escolher essa segunda escola foi o fato dela acolher a aproximadamente 90%* dos alunos que terminam seus estudos na primeira escola.

Por questão de ética, preservaremos os nomes das escolas e passaremos a chamar de escola A e B para nos referirmos à escola que atua nas séries iniciais do Ensino Fundamental e à escola que atua nas séries finais e Ensino Médio respectivamente.

4.2.1 Universo do Estudo Piloto

O estudo-piloto foi realizado na escola A, como descrito anteriormente, nosso teste foi aplicado em duas turmas da 3ª série e duas turmas da 4ª série. Esta escola dispõe de classes da 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental e funciona em dois períodos, matutino e vespertino, com 8 classes em cada período.

Nosso instrumento foi aplicado no turno matutino, tanto para a 3ª como para 4ª séries. Na 3ª série, pudemos contar com a participação de 65 alunos que apresentavam faixa etária de 9 a 11 anos; já na 4ª, participaram do estudo piloto 66 alunos com idades de 10 a 13 anos.

* Dados não oficiais, obtidos oralmente junto aos professores e coordenador da primeira escola.

4.2.2 Universo do Estudo Principal

Nosso estudo principal foi realizado na escola A, com duas turmas de 4^a séries do período vespertino, para que pudéssemos trabalhar com alunos que não tiveram contato com o estudo-piloto, e na escola B com duas turmas de 8^a séries.

Na escola A, participaram do estudo principal 65 alunos da 4^a série e na escola B, 58 alunos da 8^a série na faixa etária de 14 a 16 anos.

A escola B agrega classes da 5^a a 8^a séries do Ensino Fundamental, bem como da 1^a a 3^a séries do Ensino Médio; ela funciona em três turnos, manhã, tarde e noite. O nosso instrumento foi aplicado a alunos do turno da manhã.

4.3 O ESTUDO PILOTO

O desenvolvimento do estudo-piloto teve como objetivo detectar e corrigir possíveis erros na elaboração dos problemas, adequar o tempo necessário para realização do instrumento, planejar adequadamente a metodologia de aplicação e analisar qual série inicial seria mais adequada para a realização do instrumento definitivo.

O estudo foi realizado na escola A, com alunos de 3^a e 4^a séries do Ensino Fundamental como descrito no item 4.2.1.

Para tanto, elaboramos um instrumento diagnóstico contendo 17 questões que deveriam abordar os cinco diferentes significados de fração e suas variáveis de apresentação.

O instrumento foi composto de 10 folhas de formato A₄, na primeira havia a indicação, para que fossem colocados o nome, a idade e a série do aluno, nas demais folhas, foram distribuídas as questões duas a duas por folha, só foi usado o espaço de frente de cada folha.

A aplicação do instrumento foi realizada com a participação de dois pesquisadores mais a presença do professor da turma.

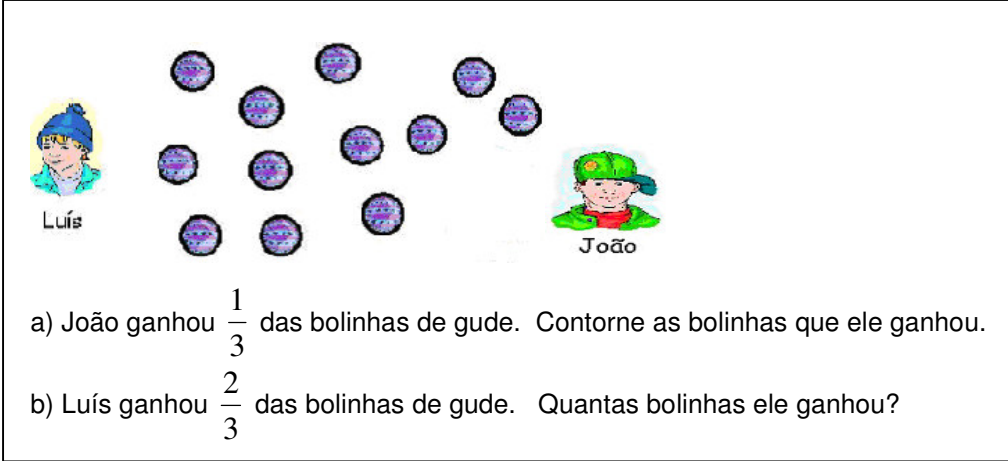
Como um dos nossos objetivos nessa aplicação foi de saber se os alunos entendiam o enunciado dos problemas fizemos uso de um Data-Show, projetando as questões e também lendo uma a uma para os alunos. Após a projeção de uma questão e sua leitura, esperávamos um certo tempo, para que ela fosse resolvida e, então partíamos para a próxima questão.

Solicitamos aos alunos que fossem acompanhando a leitura e resolvendo somente a questão proposta na projeção.

Este estudo-piloto nos foi de grande valia, pois pudemos corrigir erros que, inicialmente, não nos eram expostos.

Após a aplicação do instrumento-piloto, percebemos que não havíamos abordado todos os significados com suas variáveis de apresentação, o que nos levou a elaborar algumas questões novas. Decidimos que as questões deveriam ser dispostas uma a uma por página, para que os alunos prestassem mais atenção na questão que estivesse sendo lida; assim, poderíamos dispensar o uso do Data-Show; para tanto, elaboramos um caderninho de questões que será detalhado no próximo item.

Fizemos também, modificações em determinadas questões que se mostraram confusas como, no exemplo, a seguir:

QUESTÃO 9 (ESTUDO PILOTO)


a) João ganhou $\frac{1}{3}$ das bolinhas de gude. Contorne as bolinhas que ele ganhou.

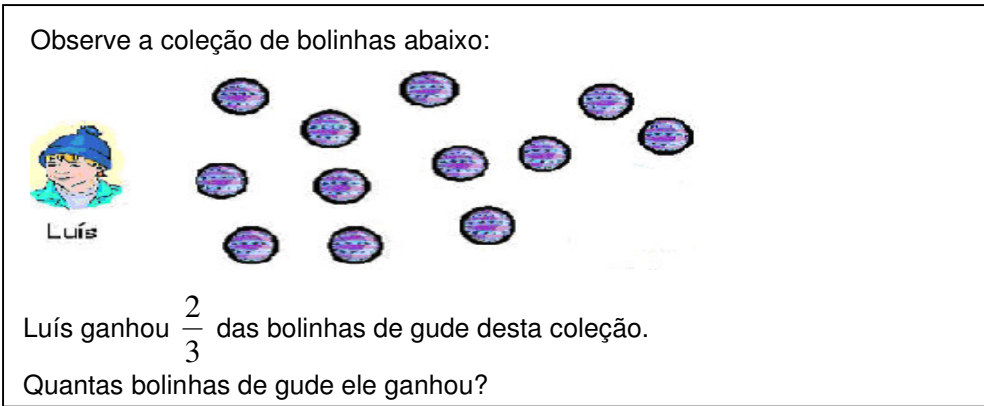
b) Luís ganhou $\frac{2}{3}$ das bolinhas de gude. Quantas bolinhas ele ganhou?

Nesta questão, que abordava o significado Operador Multiplicativo na forma icônica, era pedido no item *a* que fossem contornadas as bolinhas que João ganhou, essa solicitação, inicialmente, não parecia complicada, porém, quando os alunos partiam para resolução do item *b*, eles ficavam em dúvida se Luís ganhou $\frac{2}{3}$ do total de bolinhas ou das bolinhas que haviam restado, após contornar as bolinhas que João ganhou.

Depois de perceber esse problema elaboramos a questão da seguinte forma:

QUESTÃO 14 (ESTUDO PRINCIPAL)

Observe a coleção de bolinhas abaixo:



Luís ganhou $\frac{2}{3}$ das bolinhas de gude desta coleção.

Quantas bolinhas de gude ele ganhou?

Mantivemos a idéia da questão por considerarmos que abordou de forma adequada o significado desejado com sua forma de apresentação icônica.

4.4 O ESTUDO PRINCIPAL

Com base nos dados obtidos no estudo piloto, refinamos o instrumento para aplicá-lo novamente, agora em duas escolas. A primeira foi a mesma onde havia sido aplicado o Estudo Piloto (escola A), obviamente com alunos de outra classe e, na escola B.

4.4.1 Sujeitos

Nossos sujeitos de pesquisa foram, na escola A, 65 alunos da 4^a série do Ensino Fundamental com idades de 9 a 13 e 58 alunos da escola B, da 8^a série do Ensino Fundamental, com idades de 14 a 16 anos.

4.4.2 Material Utilizado

Para a coleta de dados, utilizamos como material um caderninho composto de 20 folhas, todas medindo metade de uma folha A₄; a primeira folha foi utilizada como capa de identificação para que o aluno colocasse o nome, idade e série.

As outras dezenove folhas foram usadas para as 19 questões aplicadas, sendo que cada folha continha uma questão com enunciado, apresentando ícone ou não e espaço para resposta.

4.4.3 Instrumento Diagnóstico

Relembramos que, a elaboração do instrumento diagnóstico principal teve como base nosso instrumento piloto, o qual além de ajudar no aprimoramento do instrumento principal, nos ajudou a concluir que uma análise comparativa seria mais bem evidenciada se comparássemos a série em que se dá o início formal do ensino de frações com outra série mais avançada, na qual o foco do ensino de frações já não faz mais parte do currículo que, em nosso caso, tratou-se da 8ª série, mas, na qual os alunos precisam dominar esse conteúdo para trabalhar em outras áreas da matemática como, por exemplo, na geometria Euclidiana.

O estudo principal foi composto de 19 questões distribuídas conforme mostra o **Anexo** (O Instrumento Diagnóstico) que abordaram os cinco diferentes significados de fração, distribuídas em 29 itens para serem respondidos.

Desse total, em relação aos significados, 20 itens poderão ser analisados de quatro formas diferentes, conforme as variáveis de pesquisa, contínua icônica e não icônica, e discreta icônica e não icônica; ressaltamos que o significado número foi abordado, apenas, nas variáveis representação icônica e não icônica.

Quanto aos nove itens restantes, alguns deles poderão nos dar indícios se de fato o aluno entendeu a situação proposta, enquanto outros abordam a equivalência da fração.

Posteriormente, no item 4.4.4.1, Análise a Priori do Instrumento Diagnóstico, apresentaremos, detalhadamente, cada uma das questões que compõem este Estudo Principal.

4.4.4 Procedimentos

Nossa coleta de dados ocorreu em dois dias distintos, um para cada Escola e série. A primeira coleta foi feita na escola A de turmas da 4^a série e a segunda coleta foi feita na escola B de turmas da 8^a série.

Em contato com as escolas para planejar nossa coleta ficaram acertados os dias, horários e turmas. Nas duas escolas, a escolha das turmas foi sugerida por cada coordenação.

Fomos recebidos, em cada sala, pelo professor responsável que participou do trabalho de coleta ajudando na organização da sala e na manutenção da disciplina.

Inicialmente, foi explicado aos alunos que a atividade deveria ser individual, e que nosso objetivo estava não apenas nos resultados, mas também, na resolução, por isso pedimos aos alunos que fizessem as contas, quando necessário, no próprio instrumento diagnóstico.

Após a distribuição dos cadernos foi explicado também que as questões seriam lidas uma a uma, página por página, e que seria dado um certo tempo para resolução da questão, que foi coordenado por nós, com o objetivo de permitir que todos tentassem resolvê-las.

Na aplicação do instrumento, estiveram presentes: o pesquisador, um observador, que faz parte de nosso grupo de estudo e o professor da sala, sendo que um se encarregou de andar pela sala para evitar que os alunos colassem, e também para tirar alguma dúvida de leitura apenas, sem que houvesse qualquer tipo de explicação sobre a resolução do instrumento.

O objetivo de ler as questões foi o de não gerar dúvidas de leitura, afim de que os alunos pudessem se ater e se concentrar na resolução das questões. Já o objetivo da distribuição de uma questão por página foi para que os alunos centrassem a atenção na questão lida.

O tempo médio gasto por turma para aplicação do instrumento foi de uma hora.

Notamos que os alunos da 4^a série foram mais solidários com nossa pesquisa, mantendo silêncio e resolvendo as questões com muito interesse, já os alunos da 8^a, provavelmente pela idade adolescente, questionaram se eles seriam obrigados a participar da atividade, diante disso, dissemos que não havia a obrigatoriedade e alguns decidiram não participar, por esse motivo, acreditamos que todos aqueles que se dispuseram a participar fizeram-no de boa vontade e procuraram resolver as questões de forma séria.

4.4.4.1 Análise a Priori do Instrumento Diagnóstico

A seguir, apresentaremos as questões que fizeram parte de nosso instrumento diagnóstico com a descrição das variáveis abordadas, nossas hipóteses em relação às possíveis respostas e discussões que consideramos pertinentes.

QUESTÃO 1

NUMA LOJA DE PRESENTES HÁ 4 BONÉS VERMELHOS E 2 BONÉS AZUIS DE MESMO TAMANHO. QUE FRAÇÃO REPRESENTA A QUANTIDADE DE BONÉS AZUIS EM RELAÇÃO AO TOTAL DE BONÉS?



Esta questão aborda o significado Parte-todo com quantidade discreta e apresenta o ícone que retrata tal situação. O significado Parte-todo é, geralmente, utilizado na introdução do conceito de fração. Trata-se de uma situação que pode empregar um tipo de contagem dupla - a quantidade total de bonés, sendo o denominador e a quantidade de bonés azuis o numerador.

A quantidade discreta no significado parte-todo costuma ser pouco explorada nos livros didáticos, o que nos leva a inferir que esse pode ser o fator de complexidade da questão. Por outro lado, o ícone, pode ser um fator facilitador, pois ele retrata de maneira clara a situação proposta.

Nesta questão, esperamos, entre outras, as seguintes respostas:

- $\frac{2}{6}$ 2 bonés azuis para um total de 6 bonés, demonstrando assim,

que o aluno pode ter se utilizado da dupla contagem, o que caracteriza o significado Parte-todo;

- $\frac{1}{3}$ Esta poderia ser uma outra possível resposta. Neste caso há

duas possibilidades. A primeira é o aluno poderia ter atribuído o significado de Operador Multiplicativo e nesse caso, ter pensado “que número multiplicado por 6

dá como resposta o número 2?” A segunda possibilidade é o aluno ter atribuído o significado Parte-todo e ter simplificado a fração $\frac{2}{6}$, chegando a $\frac{1}{3}$;

- $\frac{6}{2}$ ou $\frac{3}{1}$ O aluno poderia ainda ter pensado de maneira correta mas

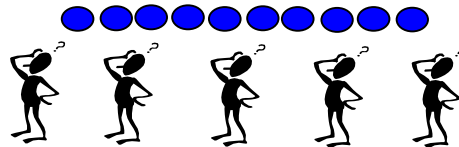
inverter o numerador com o denominador, e teremos então respostas desse tipo;

- $\frac{2}{4}$ ou $\frac{4}{2}$ O aluno poderá responder de maneira equivocada

pensando na relação parte-parte, isto é, 2 bonés azuis para 4 bonés vermelhos, ou ainda, 4 bonés vermelhos para 2 azuis.

QUESTÃO 2

TENHO 10 BOLINHAS DE GUDE E VOU DIVIDIR IGUALMENTE PARA 5 CRIANÇAS.



- A) QUANTAS BOLINHAS CADA CRIANÇA GANHARÁ?
B) QUE FRAÇÃO REPRESENTA ESTA DIVISÃO?

Esta questão foi idealizada com o intuito de enfatizar o significado Quociente com quantidade discreta, utilizando o ícone para representar o conjunto de bolinhas de gude a serem divididas às cinco crianças. A questão apresenta dois itens. No item “a”, perguntamos quantas bolinhas de gude cada criança ganhará, sendo que esse mesmo item não será contabilizado em nossa análise quantitativa, pois se trata de uma divisão em uma situação contextualizada, procedimento que acreditamos ser comum na vida escolar do aluno e, além disso, não está sendo o foco de nossa pesquisa. Apesar disso, o

motivo pelo qual incluímos este item será para nos certificar que, de fato, o aluno entendeu tratar-se de uma situação de divisão.

No item “b”, na qual perguntamos que fração representa a divisão, o aluno deverá relacionar divisão com fração.

Acreditamos que o fator de complexidade resida na formalização da resposta, pois, normalmente, o aluno não faz a conexão entre fração e divisão. Isso pode ocorrer pelo fato do conceito de fração estar, para o aluno, intrinsecamente mais ligado ao significado Parte-todo, uma vez que, usualmente, é por esse significado que se inicia o conceito de fração. Um outro fator de complexidade pode ser o fato de estarmos lidando com quantidades discretas que, geralmente, é pouco explorado nos livros didáticos.

Algumas possibilidades de respostas esperadas para o item “b” poderiam ser:

- $\frac{10}{5}$ Para esta resposta podemos inferir que o aluno pensou na fração

com significado de quociente, ou seja, 10 bolinhas de gude para 5 crianças, o que retrata claramente duas grandezas distintas, (bolinhas de gude e crianças) caracterizando, assim, o significado Quociente;

- $\frac{5}{10}$ O aluno poderá responder invertendo o numerador com o

denominador. É possível que um dos fatores dessa inversão seja o fato que o aluno está mais familiarizado com frações de numeradores menores que os denominadores, comumente encontrada nas situações de Parte-todo.

- $\frac{2}{10}$ Nesta resposta, podemos inferir que, se o aluno acertou o item a

(2 bolinhas de gude para cada criança) ele poderá ter se utilizado desse dado

para responder o item “b”. Dessa forma a resposta poderia nos remeter ao significado Parte-todo, ou seja, cada criança receberá 2 das 10 bolinhas de gude. Nesse caso o que perceberíamos é o significado Parte-todo se sobressaindo no entendimento de fração que o aluno possui;

- $\frac{10}{2}$ O aluno poderá responder invertendo o numerador com o

denominador;

- $\frac{1}{5}$ Nesta resposta podemos inferir que, o aluno poderia ter pensado

em Operador multiplicativo, ou seja, não importa a quantidade de bolinhas de gude a serem divididas, pois, o que cada uma das 5 crianças receberá equivale a

$\frac{1}{5}$ do total de bolinhas de gude.

QUESTÃO 3

NA ESCOLA DE PEDRO FOI FEITA UMA RIFA E FORAM IMPRESSOS 150 BILHETES. A MÃE DE PEDRO COMPROU 20 BILHETES DESSA RIFA. QUAL A CHANCE DA MÃE DE PEDRO GANHAR O PRÊMIO?

Esta questão aborda o significado Medida com quantidade discreta e não apresenta o ícone. O significado Medida dessa questão deve-se ao fato da fração referir-se a quantidades intensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis – total de bilhetes da rifa e bilhetes comprados.

A probabilidade do evento é medida pelo quociente do número de casos favoráveis – bilhetes comprados – dividido pelo número de casos possíveis – total de bilhetes da rifa, portanto, a probabilidade do evento varia de 0 a 1, e o valor com o qual trabalhamos é fracionário. Trata-se de quantidade discreta, pois

refere-se a bilhetes de uma rifa, e, além disso a questão não possui ícone que represente a situação

As respostas que esperamos para essa questão são:

- $\frac{20}{150}$ Para esta resposta, podemos inferir que o aluno pode ter

pensado fração com o significado de medida, ou seja, do total de bilhetes qual a chance que a mãe de Pedro terá para ganhar;

- $\frac{150}{20}$ Para esta resposta, podemos inferir que o aluno pode ter

pensado de maneira correta, mas fez a inversão entre o numerador e o denominador;

- $\frac{2}{15}$ Para esta resposta, podemos inferir que o aluno pode ter feito a

simplificação da fração $\frac{20}{150}$, dividindo o numerador e denominador por 10;

- $\frac{15}{2}$ Com relação a esse tipo de resposta podemos inferir que o aluno

pode ter invertido o denominador com o denominador.

QUESTÃO 4

ISABELLE GANHOU UMA BARRA DE CHOCOLATE, PARTIU EM 5 PARTES IGUAIS E DEU 2 PARTES AO ANDRÉ. QUE FRAÇÃO REPRESENTA A PARTE QUE ANDRÉ RECEBEU?

Esta questão aborda o significado Parte-todo com quantidade contínua, e não utiliza ícone para retratar a situação. O significado Parte-todo é muito abordado pelos livros didáticos e por grande parte dos professores na introdução do conceito de fração.

A questão representa uma situação estática, ou seja, um chocolate já dividido em cinco partes iguais sendo que duas dessas partes serão dadas ao André. Para se obter a resposta correta, o aluno, pode utilizar o procedimento da dupla contagem, a quantidade total de partes do chocolate sendo o denominador e, o total de partes que André recebeu representadas pelo numerador.

A quantidade contínua, no significado Parte-todo, via de regra, é bem explorada nos livros didáticos, o que então nos leva a inferir que esse pode ser o fator facilitador dessa questão.

Quanto ao ícone que a questão não apresenta, pode ser um fator de complexidade, pois o aluno terá que imaginar, e ou desenhar a situação proposta.

Nesta questão, esperamos, entre outras, as seguintes respostas:

- $\frac{2}{5}$ 2 partes de chocolate para um total de 5 partes, demonstrando

assim que o aluno pode ter se utilizado da dupla contagem, o que caracteriza o significado Parte-todo;

- $\frac{5}{2}$ O aluno poderia ainda ter pensado de maneira correta, mas



inverter o numerador com o denominador, teremos então respostas desse tipo;

- $\frac{3}{2}$ ou $\frac{2}{3}$ O aluno ao responder dessa maneira poderia ter pensado

em Parte-parte, ou seja, as partes que Isabelle tem (3 partes) em relação às partes de André (2 partes), ou ainda, as partes que André tem em relação às partes de Isabelle.

QUESTÃO 5

A) A MISTURA DE TINTA VAI TER A MESMA COR NA SEGUNDA E NA TERÇA-FEIRA?

Segunda-feira	Terça-feira
	

SIM NÃO

QUE FRAÇÃO REPRESENTA A QUANTIDADE DE TINTA AZUL EM RELAÇÃO À MISTURA DAS TINTAS AZUL E BRANCA?

B) NA SEGUNDA-FEIRA?

C) E NA TERÇA-FEIRA?

Esta questão aborda o significado Medida com quantidade contínua apresentando o ícone e apresenta três itens “a”, “b” e “c”. O item “a” se refere ao invariante Equivalência da fração, o que justifica os itens “b” e “c”, porém para a nossa análise quantitativa consideraremos apenas os itens “b” e “c” desta questão.

O significado Medida aqui abordado envolve fração por se referir a quantidades intensivas, – tinta branca e tinta azul, por exemplo, no item b, para se conseguir um determinado tom de azul misturamos 3 partes de tinta branca e 3 partes de tinta azul e a receita é medida pela razão 3 para 3 que pode ser representada como sendo $\frac{3}{3}$ (relação parte-parte).

Com essa medida podemos fazer, indefinidamente, diversas quantidades de tinta mantendo o mesmo tom e, além disso, esta quantidade poderá nos remeter à idéia de fração, se considerarmos que o todo (a mistura) é constituído

de 6 partes, e $\frac{3}{6}$ é a fração que corresponde a medida de tinta azul na mistura e $\frac{3}{6}$ é, também, a fração que corresponde a medida de tinta branca na mistura.

Consideramos quantidade contínua por se tratar de tinta, sendo que essa questão se apóia também no ícone que representa a situação descrita. A presença do ícone dessa questão poderá ser o fator de complexidade, pois ele apresenta de maneira distinta a quantidade das tintas de cor azul e branca, 3 recipientes de cada cor, e o aluno deverá pensar na mistura como sendo a soma das quantidades (3 azuis + 3 brancas).

De maneira análoga, é solucionado o item *c* e, por esse motivo esperamos, entre outras, as seguintes respostas:

- $\frac{3}{6}$ para o item *b* e $\frac{2}{4}$ para o item *c*. Nessa possível resposta,

podemos inferir que, no item *b*, o aluno pensou na quantidade de tinta azul em relação à mistura como um todo, ou seja, 3 partes de tinta branca somadas com 3 partes de tinta azul totalizando as 6 partes da mistura, analogamente, para o item *c*, relacionando 2 partes de tinta azul ao total da mistura que é 4.

- $\frac{1}{2}$, tanto para o item *b* como para o item *c*. Com relação a essa

resposta, o aluno poderia ter simplificado a fração $\frac{3}{6}$ e a fração $\frac{2}{4}$, obtendo a

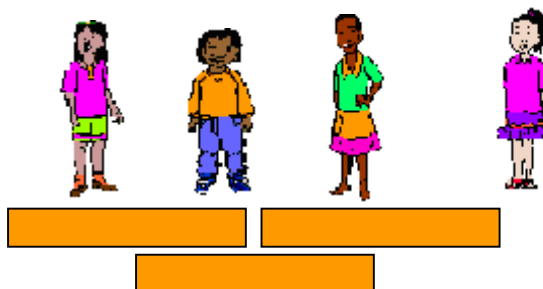
fração $\frac{1}{2}$. Por outro lado, o aluno poderá ter pensado no significado Operador

multiplicativo, ou seja, no item *b*, qual número que multiplicado por 6 (quantidade da mistura) dá 3, ou seja, a quantidade de tinta azul e, no item *c*, qual número que multiplicado por 4 dá 2.

- $\frac{6}{3}$ para o item *b* e $\frac{4}{2}$ para o item *c*. O aluno poderá ter pensado de maneira coerente, mas, na formalização da resposta inverter o numerador com o denominador;
- $\frac{3}{3}$ para o item *b* e $\frac{2}{2}$ para o item *c*. Esperamos também essas respostas. Podemos inferir que o aluno poderá ter pensado em parte-parte, ou seja, 3 partes de tinta branca para 3 partes de tinta azul no item *b* e 2 partes de tinta branca para 2 partes de tinta azul no item *c*.

QUESTÃO 6

FORAM DIVIDIDAS IGUALMENTE PARA 4 CRIANÇAS, 3 BARRAS DE CHOCOLATE..



- A) CADA CRIANÇA RECEBERÁ 1 CHOCOLATE INTEIRO? SIM NÃO
- B) CADA CRIANÇA RECEBERÁ PELO MENOS METADE DE UM CHOCOLATE? SIM NÃO
- C) QUE FRAÇÃO DE CHOCOLATE CADA CRIANÇA RECEBERÁ?

Esta questão foi inspirada em uma pesquisa realizada por Nunes et al. (2003). Nosso intuito foi enfatizar o significado Quociente com quantidade contínua, utilizando o ícone para representar a situação.

O significado Quociente está presente nas situações em que a divisão surge como uma estratégia para resolver um problema com a ideia de divisão, partilha. Conhecido o número do grupo a ser formado – 4 crianças – o quociente

representa o tamanho de cada grupo: $\frac{3}{4}$. Pressupõe ainda, extrapolar as idéias presentes no significado Parte-todo, pois nas situações de Quociente temos duas variáveis (3 chocolates para 4 crianças).

A questão apresenta três itens, nos “a” e “b” perguntamos se cada criança ganhará 1 chocolate inteiro ou pelo menos metade de um chocolate, sendo que estes itens não serão contabilizados em nossa análise quantitativa, pois o que queremos saber é se o aluno compreendeu a situação proposta.

O item “c” pede ao aluno que represente essa divisão chocolate por criança na forma de fração. Sabemos que é comum a criança vivenciar situações que envolvam a operação de divisão por partição, mesmo antes de entrar na escola.

Além disso, a divisão por partição é estudada desde as séries iniciais, porém o aluno poderá não fazer a conexão entre a fração e a divisão na formalização da resposta. Acreditamos que a formalização dessa divisão possa ser o fator de complexidade dessa questão. Isso pode ocorrer pelo fato do conceito de fração estar, para o aluno, intrinsecamente mais ligado ao significado Parte-todo, pois, usualmente, é por esse significado que se inicia o conceito de fração.

Algumas possibilidades de respostas esperadas para o item c poderiam ser:

- $\frac{3}{4}$ Para esta resposta, podemos inferir que o aluno pensou na fração

com significado de quociente, ou seja, 3 chocolates para 4 crianças, o que retrata

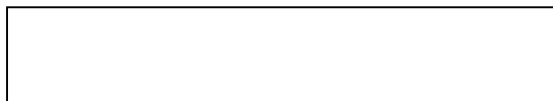
claramente duas grandezas distintas, (chocolates e crianças) caracterizando assim o significado Quociente;

- $\frac{4}{3}$ Nesta resposta, podemos inferir que o aluno pensou de maneira

correta, mas inverteu a numerador com o denominador.

QUESTÃO 7

MARIA GANHOU UM CHOCOLATE E COMEU $\frac{2}{5}$. PINTE A QUANTIDADE QUE MARIA COMEU.



Esta questão enfoca o significado Operador multiplicativo com quantidade contínua, apresentando o ícone que será usado para a resposta do aluno, pois é sobre o ícone que o aluno terá de pintar a parte correspondente a $\frac{2}{5}$. O significado Operador multiplicativo nesta questão se propõe a delimitar a quantidade de chocolate que Maria comeu, ou seja, reduz o inteiro que deverá ser partido em 5 partes, em 2 partes já consumidas.

Partindo do pressuposto que, geralmente, o conceito de fração é introduzido e trabalhado com figuras geométricas (retângulos, círculos) que representam chocolate, pizza, acreditamos que esse ícone seja tido como fator facilitador para a compreensão do aluno dessa questão.

A resposta que estamos esperando, é que o aluno pinte ou marque, de alguma forma, 2 das 5 partes que deverão ser representadas no chocolate inteiro.

QUESTÃO 8

OBSERVE OS DESENHOS ABAIXO E RESPONDA QUAL A FRAÇÃO QUE REPRESENTA AS PARTES PINTADAS DE CADA FIGURA?

Esta questão foi inspirada em uma situação-problema de uma pesquisa feita por Campos et. al. (NUNES, BRYANT, 1997), aborda o significado Parte-todo de quantidade contínua representada pelo ícone.

O significado Parte-todo, como já mencionado é, geralmente, utilizado na introdução do conceito de fração. A situação do ícone pintado em azul que denominaremos de item “a”, representa uma situação estática, ou seja, um retângulo dividido em 6 partes iguais, que para se obter a resposta correta pode se utilizar o procedimento da dupla contagem, a quantidade total de partes da figura sendo o denominador e, a quantidade de partes pintadas representada pelo numerador.

A quantidade contínua no significado Parte-todo, normalmente, é a mais explorada nos livros didáticos, o que então nos leva a inferir que esse pode ser o fator facilitador dessa questão. Entretanto, o primeiro ícone apresenta uma particularidade, as partes pintadas não são contíguas, o que pode ser um fator de complexidade.

Para o item a da questão, esperamos, entre outras, as seguintes respostas:

- $\frac{2}{6}$ A figura foi dividida em 6 partes iguais, sendo que 2 dessas partes foram pintadas, demonstrando assim que o aluno pode ter se utilizado da dupla contagem, o que caracteriza o significado Parte-todo;
- $\frac{1}{3}$ Esta poderia ser uma outra possível resposta. No caso, o aluno poderia ter pensado no significado Operador Multiplicativo, ou seja, que número multiplicado por 6 dá como resposta o número 2. podemos inferir ainda que, para que o aluno chegasse a esta resposta ele pode ter simplificado a fração $\frac{2}{6}$;
- $\frac{6}{2}$ O aluno poderia ainda ter pensado de maneira correta, mas, inverter o numerador com o denominador, teremos então, respostas desse tipo;
- $\frac{4}{2}$ ou $\frac{2}{4}$ O aluno poderá responder de maneira equivocada pensando na relação parte-parte, isto é, 4 partes não pintadas para 2 pintadas, ou ainda, 2 partes pintadas para 4 não pintadas.

Neste ponto, vamos descrever o segundo ícone (item b) da referida questão. Segundo Nunes, Bryant (1997) somente a percepção não dá conta. O item enfoca, também, o significado Parte-todo com quantidade contínua e apresenta ícone.

Nesta figura, a diferença é que uma das partes pintadas corresponde a duas partes não pintadas e, portanto a dupla contagem poderá não dar conta de responder corretamente. Para que o aluno possa responder de maneira acertada este item, ele terá de comparar duas grandezas de mesma espécie, ou seja, analisar e perceber que a maior área pintada corresponde ao dobro das outras áreas. É possível que esta comparação seja o fator de complexidade, pois o aluno

deve-se ater à conservação da área, ou seja, para que possa haver fração o todo deverá ser dividido em partes iguais.

Esperamos, entre outras, algumas respostas como:

- $\frac{2}{8}$ 2 representando as partes pintadas e 8 representando o total de

partes da figura. Para esta resposta, podemos inferir que houve a preocupação, por parte do aluno, da conservação da área, ou seja, uma das partes pintadas equivale a duas partes da figura;

- $\frac{1}{7}$ 1 representando as partes pintadas e 7 representando o total de

partes da figura. Para esta resposta podemos inferir que não houve a conservação da área, ou seja, o aluno simplesmente utilizou a dupla contagem como se todas as áreas pintadas tivessem a mesma dimensão;

- $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{6}$ Nos tipos de resposta, podemos inferir que o aluno pode ter

pensado na relação Parte-parte, ou seja, 2 partes pintadas para 6 não pintadas, levando em conta que a maior parte pintada corresponde a duas partes da figura; ou ainda, também, pensando na relação Parte-parte, mas o aluno pode não se ater à diferença de tamanho entre as áreas pintadas.

QUESTÃO 9

PARA FAZER UMA CERTA QUANTIDADE DE SUCO SÃO NECESSÁRIAS 2 MEDIDAS DE CONCENTRADO DE LARANJA PARA 5 MEDIDAS DE ÁGUA. QUE FRAÇÃO REPRESENTA A MEDIDA DE CONCENTRADO DE LARANJA EM RELAÇÃO AO TOTAL DE SUCO?

Esta questão aborda o significado Medida com quantidade contínua e não apresenta o ícone. O significado Medida da questão envolve fração por se referir a quantidades intensivas, – concentrado de laranja e água – ou seja, para se conseguir um determinado sabor do suco misturamos 2 partes de concentrado de laranja e 5 partes de água. A receita, o sabor do suco, é medida pela razão 2 para 5 que pode ser representada como sendo $\frac{2}{5}$ (relação Parte-parte).

Com essa medida, podemos fazer, indefinidamente, diversas quantidades de suco mantendo o mesmo sabor, e além disso, essa quantidade poderá nos remeter à idéia de fração, se considerarmos que o todo (o suco) é constituído de 7 partes, e $\frac{2}{7}$ é a fração que corresponde à medida de concentrado de laranja no suco e, $\frac{5}{7}$ é ,também, a fração que corresponde à medida de água no suco. Consideramos quantidade contínua por se tratar de água e concentrado de laranja.

Para responder a esta questão, o aluno deverá somar as quantidades de concentrado de laranja e água para obter a quantidade total do suco (denominador da fração), para chegar à resposta correta $\frac{2}{7}$

O fator de complexidade poderá ser o aluno pensar no suco (mistura total), como sendo a soma das quantidades (2 partes de concentrado de laranja + 5 partes de água).

Nesta questão esperamos, entre outras, as seguintes respostas para o item *b*:

- $\frac{2}{7}$ Para esta possível resposta, podemos inferir que o aluno pensou na quantidade de concentrado de laranja em relação ao suco como um todo, ou seja, 2 partes de concentrado de laranja somadas com 5 partes de água totalizando 7 partes de suco;
- $\frac{7}{2}$ Esta também poderá aparecer como resposta, pois o aluno poderá ter pensado de maneira coerente, mas na formalização da resposta inverter o numerador com o denominador;
- $\frac{2}{5}$ ou $\frac{5}{2}$ Estas duas possíveis respostas podem aparecer, e podemos inferir que o aluno tenha pensado em Parte-parte, ou seja, 2 partes de concentrado de laranja para 5 partes de água ou vice-versa.

QUESTÃO 10

FORAM DIVIDIDAS IGUALMENTE 8 BOLAS DE FUTEBOL DE MESMO TAMANHO PARA 4 CRIANÇAS.

A) QUANTAS BOLAS DE FUTEBOL CADA CRIANÇA GANHARÁ?

B) QUE FRAÇÃO REPRESENTA ESSA DIVISÃO?

Esta questão foi idealizada no intuito de enfatizar o significado Quociente com quantidade discreta, e não utiliza ícone para representar a situação.

A questão apresenta dois itens. No item “a”, perguntamos quantas bolas de futebol cada criança ganhará, sendo que esse mesmo item não será contabilizado em nossa análise quantitativa, o motivo pelo qual o incluímos será de nos certificar que de fato o aluno entendeu que se trata de uma situação de divisão.

No item “b”, perguntamos que fração representa essa divisão, se o aluno relaciona divisão com fração. Acreditamos que o fator de complexidade possa estar na formalização da resposta, pois, normalmente, o aluno não faz a conexão entre fração e divisão. Isso pode ocorrer pelo fato do conceito de fração estar, para o aluno, intrinsecamente mais ligado ao significado Parte-todo, uma vez que, usualmente, é por esse significado que se inicia o conceito de fração.

Outro fator de complexidade pode ser o fato de estarmos lidando com quantidades discretas que, geralmente, são menos exploradas nos livros didáticos, que as quantidades contínuas. Acreditamos ser uma questão difícil, pois, é possível que questões desse tipo sejam pouco trabalhadas com os alunos.

Algumas possibilidades de respostas esperadas para o item “b” poderiam ser:

- $\frac{8}{4}$ Para esta resposta, podemos inferir que o aluno pensou na fração

com significado de Quociente, ou seja, 8 bolas de futebol para 4 crianças, o que retrata claramente duas grandezas distintas, (bolas de futebol e crianças) caracterizando assim o significado Quociente;

- $\frac{2}{8}$ Nesta resposta, podemos inferir que, se o aluno acertou o item a

(2 bolas de futebol para cada criança) ele poderá ter se utilizado desse dado para

responder o item “b”. Assim, esse tipo de resposta poderia nos remeter ao significado Parte-todo, ou seja, cada criança receberá 2 das 8 bolas de futebol. No caso, o que percebemos é que o significado Parte-todo se sobressai no entendimento de fração que o aluno possui;

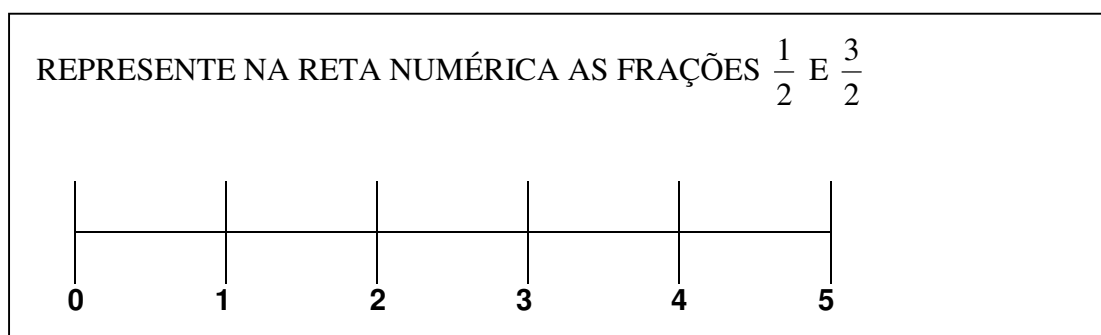
- $\frac{1}{4}$ Nesta resposta, podemos inferir que, o aluno poderia ter pensado

em Operador multiplicativo, ou seja, não importa a quantidade de bolas de futebol a serem divididas, pois, o que cada uma das 4 crianças receberá equivale a $\frac{1}{4}$ do total de bolas de futebol.

- $\frac{4}{8}$ O aluno poderá responder invertendo o numerador com o

denominador. Pensamos na possibilidade de resposta como sendo $\frac{4}{8}$, por acreditar que o aluno, por estar acostumado a ver situações de Parte-todo que, na maioria das vezes, o numerador é menor que o denominador.

QUESTÃO 11



Nesta questão, estamos dando enfoque no significado Número da fração, por meio de uma reta numérica que, consideramos como ícone, que será utilizada para fazer a marcação das frações indicadas. A idéia envolvida no significado

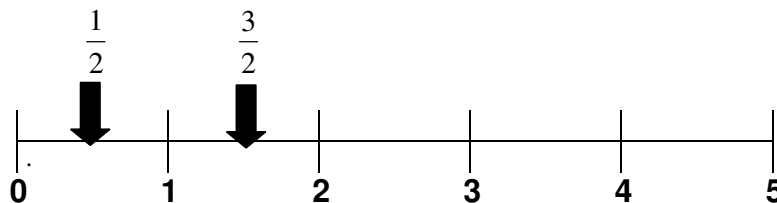
Número da fração é o da notação $\frac{a}{b}$, expressando um número na reta numérica, ou ainda sua representação na notação decimal.

Desta interpretação, decorre perceber que a notação $\frac{a}{b}$ represente, em alguns casos, um número na reta numérica. Admitir essa interpretação significa reconhecer que os números racionais formam um subconjunto dos números reais e as propriedades associadas com a topologia métrica dizem respeito à sua densidade. Dessa forma considerarmos que a cada ponto da reta Real está associado a um número Real, ao localizarmos a fração $\frac{a}{b}$ estaremos fazendo a correspondência biunívoca de um ponto na reta ao número $\frac{a}{b}$.

Acreditamos que, o fator de complexidade que possa existir nessa situação, ocorre do fato que o aluno poderá não fazer a conexão que fração representa um número. Isso poderá ocorrer, pois o início do ensino do conceito de fração se dá por meio do significado Parte-todo, ou seja, relaciona a fração como sendo uma parte do todo.

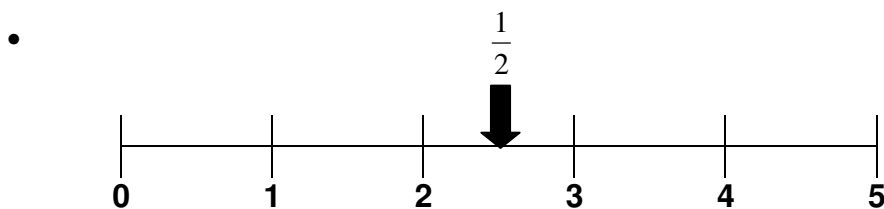
As possíveis respostas que estamos esperando são:

•



Esta resposta expressa de maneira correta a localização dos pontos $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$ na

reta numérica;



Para esta resposta, poderemos inferir que o aluno considerou a reta numérica como um todo, um inteiro e a metade desse segmento, o $\frac{1}{2}$ estaria localizado no ponto 2,5.

QUESTÃO 12

NUMA LOJA DE BRINQUEDOS HAVIA 6 BONECAS IGUAIS. MARIA COMPROU 2 DESSAS BONECAS PARA PRESENTEAR SUAS SOBRINHAS. QUE FRAÇÃO REPRESENTA AS BONECAS QUE MARIA COMPROU EM RELAÇÃO AO TOTAL DE BONECAS DA LOJA?

Esta questão aborda o significado Parte-todo com quantidade discreta e não apresenta ícone. O significado Parte-todo é, geralmente, utilizado na introdução do conceito de fração. A situação representa uma situação estática, ou seja, um conjunto de 6 bonecas sendo que Maria comprou 2 dessas bonecas.

Assim para obter a resposta correta pode-se utilizar do procedimento da dupla contagem, a quantidade total de bonecas da loja sendo o denominador e a quantidade de bonecas que Maria comprou representada pelo numerador.

A quantidade discreta no significado Parte-todo, normalmente, é pouco explorada nos livros didáticos, o que então nos leva a inferir que esse pode ser o fator de complexidade da questão. Quanto ao ícone que a questão não apresenta,

poderá ser um outro fator de complexidade, pois o aluno terá que imaginar a situação proposta.

Nesta questão, esperamos, entre outras, as seguintes respostas:

- $\frac{2}{6}$ 2 bonecas que Maria comprou para um total de 6 bonecas

iguais, demonstrando, assim, que o aluno pode ter se utilizado da dupla contagem, o que caracteriza o significado Parte-todo;

- $\frac{1}{3}$ Ele pode ter simplificado a fração $\frac{2}{6}$ obtendo a fração $\frac{1}{3}$;

- $\frac{6}{2}$ ou $\frac{3}{1}$ O aluno poderia ainda ter pensado de maneira correta mas

inverter o numerador com o denominador, e teremos então respostas desse tipo;

- $\frac{4}{2}$ ou $\frac{2}{4}$ O aluno poderá responder de maneira equivocada

pensando na relação Parte-parte, isto é, 4 bonecas que restaram na loja de brinquedos para 2 que Maria comprou, ou ainda, 2 bonecas que Maria comprou para 4 que restaram na loja de brinquedos.

QUESTÃO 13

FORAM DIVIDIDOS IGUALMENTE 4 CHOCOLATES PARA 5 CRIANÇAS.
QUE FRAÇÃO REPRESENTA O QUE CADA CRIANÇA RECEBEU?

Esta questão foi inspirada no intuito de focar o significado Quociente de quantidade contínua, sem o emprego do ícone para representar a situação. O significado Quociente está presente em situações que a divisão surge, como uma estratégia de resolução.

Isso significa que conhecido o número do grupo a ser formado – 5 crianças -, o Quociente representa o tamanho de cada grupo - $\frac{4}{5}$. Pressupõe ainda, extrapolar as idéias presentes no significado Parte-todo, pois nas situações de quociente temos 2 variáveis (chocolates e crianças).

A questão pede ao aluno que represente a divisão chocolate por criança na forma de fração. Apesar da divisão por partição ser estudada desde as séries iniciais, e mesmo fora do contexto escolar a criança já ter vivenciado situações que envolvam a operação de partilha. O aluno poderá não fazer a conexão entre a fração e a divisão na formalização da resposta, e acreditamos ser esse o fator de complexidade desta questão. Isto pode ocorrer pelo fato do conceito de fração estar, para o aluno, intrinsecamente mais ligado ao significado Parte-todo, uma vez que, usualmente, é por esse significado que se inicia o conceito de fração.

Algumas possibilidades de respostas esperadas para a questão poderiam ser:

- $\frac{4}{5}$ Para essa resposta podemos inferir que o aluno pensou na fração

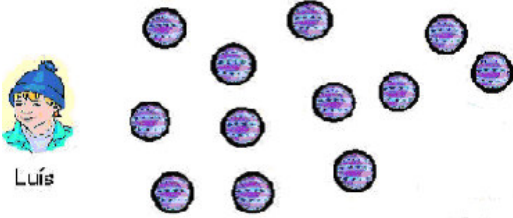
com significado de quociente, ou seja, 4 chocolates para 5 crianças, o que retrata claramente duas grandezas distintas, (chocolates e crianças) caracterizando assim o significado Quociente;

- $\frac{5}{4}$ Nessa resposta podemos inferir que o aluno pensou de maneira

correta, mas inverteu a numerador com o denominador.

QUESTÃO 14

OBSERVE A COLEÇÃO DE BOLINHAS ABAIXO:



LUÍS GANHOU $\frac{2}{3}$ DAS BOLINHAS DE GUDE DESTACOLEÇÃO.

QUANTAS BOLINHAS DE GUDE LUÍS GANHOU?

Esta questão foi inspirada em uma questão apresentada por Nunes (2003), e está associada ao significado de Operador multiplicativo, com quantidade discreta e apresenta o ícone que retrata a situação proposta.

O significado Operador Multiplicativo tem o papel de transformação, isto é, a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor no processo. Conceber a fração como um Operador Multiplicativo é admitir que a fração $\frac{a}{b}$ funciona em quantidades discretas, sua aplicação atua como um multiplicador divisor. Relacionamos à quantidade discreta por se tratar de bolinhas de gude.

A questão pede ao aluno que baseado na coleção de 12 bolinhas de gude, ele calcule $\frac{2}{3}$ desta coleção. Este cálculo poderá ser feito, multiplicando 12 por 2 e, em seguida dividindo esse produto por 3.

Acreditamos que o fator de complexidade dessa questão seja saber, por qual termo da fração deve-se dividir o 12 (quantidade de bolinhas de gude), se

pelo denominador 3 ou se pelo numerador 2, mesmo sendo uma questão muito explorada em sala de aula.

Elegemos algumas das possíveis respostas que podemos encontrar:

- 8 Essa é a resposta tida como correta para essa questão, pois $12 \cdot \frac{2}{3} = 8$;
- 18 Esta poderá ser uma das respostas, pois como descrevemos anteriormente o aluno poderá não saber, por qual termo da fração ele deverá multiplicar, se pelo numerador ou denominador. Assim sendo, ele poderá pensar em $(12 \cdot 3) : 2$. Todavia, essa resposta poderá ser descartada pelo aluno, afinal o aluno poderá perceber que Luis não poderá dar uma quantidade maior de bolinhas de gude que possui;
- 4 Para esta resposta, podemos inferir que o aluno fez apenas a divisão de 12 por 3, desprezando o numerador 2;
- 6 Em relação a esta resposta, podemos inferir que o aluno poderá ter dividido 12 por 2 (numerador) e desprezado o 3 (denominador).

QUESTÃO 15

UM BOLO FOI DIVIDIDO IGUALMENTE PARA 3 CRIANÇAS, E 2 BOLOS DE MESMO TAMANHO FORAM DIVIDIDOS IGUALMENTE PARA 6 CRIANÇAS.



A) AS 9 CRIANÇAS COMERÃO A MESMA QUANTIDADE DE BOLO?

SIM

NÃO

Esta questão foi extraída da pesquisa de Nunes (2003), tendo como enfoque o significado Quociente com quantidade contínua e apresenta ícone que retrata a situação proposta. O significado Quociente é caracterizado pelo fato de termos duas grandezas distintas, bolos e crianças.

No que diz respeito à quantidade, consideramos contínua por se tratar de bolos que, podem ser divididos exaustivamente em quantas partes quisermos sem que altere a característica do inteiro, ou seja, por menor que seja a parte, o que cada criança comerá ainda será bolo.

Mas, esta questão será analisada somente no que diz respeito a um dos invariantes da fração que é a Equivalência, ou seja, o aluno deverá perceber que se dobrou o número de crianças para comer do bolo, também, dobrou o número de bolo a ser distribuído, portanto, a quantidade de bolo que cada criança receberá será a mesma, portanto equivalente nas duas figuras.

Na fração, a equivalência tem um caráter diferente dos números naturais que os alunos estão acostumados a trabalhar.

Assim, quando afirmamos que a quantidade de objetos de um dado conjunto A é equivalente ao conjunto B, queremos expressar que o número que representa os objetos de A e B é exatamente o mesmo, ou seja, se o conjunto A tem n elementos, o conjunto B terá também n elementos. A equivalência da fração decorre de maneira diferente da equivalência dos números naturais, as classes de equivalência são formadas por números diferentes, mas que

expressam a mesma quantidade, ou o mesmo número $\left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \dots \right\}$.

QUESTÃO 16

GUSTAVO TINHA UMA COLEÇÃO DE 15 SOLDADINHOS DE CHUMBO E DEU A SEU PRIMO FERNANDO $\frac{3}{5}$ DE SUA COLEÇÃO. QUANTOS SOLDADINHOS DE CHUMBO GUSTAVO DEU A FERNANDO?

Esta questão está associada ao significado de Operador Multiplicativo, com quantidade discreta e não apresenta o ícone que retrate a situação proposta.

O significado Operador multiplicativo tem o papel de transformação, isto é, a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor nesse processo.

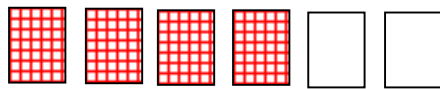
A questão pede ao aluno que a partir de uma coleção de 15 soldadinhos de chumbo, ele calcule $\frac{3}{5}$ dessa coleção. O cálculo poderá ser feito multiplicando 15 por 3 e, em seguida, dividindo esse produto por 5. Acreditamos que o fator de complexidade dessa questão é o de saber por qual termo da fração se deve

dividir o 15, se pelo denominador 5 ou se pelo numerador 3, mesmo sendo uma questão muito explorada em sala de aula.

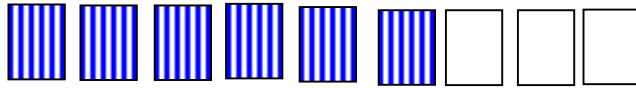
Elegemos algumas das possíveis respostas que poderemos encontrar:

- 9 Esta é a resposta tida como correta para a questão, pois $15 \cdot \frac{3}{5} = 9$;
- 25 Esta poderá ser uma das respostas, pois, como descrevemos anteriormente o aluno poderá não saber por qual termo da fração ele deverá multiplicar, se pelo numerador ou denominador. Assim sendo ele poderá pensar em $(15 \cdot 5) : 3$. Todavia, esta resposta poderá ser descartada ou não pelo aluno, afinal Gustavo não poderá dar uma quantidade maior de soldadinhos de chumbo que possui;
- 3 Para esta resposta, podemos inferir que o aluno fez apenas a divisão de 15 por 5, desprezando o numerador 3;
- 5 Em relação a esta resposta, podemos inferir que o aluno poderá ter dividido 15 por 3 (numerador) e desprezado o 5 (denominador).

QUESTÃO 17



A) QUAL A CHANCE DE TIRAR UMA CARTA BRANCA NESSE BARALHO?



B) QUAL A CHANCE DE TIRAR UMA CARTA BRANCA NESSE BARALHO?

C) EM QUAL DOS DOIS BARALHOS EXISTE MAIOR CHANCE DE SE TIRAR UMA CARTA BRANCA?

Esta questão enfoca o significado Medida com quantidade discreta e apresenta o ícone. O significado Medida refere-se a quantidades intensivas, ou seja, a quantidade é medida pela relação de duas variáveis. Em outras palavras temos que, a probabilidade desse evento é medida pelo quociente do número de casos favoráveis (2 cartas brancas do item “a”), dividido pelo número de casos possíveis, (total de 6 cartas do item “a”). Portanto, a probabilidade de um evento varia de 0 a 1, e a maioria dos valores com os quais trabalhamos são fracionários.

Esta questão apresenta três itens, sendo que, para análise quantitativa consideraremos o item *a* e *b*, o item *c*, nos embasará na análise do invariante equivalência no significado medida.

A seguir destacaremos algumas respostas que estamos esperando para o item *a*, já o item *b*, consideramos não ser necessário, por apresentar uma situação semelhante ao *a*.

- $\frac{2}{6}$ Esta é a resposta que julgamos ser correta para esse significado,

pois a chance de tirar uma carta branca desse baralho é 2 em 6;

- $\frac{1}{3}$ O aluno poderia simplesmente ter simplificado a fração $\frac{2}{6}$ por 2

para obter a fração da forma irredutível $\frac{1}{3}$;

- $\frac{6}{2}$ ou $\frac{1}{3}$ Para estas respostas, podemos inferir que o aluno raciocinou

de maneira correta, porém na formalização inverteu os termos do numerador com o denominador;

- $\frac{2}{4}$ ou $\frac{4}{2}$ Estas respostas poderá nos remeter que o aluno tenha

pensado na relação Parte-parte, ou seja, 2 cartas brancas para 4 vermelhas ou 4 cartas vermelhas para 2 cartas brancas.

QUESTÃO 18

REPRESENTE NA FORMA DE NÚMERO DECIMAL AS SEGUINTE FRAÇÕES:

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{2}{10}$

Nesta questão, o significado que procuramos abordar foi o de Número, sem representação icônica.

Escolhemos fração $\frac{2}{10}$ por se tratar de uma fração decimal trabalhada em sala de aula, ou seja, estamos supondo que o aluno saiba que a fração corresponde a dois décimos – 0,2 – e que ainda corresponda a 2 : 10. Sendo assim, o nosso propósito é saber se existem indícios que o aluno faça a conexão entre fração e o número que essa fração representa.

No que diz respeito à escolha da fração $\frac{1}{5}$, deve-se a dois fatores, o primeiro por ser equivalente a $\frac{2}{10}$, o que poderia ajudar o aluno a resolver, caso ele perceba a equivalência; o segundo é por seu denominador ser diferente de 10 ou múltiplo de 10 que, como já citamos, trata-se de frações que são trabalhadas em sala de aula.

O fator de complexidade que acreditamos existir nessa situação, ocorre do fato que o aluno não faz a conexão que fração representa uma relação de divisão entre numerador e denominador; isso pode ser, pelo fato de que, geralmente, o início do ensino do conceito de fração se dá a partir do significado Parte-todo, ou seja, relaciona a fração como sendo dois números separados por um traço no qual o numerador representa o número de partes em destaque e o denominador representa o número de partes que formam o todo.

As respostas que esperamos para essa questão são:

- 0,2 e 0,2. Neste caso o aluno acertaria a resposta, entendendo a situação e, portanto, percebendo a relação de divisão entre numerador e denominador.
- 1,5 e 2,10. Acreditamos que teremos esse tipo de resposta, pois o aluno poderá ver a fração como dois números sobrepostos e para efetuar a mudança do registro fracionário para o decimal bastaria utilizar os mesmos números apresentados na fração, separando-os com uma vírgula.

QUESTÃO 19

JOÃO GANHOU UM CHOCOLATE E MARIA GANHOU UM OUTRO CHOCOLATE DE MESMO TAMANHO. JOÃO COMEU $\frac{1}{2}$ DE SEU CHOCOLATE, ENQUANTO QUE MARIA COMEU $\frac{1}{4}$ DO CHOCOLATE DELA. QUEM COMEU MAIS CHOCOLATE? COMO VOCÊ CONVENCERIA SEU AMIGO QUE SUA RESPOSTA ESTÁ CORRETA?

Esta questão enfoca o significado Operador Multiplicativo com quantidade contínua, e não apresenta ícone. O significado Operador Multiplicativo propõe-se a delimitar a quantidade que Maria e João comeram de seus respectivos chocolates, ou seja, reduz o chocolate inteiro de Maria em 4 partes iguais e toma 1 delas, assim como o chocolate de João em 2 partes iguais tomando uma delas.

Partindo do pressuposto que, geralmente, o conceito de fração é introduzido e trabalhado com figuras geométricas (retângulos, círculos) que representam chocolate, pizza, acreditamos que essa questão será facilmente entendida pelos alunos, mesmo que não tenha a presença do ícone.

Todavia, a relação inversa que a fração apresenta quando os numeradores são iguais (na questão o numerador é 1) quanto maior o denominador menor a fração, poderá vir a ser o fator de complexidade para a resposta do aluno. O invariante ordem dos números Naturais poderá ser a grande dificuldade do aluno perceber e aceitar que $\frac{1}{2}$ é maior que $\frac{1}{4}$, pois afinal 4 é maior que 2. Algumas das respostas que estamos esperando são:

- João comeu mais porque $\frac{1}{2}$ é maior que $\frac{1}{4}$;
- Maria comeu mais porque $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{2}$.

Novamente apresentamos a tabela a seguir, que mostra a distribuição das questões no que tange ao número da questão, significados, e variáveis de pesquisa que são: quantidades contínuas e discretas e representação icônica e não icônica.

SIGNIFICADOS	PARTE-TODO	QUOCIENTE	MEDIDA	OP. MULTIPLICATIVO
	QUANTIDADES			
CONTÍNUA ICÔNICA	Q 8a, 8b	Q 6c	Q 5b, 5c	Q 7
CONTÍNUA. NÃO ICON	Q 4	Q 13	Q 9	Q 19a
DISCRETA ICONÔNICA.	Q 1	Q 2b	Q 17a, 17b	Q 14
DISCRETA NÃO ICON	Q 12	Q 10b	Q 3	Q 16

Tabela 4.2: Distribuição das questões em relação aos significados e as variáveis de pesquisa, abordadas em nosso estudo.

Dentre todos os significados por nós abordados cabe ressaltar que, no significado Número consideramos apenas a representação icônica (Q 11a, Q 11b) e não icônica (Q 18a, Q 18b).

CAPÍTULO V

ANÁLISE DOS RESULTADOS

O objetivo deste capítulo é analisar os resultados obtidos a partir das resoluções dos alunos participantes da pesquisa, sendo que inicialmente procederemos com uma análise quantitativa dos dados, detendo-nos nos índices de acertos totais, de acertos por significado abordado, por variáveis de pesquisa (quantidades contínuas e discretas e representação icônica e não icônica) e por questões que abordaram diretamente os invariantes da fração – ordem e equivalência.

Em um segundo momento, apresentaremos a análise qualitativa dos resultados. Esta análise procurará identificar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das questões propostas, em relação tanto aos significados, quanto às variáveis de pesquisa: icônica versus não icônica e quantidade contínua versus quantidade discreta.

5.1 ANÁLISE QUANTITATIVA

Para obtermos maior riqueza na análise quantitativa, subdividiremos esta seção segundo os critérios, para as duas séries: os cinco significados de fração, as variáveis: quantidade contínua e discreta e representação icônica e não icônica, os diferentes significados destacados em cada variável abordada e finalizando, os invariantes da fração – ordem e equivalência.

5.1.1 Os cinco significados de fração

Nesta subseção, iremos considerar a classificação dos cinco significados (Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador Multiplicativo) que foram abordados em relação às questões, demonstradas nos dados da tabela a seguir:

Tabela 5.1: Distribuição das questões em relação aos cinco significados de fração.

SIGNIFICADOS	QUESTÕES
Número	11a, 11b, 18a, 18b
Parte-todo	1; 4; 8a, 8b, 12
Quociente	2b; 6c; 10b 13
Medida	3; 5b,5c; 9, 17a, 17b
Operador Multiplicativo	7; 14; 16, 19

Considerando os 23 itens da tabela acima e lembrando que o instrumento diagnóstico foi aplicado com 65 alunos da 4ª série e 58 da 8ª série, poderíamos obter no máximo 1495 respostas corretas para a 4ª série e para a 8ª 1334.

No entanto, os números e percentuais de acertos obtidos pelos alunos, das 4^a e 8^a séries foram os seguintes:

Tabela 5.2: Total de acertos em relação ao total de itens das 4^a e 8^a séries.

Série	Total de acertos	% de acertos
4 ^a	460 de 1495 itens	30,77
8 ^a	345 de 1334 itens	25,86

Os dados da tabela acima demonstram que os alunos, tanto da 4^a quanto da 8^a séries, obtiveram um baixo desempenho na resolução das questões propostas pelo instrumento diagnóstico, visto que nas duas séries o índice de acerto não foi superior a 31%.

Do ponto de vista da escola, ambas as turmas apresentaram percentuais bem abaixo da média de aprovação exigida pelo MEC.

Comparativamente o índice geral de acertos das duas séries ficou bem próximo, com pequena vantagem para a 4^a série. Este desempenho bem próximo entre as duas séries pesquisadas, será analisado detalhadamente em relação a cada significado: Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador Multiplicativo, suas variáveis de apresentação em quantidades contínuas ou discretas e em representações icônicas ou não icônicas possibilitando assim obter dados mais relevantes a respeito dos acertos dos alunos.

Desta forma, apresentamos a seguir o total de acertos por significado na 4ª série.

Tabela 5.3: Desempenho dos alunos da 4ª série em relação aos cinco significados abordados

SIGNIFICADO	NÚMERO	PARTE-TODO	QUOCIENTE	MEDIDA	OP. MULTIPLICATIVO	TOTAL DE ACERTOS
Quantidade de acertos	1 de 260	196 de 325	71 de 260	122 de 390	70 de 260	460 de 1495
% de acertos	0,38	60,31	27,31	31,28	26,92	30,77

Os dados da tabela acima demonstram que a 4ª série parece lidar razoavelmente bem com a fração, quando esta se apresenta em situações que abordam o significado Parte-todo, já que obtivemos 60,31 % de respostas certas nesse significado.

Entendemos que o resultado poderá estar ligado à maneira pela qual, usualmente, é feita a introdução do conceito de fração, com base no significado Parte-todo.

O fato vem ao encontro das recomendações contidas nos PCNs, uma vez que tal documento sugere, como tratamento didático para o início do ensino das frações, no segundo ciclo, uma abordagem partindo de situações que envolvam a relação Parte-todo.

Por outro lado, os resultados mostram que os alunos não dão conta de resolver questões, nas quais a fração aparece com o significado Número, já que o índice de acerto desse significado ficou em 0,38%, o que nos leva a supor que eles não tiveram nenhum contato anterior com situações-problema que abordassem esse significado.

Nesta análise, outro ponto relevante é que a diferença entre os índices de acertos dos significados Quociente (27,31%), Medida (31,28%) e Operador Multiplicativo (26,92%) não foram superior a 5 %.

Vamos analisar agora os índices da 8ª série a partir da tabela abaixo:

Tabela 5.4: Desempenho dos alunos da 8ª série em relação aos cinco significados abordados.

SIGNIFICADO	NÚMERO	PARTE-TODO	QUOCIENTE	MEDIDA	OP. MULTIPLICATIVO	TOTAL DE ACERTOS
Quantidade de acertos	9 de 232	118 de 290	75 de 232	75 de 348	68 de 232	345 de 1334
% de acertos	3,88	40,68	32,33	21,55	29,31	25,86

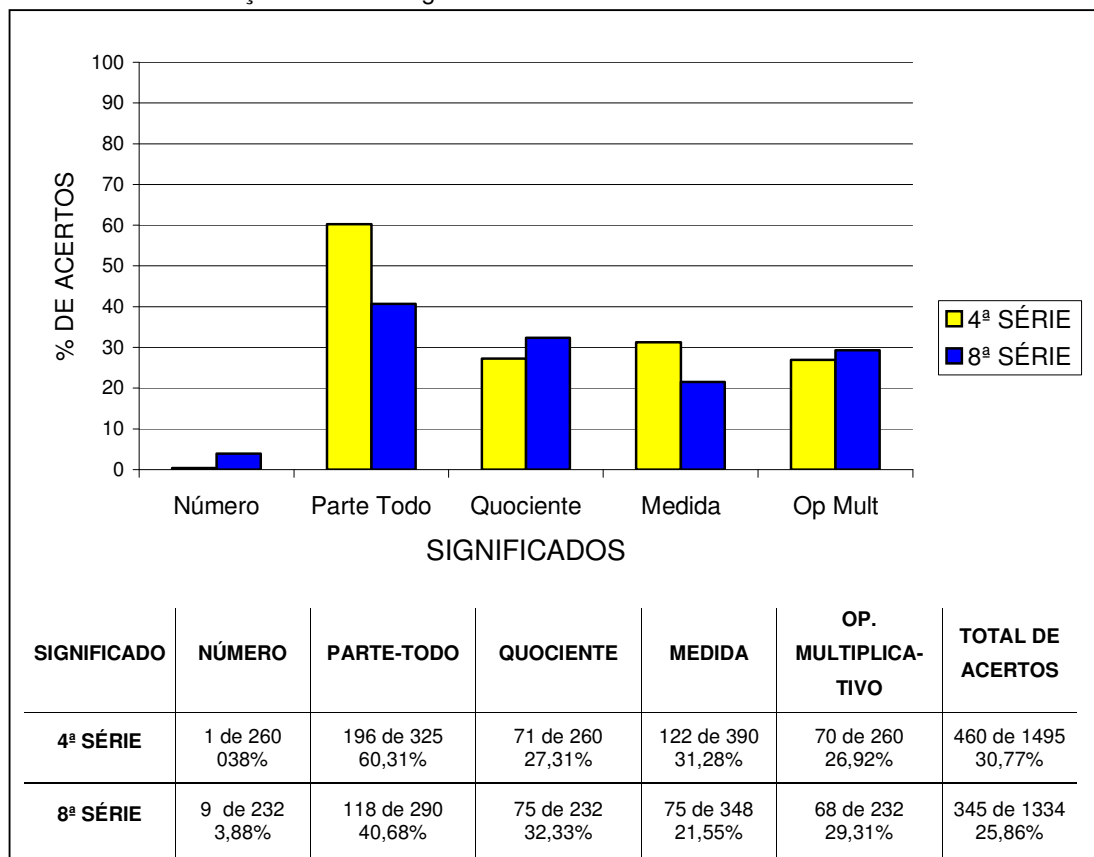
Com base nesta análise fica explícito que o significado Parte-todo obteve o maior índice de acertos, estando a 14,82 pontos percentuais acima da média total. Já o significado Quociente e o Operador Multiplicativo apresentam apenas 3,02 pontos percentuais de diferença seguidos do significado Medida com 21,55 pontos percentuais de acerto.

Assim, tal como na 4ª série, o significado Número foi o que apresentou o menor índice de acertos, com 3,88%, o que nos leva a concluir que esses alunos, também não tiveram contato com situações-problema desse tipo.

Apenas o significado Número obteve uma diferença expressiva em relação à média total de acertos desta série, ficando 21,46 pontos porcentuais abaixo da mesma.

A seguir destacamos, uma análise comparativa entre as duas séries, como segue:

Quadro 5.1: Desempenho, em quantidade e percentuais de acertos, dos alunos das 4ª e 8ª séries em relação aos cinco significados.



Como já havíamos mencionado anteriormente, embora a 4ª e a 8ª séries tenham tido um índice total de acertos muito próximo, 4,91 pontos percentuais, ao analisarmos estes acertos por significados, observamos algumas variações.

A 8ª série obteve um desempenho melhor nos significados Número, Quociente e Operador Multiplicativo, mas se compararmos os resultados que a 8ª obteve nestes significados com os que a 4ª obteve nos mesmos significados não perceberemos uma diferença muito expressiva.

No significado Número são 3,5 pontos percentuais, Quociente 5,02 pontos e Operador Multiplicativo 2,39.

Por outro lado, se realizarmos o mesmo tipo de comparação em relação aos significados em que a 4ª série obteve maior sucesso, em relação a 8ª, percebemos que estas diferenças são bem mais acentuadas. No significado Parte-todo essa diferença chega a 19,63 pontos percentuais e no significado Medida 9,73 pontos.

A pouca diferença obtida entre o desempenho da 8ª e da 4ª séries, nos significados Número, Quociente e Operador Multiplicativo nos faz questionar a respeito da aprendizagem dos alunos da 8ª série em relação a esse conceito, isto nos leva a supor uma contraposição as recomendações contidas nos PCN, de que, no terceiro e no quarto ciclo, a abordagem dos números racionais deve ter como objetivo levar os alunos a perceber que números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações-problema, como as que envolvem medidas de uma grandeza e o resultado de uma divisão.

5.1.2 As variáveis: quantidades contínua e discreta, representação icônica e não icônica

Ressaltamos que, para cada significado, com exceção do Número, foram elaboradas quatro questões abordando cada uma dessas variáveis.

Para o significado Número, conforme já mencionado consideramos apenas a representação icônica (Q 11a, Q 11b) e não icônica (Q 18a, Q 18b), por esse motivo, e pelo desempenho inexpressivo, não utilizaremos esse significado neste tipo de análise.

Na próxima tabela, apresentamos as questões que foram consideradas para esse tipo de análise: quantidade contínua icônica versus não icônica; quantidade discreta icônica versus não icônica.

Tabela 5.5: distribuição das questões em relação as variáveis.

VARIÁVEIS	QUESTÕES
Contínua Icônica	5b,5c; 6c; 7; 8a, 8b
Contínua Não Icônica	4; 9; 13; 19
Discreta Icônica	1; 2b; 14, 17a, 17b
Discreta Não Icônica	3; 10b; 12, 16

Nos dados da tabela abaixo, apresentamos os índices de acertos totais dos alunos da 4ª série em relação as variáveis de pesquisa abordadas.

Tabela 5.6: Desempenho dos alunos da 4ª série em relação às variáveis de pesquisa.

REPRESENTAÇÃO QUANTIDADE	ICÔNICA	NÃO ICÔNICA	TOTAL
	CONTÍNUA	199 de 390 51,02%	81 de 260 31,15%
DISCRETA	89 de 325 27,38%	90 de 260 34,61%	179 de 585 30,60%
TOTAL	288 de 715 40,28%	171 de 520 32,88%	459 de 1235 37,17%

Ao observarmos os dados da tabela 5.6, podemos percebermos que na 4ª série o maior índice de acertos em relação às variáveis abordadas foi no total de questões que utilizaram representações icônicas em quantidades contínuas, seguido, de longe, do total de questões que abordaram as quantidades discretas não icônicas.

No entanto, se observarmos os totais das colunas, perceberemos que os alunos da 4ª série obtiveram melhor êxito na representação icônica. Quando

observamos as linhas, percebemos que o desempenho dos alunos foi sensivelmente melhor na quantidade contínua.

Este resultado pode ter ocorrido em razão do enfoque que se dá no início do ensino de frações com as situações que abordam as quantidades contínuas na representação icônica, porém faremos adiante análises mais detalhadas, a fim de constataremos as influências dessas variáveis em relação a cada significado.

Agora vamos analisar os índices de acertos da 8ª série em relação às variáveis abordadas.

Tabela 5.7: Desempenho dos alunos da 8ª série em relação às variáveis de pesquisa

REPRESENTAÇÃO QUANTIDADE	ICÔNICA	NÃO ICÔNICA	TOTAL
CONTÍNUA	125 de 348 35,92%	58 de 232 25%	183 de 580 31,55%
DISCRETA	79 de 290 27,24%	74 de 232 31,89%	179 de 585 30,60%
TOTAL	204 de 638 31,97%	132 de 464 28,45%	362 de 1165 31,07%

Assim como na 4ª, os maiores índices de acertos, da 8ª, ficaram nas variáveis, quantidade contínua com representação icônica, seguido das variáveis quantidades discretas sem ícone. Porém diferente do desempenho da 4ª série, aqui os índices de acerto aproximam-se muito um do outro, demonstrando que a influência das variáveis nas situações abordadas foi maior na 4ª série em relação à 8ª série.

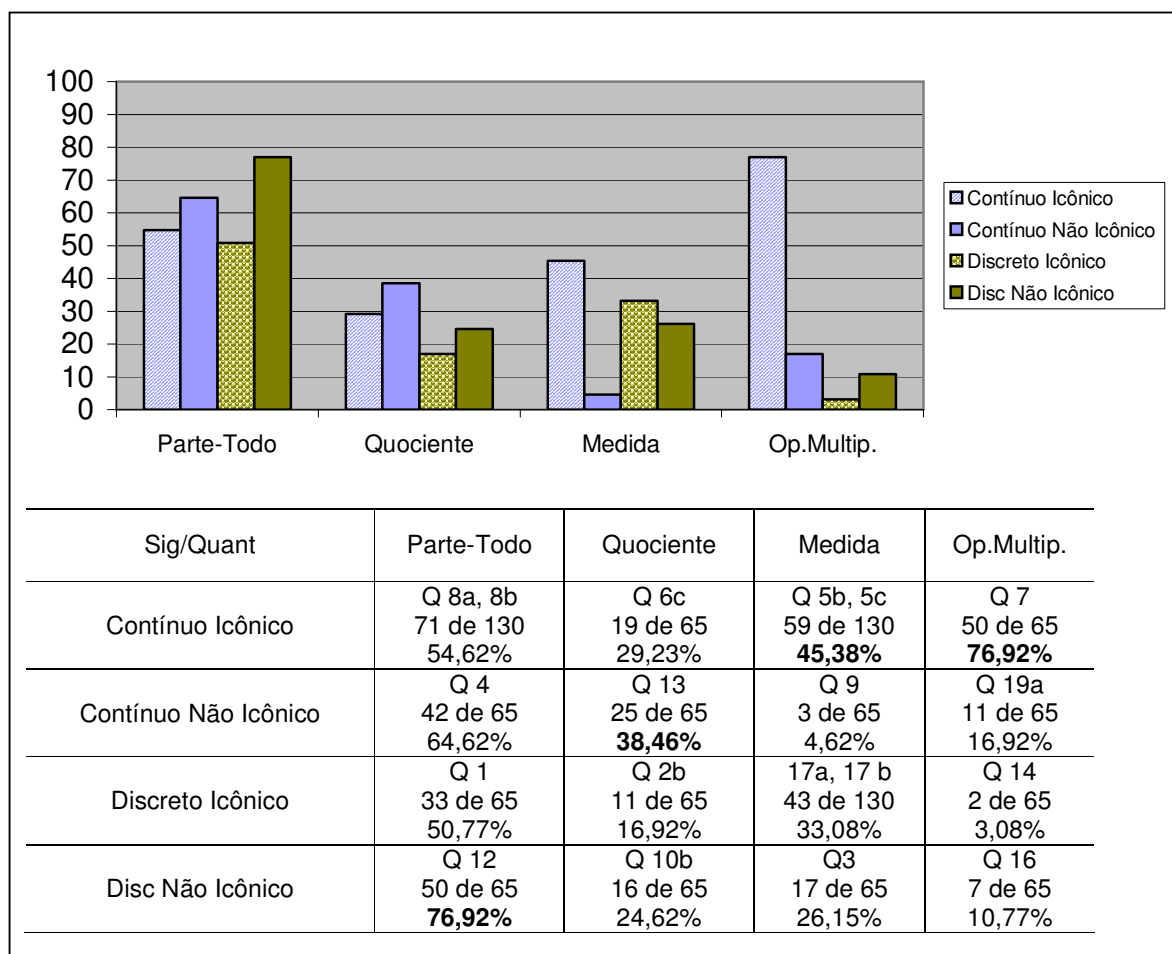
De forma geral, estas duas tabelas mostram que a forma de apresentação das questões, utilizando as variáveis podem facilitar ou não na resolução das questões, por isso, faremos análises mais detalhadas em relação a essas variáveis, abordando cada significado empregado.

5.1.3 Os diferentes significados e as variáveis: quantidade contínua e discreta, representação icônica e não icônica

Esta subseção tratará primeiro dos dados obtidos com os alunos da 4ª

série:

Quadro 5.2: O gráfico apresenta as porcentagens de acertos e a tabela apresenta as questões abordadas, as quantidades de acertos por total de itens e as porcentagens de acertos, levando-se em consideração quatro significados de fração e as variáveis: quantidades contínuas e discretas e as representações icônica e não icônica.



O Quadro 5.2 apresenta uma análise mais detalhada do desempenho, em relação aos quatro diferentes significados, dos 65 alunos da 4ª série, sendo possível fazer comparações entre os desempenhos, levando-se em conta as

variáveis: quantidades contínuas e discretas e representações icônicas e não icônica.

Ao observar o quadro, podemos perceber que os índices de sucesso nas variáveis, quantidades e representações apresentaram diferenças, segundo o significado da fração abordado.

Portando, a partir deste ponto, centraremos nossa análise por significado e suas variáveis.

- **Número:**

Novamente, cabe ressaltar que, no significado Número, consideramos apenas a representação icônica (Q 11a, Q 11b) e não icônica (Q 18a, Q 18b) e que o índice de desempenho apresentado pelos alunos na 4ª série neste significado foi praticamente nulo.

O resultado parece demonstrar que os alunos da 4ª série não tiveram contato com situações semelhantes às abordadas em nossas questões, contrapondo nossa análise dos livros didáticos, os quais os professores nos informaram utilizar como apoio nas aulas.

Já que no livro de Dante (2001) encontramos sete atividades que abordaram o significado Número em situações de conversão de registro da forma $\frac{a}{b}$ para forma decimal e o livro de Sosso.(2000) apresentou situações com o significado número semelhantes às situações que utilizamos em nosso estudo, no que se refere a troca de registro.

Este resultado, então, nos faz questionar se os professores estão abordando situações com o significado de Número.

- **Parte-todo**

No significado Parte-todo, o qual os alunos da 4ª série obtiveram um melhor resultado; podemos perceber que esse desempenho foi mais expressivo nas variáveis que apontavam situações-problema nos quais não houve a utilização de ícone, visto que, na quantidade discreta não icônica houve 76,92% de acerto (Q 12) seguida das variáveis contínua não icônica (64,62% - Q 4), discreta icônica (50,77% - Q 1) e contínua icônica (54,62% Q 8a, 8b).

Estes resultados, de certa forma, não refletem o enfoque que é dado às frações nesta série, pois na análise dos livros didáticos, capítulo 3, constatamos que o significado Parte-todo é, geralmente, abordado em situações de quantidade contínua com a utilização de ícone, portanto o desempenho dos alunos não acompanhou a abordagem dos livros didáticos.

Isto pode ter ocorrido, porque para que as situações-problema, que envolviam o significado Parte-todo com variável discreta não-icônica, fossem resolvidas, era suficiente que os alunos manipulassem os dados numéricos contidos no enunciado das referidas questões.

Assim, a única exigência para a formalização da resposta era que os números expostos no problema fossem organizados um abaixo do outro, com um traço no meio (símbolo de fração), como podemos ver no exemplo:

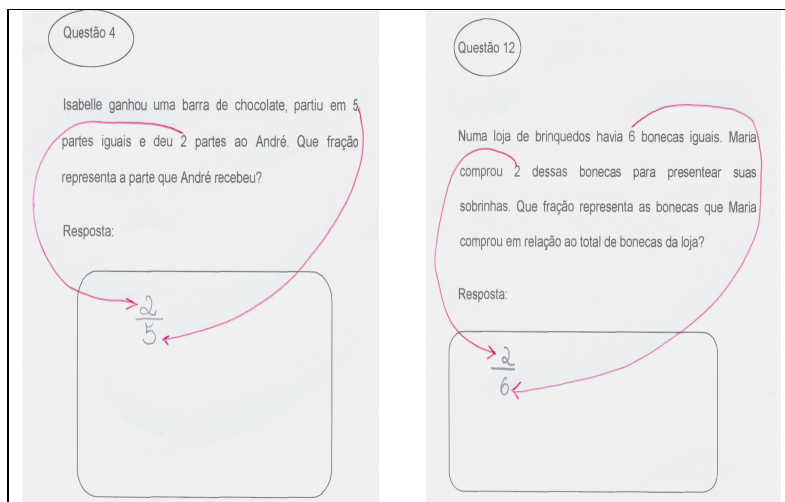


Figura 5.1: Exemplos das questões 4 e 12 na formalização da resposta.

Este tipo de procedimento pode levar o aluno ao acerto ou ao erro da questão, visto que ele pode inverter o numerador com o denominador, cometendo assim um erro que denominamos de “Inversão do numerador com denominador” e será tratado em nossa análise qualitativa.

- **Quociente**

No significado Quociente, os alunos da 4ª série mantiveram menor variação de desempenho, no que diz respeito às quatro diferentes formas de apresentação das questões (quantidades contínua icônica, contínua não icônica discreta icônica e discreta não icônica).

Mesmo assim, cabe ressaltar que o maior índice de acerto nesse significado, foi obtido na Questão 13, que envolvia a variável contínua não icônica (38,46%) e o menor na variável discreta icônica (16,92%), questão 2b, já as questões que abordavam as variáveis contínua icônica (29,23%), questão 6c, e discreta não icônica (24,62), questão 10b, mantiveram-se muito próximas.

Cabe ressaltar, que a questão que tratava da variável contínua não icônica, Questão 13, que obteve o maior índice de acertos por parte dos alunos, poderia ser solucionada por meio da conexão entre fração e divisão na formalização da resposta ou como já mencionamos anteriormente, baseado em um tratamento numérico simples, no qual o aluno apenas manipula dados apresentados no enunciado do problema, como podemos ver na Questão 13 da figura:

Questão 13

Foram divididos igualmente 4 chocolates para 5 crianças.
Que fração representa o que cada criança recebeu?

Resposta:

$$\frac{4}{5}$$

Questão 2

Tenho 10 bolinhas de gude e vou dividir igualmente para 5 crianças.

a) Quantas bolinhas cada criança ganhará?
Resposta: 2 bolinhas

b) Que fração representa esta divisão?
Resposta: $\frac{10}{5}$

Figura 5.2: Exemplos das questões 13 e 2 na formalização da resposta.

Já na questão 2, conforme exemplo na figura acima, a existência do ícone representando a quantidade de bolinhas e crianças e o item *a* que perguntou quantas bolinhas cada criança ganhará, pode ter levado os alunos a pensar que para responder o item *b* era necessário fazer uso da resposta do item *a*, estabelecendo então, uma relação Parte-todo em uma situação que procurou abordar o significado Quociente. Esse tipo de erro será tratado na análise qualitativa.

- **Medida**

Ao observar o significado Medida percebemos grande variação entre as variáveis contínua icônica (45,38%), Questões 5b e 5c e contínua não icônica (4,62%), Questão 9, cerca de 40 pontos percentuais, em contrapartida uma aproximação dos acertos nas questões que envolviam as variáveis discreta icônica (33,08%), Questão 17a, e discreta não icônica (26,15%), Questão 3.

Mantendo a mesma análise que foi realizada nas ressalvas anteriores observamos que os alunos obtiveram um índice quase nulo de acertos na Questão 9, que abordou o significado Medida com variável contínua não icônica. Uma explicação para esse baixo desempenho pode ser encontrada nas ações necessárias para resolver a questão, vejamos o exemplo da questão abaixo:

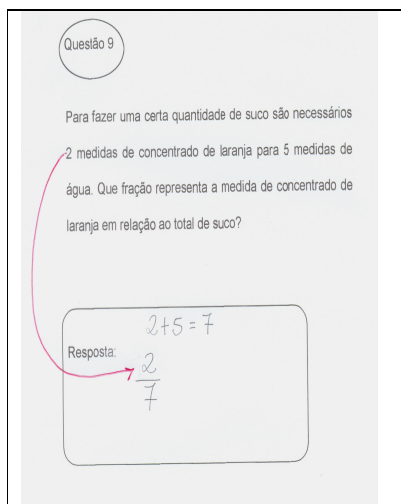


Figura 5.3: Exemplo da Questão 9 na formalização da resposta.

Para se chegar na resposta, era necessário operar com os dados do problema, indo muito além da manipulação dos números apresentados para a “montagem” da resposta em forma de fração, pois o valor que representava a mistura seria encontrado pela soma das duas medidas, água e suco.

A simples montagem da fração levou a maioria dos alunos a cometer um tipo de erro que denominamos de “Relação Parte-parte” que será tratado em nossa análise qualitativa.

- **Operador Multiplicativo**

No significado Operador Multiplicativo, obtivemos um índice de acerto extremamente grande na variável contínua icônica (76,92%), Questão 7, essa questão se propôs a delimitação da quantidade de chocolate que Maria comeu, ou seja, reduz o inteiro que deverá ser partido em 5 partes, em 2 partes já consumidas, configurando assim uma ação de operação sobre o ícone.

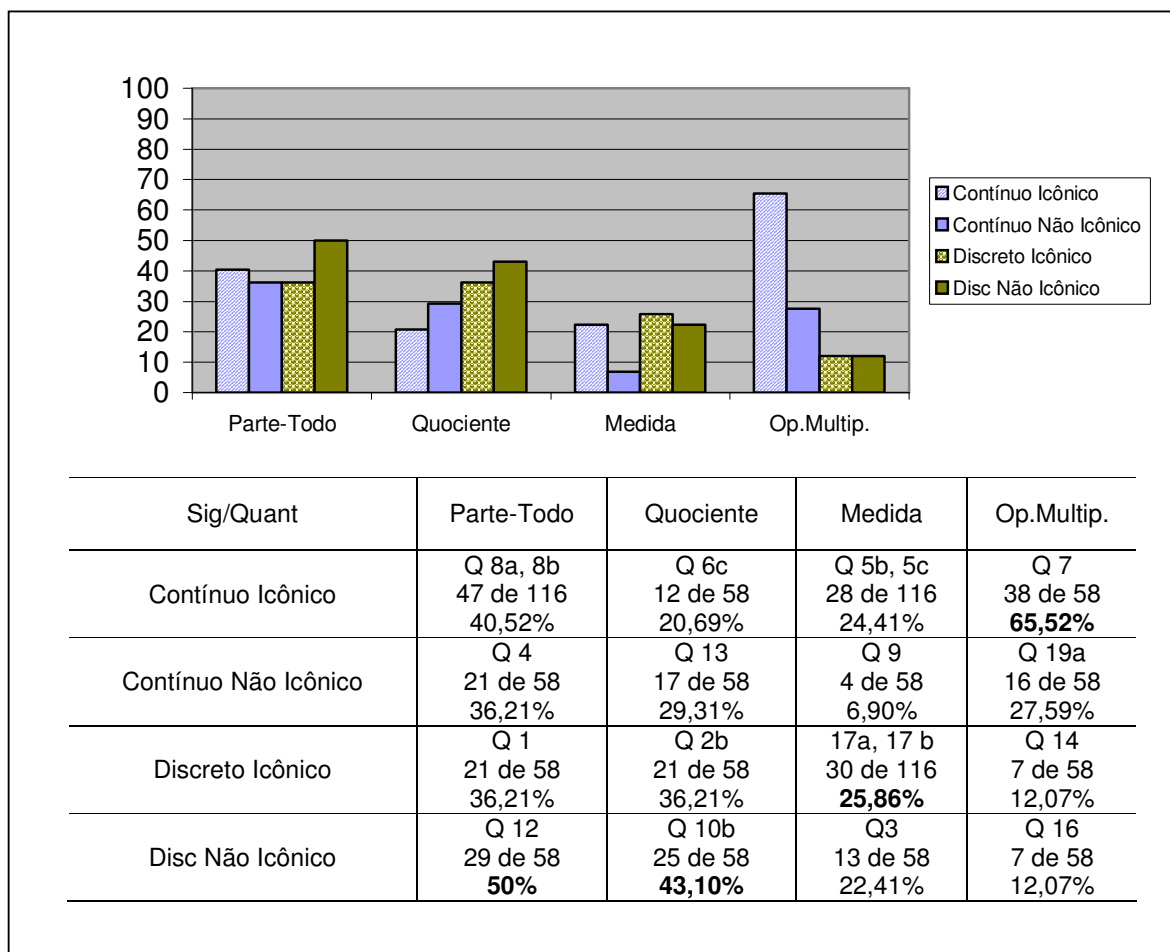
Nesse tipo de situação, a idéia desse significado é muito semelhante à situação do tipo Parte-todo, nas quais o todo, contínuo, já aparece subdividido, portanto, acreditamos que os alunos tenham recorrido ao significado Parte-todo como comumente é abordado pelos livros didáticos para execução de tal atividade.

Já a Questão 14 (discreta icônica) foi a que apresentou o menor índice de acertos (3,08%) provavelmente isto ocorreu porque os alunos desse nível não apresentam domínio sobre o papel de transformação exigido pela questão, uma vez que o Operador multiplicativo exigia que fossem realizadas as operações de multiplicação e divisão diferentemente da questão 7.

Já as variáveis contínua não icônica (16,92%), Questão 19, e discreta não icônica (10,77%), Questão 16, apresentaram índices muito próximos de acertos.

Apresentaremos agora, algumas análises sobre os resultados obtidos na 8ª série juntamente com algumas comparações:

Quadro 5.3: O gráfico apresenta as porcentagens de acertos e a tabela apresenta as questões abordadas, as quantidades de acertos por total de itens e as porcentagens de acertos, levando-se em consideração quatro significados de fração e as variáveis: quantidades contínuas e discretas e as representações icônica e não icônica.



Embora a 8ª série apresente índices de acertos um pouco melhores que a 4ª série no significado Número, podemos considerá-los irrisórios, o que demonstrou que estes alunos também desconhecem a o emprego de frações por meio desse significado.

Nas Questões 11a, 11b, o índice total de acerto dos alunos ficou em 1,72%, demonstrando que eles não conseguem representar a fração na reta

numérica e, conseqüentemente, nas Questões 18a, 18b, esses mesmos alunos tiveram um índice total de acerto de apenas 6,03%, portanto, sem conseguir fazer a mudança de registro da forma fracionária para a decimal.

Agora, passaremos a analisar os demais significados a cerca de suas variáveis abordadas:

- **Parte-todo**

No significado Parte-todo, encontramos o segundo maior índice de acertos dessa série, 50 pontos percentuais na variável discreta não icônica, Questão 12, seguida das variáveis contínua icônica (40,52%), Questões 8a e 8b, contínua não icônica, Questão 4, e discreta icônica, Questão 1, com 36,21% de acertos.

Cabe ressaltar que a Questão 8b, que abordou as variáveis contínua icônica, exigia do aluno a noção de área. Os índices obtidos pelos alunos da 8ª série nesta forma de apresentação foram menores aos apresentados pelos alunos da 4ª série, os alunos da 8ª tiveram um índice de acerto de apenas 22,41% no item b, contra 27,69% da 4ª série nesse item.

Isso nos leva a acreditar que, embora os alunos da 8ª série já tenham apresentado um contato muito maior com as questões voltadas à geometria euclidiana plana, no caso da área utilizada nesse problema os mesmos parecem não fazer uso desse conhecimento para resolução de questões em outras situações-problema.

- **Quociente**

Na análise do significado Quociente, percebemos uma escalada de índices de acertos partindo da variável contínua icônica (20,69%), Questão 6c, seguido das variáveis contínua não icônica (29,31%), Questão 13, discreta icônica (36,21%), Questão 2b, finalizando com a abordagem discreta não icônica (43,1%), Questão 10b.

Ao compararmos os resultados obtidos pela 8^a série com os apresentados anteriormente pela 4^a série nas variáveis discreta icônica (Q 2b) e discreta não icônica (Q 10b) verificamos cerca de 20 pontos percentuais a favor da 8^a série em cada uma dessas representações.

Os resultados mostram que os alunos da 8^a série parecem lidar melhor com a representação fracionária em situações com significado Quociente, provavelmente porque os alunos da 8^a série aceitam melhor a idéia de fração como sendo uma divisão, trabalham com situações de divisões ao longo dos anos (dividem números inteiros e decimais) e por esse motivo, acabam manipulando com mais facilidade o conceito de fração.

No entanto, quando enfocamos, nesta mesma comparação, as variáveis contínua icônica (Q 6c) e contínua não icônica (Q 13) observamos quase 10 pontos percentuais a favor da 4^a série. Julgamos que os alunos da 8^a estão mais acostumados a lidar com situações de operação e divisão sem a utilização de ícones.

Já os alunos da 4^a série por estarem mais acostumados a lidar com situações que abordam o significado Parte-todo na forma icônica ao resolverem os exercícios com o significado Quociente, tentaram apresentar relações do tipo

Parte-todo, esse tipo de erro como já citado anteriormente será abordado na análise qualitativa.

- **Medida**

Em relação ao significado Medida, observamos que os alunos da 8ª série apresentaram índices de acertos muito próximos nas variáveis contínua icônica (24,14%), Questões 5a e 5b, discreta icônica (25,86%), Questões 17a e 17b, e discreta não icônica, também, com 22, 41%, Questão 3. Exceto nas variáveis quantidade contínua não icônica 6,9%, Questão 9, conforme já citado na análise da 4ª, esse baixo desempenho deve-se às ações necessárias para resolver a questão, que mesmo os alunos da 8ª não conseguiram resolver.

A maior alteração entre os resultados da 8ª série com os da 4ª série foi na variável contínua icônica com cerca de 20 pontos percentuais a favor da 4ª série. Acreditamos que isso tenha ocorrido porque as Questões 5a e 5b, que tratam dessa variável, podiam ser resolvidas aplicando-se a forma de contagem dupla utilizada no significado Parte-todo muito trabalhada por alunos que iniciam o estudo de frações.

- **Operador Multiplicativo**

Mais uma vez o significado Operador Multiplicativo, na sua forma contínua e icônica, Questão 7, apresentou um alto índice de acerto (65,52%), desta vez, o maior dentre todas as 18 questões envolvidas nesta análise pela 8ª série. Provavelmente isto tenha ocorrido pelos mesmos motivos que levaram os alunos da 4ª série a obterem sucesso nesta questão.

Os alunos da 8ª série apresentaram um mesmo índice de acerto de 12,07%, nas variáveis discreta icônica, Questão 14, e discreta não icônica, Questão 16, índices pouco melhores que os da 4ª série, apesar dos alunos da 8ª já trabalharem há mais tempo com operações de multiplicação e divisão, como exigia o exercício.

Em relação à Questão 19, eles tiveram cerca de 15 pontos percentuais a mais na variável contínua não icônica (27,59%) em comparação com as demais questões com esse significado.

5.1.4 Os invariantes

Nesta seção, analisaremos os invariantes que fazem parte da terna da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, abordado no Capítulo 2. Cabe ressaltar que o foco de nossa pesquisa é perceber quais concepções são possíveis de se identificar em relação aos cinco diferentes significados da fração propostos por Nunes, a partir da aplicação de nosso estudo diagnóstico, porém mesmo assim elaboramos questões que contemplam os invariantes da fração (ordem e equivalência).

Como apresentamos na próxima tabela, os invariantes fizeram parte de quatro questões. A Questão 19 que envolve o significado Operador Multiplicativo de quantidade contínua e sem representação icônica que traz o invariante ordem.

As Questões 5a, 15 e 17c abordam o invariante equivalência da fração. A Questão 5a faz referência ao significado Medida de quantidade contínua e representação icônica, ao passo que a Questão 15 contempla o significado

Quociente de quantidade contínua e representação icônica. Quanto à Questão 17c esta aborda o significado Medida de quantidade discreta e representação icônica.

Para essa análise iremos considerar os alunos das duas séries.

A seguir, a tabela apresenta os resultados obtidos:

Tabela 5.8: Desempenho dos alunos da 4ª e 8ª com relação aos invariantes do conceito de fração.

Invariantes	ORDEM	EQUIVALÊNCIA			
	Séries	Q19	Q5a	Q15	Q17c
4ª	11 de 65 16,92%	15 de 65 23,08%	33 de 65 50,76%	3 de 65 4,62%	62 de 260 23,85%
8ª	16 de 58 27,59%	29 de 58 50%	46 de 58 79,31%	4 de 58 6,90%	95 de 232 40,95%

Podemos observar, que a 8ª série apresentou um desempenho melhor que a 4ª em todas questões desse tipo, exceto na Questão 17c, na qual apesar do desempenho melhor, foi inexpressivo.

Na Questão 19 os alunos da 8ª demonstraram em maior número, porém, menos que a metade, o entendimento de que o número $\frac{1}{4}$ é menor que $\frac{1}{2}$, possivelmente, entendendo a relação inversa que existe entre o numerador e o denominador da fração.

Já na Questão 5a, que abordou o invariante equivalência, em uma situação com o significado de medida, os alunos teriam que perceber que $\frac{3}{6}$ é equivalente a $\frac{2}{4}$, com a ajuda do ícone que indicava que a mistura seria formada com a mesma quantidade de tinta azul e branca, nos dois casos.

Nos estudos feitos por Tinoco E Lopes (1994) observamos que em uma questão enfocando a noção de frações equivalentes, o estudo propôs a seguinte

questão: “ $\frac{2}{7}$ $\frac{\square}{14}$ $\frac{10}{\triangle}$. Qual o valor do quadrado? Qual o valor do triângulo?”

As autoras levantaram como hipótese para esta questão que a dificuldade residia na presença da fração intermediária. Essa hipótese foi confirmada na entrevista, visto que o aluno afirmou que o quadrado era 4 e o triângulo ele não sabia qual o valor. Ao tampar a fração intermediária as autoras refizeram a pergunta, obtendo a resposta 35. Esta evidência sugere, segundo as autoras, que os alunos não estão familiarizados com a transitividade da equivalência, e essa dificuldade pode ser superada no processo de ensino, com situações que leve o aluno, por exemplo, obter uma fração equivalente a $\frac{3}{15}$ com denominador 10.

Concordamos com esses autores, já que o fato dos numeradores e denominadores das frações $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{4}$ não serem múltiplos entre si, podem ter dificultado a percepção, por parte dos alunos, da equivalência.

Mas, consideramos que o desempenho melhor da 8ª deu-se pela noção apresentada pelo ícone, já que esses alunos tiveram, nos itens b e c, um desempenho 50% menor que os alunos da 4ª que, como já foi citado, estes estão mais familiarizados, no início do ensino de frações, a proceder o tipo de contagem dupla.

Diferentemente, na Questão 17c que, também ,abordou o significado medida, o ícone não foi um fator facilitador, pois, as frações que deveriam ser apresentadas como resposta, não teriam numeradores e denominadores, das frações, múltiplos entre si.

Na Questão 15, extraída da pesquisa de Nunes (2003), tendo como o enfoque o significado Quociente com quantidade contínua e icônica, havia a relação de dobro entre os bolos e as crianças e não exigia a formalização de resposta do tipo $\frac{a}{b}$, fatos esses que consideramos facilitadores, visto que a resposta identificou apenas a noção de equivalência de situação de divisão. Neste caso os alunos da 8ª série tiveram um índice de acerto muito bom (79,31%) seguidos pelos alunos da 4ª com 50,77%.

5.2 ANÁLISE QUALITATIVA

Fundamentados nos protocolos de nosso estudo diagnóstico, procedemos com uma análise em relação às estratégias de resolução utilizadas pelos alunos ao resolverem erroneamente as questões apresentadas na Tabela 5.1 que abordaram os cinco significados de fração.

Desta forma, relacionaremos apenas as estratégias que conduziram ao erro, analisando as resoluções sem sucesso apresentadas pelos alunos, destacando, o que eles fizeram e de que modo o fizeram. Para tanto, organizaremos as estratégias apresentadas em função de sua tipologia e adotaremos nomes que as identifiquem. A seguir estabeleceremos comparações entre as estratégias de resolução dos alunos das diferentes séries pesquisadas.

Nossas análises de estratégias estão embasadas na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, já que o aprendizado de um determinado conceito,

segundo este autor, pode estar entrelaçado a outros conceitos que podem ajudar ou dificultar novos aprendizados. Além disso, os processos cognitivos e as respostas dos alunos podem ter relação com as situações com as quais este aluno é confrontado.

Em nossa pesquisa, o fato pode ocorrer, por exemplo, quando um aluno utiliza-se do conhecimento a respeito do significado Parte-todo, já expresso anteriormente, como o mais trabalhado na rede de ensino, para tentar resolver uma questão que, inicialmente, havia sido proposta com outro significado.

A seguir, apresentaremos uma tabela demonstrativa da distribuição dos itens que foram respondidos pelos alunos de forma correta, errônea, deixados em branco e com respostas do tipo não sei:

Tabela 5.9: Distribuição total das respostas em relação aos acertos, erros, itens em brancos e respostas do tipo não sei das 4ª e 8ª séries.

Série	Total de Acertos	Total de Erros	Total de Brancos	Total de Não Sei	Totais
4ª	460 30,77%	993 66,42%	35 2,34%	7 0,47%	1495 itens
8ª	345 25,86%	909 68,14%	75 5,62%	5 0,37%	1334 itens
Totais	805 28,45%	1902 67,23%	110 3,89%	12 0,43%	2829 itens

Dentre os itens que apresentaram resposta errônea, inicialmente, foram subdividimos entre os que puderam ser classificados em estratégias, os que apresentaram resposta do tipo pictórica e os que não puderam ser classificados em nenhuma das estratégias e, por isso, serão considerados como inconsistentes.

Assim:

Pictórica (PIC) – quando o aluno respondeu a questão somente com algum tipo de desenho. Tivemos ocorrências desse tipo na 4^a e na 8^a séries, perfazendo o total de nove respostas como exemplificamos na figura:

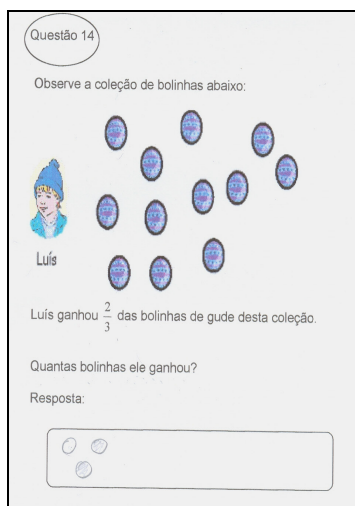


Figura 5.4: Pictórica, aluno 65, 4^a série.

Inconsistente (INC) – o aluno respondeu a questão, no entanto, não conseguimos categorizar essa questão, ou ainda não conseguimos entender o que de fato o aluno pensou ao responder. Como por exemplo:

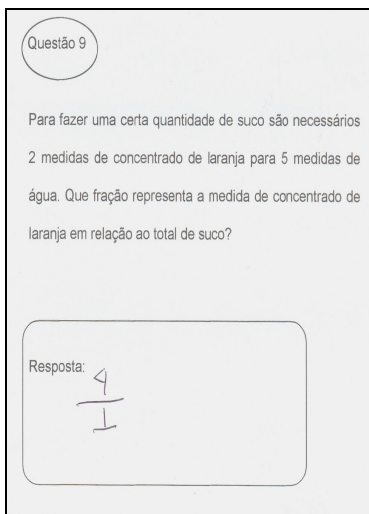


Figura 5.5: Inconsistente, aluno 48, 8^a série.

Estas respostas estão expressas nos dados da tabela abaixo:

Tabela 5.10: Distribuição total das respostas errôneas classificadas dentre as estratégias, pictórica e inconsistente.

Série	Respostas classificadas dentre as estratégias	Respostas do tipo pictórica	Respostas inconsistente	Total de Erros
4 ^a	692 69,69%	6 4,53%	295 25,78%	993
8 ^a	748 82,29%	3 1,10%	158 16,61%	909
Totais	1440 75,71%	9 0,47%	453 23,82%	1902

Dentre as possibilidades que os alunos não obtiveram êxito, após intensos estudos, estabelecemos 9 categorias de resolução como segue abaixo:

Tabela 5.11 : Relação das Categorias de Análise

Categoria	Descrição do erro
E1	Relação Parte-parte
E2	Inversão do numerador com denominador
E3	Quociente remete para o Parte-todo
E4	Interpreta a fração literalmente
E5	Desprezo da conservação da área
E6	Partição
E7	Porcentagem
E8	Fração tida como números sobrepostos
E9	Utilização de operação

Apresentamos na próxima tabela as ocorrências de cada uma das estratégias, citadas acima, nas 4^a e 8^a séries.

Tabela 5.12: Distribuição total das respostas errôneas classificadas dentre as estratégias.

Série	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	TOTAL
4 ^a	198	86	43	44	34	23	8	91	165	692
8 ^a	221	120	46	52	16	12	11	64	206	748
TOTAL	419	206	89	96	50	35	19	155	371	1440

A seguir, passaremos a apresentar detalhadamente estas nove categorias, definindo-as e colocando alguns exemplos que consideramos relevantes, apresentados nos protocolos dos alunos, bem como, a quantidade de alunos que se utilizou dessa categoria e faremos ainda comentários a respeito de cada uma.

- **E1:Relação Parte-Parte**

Consideramos como estratégia Parte-parte aquela em que dada uma situação, o aluno despreza o todo envolvido no problema e realiza a contagem das partes em destaque e, em seguida, procede a contagem das demais partes não relacionando assim, as partes com o todo. Neste tipo de estratégia o aluno despreza o todo que está envolvido na situação. Este tipo de erro ocorreu tanto com quantidades discretas como com quantidades contínuas.

Os dados das tabelas a seguir descrevem as questões, nas quais esse tipo de estratégia (E1) ocorreu na 4ª e 8ª séries, respectivamente:

4ª série:

Tabela 5.13: Distribuição do E1 nas questões da 4ª série.

Sig/Rep Qtde	Parte-todo		Medida	
	I	Ñ I	I	Ñ I
C	Q8a,8b 16	Q4 8	Q5b,5c 60	Q9 54
D	Q1 24	Q12 6	Q17a,17b 21	Q3 9

Legenda:

C – QUANTIDADE CONTÍNUA

D – QUANTIDADE DISCRETA

I - REPRESENTAÇÃO ICÔNICA

ÑI – REPRESENTAÇÃO NÃO ICÔNICA

8ª série:

Tabela 5.14: Distribuição do E1 nas questões da 8ª série.

Sig/Rep Qtde	Parte-todo		Medida	
	I	Ñ I	I	Ñ I
C	Q8a,8b 32	Q4 4	Q5b,5c 60	Q9 49
D	Q1 32	Q12 8	Q17a,17b 32	Q3 4

Conforme os dados das Tabelas 5.11 e 5.12 podemos observar que a maior ocorrência da estratégia E1 foi no significado Medida na sua representação contínua tanto icônica como não icônica.

Para resolver as Questões 5b, 5c e 9, os alunos deveriam perceber qual era o total de medidas envolvidas para, então, elaborar a fração que representaria as medidas das partes em relação à medida total, das tintas e do suco respectivamente. No entanto, muitos alunos apresentaram respostas como os exemplos a seguir:

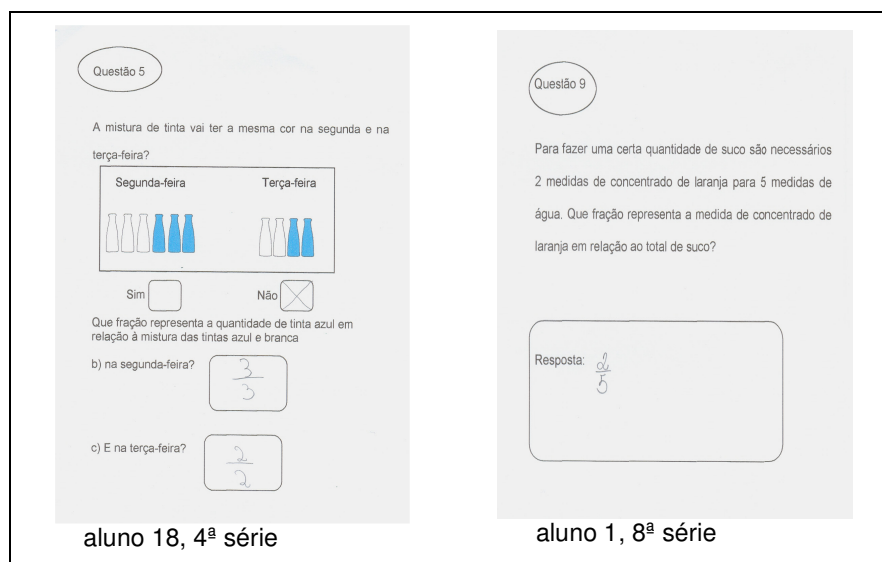


Figura 5.6: Exemplos do erro E1 cometido por alunos da 4ª e 8ª.

Podemos supor que, tanto o Aluno 18 da 4ª série como o Aluno 1 da 8ª série entenderam fração como Parte-parte, sem se preocupar com o todo

referente, portanto sem entender as situações propostas que faziam referência ao todo.

Percebemos, também, que esse tipo de erro na Questão 9 pode ter ocorrido com a montagem da resposta na forma $\frac{a}{b}$ pelos alunos, por meio da utilização dos dados do problema, conforme já nos referimos na análise quantitativa, em que nas situações com significado Parte-todo discreto não icônico os alunos tiveram um bom desempenho.

Esse procedimento, então, levanta dúvidas sobre o entendimento da situação por parte dos alunos, como descrito por Nunes, Bryant (1997), no qual afirmam que são fornecidas às crianças algumas instruções sobre poucas regras de calcular que permitem que elas transmitam a impressão de que sabem muito sobre fração sem, contudo, compreender o significado desse novo tipo de número.

Observamos ainda que o fato das Questões 5b, 5c apresentarem ícone não contribuiu para que os alunos obtivessem sucesso, uma vez que, eles utilizaram mais essa estratégia nessa questão do que na questão com o mesmo significado porém, não icônica, Questão 9.

Além disso, cabe ressaltar a grande disparidade de utilização dessa estratégia ainda no significado Medida com quantidade discreta e representação não icônica apresentados nas 4^a e 8^a séries. Assim, na Questão 3, apenas nove alunos fizeram uso da estratégia E1 na 4^a série, 40 alunos da 8^a série colocaram-na em prática. Isso, provavelmente, tenha ocorrido, porque os alunos da 8^a ao não entenderem a situação proposta optaram por fazer uso de um algoritmo, recurso comumente usado para resolver as “questões de matemática”, subtraindo

a medida total de bilhetes da parte envolvida, relacionando então esse resultado, que representa as partes que sobraram após a compra dos bilhetes, com os bilhetes comprados. Como mostra o próximo protocolo:

Questão 3

Na escola de Pedro foi feita uma rifa e foram impressos 150 bilhetes. A mãe de Pedro comprou 20 bilhetes dessa rifa. Qual a chance da mãe de Pedro ganhar o prêmio?

Resposta:


$$\frac{130}{20}$$

Figura 5.7: E1, aluno 48, 8ª série.

Já no significado Parte-todo o maior índice de ocorrência desta estratégia E1, nas duas séries, deu-se na Questão 1, que abordou uma situação com quantidade discreta e representação icônica. Conforme mostra o protocolo abaixo:

Questão 1

Numa loja de presentes há 4 bonés vermelhos e 2 bonés azuis de mesmo tamanho. Que fração representa a quantidade de bonés azuis em relação ao total de bonés?



Resposta:

$$\frac{2}{4}$$

Figura 5.8: E1, aluno 56, 8ª série.

Em seu estudo, Bezerra (2001), também observou esse tipo de erro na relação Parte-todo, tanto com quantidades discretas como contínuas. Lá o aluno procedia a contagem da parte destacada e, em seguida, realizava a contagem das demais partes, relacionando na forma $\frac{a}{b}$ as duas partes, sem levar em consideração o todo envolvido na situação.

- **E2: Inversão do Numerador com o Denominador**

A categoria que nós denominamos E2, compreende a inversão das posições do denominador e numerador. O aluno pode ter entendido a situação, porém não foi capaz de representá-la utilizando corretamente a fração, trocando a ordem representativa da relação das grandezas envolvidas na situação, ou também, não entendeu a situação, tentando montar uma possível fração como resposta.

Os dados das tabelas abaixo descrevem as questões na quais esse tipo de erro (E2) ocorreu:

4ª Série:

Tabela 5.15: Distribuição do E2 nas questões da 4ª série.

Sig/Rep	Parte-todo		Quociente		Medida	
	I	ÑI	I	ÑI	I	ÑI
C	Q8a, 8b 1	Q4 8	Q6c 6	Q13 8	Q5b, 5c 5	Q9 1
D	Q1 0	Q12 7	Q2b 20	Q10b 22	Q17a, 17b 1	Q3 7

Legenda:

C – QUANTIDADE CONTÍNUA D – QUANTIDADE DISCRETA
I - REPRESENTAÇÃO ICÔNICA ÑI – REPRESENTAÇÃO NÃO ICÔNICA

8ª Série:**Tabela 5.16:** Distribuição do E2 nas questões da 8ª série.


Sig/Rep	Parte-todo		Quociente		Medida	
	I	ÑI	I	ÑI	I	ÑI
C	Q8a, 8b 14	Q4 22	Q6c 8	Q13 8	Q5b, 5c 15	Q9 0
D	Q1 3	Q12 16	Q2b 8	Q10b 12	Q17a, 17b 4	Q3 10

Conforme mostram os dados das Tabelas 5.13 e 5.14, podemos observar diferentes índices de ocorrência da estratégia E2 nas duas séries, tornando-se necessário fazer uma análise individualizada de cada série. Desta forma, fica explícito que uma análise dessa natureza, possivelmente, não permite que listemos um único significado de ocorrência na estratégia nem mesmo que isto se deu com quantidades contínuas ou discretas, ou ainda, com representação icônica ou não icônica.

Na 4ª série o maior índice de ocorrência dessa estratégia verificou-se no significado Quociente com quantidade discreta, quase que igualmente nas representações icônica como não icônica. Entre as respostas apresentadas nesta estratégia destacamos como exemplo:

Questão 2

Tenho 10 bolinhas de gude e vou dividir igualmente para 5 crianças.



a) Quantas bolinhas cada criança ganhará?
Resposta:

2 bolinhas cada criança

b) Que fração representa esta divisão?
Resposta:

$\frac{5}{10}$

Aluno 22, 4ª série

Questão 10

Foram divididas igualmente 8 bolas de futebol de mesmo tamanho para 4 crianças.

a) Quantas bolas de futebol cada criança ganhará?
Resposta:

$\frac{8}{4} = 2$ bolas para cada

b) Que fração representa essa divisão?
Resposta:

$\frac{4}{8}$

Aluno 5, 8ª série.

Figura 5.9: Exemplos do erro E2 cometido por alunos da 4ª e 8ª séries

Sabe-se que no início do ensino de frações, ocorre uma ênfase na abordagem de situações de significado Parte-todo, cujas respostas desse tipo de situação são, em sua grande maioria, expressas por um todo maior que o número de partes, resultando em respostas com o valor do numerador menor que o denominador. É possível que este seja um falso teorema em ação.

As Questões 2b e 10b exigem uma resposta que põe em cheque esse suposto teorema-em-ação, pois, em ambos os casos a fração que expressa a situação solicitada possui o numerador maior que o denominador e os alunos da 4ª, provavelmente, não estejam habituados a esta possibilidade de representação.

Os alunos da 8ª série possivelmente, já compreendem esse fato e, por esse motivo, utilizaram menos esta estratégia. No entanto, tal estratégia (E2) passa a ser bastante utilizada por alunos dessa série no significado Parte-todo, com quantidades contínuas quanto discretas, em representação não icônica, (Q4 e Q12), demonstrando, assim, que talvez não tenham entendido a ordem da relação das grandezas envolvidas nessas situações como mostram os exemplos abaixo:

The image shows two examples of math questions and student answers. On the left, 'Questão 4' asks for a fraction representing a part of a whole, and the student 'Aluno 16, 8ª série' has written $\frac{5}{2}$. On the right, 'Questão 12' asks for a fraction representing a part of a whole, and the student 'Aluno 8, 8ª série' has written $\frac{6}{2}$.

Figura 5.10. Exemplos do erro E2 cometido por alunos das 4ª e 8ª.

Bezerra (2001) também detectou este erro de inversão das posições do numerador com o denominador em seu estudo. Da mesma forma, D'ambrósio (1989) afirma que os resultados de sua pesquisa apontam algumas dificuldades dos alunos para trabalhar com o conceito de fração, que são retratadas, por exemplo, pela confusão que fizeram com os significados de numerador e denominador (ora o numerador era o número total de partes, ora era o número de elementos).

- **E3: Quociente remete ao Parte-todo**

A categoria E3 está diretamente ligada às questões, cujo significado envolvido era o Quociente. Ao responder essas questões, o aluno despreza as duas grandezas envolvidas, nas situações propostas, (chocolate/criança; bolinhas de gude/criança; bolas de futebol/criança), levando em conta só uma delas, o que de fato está sendo dividido (chocolate; bolinhas de gude; bolas de futebol).

Os dados da tabela abaixo descrevem as questões, nas quais esse tipo de erro (E3) ocorreu:

4ª Série:
Tabela 5.17: Distribuição do E3 nas Questões.

Sig/Rep Qtde	Quociente	
	I	ÑI
C	Q6c 13	Q13 4
D	Q2b 14	Q10b 12

8ª Série:
Tabela 5.18: Distribuição do E3 nas Questões.

Sig/Rep Qtde	Quociente	
	I	ÑI
C	Q6c 18	Q13 4
D	Q2b 13	Q10b 11

Legenda:
C – QUANTIDADE CONTÍNUA **D** – QUANTIDADE DISCRETA
I – REPRESENTAÇÃO ICÔNICA **ÑI** – REPRESENTAÇÃO NÃO ICÔNICA

Os dados das tabelas mostram que existe uma grande disparidade entre o uso desta estratégia na Questão 13 com as demais (Q6c, Q2b, Q10b), tanto na 4ª quanto na 8ª série.

Ao analisar a Questão 13 observamos que a resposta correta ($\frac{\text{chocolate}}{\text{criança}}$) pode ser obtida com base na retirada dos dois valores numéricos apresentados no problema e expressos como numerador e denominador, respectivamente, conforme mostra o enunciado do problema no exemplo abaixo:

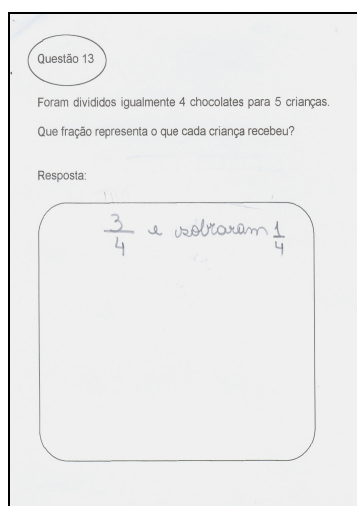


Figura 5.11: E3, aluno 34, 4ª série.

Na Questão 10b, os dados que compõem a resposta também são apresentados na ordem que deverão ser expressos ($\frac{\text{bola de futebol}}{\text{criança}}$); no entanto, o item *a* deste problema, questiona sobre a quantidade de bolas que cada criança ganhará, logo, ao responderem o item *b*, estes alunos podem estar influenciados a estabelecerem uma relação Parte-todo, como no próximo exemplo:

Questão 10

Foram divididas igualmente 8 bolas de futebol de mesmo tamanho para 4 crianças.

a) Quantas bolas de futebol cada criança ganhará?

Resposta:

2

b) Que fração representa essa divisão?

Resposta:

$\frac{2}{8}$

Figura 5.12: E3, Aluno 50, 4^a série.

Neste exemplo podemos perceber que o aluno apresentou como resposta, no item *b*, uma relação Parte-todo, que apresenta a quantidade que cada criança ganhou em relação ao total de bolas de futebol. Percebemos também que a resposta do item *a*, torna-se uma opção para ser usada no item *b*.

Focando em especial a Questão 6 que abordou o significado Quociente (figura 5.13), tivemos que, nos itens *a* e *b*, todos os alunos tiveram um índice expressivo de acerto. Cabe ressaltar que esses itens exigiam dos alunos apenas uma estimativa, se cada criança receberia um chocolate inteiro, ou pelo menos a metade do chocolate. Os resultados dos itens *a* e *b* foram para 4^a série de 93,85% e 81,54% respectivamente; para os alunos da 8^a série de 91,38% e 82,86% respectivamente.

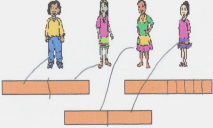
Os resultados evidenciam que tanto os alunos da 4^a como os da 8^a série têm clareza da situação proposta e as responderam acertadamente. Já em relação ao item *c*, percebemos que os alunos, apesar de compreenderem a situação, apresentaram dificuldades em expressar esta situação usando representação fracionária.

Ainda neste item, ao direcionarmos nossa análise às estratégias de resolução notamos resultados expressivos do tipo $\frac{a}{3}$ classificados na estratégia (E3). Com base nessa solução, podemos interpretar que esses alunos quantificaram o todo a ser dividido nessa situação colocando-o no denominador da fração e depois dividiram esse todo em partes a serem distribuídas às 4 crianças, relacionando esse número de partes divididas ao todo do denominador.

Portanto podemos supor que os alunos estão utilizando um falso teorema-em-ação para construção da resposta, atrelado às situações do tipo Parte-todo, com procedimento de contagem dupla, pelo qual primeiro identifica-se o todo referência e coloca-se o valor das partes que representam esse todo no denominador e o valor das partes destacadas no numerador conforme podemos ver na próxima figura:

Questão 6

Foram divididas igualmente para 4 crianças, 3 barras de chocolate.



a) Cada criança receberá 1 chocolate inteiro?
Sim Não

b) Cada criança receberá pelo menos metade de um chocolate?
Sim Não

c) Que fração de chocolate cada criança receberá?
Resposta: $\frac{2}{3}$ e sobram 2 partes 3 que foram divididas em pedacinhos menores

Figura 5.13: E3, aluno 34, 4^a série.

Podemos observar na figura acima que, o aluno 34 colocou no denominador da fração a quantidade de chocolates, e para determinar o numerador ele repartiu dois chocolates ao meio e o terceiro em mais pedaços,

percebemos então que esse aluno interagiu nessa situação de quociente levando em consideração que os chocolates seriam divididos para as crianças, porém para formalização ele pretendeu relacionar apenas chocolate com chocolate, assim como, em uma situação Parte-todo.

Nossos resultados são semelhantes aos encontrados pelos estudos de Kerslake (1986). A pesquisadora conclui que o entendimento dos números racionais como elemento do campo quociente requer a oportunidade de experiências dos aspectos partitivos da divisão. Nesse sentido há necessidade de se estender o modelo Parte-todo e incluir o aspecto Quociente da fração.

Kerslake, em seus estudos, tinha como uma das questões propostas: “Aqui estão três doces. Há quatro crianças que desejam a sua parte. Como você pode fazer?” Os alunos dividem os três doces para quatro pessoas, mas não se preocupam se as partes são iguais ou não. Na intenção de observar o processo de divisão realizado pelo aluno avaliou-se que eles não fazem a conexão entre

$$3:4 \text{ e } \frac{3}{4}.$$

- **E4: Interpreta a fração literalmente**

Esta categoria está ligada às Questões 11a, 11b, 18a e 18b cujo significado abordado foi de Número, conforme demonstrado nas tabelas abaixo:

4ª Série:

Tabela 5.19: Distribuição do E4 nas Questões.

Significado	Número	
Representação	I	ÑI
	Q11a,11b 14	Q18a, 18b 30

8ª Série:

Tabela 5.20: Distribuição do E4 nas Questões.

Significado	Número	
Representação	I	ÑI
	Q11a,11b 48	Q18a, 18b 4

Legenda:

I - REPRESENTAÇÃO ICÔNICA ÑI – REPRESENTAÇÃO NÃO ICÔNICA

A maior quantidade de respostas apresentadas pela 4ª série, que se enquadraram nesta categoria, são semelhantes ao exemplo abaixo:

Questão 18

Represente na forma de número decimal as seguintes frações:

a) $\frac{1}{5}$

um quinto

b) $\frac{2}{10}$

dois
décimos

Figura 5.14: E4, aluno 34, 4ª série.

Isto porque os alunos que cursam a 4ª série, provavelmente, ainda não tiveram contato com números decimais, além disso, são habituados à leitura das frações, podendo ser este o motivo que os conduziu a esse tipo de erro.

Já os alunos da 8ª série apresentaram a maior quantidade de respostas dessa categoria nas Questões 11a e 11b, conforme o exemplo abaixo:

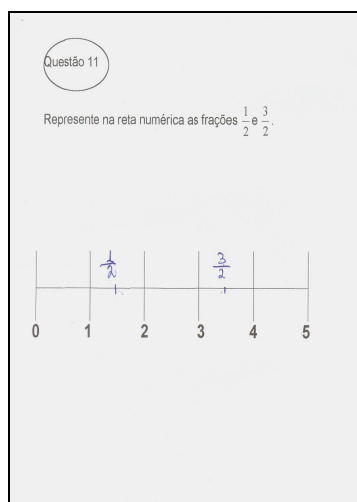


Figura 5.15: E4, aluno 6, 8ª série.

Para resolver esta questão, esses alunos provavelmente fizeram a conexão entre a leitura da fração como se lê, aprimorando a idéia que o denominador 2 representa meio, sugerindo o seguinte entendimento: $\frac{1}{2}$ significa 1 mais meio, e $\frac{3}{2}$ significa 3 mais meio, conforme podemos ver no exemplo acima.

De modo geral, independente das 4ª ou 8ª séries possuírem índices diferenciados de utilização da estratégia E4 nas variáveis icônica e não icônica, o que fica explícito, é que o significado Número foi o que obteve o maior índice de respostas errôneas.

- **E5: Desprezo da conservação da área**

Esta estratégia está ligada ao fato do aluno não ter levado em conta a conservação da área envolvida nas partes do ícone apresentado na questão 8b que abordou o significado Parte-todo com quantidade contínua e representação icônica.

Consideramos para esta estratégia a resposta $\frac{1}{7}$, a qual o aluno representa o denominador com o número total de partes divididas e o numerador com o total de partes em destaque, no caso uma parte, não levando em consideração as áreas envolvidas. Entendemos que neste caso o aluno tem a concepção Parte-todo, porém não está completamente formada.

Mostramos a seguir as ocorrências na próxima tabela:

Tabela 5.21: Distribuição do E5 na questão 8b das duas séries.

Significado		Parte-todo	
Séries	4 ^a	8 ^a	
Q.Contínua	Q8b	Q8b	
R. Icônica	34	16	

Os resultados apresentados na tabela acima e os protocolos dos alunos apontam para o fato de que ao resolver esse tipo de situação com o significado Parte-todo os alunos possivelmente fazem uso da contagem dupla da partes, isto é para identificar o denominador da fração eles contam o total de partes e para identificar o numerador da fração eles contam as partes em destaque, sem levar em conta o tamanho ou a grandeza das partes envolvidas.

A questão foi inspirada, na pesquisa de Campos (citado por NUNES, BRYANT, 1997), e os resultados que tivemos na referida questão são equivalente aos já encontrados por essa pesquisadora. Em seus estudos, Campos foi capaz de mostrar claramente que, a introdução da fração pelo modelo Parte-todo simplesmente induz os alunos em aplicar um procedimento de dupla contagem sem necessariamente entender o significado da fração. Os resultados dos estudos de Campos confirmam a suspeita de que os alunos podem usar a linguagem das frações sem compreender completamente sua natureza.

Sugerimos a partir desta constatação, que quando forem propostos exercícios dessa natureza seja levado em consideração esse tipo de variação de área (que raramente ocorre no ensino), com o objetivo de verificar se o aluno entende a relação que existe entre as partes e o todo nesse tipo de situação.

O exemplo abaixo ilustra este tipo de estratégia:

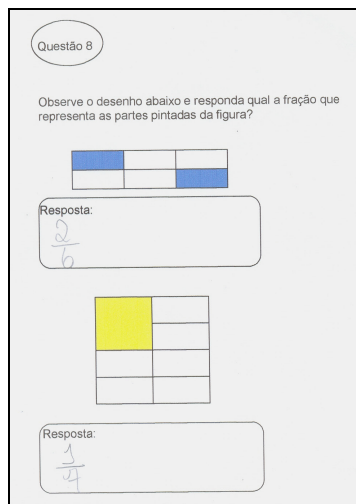


Figura 5.16: E5, aluno 7, 4ª série.

- **E6: Partição**

Estabelecemos esta estratégia ao identificar nas Questões 6c e 13, que abordaram o significado Quociente com representação icônica e não icônica respectivamente e em quantidade contínua, um número expressivo de respostas do tipo $\frac{1}{2}$, pois supomos que esse tipo de resposta possa estar ligado a situações do cotidiano ao dividir quantidades contínuas como, por exemplo, chocolates:

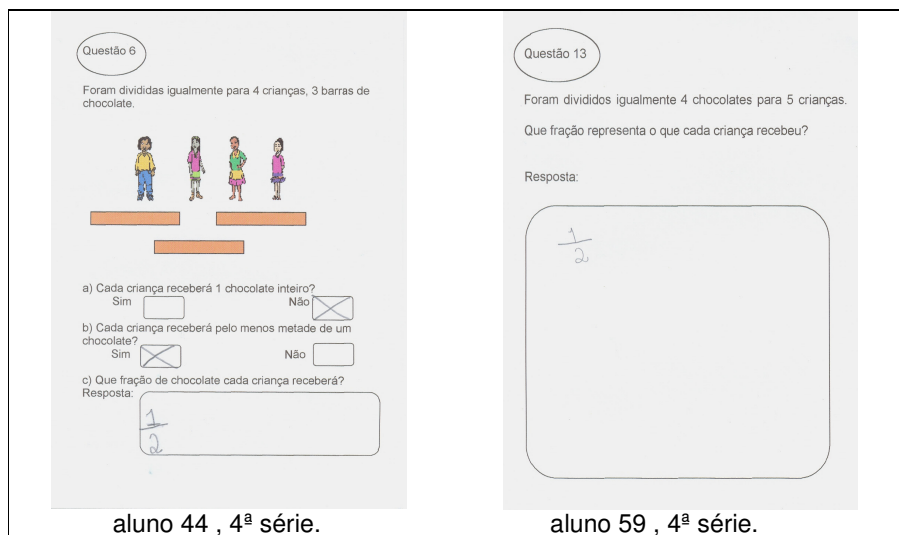


Figura 5.17. Exemplos do estratégia E6, usada por alunos da 4ª e 8ª séries.

Ao analisarmos o índice de ocorrência dessa estratégia observamos as seguintes ocorrências:

4ª Série:**Tabela 5.22:** Distribuição do E6 nas Questões.

Significado	Quociente	
	I	ÑI
Representação		
Q. Contínua	Q6c 12	Q13 11

8ª Série:**Tabela 5.23:** Distribuição do E6 nas Questões.

Significado	Quociente	
	I	ÑI
Representação		
Q. Contínua	Q6c 6	Q13 6

Legenda:

I - REPRESENTAÇÃO ICÔNICA ÑI – REPRESENTAÇÃO NÃO ICÔNICA

Baseados nessas tabelas percebemos que, não foram muitos alunos que recorreram a essa estratégia, no entanto, os índices da 4ª série são praticamente o dobro dos índices da 8ª série. Interpretamos tal resultado porque as primeiras noções de divisão trabalhadas enfatizam a noção de partir algo ao meio, como o significado quociente remete a uma divisão, os alunos utilizam o conhecimento de partir ao meio para resolver esse tipo de questão.

Nunes, Bryant (1997), descrevem que o raciocínio de partição, como dividir quantidades contínuas ao meio para distribuir, já faz parte de um raciocínio multiplicativo, que pode ser usado como conexão na representação $\frac{a}{b}$.

- **E7: Porcentagem**

Esta estratégia foi elaborada devido ao fato de ocorrerem respostas com o uso de porcentagem em 2 questões que abordaram o significado medida conforme ilustram as próximas tabelas:

4ª Série:

Tabela 5.24: Distribuição do E7 nas Questões.

Significado	Medida	
	I	ÑI
Representação		
Q. Discreta	Q17a, 17b 4	Q3 4

8ª Série:

Tabela 5.25: Distribuição do E7 nas Questões.

Significado	Medida	
	I	ÑI
Representação		
Q. Discreto	Q17a, 17b 4	Q3 7

Legenda:

I - REPRESENTAÇÃO ICÔNICA ÑI – REPRESENTAÇÃO NÃO ICÔNICA

Nas questões 17a, 17b e 3, os alunos são questionados sobre a possibilidade de chances de ocorrência de um determinado evento. Apesar de serem poucos alunos, observamos que os alunos da 8ª série apresentaram mais esta estratégia do que os alunos da 4ª série, provavelmente em função de terem visto o assunto probabilidade expressa em porcentagem nos anos anteriores e observarem que este tipo de questionamento sobre a possibilidade de ocorrência de um evento conduz a um resultado que pode ser expresso sob a forma de porcentagem. Cabe ressaltar que todos os alunos que tentaram expressar a resposta na forma de porcentagem não obtiveram sucesso, como mostram os exemplos abaixo:

Questão 3

Na escola de Pedro foi feita uma rifa e foram impressos 150 bilhetes. A mãe de Pedro comprou 20 bilhetes dessa rifa. Qual a chance da mãe de Pedro ganhar o prêmio?

Resposta:

$\frac{20}{150} = 20\%$

aluno 23, 8ª série.

Questão 17

a) Qual a chance de tirar uma carta branca nesse baralho?

Resposta: 25%

b) Qual a chance de tirar uma carta branca nesse baralho?

Resposta: 50%

c) Em qual dos dois baralhos existe maior chance de se tirar uma carta branca?

Resposta: no azul

aluno 33, 8ª série.

Figura 5.18. Exemplos da estratégia E7 usada por alunos da 4ª e 8ª séries.

- **E8: Fração tida como números sobrepostos**

A categoria E8 tem como característica principal o fato do aluno ter tratado a fração como dois números, naturais e distintos, que estão sobrepostos e separados pelo traço. Esta categoria foi utilizada para a resolução das questões que envolvem os significados Número e Operador multiplicativo, como mostram as tabelas abaixo:

4ª Série:**Tabela 5.26:** Distribuição do E8 nas questões

Significado	Número		Op. Multiplicativo Q. Contínua
	I	ÑI	ÑI
Representação			
	Q11a, 11b 34	Q18a, 18b 36	Q19 21

8ª Série:**Tabela 5.27:** Distribuição do E8 nas questões

Significado	Número		Op. Multiplicativo Q. Contínua
	I	ÑI	ÑI
Representação			
	Q11a, 11b 18	Q18a, 18b 26	Q19 20

Legenda:

I - REPRESENTAÇÃO ICÔNICA ÑI – REPRESENTAÇÃO NÃO ICÔNICA

Observamos que o maior índice de ocorrência desta estratégia foi nas Questões 18a e 18b que trata do significado Número, e que como ressaltamos anteriormente, foi o significado que obteve o maior índices de respostas errôneas, tanto na 4ª como na 8ª séries.

Neste tipo de estratégia, a resposta apresentada pelos alunos na questão 18 nos revela que estes não identificam que existe uma relação de divisão entre dois números expressos na forma $\frac{a}{b}$ e sim o numerador representando a parte inteira e o denominador a parte decimal do número. Assim, o traço que separa os

dois números da representação fracionária, serve para separar dois números inteiros, que podem ser representados trocando-se o traço pela vírgula.

Em seu estudo Bianchini (2001), obteve resultados semelhantes, porém, com alunos de 3ª série do Ensino Fundamental. Durante algumas atividades, os alunos confundiram a vírgula com o traço de fração, fazendo 1,9 igual a $\frac{1}{9}$. Os alunos pensaram que 1,9 era o mesmo que ter um inteiro dividido em nove partes e, assim, separam uma parte. Ela destacou ainda, que a troca da vírgula pelo traço de fração é um erro comum no ensino dos números decimais.

Percebemos a mesma estratégia na Questão 11, na qual os alunos representaram a fração na reta numérica, considerando que $\frac{1}{2}$ fica entre 1 e 2, e que $\frac{3}{2}$ fica entre 2 e 3, sem estabelecerem a relação de divisão necessária para entender a fração.

Como revelam os próximos exemplos:

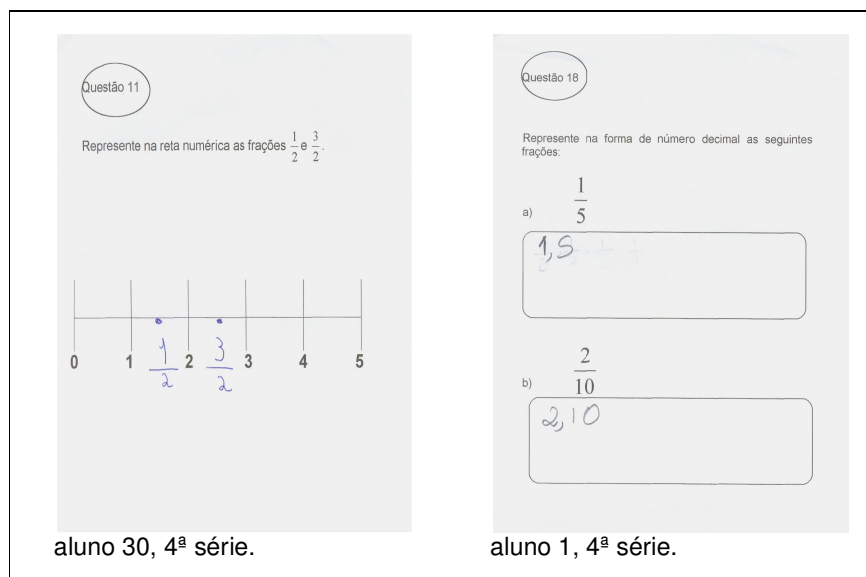


Figura 5.19. Exemplos de ocorrência da estratégia E8, usada por alunos da 4ª e 8ª séries.

Esta estratégia E8 ainda foi utilizada na Questão 19 que abordou uma situação com significado de Operador Multiplicativo e representação não icônica, onde os alunos afirmaram que $\frac{1}{2}$ é menor que $\frac{1}{4}$ conforme mostra o próximo exemplo:

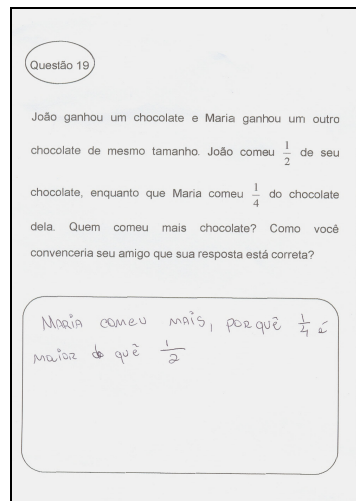


Figura 5.20: E8, aluno 48, 8ª série.

Este tipo de resposta enfatiza novamente que os alunos não compreendem corretamente os elementos envolvidos na representação fracionária, pois ao procurarem qual das duas representações era a maior se preocuparam em identificar qual dos números inteiros envolvidos nesta representação era o maior, no caso o número 4.

Percebemos então, que os alunos da 8ª série, participantes do nosso estudo, apresentaram o mesmo erro destacado por Bianchini (2001) para 3ª série, o que pode revelar uma desconexão do ensino de frações e dos números decimais.

- **E9: Utilização de Operação**

Entendemos como categoria Utilização de operação, E9, a estratégia utilizada pelo aluno que, com o intuito de revelar a resposta, procede algum tipo de algoritmo de operação (adição, subtração, divisão ou multiplicação) com os dados do problema sem, contudo acertar a resposta.

Esse tipo de procedimento ocorreu nas questões que abordaram os significados Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador Multiplicativo.

A duas tabelas a seguir apresentam as questões nas quais esse tipo de erro ocorreu, destacando as variáveis de pesquisa e o número de respostas enquadradas nessa categoria.

4ª Série:

Tabela 5.28: Distribuição do E9 nas questões

Significado	Parte-todo		Quociente		Medida		Op.Multíp	
	I	ÑI	I	ÑI	I	ÑI	I	ÑI
Q. Contínua		Q4 4	Q6c 8	Q13 9	Q5b, c 4	Q9 5	-	Q19 9
Q. Discreta	Q1 3	Q12 2	Q2b 14	Q10b 12	Q17a, b 14	Q3 14	Q14 25	Q16 42

Legenda:

I - REPRESENTAÇÃO ICÔNICA ÑI – REPRESENTAÇÃO NÃO ICÔNICA

8ª Série:

Tabela 5.29: Distribuição do E9 nas questões

Significado	Parte-todo		Quociente		Medida		Op.Multíp	
	I	ÑI	I	ÑI	I	ÑI	I	ÑI
Q. Contínua		Q4 3	Q6c 3	Q13 13	Q5b, c -	Q9 2	-	Q19 3
Q. Discreta	Q1 1	Q12 3	Q2b 10	Q10b 7	Q17a, b 31	Q3 14	Q14 43	Q16 39

Legenda:

I - REPRESENTAÇÃO ICÔNICA ÑI – REPRESENTAÇÃO NÃO ICÔNICA

Destacamos que, na 8ª série, além das ocorrências apresentadas na Tabela 5.27, constatamos 17 ocorrências da estratégia E9 na Questão 18a e 17 na Questão 8b.

Os dados das tabelas acima, nos mostram que a estratégia E9 foi abordada pelos alunos da 4ª série nos significados, Parte-todo, Quociente, Medida, e Operador Multiplicativo, este último com maior ocorrências, as quais se deram pelo maior uso de operações, do tipo adição e subtração.

Já na 8ª série a estratégia surgiu em todos os significados e, em maior ênfase, no significado Operador Multiplicativo, porém, diferentemente da 4ª série, as operações abordaram maior quantidade de multiplicações e divisões.

A utilização desta estratégia, pela 8ª série, nas questões de Operador Multiplicativo, com o uso de multiplicações e divisões, nos revela que, eles procuraram operar, porém não tiveram sucesso.

A seguir ilustramos duas ocorrências desta estratégia na 4ª e na 8ª série.

Questão 16

Gustavo tinha uma coleção de 15 soldadinhos de chumbo e deu a seu primo Fernando $\frac{3}{5}$ de sua coleção. Quantos soldadinhos de chumbo Gustavo deu a Fernando?

Cálculo:
$$\begin{array}{r} 45 \\ -53 \\ \hline 62 \end{array}$$

Resposta: Gustavo deu o Fernando 62 soldadinhos

aluno 2, 4ª série

Questão 16

Gustavo tinha uma coleção de 15 soldadinhos de chumbo e deu a seu primo Fernando $\frac{3}{5}$ de sua coleção. Quantos soldadinhos de chumbo Gustavo deu a Fernando?

Cálculo:
$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 450} \\ \underline{000} \\ 450 \\ \underline{300} \\ 150 \\ \underline{000} \\ 000 \end{array}$$

Resposta: Ele deu 0,90

aluno 35, 8ª série

Figura 5.21. Exemplos de ocorrência da estratégia E9, usada por alunos da 4ª e 8ª séries.

Na figura acima, apresentamos dois exemplos desta estratégia, na Questão 16, o primeiro ilustra a tentativa de resolução por parte do aluno 2 da 4ª

série, que fez uso de operações de adição e subtração, já no segundo exemplo, o aluno 35 da 8ª série, faz uso do algoritmo da divisão, também sem sucesso.

Como nossas análises mostram uma grande quantidade de dados, consideramos necessário proceder a uma síntese desses resultados, que será apresentada no próximo capítulo, nos subsidiando para responder à questão de pesquisa.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÃO

Esta pesquisa diagnóstica contou com a análise do desempenho e das estratégias produzidas por alunos das 4^a e 8^a séries do Ensino Fundamental de duas escolas públicas estaduais, para atingir o objetivo de identificar as concepções que esses alunos apresentam sobre fração em relação a cinco diferentes significados: Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador Multiplicativo.

Para atingir este objetivo, iniciamos nosso estudo a partir da delimitação e elaboração de nossa questão de pesquisa e na seqüência fizemos uma breve investigação sobre a fração na Matemática (Capítulo 1). Ali, descrevemos, de forma breve, a trajetória histórica de seu surgimento no campo da Matemática bem como a definição formal de suas propriedades. Em seguida, para que pudéssemos planejar e realizar este estudo, contamos com a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud, no que se refere à formação do conceito, e com as idéias teóricas de Nunes concernentes aos diferentes significados da fração (Capítulo 2).

Na continuação, abordamos a fração sob três diferentes enfoques, embora relacionados: na Educação Matemática – revisando estudos relevantes correlatos a nossa pesquisa -, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – descrevendo as recomendações contidas nesse documento - e nos Livros Didáticos referentes às 4^a e 8^a séries de quatro coleções indicadas pelos

professores das escolas onde atuamos – descrevendo como a fração foi abordada em relação a nossa classificação de significados – (Capítulo 3).

Com base nos referenciais teóricos, desenvolvemos nossa metodologia, que constou de um estudo descritivo, realizado pela elaboração de um instrumento diagnóstico, o qual foi aplicado a 65 alunos da 4^a e 58 alunos da 8^a série (capítulo 4).

Posteriormente, com os protocolos em mãos, desenvolvemos a análise quantitativa, na qual apresentamos os índices de desempenho dos alunos, e a análise qualitativa, quando estabelecemos as estratégias que eles usaram na resolução errônea das questões apresentadas (capítulo 5).

Dessa forma, neste capítulo, faremos o fechamento de nosso estudo, apresentando uma síntese dos principais resultados e as conclusões possíveis apoiadas em nossas análises.

6.1 SÍNTESE DOS PRINCIPAIS RESULTADOS

Os percentuais totais de acertos, tanto da 4^a como da 8^a séries foram baixos (30,77% e 25,86% respectivamente), com uma ligeira vantagem para 4^a série, o que demonstra uma certa homogeneidade.

Entretanto, essa homogeneidade ganha outro contorno se levarmos em consideração as estratégias dos alunos dessas séries com relação aos significados das frações, assim como com relação às variáveis de pesquisa.

- **Parte-todo**

Considerando o total de 325 itens que abordaram este significado na 4ª série, obtivemos 196 respostas (60,31%) que apresentaram a estratégia correta, o que nos permite pensar que, a maioria desses alunos, frente às situações que abordaram este significado, concebe a fração como Parte-todo.

Desse total (325), encontramos, também, 16 respostas (4,92%) identificadas na estratégia *Inversão do numerador com o denominador (E2)* e 34 respostas (10,46%) identificadas como *Desprezo da conservação da área (E5)*. Consideramos que esses dois tipos de erro estão relacionados com o raciocínio Parte-todo, porém ainda não completamente desenvolvido. Então, observamos que 75,69% das 325 respostas envolveram o raciocínio de Parte-todo, o que vem a corroborar com nossa inferência anterior de que a maioria dos alunos da 4ª série tem a concepção de fração como Parte-todo.

Obtivemos, também, 54 respostas (16,62%) que abordaram a estratégia *Parte-parte (E1)* que consideramos ser um tipo de concepção na qual o aluno só identifica as partes envolvidas na situação e 9 respostas (2,77%) que reconhecemos como *Utilização de operações (E9)*.

Já em relação aos 290 itens que abordaram este significado na 8ª série, obtivemos 118 respostas (40,68%) com a estratégia correta, 55 respostas (18,97%) que apresentaram a estratégia *Inversão do numerador com o denominador (E2)* e 16 respostas classificadas como *Desprezo da conservação da área (E5)*. Estes resultados nos permitem inferir que, tal como ocorreu com a 4ª série, a concepção de fração como Parte-todo em situações que abordaram este significado é assumida pela maioria desses alunos, embora com menos ênfase do na 4ª série.

A 8^a apresentou 76 respostas (26,20%) do tipo *Parte-parte (E1)* e 7 respostas (2,41%) do tipo *Utilização de operação (E9)*, demonstrando que a concepção *Parte-parte* nesta série é maior que na 4^a.

Com relação as variáveis, esses alunos tiveram um melhor desempenho em situação nas quais o significado *Parte-todo* foi apresentado sem a utilização de ícone, tanto com quantidades discretas como contínuas, seguido de perto pelas situações com representação icônica. Esse desempenho ocorreu de forma semelhante na 8^a série, porém com índices de acertos menores.

- **Número**

Neste significado, tanto na 4^a como na 8^a série, os alunos demonstraram que não conseguem fazer a conversão do número racional apresentado na forma fracionária para a forma decimal e conseqüentemente é possível afirmar que eles não perceberam a relação entre o numerador e o denominador da fração nas situações.

Na 4^a série, dos 260 itens abordando esse significado, os alunos apresentaram 44 respostas (16,92%) identificadas como estratégia do tipo *Interpreta a fração literalmente (E4)*, o que nos permite supor que a concepção de fração para esses alunos está ligada à forma de como se lê a fração ($\frac{1}{2}$ um meio é entendido como um mais meio).

Estes alunos apresentaram, também, 70 respostas (26,92%) classificadas como *Fração tida como números sobrepostos (E8)*, demonstrando a concepção de que não existe relação entre numerador e denominador da fração, passando

assim a idéia de sobreposição de dois números inteiros, que podem ser expressos com um traço no meio ou com uma virgula no lugar do traço ($\frac{1}{5}$ é 1,5).

Para a 8ª série, dos 232 itens que abordaram este significado, identificamos, também, a estratégia *Interpreta a fração literalmente (E4)* com 52 respostas (22,41%), a estratégia *Fração tida como número sobrepostos (E8)* com 44 respostas (18,97%). Uma outra estratégia identificada na 8ª série e que esteve ausente entre os alunos da 4ª foi a *Utilização de operações (E9)*, com 34 respostas (14,66%) desse tipo, nas quais os alunos desta série efetuaram operações entre o numerador com o denominador sem conseguir fazer a conversão correta.

Considerando as variáveis abordadas neste significado, representação icônica e não icônica, não podemos inferir nenhuma influência devido ao índice de acertos inexpressíveis nas duas séries.

Nas situações em que procuramos abordar o significado Número, os resultados nos permitem supor que os alunos, das séries estudadas, têm a concepção de fração como dois números inteiros separados por um traço, sem relação de divisão entre numerador e denominador.

- **Medida**

Dos 390 itens das situações que abordaram este significado para 4ª série, obtivemos 122 respostas (31,28%) com a estratégia correta e 14 respostas (3,59%) identificadas como estratégia *Inversão do numerador com o denominador*

(E2), o que parece que para um pouco mais de $\frac{1}{3}$ desses alunos, a fração pode ser concebida com significado de Medida.

Obtivemos, também, 144 respostas (36,92%) classificadas na estratégia *Parte-parte (E1)*. Mais uma vez esta estratégia teve destaque entre os alunos dessa série.

Ainda obtivemos, 8 respostas (2,05%) classificadas na estratégia *Porcentagem (E7)* e 37 respostas (9,49%) na estratégia *Utilização de operação (E9)*.

Neste significado, os alunos da 8ª série apresentaram a mesma tendência que os da 4ª série. Assim, 75 respostas (21,55%) foram corretas, 29 (8,33%) utilizaram a estratégia *Inversão do numerador com o denominador (E2)*, 145 (41,67%) com a estratégia *Parte-parte (E1)*. Por fim observamos 11 respostas (3,16%) como *Porcentagem (E7)* e 47 respostas (13,51%) identificadas como *Utilização de operação (E9)*.

Nas situações propostas com este significado, o desempenho dos alunos tanto da 4ª como da 8ª série foi melhor nas situações que apresentaram semelhanças com situações do tipo Parte-todo com quantidade contínua e representação icônica e quantidade discreta com representação icônica e não icônica.

Já o desempenho foi muito inferior na situação com quantidade contínua, sem apresentação de ícone, na qual, não se podia utilizar o mesmo procedimento comumente empregado nas situações com significado Parte-todo.

Isso nos leva a questionar se a concepção que os alunos utilizaram nessas situações foi efetivamente Medida ou Parte-todo, isto porque exceto na

Questão 9, os alunos poderiam se utilizar do raciocínio Parte-todo para dar conta dessas situações. Mas, na Questão 9, era necessário calcular a medida total de suco, o raciocínio Parte-todo não daria conta da situação, o que resultou em um índice de acertos menor que 7% para as duas séries.

Por fim, sentimo-nos confortáveis para conjecturar que nas situações que abordaram este significado, os alunos das duas séries tenderam a utilizar a concepção de fração Parte-parte.

- **Quociente**

Em relação aos 260 itens que abordaram este significado na 4^a série, identificamos 71 respostas (27,31%) apresentadas com a estratégia correta e 56 respostas (21,54%) com a estratégia *Inversão do Numerador com denominador (E2)*.

A estratégia E2 chamou a atenção pelo seu grande uso, nas questões que abordaram esse significado, sobretudo porque ela centrou-se nas Questões (2b e 10b), cujas respostas corretas deveriam apresentar o numerador maior que o denominador. Acreditamos que por trás desta estratégia (E2), nessas situações, esteja presente um falso teorema-em-ação.

Este dado nos leva a presumir que a concepção de fração como quociente sofre influência desse falso teorema-em-ação, já que na maioria das situações apresentadas aos alunos na escola, o numerador costuma ser menor que o denominador.

Destacamos ainda a influência do raciocínio Parte-todo nas situações de Quociente quando identificamos 43 respostas (16,54%) na estratégia *Quociente remete para o Parte-todo (E3)*. Por fim encontramos, nesta série, 23 respostas

(12,69%) com a concepção do quociente como *Partição (E6)* e 43 respostas (16,53%) que demonstram a concepção de operar com os números nestas situações, que denominamos de *Utilização de operação (E9)*

De forma semelhante, dos 232 itens da 8ª série, os alunos apresentaram 75 respostas (32,33%) com a estratégia correta e em menor número 36 respostas (15,52%) a estratégia *Inversão do numerador com denominador (E2)*. A estratégia *Quociente remete para o Parte-todo (E3)* foi identificada em 46 respostas (19,83%), *Partição (E6)* 12 respostas (5,17%) e *Utilização de operação (E9)*, em 33 respostas (14,22%), novamente com um índice superior ao da 4ª série.

Neste significado, consideramos que as variáveis de pesquisa apresentaram influências diferentes nas 4ª e 8ª séries.

Para a 4ª série, o desempenho dos alunos foi melhor nas situações apresentadas com quantidades contínuas, com ligeira vantagem para a situação sem representação icônica. Já para a 8ª série, o desempenho foi melhor nas situações com quantidades discretas com vantagem para a situação com representação icônica.

Finalizando, podemos supor a predominância da concepção de fração como Quociente nestas situações, com ligeira vantagem da 8ª série, em relação à 4ª, que sofreu uma maior influência de um “falso teorema-em-ação”, seguido da concepção do raciocínio Parte-todo, também presente nas duas séries estudadas.

- **Operador Multiplicativo**

Dos 260 itens que abordaram este significado, os alunos da 4ª série apresentaram 70 respostas (26,92%) com a estratégia correta, 21 respostas (8,08%) classificadas na estratégia *Fração tida como números sobrepostos (E8)*,

apresentando a concepção de fração como números separados por um traço. Apresentaram, também, 76 respostas (29,23%) classificadas como Utilização de operação (E9).

Os alunos da 8ª série apresentaram entre os 232 itens que abordaram este significado, 68 respostas (29,31%) respondidas acertadamente, 20 respostas (8,62%) classificadas como *Fração tida como números sobrepostos (E8)* e 85 respostas (36,64%) identificadas com a estratégia *Utilização de Operação (E9)*.

Nas situações que abordaram este significado, chama a atenção o índice da estratégia E9 (Utilização de operação), nas duas séries (29,23% e 36,64% respectivamente), o que nos leva a supor que os alunos da 4ª e em maior número os alunos da 8ª série tentaram resolver as questões propostas, fazendo uso de operações, porém, sem sucesso.

Com relação às variáveis, notamos que novamente a situação que obteve melhores resultados foi a que apresentou grande semelhança as situações que abordaram o significado Parte-todo com quantidade contínua e representação icônica (Questão 7), sendo esta a maior influência nos resultados deste significado, aumentando o índice total de acertos das duas séries. Já as demais situações parecem não ter sofrido influência em relação à forma de apresentação (icônica e não icônica) e em relação às quantidades (contínua e discreta).

Assim como no significado Quociente, a 8ª série teve uma ligeira vantagem em relação a 4ª na utilização da estratégia correta, destacando-se no emprego da estratégia E9 (Utilização de operação).

Diante do exposto, talvez tenhamos identificado que, o desempenho geral da 8ª série foi menor que o da 4ª devido aos alunos da 8ª não obterem um melhor desempenho nas situações que envolveram o significado de Número e o

significado de Operador Multiplicativo, já que em relação ao Número os alunos não conseguiram fazer a conexão da fração com o número decimal, muito menos localizar a fração na reta numérica apresentada. Em relação ao Operador Multiplicativo, percebemos que, eles tentaram utilizar a estratégia correta, mas não tiveram sucesso, apresentando assim, mais que a 4ª, um grande índice da estratégia E9 *Utilização de operação*.

Terminada a síntese dos resultados sentimo-nos aptos a responder a questão de pesquisa.

6.2 RESPOSTA À QUESTÃO DE PESQUISA

“QUAIS AS CONCEPÇÕES QUE SÃO POSSÍVEIS DE SE IDENTIFICAR COM RELAÇÃO AOS CINCO DIFERENTES SIGNIFICADOS DA FRAÇÃO (NÚMERO, PARTE-TODO, QUOCIENTE, MEDIDA E OPERADOR MULTIPLICATIVO), A PARTIR DA APLICAÇÃO DE UM ESTUDO DIAGNÓSTICO, COM ALUNOS DAS 4ª E 8ª SÉRIES DO ENSINO FUNDAMENTAL?”

Pautados nas estratégias utilizadas pelos alunos das 4ª e 8ª séries, foram identificadas várias concepções com relação aos diferentes significados.

Quais sejam: Parte-todo, Quociente, Medida, Operador Multiplicativo, Relação Parte-parte, Inversão do numerador com denominador, Quociente remete para o Parte-todo, Interpreta a fração literalmente, Desprezo da

conservação da área, Partição, Porcentagem, Fração tida como números sobrepostos e Utilização de operação.

A seguir, identificamos algumas destas concepções, como sendo mais utilizadas pelos alunos.

Parte-todo parece ser a concepção mais acentuada para os alunos, tanto da 4^a quanto da 8^a séries, sendo identificada nas situações que abordaram os significados Parte-todo, Quociente e Medida.

Uma segunda concepção muito usada foi a Parte-parte, estando presente nas situações que procuramos abordar o significado de Parte-todo e Medida.

Podemos destacar também a concepção de Quociente, que pode ter sofrido influência de um falso teorema-em-ação, identificado nas situações com significado Quociente e que está ligado à idéia da fração ter o numerador menor que o denominador.

Na 8^a série, percebemos de forma mais acentuada, a busca da concepção de Operador Multiplicativo, sem, contudo o seu domínio, resultando em tentativas de operações frustradas.

E por fim a Concepção de Fração como dois números inteiros sobrepostos, separados por um traço, que nos revelou o desconhecimento das duas séries, da relação que existe entre numerador e denominador da fração.

Considerando esse grupo de concepções e o baixo percentual de acertos nas duas séries, fica claro, para nós, a necessidade de se trabalhar com várias situações, abordando os diferentes significados, visto que as concepções que levaram a erro, parecem surgir por falta de um trabalho mais amplo do Campo Conceitual de Fração.

Portanto, concluímos que, nas séries iniciais do Ensino Fundamental, devam ser trabalhadas, situações que abordem os significados, Parte-todo, Medida e Quociente, visto que, estes alunos possuem apenas o conceito de número Natural. Enquanto que a partir da 5^a série, do mesmo nível de ensino, sejam explorados também os significados Número e Operador Multiplicativo, tendo em vista, a construção dos números racionais, que começam a ocorrer a partir dessa série.

6.3 SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Consideramos que, a realização deste estudo diagnóstico, possa servir como um ponto de partida para futuras pesquisas de intervenção.

Desta forma, destacaremos duas sugestões de pesquisa com intervenção no Ensino Fundamental.

A primeira sugestão de pesquisa seria desenvolver uma seqüência de ensino para a introdução do ensino de fração na 3^a série do Ensino Fundamental. Essa seqüência teria como abordagem três significados da fração: Quociente, Parte-todo e Medida.

Escolheríamos esses três significados por entendermos, como em nossa conclusão, que eles estão mais próximos da abordagem dos conceitos matemáticos de número Natural.

Estes três significados seriam abordados em várias situações abordando as variáveis de quantidade e representação.

Em relação ao significado Quociente, este poderia ser introduzido por meio de situações ligadas ao cotidiano do aluno, como dividir chocolates, balas, figurinhas, etc).

Já o significado Parte-todo poderia ser abordado por meio de situações que, também, envolvessem a noção de área.

O significado Medida, com situações, de composição de um todo, poderiam introduzir a noção de operação embasada na adição.

A segunda sugestão de pesquisa seria, desenvolver uma seqüência de ensino para os alunos de 5^a série. Nessa etapa escolar a fração seria retomada, abordando os três significados já citados, porém, abordando situações com diferentes níveis de complexidade ao passo que seria iniciada a abordagem dos significados, Número e Operador multiplicativo, com o objetivo de levar o aluno a perceber a fração no campo dos números racionais.

Essas pesquisas poderiam ser avaliadas fazendo-se comparações entre o grupo experimental (alunos integrante da intervenção) e o grupo controle (alunos que não participariam da intervenção), com o intuito de verificar avanços, no aprendizado, como também, o de perceber quais significados seriam mais pertinentes de serem abordados nestas séries.

CAPÍTULO VII

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRINI, A. e Vasconcellos M. J. **Praticando Matemática**. Editora do Brasil, 2002

ÁVILA, G. **Introdução à análise Matemática**. 2ª ed. rev. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

BEHR, M. J. et al. Rational number, ratio, and proportion. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan, 1983. p. 296-333.

BEZERRA, F. J. **Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações**: uma abordagem criativa para a sala de aula. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

BIANCHINI, B.L. **Estudo sobre a aplicação de uma seqüência didática para o ensino dos números decimais**. Tese (Doutorado em Psicologia da Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, DF, 1997.

_____, Ministério da Educação e do Desporto. **Sistema Nacional de Avaliação Básica**. Brasília, DF, 2002.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didatique des Mathématiques**. V7, nº 2, pp 33 – 116. Grenoble, 1986.

CAMPOS, T. et al. (1995), **Lógica das equivalências**: relatório de pesquisa. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, [19--]. Não publicada

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1998.

CISCAR, S. L.; GARCÍA, M. S. (coord). **Fraciones**: la relacion parte/todo. Madrid: Editorial Sintesis, 1988.

DANTE, L. R. **Matemática**. Editora Ática, 2001

DAVID, M. M. M. S.; FONSECA, M. C. F. R. Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária. **Presença Pedagógica**, Minas Gerais, v. 3, n. 14, mar./abr.1997.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: Educ, 1999. p. 155-196.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. 3ª ed. Vol 1, 1997. Livros Técnicos e Científicos Editora.

IFRAH, G. **Os números**: a história de uma grande invenção. Tradução de Stella M. de Freitas Senra. 8 ed. São Paulo: Globo, 1996.

JAKUBOVIC, J. e LELLIS, M. **Matemática na medida certa**. Editora Scipione, 1999

KERSLAKE, D. **Fractions: children's strategies and errors**: a report of the strategies and errors in Secondary Mathematics Project. Windsor: NFER-Nelson, 1986.

KIEREN, T. E. Number and measurement: **mathematical, cognitive and instrucional fundaments of rational number**, Columbus, OHERIC/SMEA, p. 101-144, 1976.

_____. Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: J. HIEBERT, J.; BEHR, M. (eds.): **Number concepts and operations in the Middle Grades**. New Jersey: Erlbaum, 1988. p. 162-80.

_____. Multiple views of multiplicative structures. In: HAREL, G.; CONFREY, J. (eds.): **The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics**. New York: State University of New York Press. 1994. p. 389-400.

MACK, N. K. **Learning rational numbers with understanding**: the case of informal knowledge. In: T. P. Carpenter; E. Fennema, and T.A. 1993.

MAGINA, S. et al. **Repensando adição e subtração**. São Paulo: PROEM, 2001.

MERLINI, V.L. et. al. **Fração: o significado quociente para professores e estudantes** – um estudo comparativo. In: V CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – CIBEM. Lisboa. 2005. CD-ROM.

NUNES; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T. et al. **Introdução à Educação Matemática**: os números e as operações numéricas. São Paulo: Proem, 2001.

_____ et al. **The effect of situations on children's understanding of fractions**. Trabalho apresentado à British Society for Research on the Learning of Mathematics, Oxford, June, 2003.

OHLSSON, S. Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. **Numbers concepts and operations in the middle grades**. Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 1989. p. 53-92.

POTHIER, Y.; SAWADA, D. Partitioning: an approach to fractions. In: **Arithmetic Teacher**, v. 38, p. 12-16, 1990.

PROEM. **Uma análise da construção do conceito de fração**. Coordenadora: Campos, T.N. e Orientadora: D'Ambrósio, B. 1989.

RUDIO, F, V. **Introdução ao Projeto de Pesquisa Científica**. Petrópolis: Vozes 1995.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental. Dissertação a ser defendida (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SANTOS, S. S. **A formação do professor não especialista em conceitos elementares do bloco tratamento da informação**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

SAEB 2001. **Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica**. Brasília, 2002.

SILVA, M. J. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

SOSSO, J. **Convivendo com a Matemática**. Atual Editora, 2000

TINOCO, L. A. A.; LOPES, M. L. Frações: dos resultados de pesquisa à prática em sala de aula. In: **A Educação Matemática em Revista-SBEM**, n. 2, p. 13-18, 1º sem. 1994.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.) **Acquisition of Mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press Inc., 1983. p. 127-174.

_____. Multiplicative structures. In: HIEBERT, H.; BEHR, M. (Eds.). **Research agenda in Mathematics Education**: number concepts and operations in the Middle Grades. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 141-161.

_____. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 23, 133-170, 1990.

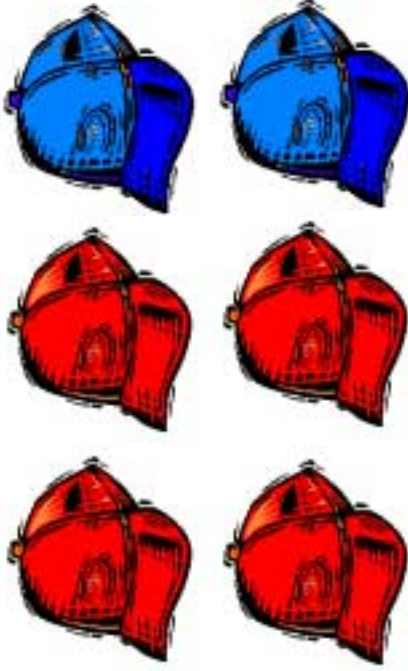
_____. Teoria dos campos conceituais. In: NASSER, L. (Ed.). 1º Seminário Internacional de Educação Matemática. **Anais...** Rio de Janeiro: Seminário Internacional de Educação Matemática, 1993. p. 1-26.

Anexo 1

O INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO

Questão 1

Numa loja de presentes há 4 bonés vermelhos e 2 bonés azuis de mesmo tamanho. Que fração representa a quantidade de bonés azuis em relação ao total de bonés?



Resposta:

Questão 10

Foram divididas igualmente 8 bolas de futebol de mesmo tamanho para 4 crianças.

a) Quantas bolas de futebol cada criança ganhará?

Resposta:

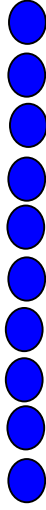
b) Que fração representa essa divisão?

Resposta:

Questão 2

Tenho 10 bolinhas de gude e vou dividir igualmente para 5

crianças.



a) Quantas bolinhas cada criança ganhará?

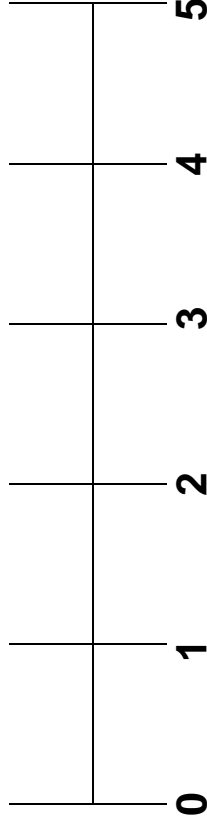
Resposta:

b) Que fração representa esta divisão?

Resposta:

Questão 11

Represente na reta numérica as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$.



Questão 3

Na escola de Pedro foi feita uma rifa e foram impressos 150 bilhetes. A mãe de Pedro comprou 20 bilhetes dessa rifa. Qual a chance da mãe de Pedro ganhar o prêmio?

Resposta:

Questão 12

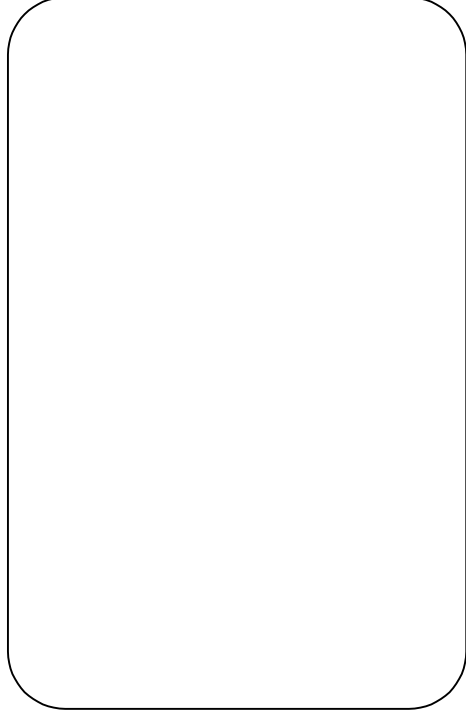
Numa loja de brinquedos havia 6 bonecas iguais. Maria comprou 2 dessas bonecas para presentear suas sobrinhas. Que fração representa as bonecas que Maria comprou em relação ao total de bonecas da loja?

Resposta:

Questão 4

Isabelle ganhou uma barra de chocolate, partiu em 5 partes iguais e deu 2 partes ao André. Que fração representa a parte que André recebeu?

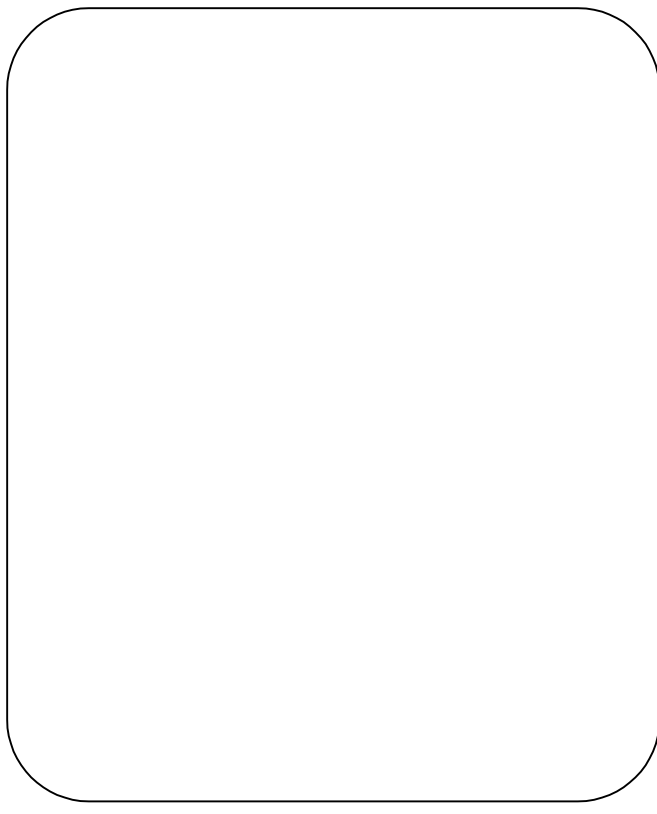
Resposta:



Questão 13

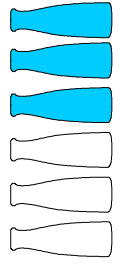
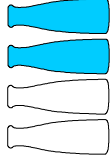
Foram divididos igualmente 4 chocolates para 5 crianças. Que fração representa o que cada criança recebeu?

Resposta:



Questão 5

A mistura de tinta vai ter a mesma cor na segunda e na terça-feira?

Segunda-feira	Terça-feira
	

Sim

Não

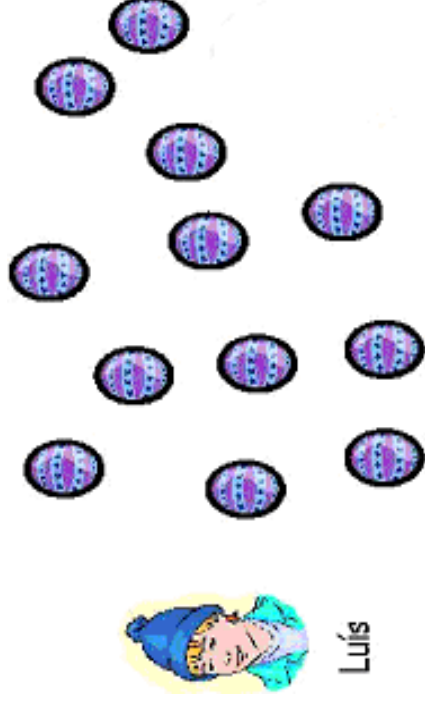
Que fração representa a quantidade de tinta azul em relação à mistura das tintas azul e branca

b) na segunda-feira?

c) E na terça-feira?

Questão 14

Observe a coleção de bolinhas abaixo:



Luís

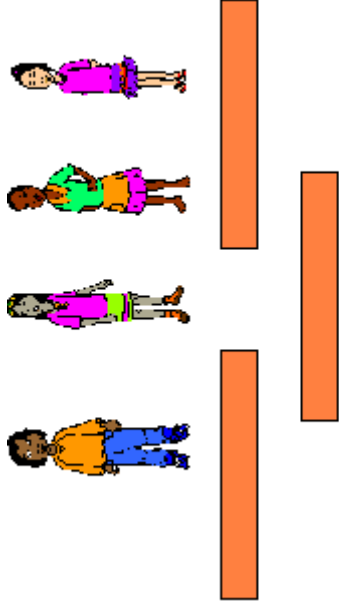
Luís ganhou $\frac{2}{3}$ das bolinhas de gude desta coleção.

Quantas bolinhas ele ganhou?

Resposta:

Questão 6

Foram divididas igualmente para 4 crianças, 3 barras de chocolate.



a) Cada criança receberá 1 chocolate inteiro?

Sim

Não

b) Cada criança receberá pelo menos metade de um chocolate?

Sim

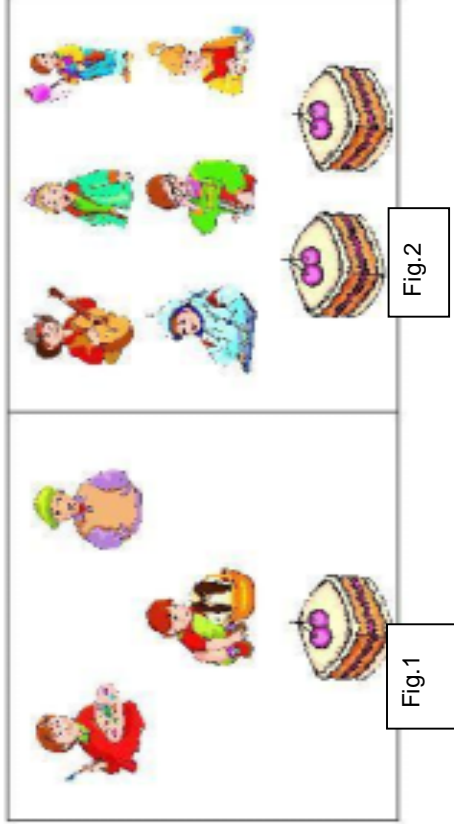
Não

c) Que fração de chocolate cada criança receberá?

Resposta:

Questão 15

Um bolo foi dividido igualmente para 3 crianças, e 2 bolos do mesmo tamanho foram divididos igualmente para 6 crianças.



a) As 9 crianças comerão a mesma quantidade de bolo?

Sim

Não

Questão 7

Maria ganhou um chocolate e comeu $\frac{2}{5}$. Pinte a quantidade de chocolate que Maria comeu.

Questão 16

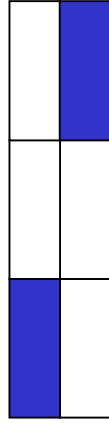
Gustavo tinha uma coleção de 15 soldadinhos de chumbo e deu a seu primo Fernando $\frac{3}{5}$ de sua coleção. Quantos soldadinhos de chumbo Gustavo deu a Fernando?

Cálculo:

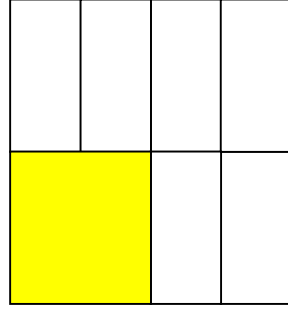
Resposta:

Questão 8

Observe o desenho abaixo e responda qual a fração que representa as partes pintadas da figura?

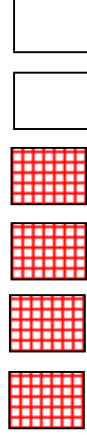


Resposta:



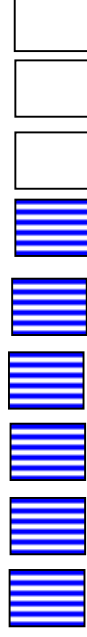
Resposta:

Questão 17



a) Qual a chance de tirar uma carta branca nesse baralho?

Resposta:



b) Qual a chance de tirar uma carta branca nesse baralho?

Resposta:

c) Em qual dos dois baralhos existe maior chance de se tirar uma carta branca?

Resposta:

Questão 9

Para fazer uma certa quantidade de suco são necessários 2 medidas de concentrado de laranja para 5 medidas de água. Que fração representa a medida de concentrado de laranja em relação ao total de suco?

Resposta:

Questão 18

Represente na forma de número decimal as seguintes frações:

a) $1 \frac{1}{5}$

a)

b) $2 \frac{2}{10}$

b)

Questão 19

João ganhou um chocolate e Maria ganhou um outro chocolate de mesmo tamanho. João comeu $\frac{1}{2}$ de seu chocolate, enquanto que Maria comeu $\frac{1}{4}$ do chocolate dela. Quem comeu mais chocolate? Como você convenceria seu amigo que sua resposta está correta?

