

MARCELO CESTARI TERRA LELLIS

**SOBRE O CONHECIMENTO MATEMÁTICO DO
PROFESSOR DE MATEMÁTICA**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como
exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação
da Professora Doutora Tânia Mendonça Campos*

**PUC/SP
SÃO PAULO
2002**

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ Local e Data: _____

Registramos nossa dívida em relação aos educadores que contribuíram mais diretamente para que adquiríssemos algum conhecimento na área de educação matemática. Entre eles incluiríamos nossos alunos, se não fossem tão numerosos. Citamos os demais, na ordem em que surgiram em nossa vida:

Renate Watanabe
Luiz Márcio Pereira Imenes
Maria do Carmo Domite
Rômulo Campos Lins
Maria Amábile Mansutti
Dulce Satiko Onaga
Antonio José Lopes
José Jakubovic
Nilson José Machado
Maria Cristina S. de A. Maranhão
Ubiratan D'Ambrosio
Tânia Maria Mendonça Campos

Resumo

Esta dissertação trata da natureza do conhecimento matemático dos professores de matemática do ensino fundamental e médio.

De início, um exame de estudos acadêmicos sugere que esse conhecimento contradiz as idéias atuais da Educação Matemática. Ele tem falhas que dependem mais de concepções sobre a Matemática e/ou seu ensino do que da aquisição de mais conteúdos matemáticos.

Para buscar um melhor conhecimento matemático para o professor usou-se como referencial teórico a noção de que o conhecimento como um todo pode ser visto como uma rede de significados – uma noção já explorada em pesquisas brasileiras sobre educação.

Essa noção conduz a uma forma de conhecer matemática em harmonia com as concepções da educação matemática. Trata-se de uma forma de conhecer que inclui em larga medida o conhecimento *sobre* matemática. No final, considerou-se como essa maneira de conhecer pode ser implementada nos cursos de formação de professores.

Palavras-chave: conhecimento matemático de professores de matemática, significados matemáticos, formação de professores de matemática, conhecimento *sobre* matemática.

Abstract

This dissertation concerns the nature of mathematical knowledge of middle and high school mathematics teachers.

In the beginning, a survey of academic studies suggests that their knowledge contradicts the present conceptions of Mathematics Education. It has gaps that depends on conceptions about Mathematics and/or about the learning of Mathematics, rather than on knowing more mathematics contents.

To search a better knowledge of Mathematics for the teachers it was used a theoretical framework based on the idea that the knowledge as a whole can be regarded as a web of meanings – a notion that has already been explored in Brazilian researches about education.

From this notion it was derived a way of knowing Mathematics that is in harmony with the conceptions of Mathematics Education. This way of knowing includes a great deal of knowledge *about* Mathematics. In the end, it was considered how this way of knowing can be implemented in the preparation of teachers.

Key-Words: mathematical knowledge of teachers of Mathematics, mathematics meanings, preparation of mathematics teachers, knowledge *about* mathematics.

Sumário

Introdução	7
Capítulo 1 – Uma visão dos professores e de seu conhecimento matemático	12
1.1 Índícios e interpretações	
1.1.1 Deficiências?	
1.1.2 Por quês	
1.1.3 O papel da semelhança de triângulos	
1.1.4 O significado da “coisa”	
1.1.5 A função das funções	
1.1.6 Matemática e sociedade	
1.1.7 Algumas interpretações	
1.2 A formação dos professores	
1.2.1 Condições materiais	
1.2.2 Modos de formação	
1.2.3 A formação euclidiana	
1.2.4 A formação tecnicista	
1.3 Pausa para balanço	
Capítulo 2 – Conhecer, conhecer matemática	36
2.1 Formas de conhecer	
2.2 Redes e compreensão	
2.3 Os significados em matemática	
2.3.1 Um caso de teoria formalizada	
2.3.2 O caso dos números atômicos	
2.3.3 O caso do logaritmo	
2.3.4 O caso do teorema do valor médio	

- 2.3.5 Algumas observações sobre os significados matemáticos
- 2.4 Conhecimento do professor: o problema

Capítulo 3 – A forma de conhecer do professor **62**

3.1 As características desejáveis

- 3.1.1 A tarefa do professor e sua compreensão de matemática
- 3.1.2 A questão da cidadania
- 3.1.3 A tarefa do professor e a mobilização de seus saberes
- 3.1.4 Considerações complementares

3.2 A construção das características desejáveis

- 3.2.1 Observações sobre disciplinas e projetos de cursos
- 3.2.2 Observações sobre métodos de ensino e aprendizagem
- 3.2.3 Uma possibilidade pouco explorada: os textos paramatemáticos

Balanço final **101**

Bibliografia **105**

Introdução

Este trabalho se ocupa do professor de matemática formado nos cursos de licenciatura, que ensina na escola fundamental e média de nosso país. Sempre que nos referirmos genericamente a um professor, estaremos pensando em um membro do grupo descrito.

O trabalho, portanto, faz parte da grande quantidade de estudos em torno do professor, que vem surgindo ultimamente. Em uma palestra recente, a pesquisadora Maria do Carmo Domite, professora na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, esboçou uma visão geral desse campo de investigação [1]. Da apresentação de Domite, destacamos os seguintes elementos:

- A investigação tem se intensificado em conexão com as atuais transformações curriculares da escola básica, entre as quais estão, no Brasil, os *Parâmetros Curriculares Nacionais* [2]. No caso da matemática, um marco em termos de mudança é a proposta norte-americana de 1989, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* [3].
- Os estudos buscam o perfil profissional adequado a uma nova visão de ensino, examinando o conhecimento didático do professor, sua conduta em sala de aula, os processos pelos quais muda sua atuação, suas concepções sobre matemática e vários outros aspectos, com emprego de modalidades de pesquisa variadas.
- Apesar da diversidade desses trabalhos, seus autores costumam se ocupar apenas do professor, chegando a esquecer o educando.

Situamos este trabalho entre os estudos sobre formação do professor que discutem a natureza de seu conhecimento matemático. Em certas situações, fomos levados a examinar esse conhecimento em função dos alunos e da didática. Acreditamos, portanto, não ter omitido o educando completamente.

A escolha do tema decorreu de uma longa convivência com professores, que atravessa décadas e se efetivou em vários níveis. Como qualquer adulto

escolarizado, aprendemos com vários professores. Mais tarde, tornamo-nos um deles, após estudos universitários na área de matemática,. Trabalhamos na escola fundamental, média e, depois, em cursos de licenciatura. Com o tempo, passamos a orientar professores. Finalmente, dedicamo-nos à elaboração de livros didáticos, o que nos levou a proferir palestras e dialogar com colegas do país todo, favorecendo uma visão abrangente e plural do professorado.

Pareceu-nos ser uma trajetória que favoreceria um trabalho de reflexão sobre o professorado, ainda mais porque, ao longo do tempo, contamos com vários mestres, muitos deles também amigos e colegas, com quem pudemos discutir e aprender, conforme reconhecemos na nota inicial deste trabalho. Entre os mestres, figuram nossos alunos que sempre nos ensinaram algo sobre a tarefa do professor.

Por muito tempo acumulamos observações informais sobre o professorado, envolvendo acertos e erros, buscas e inquietações. Nos últimos anos, diante da tarefa de explicar nossas escolhas e posturas nos livros didáticos de que somos co-autores, atraiu nossa atenção certo descompasso entre o conhecimento matemático do professor e sua tarefa de ensinar matemática. Consideramos que havia um problema de conhecimento dificultando a adoção de métodos pedagógicos adequados e levando a uma gestão de sala de aula ineficaz, em termos de aprendizado dos alunos. Sob certos pontos de vista, poderíamos afirmar que muitos professores de matemática ignoravam a essência da matemática. Paradoxalmente, até mesmo colegas que dispunham de respeitável cabedal de saberes matemáticos, manifestavam indícios desse problema.

Aparentemente, eram inadequadas a formação do professor e suas concepções sobre matemática, ao menos para as tarefas do ensino. Um ponto de vista similar já era apresentado em 1993 por Beatriz D'Ambrósio, professora na área de educação matemática¹ em universidades norte-americanas. Em conseqüência, ela propunha a busca de modificações em relação aos atuais cursos de licenciatura:

¹ A expressão educação matemática pode se referir simplesmente ao aprendizado de matemática de crianças, jovens e adultos. Entretanto, nas últimas décadas, passou a designar uma área de pesquisa e produção de conhecimento sobre como se ensina e se aprende matemática. Neste trabalho, sempre citaremos a educação matemática com esse sentido.

O futuro professor de Matemática deve aprender novas idéias matemáticas de forma alternativa. O seu aprendizado de Cálculo, Álgebra, Probabilidade, Estatística e Geometria, no ensino superior, deve visar à investigação, à resolução de problemas, às aplicações, assim como a uma análise, histórica, sociológica e política do desenvolvimento da disciplina. [4]

O presente trabalho foi motivado por percepções como essa, que procuramos desenvolver e fundamentar. Havíamos intuído um problema, um conhecimento inadequado. Tentaríamos solucioná-lo caracterizando o conhecimento adequado. Fixamos assim o ponto de partida e o objetivo, mas restava encontrar o percurso que ao menos nos aproximaria da meta.

Inicialmente era preciso apresentar evidências de que existia o problema, porque só tínhamos percepções subjetivas. Esse foi o tema do capítulo 1, etapa que procuramos cumprir por meio de uma pesquisa bibliográfica na literatura da educação matemática.

Apresentamos trabalhos que direta ou indiretamente abordavam a atuação dos docentes e alguns depoimentos, que indicavam dificuldades no conhecimento matemático do professores. Usamos ainda estudos mais globais, investigações sobre os modos de ensino de matemática, os quais, ao mostrarem como os professores adquirem seus saberes, reforçaram as primeiras evidências.

Entretanto, ainda não víamos o problema explicitado. De fato, operávamos sob a sombra de uma contradição. Referíamos-nos a uma inadequação de conhecimento que permanecia mesmo quando o sujeito exibia bons conhecimentos matemáticos. Era claro que deveríamos esclarecer o que entendíamos por “conhecer matemática”, o que constituiu o tema do capítulo 2.

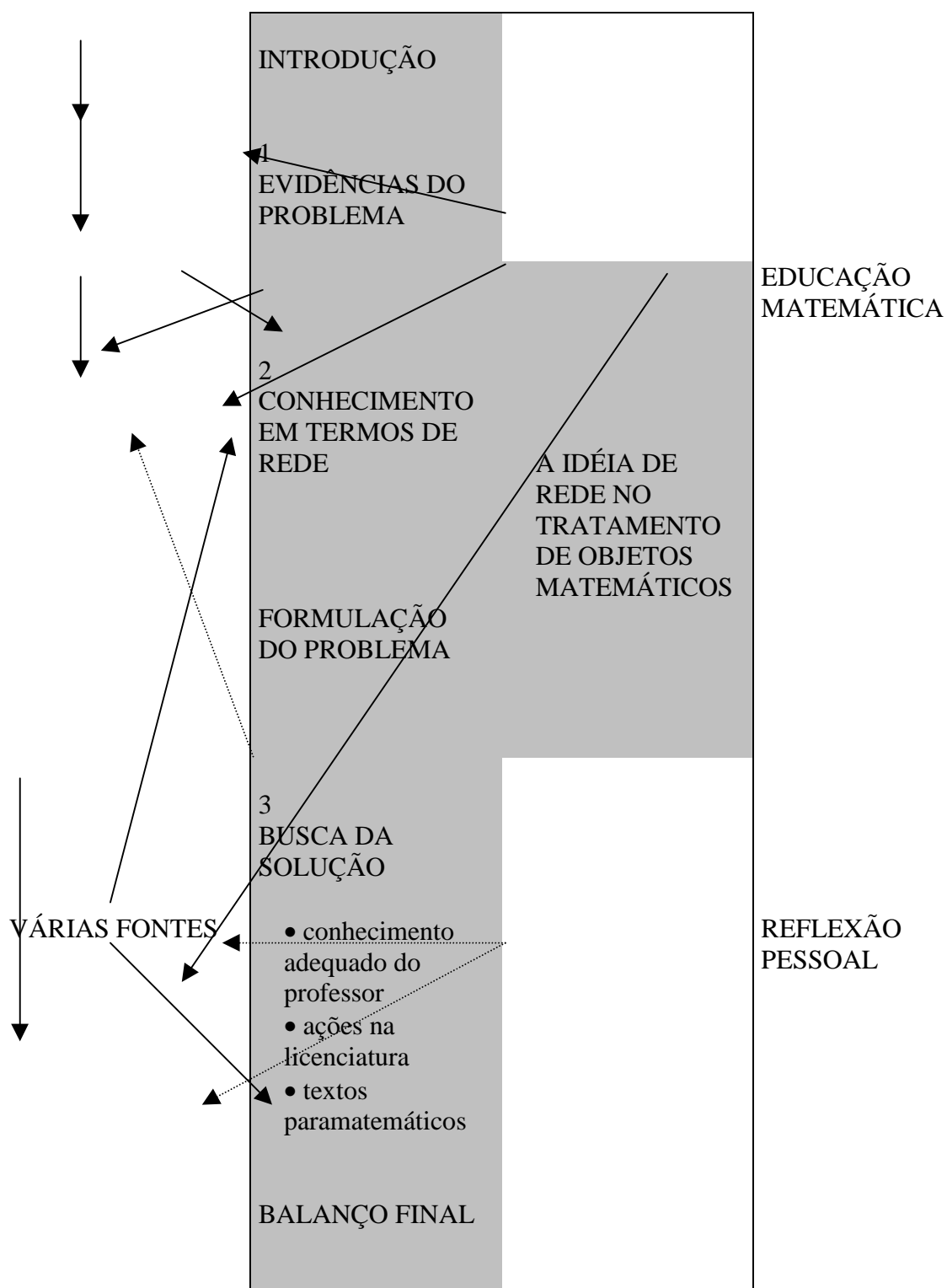
Partimos da noção comum de que “conhecer” implica compreender e mobilizar saberes. (Lembramos que há outra maneira corrente de ver o “conhecer”, segundo a qual a mobilização dos saberes dependeria da competência ou da inteligência e não do conhecimento. Tal noção não foi usada neste trabalho.)

Buscando caracterizar a “compreensão”, encontramos na concepção de conhecimento em termos de rede o referencial que nortearia o restante deste trabalho. Trata-se de idéia já elaborada na literatura nacional sobre educação, o que nos permitiu indicar seus elementos fundamentais. Aplicamos esse referencial ao exame de alguns objetos matemáticos, procurando mostrar que ele propicia uma outra maneira de adquirir saberes matemáticos, bem diferente daquela prevista pelos modos de ensino e concepções vigentes. Além disso, ele nos permitiu explicitar o problema inicial, apresentando-o como carência de compreensão dos saberes matemáticos.

Formulado o problema, buscamos indicar sua resolução, o que tentamos realizar no capítulo 3, em dois estágios. Primeiro, apontando características desejáveis na forma de conhecer matemática do professor. Nesse ponto, desenvolvemos uma reflexão pessoal, partindo das atribuições do professor, que consideramos consensuais na sociedade atual. Acabamos por levantar características que se apoiam fortemente no referencial adotado, isto é, na idéia de conhecimento em termos de rede. No segundo estágio, estudamos meios para viabilizar a formação correspondente à maneira de conhecer delineada. Tomamos como base uma pesquisa bibliográfica, apresentando relatos da área de educação matemática, referentes a reformas em cursos de licenciatura, além de algumas idéias consensuais sobre métodos de ensino. Acrescentamos uma contribuição pessoal ao chamar a atenção para os textos paramatemáticos.

Encerramos o trabalho com breves considerações sobre a forma de conhecer matemática do professor e seu perfil profissional e sobre a possibilidade de transformar seu modo de formação.

O diagrama da página seguinte apresenta as etapas do trabalho com seus conteúdos destacados, bem como as fontes de informação utilizadas em cada etapa.



Capítulo 1

Uma visão dos professores e seu conhecimento matemático

Neste capítulo buscamos:

(i) apresentar indícios do estado atual do conhecimento matemático do professor, colhidos na maior parte em trabalhos acadêmicos que, direta ou indiretamente, versam sobre sua atuação docente;

(ii) apontar elementos problemáticos do conhecimento em questão, sugeridos pelos indícios apresentados;

(iii) examinar brevemente a formação do professor e sua relação com os elementos problemáticos, com base em estudos da educação matemática.

Convém esclarecer desde já que ao procurar indícios que nos parecem negativos no conhecimento do professor, não o estamos tomando como alvo de crítica. Apenas analisamos concepções, o que de forma alguma implica juízos sobre pessoas. Na verdade, nossa experiência indica que a grande maioria dos professores exerce sua profissão da melhor forma possível, de acordo com as condições em que se forma e atua.

1.1 Indícios e interpretações

Há quase duas décadas, um estudo de caso pioneiro, conduzido pela pesquisadora norte-americana Alba Thompson, apontou forte correlação entre as concepções do professor sobre a matemática e sua atuação na sala de aula [5].

Inspirados nesse ponto de vista, buscamos detectar como os professores vêem os objetos matemáticos que fazem parte do ensino e, de forma geral, como concebem o ensino de matemática.

Tais concepções nos foram reveladas muitas vezes, ainda que de forma involuntária, no curso de vários contatos mantidos com professores. Entretanto,

preferimos reencontrar as mesmas idéias em textos já publicados, nos quais professores externam suas opiniões. Destacamos as idéias, tecemos breves comentários e, no final, propomos uma primeira interpretação.

1.1.1 Deficiências?

Em 1992, chamou nossa atenção um artigo sobre ensino de matemática, publicado pela Revista do Professor de Matemática, especialmente porque seu autor evidenciou nesse e em outros trabalhos “sólidos conhecimentos da disciplina”, além de boa experiência como professor do ensino fundamental [6].

O autor afirmava ser

...muito comum o aluno chegar à 5ª série do 1º grau (atual ensino fundamental) apresentando inúmeras deficiências na aprendizagem de conteúdos básicos de Matemática,

opinião que parece inteiramente razoável. Logo em seguida, ele apontava uma das deficiências: a aprendizagem do máximo divisor comum (mdc), conceito que, a seu juízo, deveria ter sido fundamentado em anos anteriores, especialmente na 4ª série.

A partir da segunda afirmação, o texto nos incomodou. Não seria forte demais tomar a ignorância do mdc, conceito de raras aplicações no ensino fundamental, aparentemente de pouco interesse cognitivo, como deficiência? Por que considerá-lo conteúdo básico? Básico para quê? Seria adequado, apesar do costume de décadas, fundamentar o mdc na 4ª série? Que sentido crianças de nove anos de idade podem encontrar nesse conceito?

Passados dez anos, quem sabe sob influência dos *Parâmetros Curriculares Nacionais* [2], muitas escolas eliminaram o mdc de suas programações sem qualquer inconveniente. Na verdade, não se consegue tomá-lo como tópico essencial para a 5ª série ou qualquer outra do ensino fundamental. Aparentemente, o articulista o superestimava, considerando os conteúdos então estabelecidos da mesma forma com que olhamos os acidentes geográficos,

objetos eternos e inevitáveis, cuja localização e adequação à paisagem não faz sentido contestar.

Julgamos ainda que havia uma certa inflexibilidade em sua visão do conhecimento matemático. Talvez devêssemos dizer também falta de espírito crítico. Em vez de se considerar o valor educativo, social ou cognitivo do tema matemático – se isso tivesse ocorrido o termo deficiência não seria usado – o autor levava em conta apenas a necessidade de ensiná-lo, de cumprir um programa. Essa falta de crítica sugere uma forma de conhecer matemática voltada para dentro da disciplina, à qual interessam pouco suas relações com a sociedade e com a educação dos jovens.

Existe a possibilidade de que atualmente o professor, autor do texto criticado, tenha opiniões diferentes. Já nos referimos a suas qualidades e lembramos que nesse mesmo artigo deu mostras de sensibilidade pedagógica. Basta dizer que lamentava o fato de muitos alunos saberem calcular o mdc, ignorando o significado da própria abreviatura mdc.

1.1.2 Por quês

Aproveitamos em seguida algumas informações provenientes de um estudo cujos resultados foram publicados em 1993. Trata-se de um trabalho de Sérgio Lorenzato, então professor da Universidade Estadual de Campinas, que por muitos anos trabalhou com professores de matemática em cursos de capacitação [7].

O autor buscava avaliar o conhecimento do professor relativo a vários “por quês?” matemáticos, os quais têm chances de surgir naturalmente em sala de aula. Por exemplo:

- Por que não dividir por zero?
- Por que a área do losango é dada pela fórmula $A = \frac{d \cdot D}{2}$?
- Por que, na divisão de duas frações, multiplica-se a primeira pelo inverso da segunda?

Os professores eram instruídos a responder às questões como se estivessem se dirigindo a seus alunos.

A pesquisa abrangeu 1032 professores de 5^a a 8^a séries e 156 professores de ensino médio, provenientes do Brasil e de várias outras nações latino-americanas. Os espantosos resultados parecem indicar tendências que independem de fronteiras e de condições de vida dos mestres. No conjunto das questões, houve apenas 5% de acertos. Provavelmente, mesmo se os alunos insistissem no “por quê”, os professores não saberiam satisfazê-los, por desconhecerem boa parte dos significados daquilo que ensinam.

Neste caso, ao contrário de nosso primeiro exemplo, tudo indica a carência de “sólidos conhecimentos da disciplina”, que seriam causados em grande parte por deficiências nos cursos de licenciatura. Pelo menos esta é a conclusão de Lorenzato, que pode ser reforçada a partir de outras fontes, como veremos adiante.

No entanto, merece reflexão um outro fator, mesmo que explique apenas uma pequena parte dos resultados. Na escola de elite, dominante em nosso país antes da década de 1970, quando havia relativamente poucos professores atuando no final do ensino fundamental e no médio, os quais eram tidos como bons conhecedores da disciplina, certos “por quês” também não eram contemplados, como nossa própria vida estudantil testemunha. Quase ninguém se propunha a justificar o que ocorria na divisão de frações ou por que o produto de dois números negativos é um número positivo. Nesse contexto, lembramo-nos de uma frase típica de alguns dos professores de antigamente: definições não se discutem, diziam, informando sucintamente que o jogo matemático só começa após a aceitação de algumas regras, mesmo que arbitrárias, e que existem por quês que não devemos procurar.

Um motivo plausível para tal atitude seria a inexistência de recursos para algumas explicações fora do quadro formal. Ou seja, certos fatos poderiam ser demonstrados com rigor, mas os jovens alunos não entenderiam a argumentação. Nessas condições, seria preciso que os professores usassem bons argumentos

para convencer os alunos. Acontece, porém, que justamente os “bons argumentos” faltavam aos professores da época.

As considerações anteriores sugerem que mesmo a chamada boa formação matemática pode ser insuficiente para favorecer a compreensão de alunos, pois nem sempre visa esclarecer determinados “por quês” de maneira adequada a quem aprende.

1.1.3 O papel da semelhança de triângulos

Um artigo de Maria José Loureiro Briguenti, baseado em sua tese de doutorado em educação matemática, relatou a elaboração de uma proposta diferente das tradicionais para a aprendizagem de trigonometria no ensino médio e, depois, o acompanhamento das aulas de três professoras que implementaram a idéia [8]. O processo todo decorreu entre 1993 e 1997 e foram obtidos resultados satisfatórios, tanto em termos de interesse e aprendizagem por parte dos alunos, quanto em relação ao crescimento profissional das professoras. A autora concluiu ser possível mudar a prática docente, mesmo quando consolidada por anos de rotina.

Na proposta, as primeiras atividades levavam à construção das definições das razões trigonométricas em triângulos retângulos. Usava-se a percepção de que, graças à semelhança de triângulos, as razões independem do particular triângulo em que são obtidas, sendo função apenas dos ângulos. Em seguida, as definições iniciais eram estendidas para a circunferência de raio unitário.

Apesar do interesse despertado pela pesquisa, limitamo-nos a examinar os momentos em que os professores, em seus depoimentos, revelavam sua percepção de como se estrutura uma teoria matemática e, em particular, de como se organiza a trigonometria. Transcrevemos uma das falas de uma professora, que nos pareceu típica e especialmente significativa:

Eu não tinha parado para pensar a finalidade da semelhança de triângulos. Sabe, a gente nunca pára. Você vai dando conteúdo, conteúdo... e nunca pára para pensar!

Como a professora revela, nunca tinha prestado atenção no significado da semelhança de triângulos em termos da organização da teoria e, provavelmente, ninguém a havia alertado até então. Acreditamos que, durante sua formação e, especialmente no curso de licenciatura, que parece o mais adequado para a discussão dessas idéias, não tenha havido estímulo para refletir sobre fatos e conceitos matemáticos em geral, o que impede de distinguir idéias essenciais de acessórias, perceber os caminhos que levam à formulação de definições, compreender como se estrutura um corpo teórico. Em última análise, escapou-lhe parte do sentido da própria matemática.

1.1.4 O significado da “coisa”

Um artigo de 1997, de Renata Anastácio Pinto e Dario Fiorentini, relata momentos de observação de uma professora em plena ação docente, quando ela busca dar sentido às letras usadas na álgebra de 7^a série [9]. O trabalho se baseia na tese de mestrado de Pinto, orientada por Fiorentini, pesquisador e docente na área de educação matemática da Universidade Estadual de Campinas. Os autores analisam os significados produzidos durante a aula, alguns um tanto confusos, como eles mesmos admitem. A nós interessam apenas certos elementos relativos ao conhecimento matemático da professora.

De início, assinalamos que se tratava de profissional experiente, formada em curso de licenciatura bem cotado, que manifestava grande interesse por sua disciplina. Acreditava na necessidade de os alunos compreenderem as noções ensinadas²:

... é muito importante eles saberem o que significa essas letras para depois começar realmente a álgebra.

Infelizmente, na aula descrita, a professora trabalhou em condições muito difíceis. Um colega havia faltado e ela se viu na obrigação de ensinar em duas salas de aula distintas, correndo de uma para outra. Por esse motivo, é claro que lhe escaparam algumas interessantes oportunidades de favorecer o entendimento

² O artigo cita a fala da professora. Ela atropela a gramática, o que ocorre com quase todos nós na linguagem coloquial..

da turma. No entanto, mesmo essas más condições não justificam certas omissões específicas.

A professora iniciou a aula propondo um problema retirado de um livro didático inovador [10]: *O quadrado da ‘coisa’ mais um é igual a dez. Qual é o valor da ‘coisa’?* Entretanto, ela ignorava que o termo “coisa” possui raízes históricas, tendo sido usado no início do Renascimento para indicar a incógnita em uma equação.

No corre-corre de uma classe a outra, ela não conseguiu levar os alunos a encaminhar uma solução, nem mesmo a traduzir o problema para a escrita algébrica que era seu objetivo. Por isso, ela acabou por informar que o problema equivalia à equação $x^2 + 1 = 10$. Quando um aluno observou que x deveria valer 3, ela não fez comentários, dizendo apenas que a equação não seria resolvida por ser do segundo grau, ou seja, assunto da série seguinte.

Se a professora dispusesse da noção histórica referida, talvez tivesse obtido mais interesse da turma. Se aproveitasse a informação de que x valia 3, provavelmente levaria os alunos a perceber o que significa resolver uma equação. Se visse os conteúdos pelo seu valor intrínseco, em vez de separá-los por séries, mostraria que pelo menos algumas equações do 2º grau podem ser resolvidas na 7ª série.

Tudo isso constitui indício de uma forma, a nosso ver, problemática de compreender a disciplina ensinada. Significados, como o de resolver uma equação, não recebem ênfase; elementos históricos, a palavra “coisa” por exemplo, não estão disponíveis; critérios burocráticos sobre programas, ou seja, o grau da equação determinando a época de ensiná-la, valem mais que compreensão.

Talvez avaliemos melhor a atuação da professora com base neste depoimento sobre seu próprio aprendizado:

Quando eu aprendi equação do 1º Grau foi uma maravilha. Eu lembro até que meu professor se chamava Pedro; o único (...) que eu lembro o nome. Porque

ele deu, na época, (...) 200 exercícios para fazer de equações e eu amei de paixão!!

Essa experiência, vivida quando aluna, não coincidia com sua opinião adulta sobre a importância de “saber o que significam as letras”. Resolver duzentas equações sugere mais um ensino fundado na repetição, reforçado ainda por ter deixado agradáveis recordações. De fato, muitas vezes, a execução de uma tarefa rotineira, sem surpresas mas quase sempre bem sucedida, produz uma sensação de segurança e satisfação que não convém subestimar.

Em conclusão, não cabem críticas à professora. Já relatamos suas qualidades e estamos certos de que se mais não conseguiu, foi por lhe faltarem os meios, não o esforço.

1.1.5 A função das funções

Outro estudo de grande interesse, no sentido de captar concepções de professores em meio a sua ação pedagógica, foi publicado em 2000 por Edna Maura Zuffi e Jesuína L. Pacca, que observaram especialmente as formas de comunicação usadas por professores ao ensinar funções no curso médio [11].

Como relatam as autoras, os professores apresentavam a definição de função como regra de associação entre elementos de dois conjuntos, de modo que a cada elemento do primeiro corresponde sempre um e um só elemento do segundo conjunto. No entanto, essa precisão não tinha efeito algum no desenvolvimento posterior do assunto, no qual eram tratadas funções dadas por expressões algébricas comuns junto a séries de exercícios para determinar domínios, variação de sinal etc.

Notou-se que

... os professores investigados fazem uma separação bastante dicotômica do “teórico” e do “prático”, relegando ao primeiro um papel menor, que geralmente é destacado na introdução do assunto e que é abandonado ao tratar dos problemas, exemplos e exercícios. O “formal” é colocado a priori como uma

simples necessidade acadêmica, onde o papel das definições (no caso, a definição de função) é irrelevante.

A leitura do artigo nos deu a impressão de que, em geral, eram trabalhados exercícios de natureza técnica,

... tomando a expressão algébrica que determinava a função como um fim em si mesma,

com pouca atenção às idéias matemáticas envolvidas. Em particular, nenhum dos professores chegou a mencionar o significado das funções como o instrumento matemático criado para descrever variações da realidade física, biológica ou social.

Talvez este se constitua no melhor exemplo de uma concepção que não dá atenção aos significados, quer consideremos aqueles de natureza matemática, elaborados na teoria, quer pensemos nos decorrentes das aplicações da matemática na realidade, que geram relações da matemática com outros campos do saber.

1.1.6 Matemática e sociedade

Em um artigo publicado em 2000, Iara Cristina Bazan da Rocha, professora e pesquisadora na área de educação matemática da Universidade Federal de Pelotas, discutiu a contribuição do ensino de matemática na formação de cidadãos de uma sociedade democrática [12].

Ela investigou como os professores de matemática vêem a relação entre o trabalho de sala de aula e princípios apontados na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, promulgada em 1996:

O ensino fundamental terá por objetivo a formação básica do cidadão, mediante (...) a compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, da tecnologia, das artes, e dos valores em que se fundamenta a sociedade.

Entrevistando algumas professoras, a pesquisadora obteve respostas bastante claras:

- *Com os conteúdos não tem nada a ver, é uma coisa muito vaga, não tem como envolver esse tipo de objetivo com o objetivo que a gente tem de cumprir na escola.*

- *Eu acho que já é tão difícil ensinar a matemática, fazer com que os alunos compreendam os conceitos (...) quem sabe em outras disciplinas?*

- *Sinceramente, eu não consigo relacionar. Muitas coisas deveriam ser mais voltadas para a vida dos alunos e não são. Muitas vezes tu estás ensinando o aluno e ele nem sabe onde vai aplicar aquilo que está aprendendo.*

As opiniões revelam a concepção de uma disciplina escolar isolada do mundo, em especial “da vida do aluno” e de circunstâncias sócio-políticas. Parece que essas professoras não encontram valores educativos no ensino da matemática, isto é, valores que contribuam para indivíduos com participação positiva na vida social, salvo o valor utilitário, as aplicações práticas, as quais, de qualquer forma, não comparecem no ensino.

Esboça-se uma crítica (“muitas coisas deveriam ser voltadas para a vida do aluno”), mas prevalece a necessidade de seguir programas (“o objetivo que a gente tem de cumprir na escola”).

Cabe a pergunta: se a matemática não apresenta valor formativo, por quê ensiná-la? Entretanto, esse questionamento jamais surge, revelando um saber matemático alienado do mundo concreto.

1.1.7 Algumas interpretações

Sem dúvida, os casos apresentados revelam indícios de problemas relativos ao conhecimento do professor, mas será possível enunciar esses problemas com precisão? Haverá algum elemento que funcione como denominador comum a todos eles?

Certamente, este não seria apenas o conhecimento de noções matemáticas. Em muitos casos temos a impressão de sua falta (por exemplo, em relação aos “por quês”), mas também há situações em que os professores dispõem dos tão citados “sólidos conhecimentos”, sem que se eliminem os

indícios (por exemplo, em relação ao mdc). Aparentemente, os problemas pressentidos independem da quantidade de saberes matemáticos dominados pelo professor, ou seja, envolvem elementos qualitativos, concepções ou formas de conhecer a matemática.

Em quase todos os episódios transparece certa alienação frente aos conteúdos matemáticos escolares. Pouco importa sua utilidade no currículo, seu papel na organização do conhecimento matemático, suas aplicações na realidade. Detectamos freqüentemente essa atitude em nossos contatos com professores e há evidências de sua ocorrência em diferentes sistemas escolares.

O instigante pesquisador francês Yves Chevallard, o primeiro a registrar o fenômeno na literatura de educação matemática, pôde apontá-lo no professorado de seu país e da Espanha, bem como em livros didáticos. Segundo ele, o sintoma mais evidente da alienação consiste em tratar os conteúdos como fins em si mesmos, desarticulados de quaisquer outras considerações, especialmente de suas relações com os demais conteúdos matemáticos.

Chevallard, Bosch e Gascón dão o exemplo de um currículo de matemática que, propondo o estudo de construções geométricas, acaba produzindo textos didáticos

... em que cada uma das construções básicas com régua e compasso (mediatriz de um segmento, bissetriz de um ângulo, reta paralela a uma reta dada por um ponto dado, etc.) é apresentada como um objetivo último e independente dos demais.(p. 146) [13]

Certamente alguns dos casos historiados – a valorização isolada do mdc ou a apresentação ritual da definição de função, que permanece sem uso durante o restante do curso – constituem evidências do mesmo fenômeno.

Para o didata francês, a alienação do professor de matemática decorre da transposição didática, noção que ele explicitou e analisou. Trata-se, em linhas gerais, da transformação sofrida pelo saber acadêmico quando se decide torná-lo objeto de ensino. No caso da matemática, as modificações parecem ter uma extensão e profundidade muito maiores que nas outras disciplinas, com exceção

da física. Em certos conteúdos, criam-se novos saberes, exclusivos da escola, um exemplo dos quais seria a fatoração na álgebra elementar, com seus vários casos e técnicas, conforme exemplo do pesquisador Luiz Carlos Pais [14].

Assim, de acordo com Chevallard, a transposição em muitos casos reduz a matemática escolar a um simulacro da matemática “real”, noção que o conjunto do sistema escolar procura insistentemente esquecer, porque o professor e todo o processo de ensino deveriam sua existência a essa espécie de teatro. A “cegueira” ou “esquecimento” resultantes explicariam a falta de análise crítica dos saberes matemáticos, ou seja, a alienação [15].

Em nossa opinião as idéias de Chevallard poderiam explicar parte dos elementos problemáticos levantados, embora haja numerosos pontos a esclarecer em sua teoria. Não nos propomos, porém, a aprofundar essa discussão porque no próximo capítulo deste trabalho adotaremos um referencial abrangente sobre o conhecimento, dentro do qual todos os elementos apresentados – e não apenas alguns – encontrarão justificativas.

Por enquanto, nossa hipótese é de que os episódios examinados revelam compreensões muito restritas. Restritas porque superficiais, impedindo que se perceba o papel de um conceito na teoria, bem como suas relações com outros conceitos. Por isso, escapa a um professor a importância da semelhança de triângulos na trigonometria ou o significado de resolver uma equação. Restritas porque abrangem exclusivamente matemática, de forma que não se vêem relações desta com outros saberes, incluindo os culturais e os educacionais. Por isso, as funções não se relacionam com realidades físicas ou sócio-econômicas e o mdc parece indispensável.

Assim, a nosso ver, há um direcionamento equivocado na formação do professor, mais do que falta de saberes ou “cegueira” causada pela transposição didática. Esperamos que esta idéia se torne mais clara se examinarmos brevemente as condições dessa formação no cenário brasileiro dos últimos anos.

1.2 A formação dos professores

1.2.1 Condições materiais

Parece-nos que existem dois fatores principais a determinar as características dos cursos de licenciatura em matemática no Brasil. O primeiro, presente na maioria das universidades públicas, é a orientação do curso, dirigido para um bacharelado em matemática pura. O segundo, típico de vários cursos particulares, é uma carência em termos de noções matemáticas.

Considerando o primeiro fator, observamos que quando os cursos de licenciatura começaram a se estabelecer no país, nas décadas de 1930 e 1940, havia muito pouca preocupação com elementos pedagógicos. Naquele tempo, acreditava-se que, além do conhecimento do conteúdo, um bom professor do ensino fundamental necessitava apenas de dicção razoável e lousa organizada. Assim, os cursos centravam-se em noções matemáticas e a licenciatura se diferenciava do bacharelado apenas por incluir três ou quatro matérias pedagógicas, disciplinas ministradas fora dos departamentos de matemática e consideradas de valor secundário pelos matemáticos e até pelos licenciandos.

Nas universidades públicas, a partir da década de 1970, o conteúdo matemático dos dois cursos foi se diferenciando gradativamente. É certo que ainda permanecem licenciaturas com todos os rigores dos cursos de matemática pura, de acordo com os depoimentos de vários estudantes que assistiram a uma de nossas palestras em certa universidade federal. No entanto, em vários casos, a licenciatura assumiu o papel de bacharelado atenuado, com menor carga de conteúdo, alterações que, afinal, pouco valem e têm apenas caráter quantitativo, porque se mantém a mesma visão da matemática e de seu ensino que encontramos no bacharelado.

Portanto, podemos detectar em parte das licenciaturas de universidades públicas, os vestígios da intenção de um curso de bacharelado em matemática pura. Isto nos parece um equívoco, tendo em vista a tarefa concreta do professor, opinião compartilhada, por exemplo, por Eliana Farias e Soares, Maria Cristina Costa Ferreira e Plínio Cavalcanti Moreira, docentes da Universidade Federal de

Minas Gerais, em um trabalho publicado em 1997 [16]. Anotamos de passagem, porém, que existem exceções bem sucedidas, cursos com forte influência do movimento de educação matemática, que se difundiu no país nas décadas de 1980 e 1990, sobre os quais teremos algo a dizer no capítulo 3 deste trabalho.

Em relação ao segundo fator – a carência de saberes –, lembramos que a partir da década de 1960 uma grande expansão da escola ocorreu em nosso país, e em vários outros, causada principalmente pela intensa migração dos campos para as cidades e a tentativa de qualificar mão de obra para uma industrialização crescente. Em conseqüência, tornou-se necessário formar grande número de professores, o que motivou a criação de diversas faculdades particulares, muitas funcionando por vários anos em situação precária. Em 1970 o país dispunha de aproximadamente três dezenas de faculdades de filosofia, ciências e letras, quase todas públicas exceto pelas universidades católicas, que formavam os docentes do ensino fundamental e médio, de acordo com dados citados na tese de mestrado de Edda Curi [17]. No início do século XXI, no Exame Nacional de Cursos promovido por órgãos do Ministério da Educação, foram avaliados 322 cursos de licenciatura em matemática, dos quais 149 (46%) eram particulares conforme dados do Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais (INEP) [18].

Em 1974, a premente necessidade de professores motivou a instituição de cursos de licenciatura curta, que continuaram a funcionar até o final do século, sendo extintos apenas pela Lei de Diretrizes e Bases de 1996. Na licenciatura curta, um professor de matemática e ciências do ensino fundamental era formado em apenas três anos, após os quais, recebia a licenciatura plena em matemática com mais um ano de estudo, habilitando-se para lecionar no curso médio.

As faculdades particulares e suas licenciaturas curtas contribuíram para um aumento quantitativo do professorado que foi acompanhado, porém, por um decréscimo qualitativo em termos de formação. Muitas vezes se afirmou que a baixa de qualidade foi determinada pela licenciatura curta, na qual se dedicava à matemática um período de tempo reduzido em relação à licenciatura normal. No entanto, parece-nos haver outro motivo mais importante.

Antes de 1970, os professores, mesmo os do então curso primário (atuais primeiras quatro séries do curso fundamental), dispunham de condições salariais razoáveis, além de certo prestígio social. O aumento numérico do professorado, sem amparo de verbas governamentais condizentes, levou a drásticas reduções salariais, ocasionando decréscimo de seu status social. Resultou uma gradativa degradação da carreira, talvez um pouco atenuada apenas nos últimos anos.

Por oferecer baixas perspectivas de ganhos profissionais, as licenciaturas tornaram-se refúgio dos estudantes menos preparados, em especial nas faculdades particulares, cujas exigências para ingresso costumam ser modestas, enquanto que estudantes mais bem capacitados, dirigiram-se a outras profissões. O resultado dessas circunstâncias foi caracterizado de maneira brutal, mas realista, pelo sociólogo Pedro Demo [19]. Ele se referia especialmente aos cursos universitários de pedagogia, mas em contexto no qual se inseria a licenciatura, quando afirmou que se transformaram em

... cursos de segunda categoria para gente de segunda categoria.

Em suma, os conhecimentos reduzidos de muitos licenciados podem ser atribuídos não a uma modalidade especial de licenciatura, mas à carência na formação educacional que os acompanhava desde o início da escola fundamental.

Na opinião da professora Edda Curi, que trabalhou algum tempo com profissionais dessa origem

... o professor de matemática da escola pública não é mais aquele professor que domina, que tem segurança no que se refere aos conteúdos de sua área de conhecimento; tem poucas informações de educação matemática; possui uma cultura limitada e poucas oportunidades de acesso ao conhecimento; vive de forma bastante simples, com baixa auto-estima, trabalha em condições precárias ... (Introdução da tese de mestrado.)

Nossa própria experiência com tais professores corrobora as afirmações de Curi [17].

O painel que delineamos contribui para explicar os resultados negativos da pesquisa de Lorenzato sobre os “por quês”, que citamos anteriormente e justificam parte dos problemas detectados no conhecimento do professor. Entretanto, nem tudo se esclarece assim porque as licenciaturas ditas de bom nível, em geral de universidades públicas, continuaram a existir e encontramos ainda muitos mestres com “sólidos conhecimentos da disciplina” que, também apresentam uma compreensão de matemática que consideramos restrita.

Reiterando nossa opinião: tanto os licenciados provenientes de universidades públicas prestigiadas, como os egressos das faculdades particulares mais modestas, parecem ter uma mesma visão equivocada do que vem a ser a matemática e seu ensino. Isso nos leva a considerar o modo de formação dos professores, isto é, a maneira pela qual adquiriam seus conhecimentos matemáticos.

1.2.2 Modos de formação

Um trabalho capital de Dario Fiorentini foi o mapeamento dos “modos de ver e conceber” o ensino de matemática em nosso país, no decorrer do século XX, os quais determinam em larga medida a formação matemática dos estudantes em praticamente todos os níveis de ensino [20]. Dentre as tendências apontadas pelo autor, as três que nos parecem hegemônicas nos cursos de licenciatura, e mesmo no curso médio, foram denominadas como

- formalista clássica (uma exposição da matemática à maneira de Euclides);
- formalista moderna (também inspirada no modelo de Euclides, mas identificada com o movimento de matemática moderna das décadas de 1960 e 1970 e exemplificada, na matemática acadêmica, pelas obras de Bourbaki);
- tecnicista (que resulta em uma forma de ensino que enfatiza cálculos e técnicas, o “como fazer”, em detrimento dos significados, do “por que se faz assim”).

Fiorentini destaca ainda outras três tendências, mas nenhuma delas influenciou significativamente a atual geração de professores.

A tendência empírico-ativista, fruto do movimento “escola nova”, foi referência para a reforma do ensino brasileiro em 1931, mas pouco restou de seu ideário no ensino de matemática. Um vestígio seria o uso de materiais ilustrativos, como o “material dourado”, ou de base dez.

A tendência construtivista, dividida em várias correntes, de início inspirada exclusivamente nos estudos da cognição de Jean Piaget, mais tarde incorporando um viés sócio-interacionista derivado de Lev Vigotsky, até hoje não teve grande penetração na escola fundamental e muito menos na licenciatura.

Finalmente a tendência sócioetnocultural, baseada em referenciais sociais e antropológicos, influenciada pelas idéias de Paulo Freire e, no caso da matemática, por Ubiratan D’Ambrósio, é ainda jovem demais.

No entanto, deve-se destacar que as duas últimas citadas adquiriram grande importância teórica no âmbito da educação matemática, configurando o discurso atual de diversas propostas curriculares, incluindo os *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Voltaremos a considerá-las no capítulo 3.

Vamos examinar brevemente as três tendências hegemônicas e suas relações com a forma de conhecer matemática dos professores.

Fiorentini assinala que o formalismo clássico usa o vernáculo, enquanto o moderno prefere a linguagem simbólica. Além disso, a teoria dos conjuntos e as propriedades estruturais permeiam toda exposição formalista moderna. No entanto, ambos os modos mantêm a essência euclidiana, ou seja, uma organização axiomática visando atender unicamente os requisitos lógicos da teoria apresentada, que resulta, ao menos para o aprendiz inexperiente, em definições de aspecto gratuito, teoremas que parecem impossíveis de terem sido conjecturados etc. Por tais motivos, abordaremos os dois formalismos conjuntamente, sob uma mesma denominação.

1.2.3 A formação euclidiana

Esta formação decorre das concepções que Fiorentini chama de formalismo clássico ou moderno. O célebre filósofo da ciência Imre Lakatos usa a denominação “estilo dedutivista” e informa que se inicia

... com uma lista laboriosamente feita de axiomas, lemas e/ou definições. Os axiomas e definições freqüentemente parecem artificiais e mistificadamente complicados. Nunca se fica sabendo como essas complicações surgiram. A lista de axiomas e definições é seguida de teoremas cuidadosamente redigidos. Estes, por sua vez, estão carregados de pesadas condições; parece impossível que alguém jamais os tivesse suposto. O teorema é seguido da prova. (p. 185) [21]

Usamos o termo euclidiano que foi adotado por Luiz Márcio Imenes, em um dos primeiros estudos consagrados a essa concepção, no âmbito da educação matemática brasileira. [22]

Buscando características invariantes no ensino da Matemática desde o final do século XIX, Imenes encontra a presença constante do modelo de exposição euclidiano nos textos didáticos vasculhados e nas reminiscências de professores e estudantes, em que pesem as várias reformas ocorridas no ensino da disciplina a partir daquela época. Ele observa que, mesmo na matemática mais elementar, digamos em uma 5^a série, quando os axiomas não são explicitados e se omitem as demonstrações, subsiste a ordem euclidiana com sua persistente impressão de artificialidade. Evidentemente, tal presença se acentua no curso superior. Fiorentini observa que ainda hoje há professores “bourbakistas” nos cursos de Licenciatura (uma referência a Nicholas Bourbaki, pseudônimo de um grupo de matemáticos que publicaram obras rigorosamente formalistas abarcando a matemática superior dos cursos de graduação e pós-graduação). Os matemáticos Philip J. Davis e Reuben Hersh assinalam que

... uma aula típica de matemática avançada, especialmente uma aula dada por um professor com interesses “puros”, consiste inteiramente em definições, teoremas, demonstrações, definições, teoremas, demonstrações numa concatenação solene e sem interrupções (p. 182) [23]

Com base em suas análises, Imenes mostra que o modo euclidiano, por sua própria natureza, esconde o processo de construção do conhecimento matemático, apresentando-o como independente do tempo e dos fazeres humanos em geral, de maneira que a

matemática separa-se do mundo e dos homens, desliga-se dos contextos que dão significado às suas idéias. (...) Além disso, ao organizar as idéias matemáticas ordenando-as exclusivamente segundo o critério da precedência lógica, elimina todos os demais aspectos – psicológicos, culturais, sócio-econômicos – envolvidos na criação da matemática. (p.217) [22]

Por isso mesmo, força um aprendizado linear, em via de sentido único, ou, dizendo de outro modo, em escada. Torna-se difícil ao aluno que tropeçou em algum degrau, se levantar para alcançar seguintes.

Em conseqüência, ele considera esse modelo como promotor de uma aprendizagem sem sentido para a maioria das pessoas e nele identifica uma causa essencial do fracasso do ensino e aprendizagem da matemática, ao longo do século XX.

É curioso constatar que, apesar da exposição euclidiana rigorosa demonstrar todas as afirmações da teoria, nem por isso consegue explicar certos “por quês”. Admitimos que, por exemplo, no quadro da álgebra abstrata, o misterioso produto $(-1) \times (-1) = 1$ possa ser justificado a partir das propriedades estruturais do anel dos números inteiros, embora a validade dessas propriedades decorra de escolhas até certo ponto arbitrárias. Há, porém, situações em que nem esse grau de justificativa se consegue obter. Consideremos, por exemplo, o caso dos determinantes, na sua exposição elementar.

Sem dúvida a famosa regra de Cramer foi descoberta após uma série de cálculos um pouco enfadonhos. Seu criador, que aliás não foi único, deve ter se proposto a resolver um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas, com coeficientes literais. Tendo obtido soluções com certo padrão notável, buscou generalizar o resultado para sistemas de ordem mais alta, o que foi possível após algum esforço, dada a complexidade do padrão envolvido. Dessa forma se

encontrou a regra citada, um algoritmo que permite resolver os sistemas lineares automaticamente, embora de forma um tanto trabalhosa.

Quando esse misto de descoberta e criação é apresentado no modo euclidiano, esconde-se seu propósito, invertem-se os passos que levaram até ele. A seqüência de idéias torna-se a seguinte:

- define-se determinante de ordem n , por meio de permutações, causando impressão de insensatez ou, na melhor das hipóteses, pura arbitrariedade;
- demonstram-se diversas propriedades que facilitam o cálculo de determinantes, o que continua não tendo sentido, já que se ignora o propósito desse conceito;
- demonstra-se, a partir das propriedades anteriores, a regra de Cramer, com a qual se percebe que os determinantes servem para resolver sistemas lineares.

Nesse pequeno edifício euclidiano, alguns podem se maravilhar com a milagrosa descoberta do exótico processo de cálculo que fornece o determinante. Como pôde algum gênio intuir que daí surgiriam soluções de sistemas lineares?

O porquê da regra de Cramer decorre de sua demonstração, a qual resulta, em última análise da definição de determinante. Mas como explicar o “porquê” da estranha definição? Isto não é possível, já que esta foi criada para a demonstração funcionar. Referindo-se a situações desse tipo, Lakatos escreve que se

... o estudante por acaso descobre que algumas das indecorosas definições são geradas pela prova (...) o feiticeiro (professor) o banirá por sua demonstração de imaturidade matemática.(p. 185) [21]

Creemos ter caracterizado a formação euclidiana e suas limitações. Resta acrescentar que os argumentos apresentados não visam contestar o modo euclidiano como forma de exposição das teorias matemáticas, nem negar suas qualidades e valor histórico, mas certamente pretendem condená-lo como concepção de ensino e da produção de matemática. Esse ponto de vista será reforçado no capítulo 3.

1.2.4 A formação tecnicista

Segundo Dario Fiorentini, o tecnicismo, tomado como corrente educacional dirigida a todo um sistema escolar, tem origem norte-americana e se propõe a otimizar o trabalho pedagógico usando técnicas específicas de ensino, um exemplo das quais pode ser a instrução programada. Entretanto, podemos tomá-lo em sentido mais amplo, como Fiorentini às vezes o faz, identificando-o no ensino da matemática com a ênfase na técnica, no cálculo “lato sensu”, o que inclui não só cálculos numéricos e algébricos, mas qualquer procedimento mais ou menos algorítmico, entre os quais a resolução de vários tipos de equações e inequações.

Um protótipo da concepção tecnicista, que pode ter aparência caricatural para um educador matemático moderno, sem deixar de ser muito verdadeiro, encontramos nas propostas do professor japonês Toru Kumon, criador em 1954-6 do método Kumon, já conhecido entre nós [24]. Trata-se de uma seqüência cuidadosamente organizada de passos suaves, que partindo dos cálculos mais elementares alcança os mais complexos. Ao divulgar seu sistema, o autor nos informa que

... a prioridade do ensino de matemática deve ser o desenvolvimento do cálculo (p.97);

(sua meta) é desenvolver no aluno a capacidade de dominar a Matemática do 2º grau (atual curso médio)(p.39);

... se o aluno não souber calcular com facilidade, não saberá resolver problemas matemáticos complexos (p.40),

insistindo na precedência da técnica sobre o raciocínio.

De maneira geral, as propostas do professor Kumon não reconhecem as facetas criativas e conceituais da matemática e buscam sobretudo o sucesso do estudante no ensino médio e nos exames vestibulares. Aparentemente, adequavam-se ao currículo de seu país naquela época. Por exemplo, ele notou que

... o final da 5ª a 8ª série do 1º grau (atual ensino fundamental) inclui poucos problemas que praticamente desaparecem no 2º grau (sic, p. 96),

o que favorecia um método sem preocupações com a resolução de problemas. Ademais, tal postura convinha ao momento histórico que seu país vivia, buscando restaurar o potencial tecnológico arrasado pela guerra, por meio do incentivo à formação de engenheiros e técnicos com uma visão apenas utilitária da matemática.

O relativo sucesso do método Kumon no Brasil sugere o ingresso de nosso ensino no modo tecnicista. Certamente, não se trata do mesmo ensino preconizado pelo professor japonês, mas as idéias fundamentais permanecem. A tendência parece favorecida pela lógica dos eventos. A massificação da escola, ocorrida a partir de 1970, destruiu antigos padrões de rigor e qualidade, tornando essencial buscar um ensino mais “simples”, sem teoremas ou definições rigorosas, seja porque os alunos não mais engolissem tais pílulas, seja porque os professores se sentissem pouco à vontade com elas. Isto significa que o modo tecnicista surge como solução quando se verifica a impossibilidade de manter o modo euclidiano. Ademais, o tecnicismo pretende um ensino mais “prático”, visando contribuir diretamente para a resolução de questões de concursos públicos e exames vestibulares, ou, em outras palavras, um ensino voltado para o sucesso imediato, única justificativa que certas mentalidades aceitam para o esforço do aprendizado.

Esse modo de ensino invade sistemas escolares com tradição bem mais sólida que o nosso. Um dossiê de setembro de 2001 da revista de divulgação científica *Science et Vie* mostra seu domínio na escola francesa, naturalmente com características próprias ao país [25].

No Brasil, vemos o tecnicismo ganhar a escola pública e difundir-se na particular porque promete o sucesso. Corroboram essas afirmações, os testes da maioria dos exames vestibulares e exercícios típicos dos livros didáticos em voga desde 1980, que se resumem a “calcular”, “obter”, “efetuar”, “resolver”, raramente ocorrendo questões conceituais ou demonstrações e dificilmente surgindo problemas da realidade. Nossa experiência como professor, que abrange

licenciaturas de faculdades particulares, indica que também esses cursos vão sofrendo forte influência do tecnicismo.

Acreditamos que uma formação predominantemente tecnicista apenas agrava os problemas já sugeridos em relação ao conhecimento do professor.

Embora a história da matemática mostre uma contínua preocupação com técnicas, algoritmos e procedimentos, desde as tabelas de inversos e quadrados da Mesopotâmia até os logaritmos, as integrações numéricas e os cálculos matriciais, ainda assim, os cálculos em geral exercem um papel coadjuvante na novela matemática. Observamos que

- eles inexistem em diversos ramos da matemática;
- as teorias matemáticas se articulam por meio de idéias, não por cálculos;
- em nossa época, computadores e calculadoras reduzem sua importância, executando as tarefas mecânicas.

Em conseqüência, o tecnicismo oferece apenas uma versão reduzida da matemática, limitando sua compreensão. Se o modo euclidiano apresenta uma matemática que “desliga-se de contextos que lhe dão significado”, o modo tecnicista apresenta um deserto de significados.

1.3 Pausa para balanço

Iniciamos por detectar, a partir de dados da realidade, elementos problemáticos no conhecimento matemático do professor, os quais parecem decorrer de certas limitações na compreensão da matemática, tanto do ponto de vista de sua organização interna quanto de suas relações com o mundo. Observamos que esses sinais podem ser identificados tanto em professores oriundos de licenciaturas cujo ensino de matemática é considerado de alto nível, quanto das licenciaturas com pretensões mais modestas. Portanto, eles independeriam da quantidade de saberes matemáticos do professor.

Examinando a formação dos professores, observamos condições inteiramente compatíveis com os indícios apontados. As dificuldades materiais

evidentes (a massificação da escola em geral, a degradação profissional, etc.) e os modos de ensino hegemônicos (euclidiano, tecnicista) certamente contribuem para a situação. Em particular, acreditamos que os modos de ensino examinados constituem direcionamentos equivocados para cursos de licenciatura.

Parece correto supor que os elementos problemáticos sejam fruto de concepções, de maneiras de ver a matemática, da forma de compreendê-la. Tudo isso nos incita a discutir outras formas de conhecer matemática que, propiciando modos de formação diferentes dos já examinados, permitam ao professor uma compreensão mais satisfatória da matemática e de seu ensino. Entretanto, sentimos ser necessário começar por uma caracterização do que entendemos por “conhecer matemática”, à qual dedicaremos todo o próximo capítulo.

Capítulo 2

Conhecer, conhecer matemática

Este capítulo é composto por três núcleos distintos, explicados abaixo.

(i) Examinamos a seguinte questão: “Quando se pode afirmar que uma pessoa conhece determinado campo de saberes?”

Para esclarecer esse “conhecer”, julgamos inevitável considerar o próprio conhecimento. Tomando como referencial a concepção de conhecimento como rede de significados, chegamos a uma resposta para a questão inicial.

(ii) Procurando ilustrar as perspectivas do referencial adotado no âmbito da matemática, abordamos alguns objetos matemáticos tratando-os a partir de seus significados.

(iii) Finalmente, retornamos às questões levantadas no capítulo 1, buscando explicitar o que, em nossa opinião, constitui o problema fundamental na forma de conhecer do professor.

Os dois núcleos iniciais constituem passos necessários para dar sentido ao terceiro.

2.1 Formas de conhecer

Aparentemente, há várias formas de conhecer ou de dominar um conjunto de saberes. Para formar uma idéia da questão, buscando perspectivas mais gerais, vamos iniciar nossas considerações fora do campo matemático. Examinaremos por alguns parágrafos o curioso trio Fulano, Beltrano e Sicrano e sua relação com os saberes musicais.

Fulano não toca instrumentos, nem lê partituras. No entanto, seria apressado afirmar que não conhece música. Encontramos Fulano aconselhando

Beltrano sobre como interpretar determinada sonata clássica. Orientação necessária, porque Beltrano, embora hábil pianista, executa qualquer peça como se fosse uma obra romântica do século XIX, obtendo, às vezes, resultados difíceis de suportar. Será que Beltrano, mesmo sendo músico, conhece realmente música?

A pergunta parece ociosa no caso de Sicrano, que, de imediato, nos afirma nada saber. Por outro lado, canta diversas peças de nosso cancionário popular, acompanha-se ao violão e acrescenta harmonias e ornamentos com extrema criatividade. Não pode ser verdade que ele nada saiba.

Portanto, Fulano, Beltrano e Sicrano devem conhecer música, cada um a sua maneira. Fulano compreende as idéias contidas em muitas partituras, mas não as técnicas relativas à execução musical. Curiosamente, ainda assim apresenta a capacidade de orientar performances, o que constitui, por sua vez, uma performance, que, no entanto, ocorre no terreno pedagógico, fora do domínio musical. Por outro lado, Beltrano compreende diversos elementos que permitem a performance musical e consegue realizá-la, mas falta-lhe algum outro tipo de compreensão, porque suas atuações nem sempre se revelam adequadas. Finalmente, Sicrano apresenta compreensão e performance, embora a compreensão esteja implícita, porque não se mostra capaz de externá-la, provavelmente por falta de estudo acadêmico.

Essas observações sugerem que consideremos o “conhecer” como relacionado à compreensão e à performance. Em suma, aceitaremos que conhecer implica a compreensão de determinados saberes, aliada à capacidade de mobilizar os saberes compreendidos em alguma modalidade de performance, relacionada com o objeto do saber.

Trata-se de uma noção aceitável para o senso comum e bastante difundida. Ela reúne teoria e prática. Nós a tomaremos como um referencial preliminar, que tentaremos, aos poucos, esclarecer.

Primeiro, assinalamos que nos referimos a *compreender* saberes em vez de *possuir* ou *dominar* saberes, buscando descartar o conhecimento baseado

exclusivamente em memória ou em procedimentos mecânicos, típico de um banco de dados ou de um conjunto de instruções executáveis por computador.

Em segundo lugar, observamos que o escopo da mobilização dos saberes compreendidos é razoavelmente aberto. Suas ligações com o objeto do saber podem ser apenas indiretas, como no exemplo de Fulano, que revela sua compreensão musical por meio de desempenhos pedagógicos.

Finalmente, percebemos a necessidade de explicitar a idéia de compreensão. Nossas afirmações sobre Beltrano, por exemplo, acabam por resultar ambíguas quando admitimos uma certa compreensão, pois “é hábil pianista”, junto de seu contrário, já que obtém resultados interpretativos “difíceis de suportar”. (Situação similar encontramos nos professores tidos como bons conhecedores de matemática que, entretanto, apresentam fraco desempenho docente.) Qual seria, então, a compreensão que falta a Beltrano? E o que seria, mais precisamente, a compreensão?

Tentando esclarecer a forma de compreensão de Beltrano, lembramos a afirmação inicial de que ele interpretaria qualquer peça como produto do século XIX, isto é, com as características do romantismo musical. Parece então que lhe faltam as noções históricas e artísticas que permitiriam inserir as diferentes obras musicais em sua época e contexto, compreendê-las como parte do conjunto das manifestações artísticas de um período, abordando outros estilos além do romântico. Talvez a carência se explique por não ter estudado as questões citadas, ou, quem sabe, pela insuficiente reflexão sobre as peças executadas. Em qualquer dos casos, admitindo que peças musicais transmitam idéias e sensações, Beltrano mostra ignorar parte dos significados nela contidos.

Certamente as falhas de Beltrano a ele pertencem. A nós, interessa constatar que as considerações apresentadas levam a inferir que, nesse caso, a compreensão desejável depende de elementos que transcendem o domínio puramente musical, envolvendo concepções que se constroem no entorno da obra musical, nas suas relações com a história e os meios culturais, no conjunto de significados que a ela se associam. Acreditamos que essa noção – a compreensão de um domínio de saberes depende de outros domínios – deva se

aplicar a vários outros campos além do musical. De fato, os saberes que permitem compreender determinado jogo, não nos informam de seu sentido para os indivíduos ou seu papel social. Analogamente, há aspectos da arte ou da ciência cuja compreensão dependem de informações e reflexões de outra natureza, existencial ou sociológica ou histórica ou, quem sabe, todas essas reunidas.

Justamente a percepção de que, afinal, a compreensão de um campo de saberes pode dele escapar, dependendo então de múltiplas relações que abarcam diversos outros campos, vai nos permitir tornar mais precisa a noção de compreensão, apoiando-nos na representação do conhecimento em termos de *rede*.

2.2 Rede e compreensão

A concepção do conhecimento como rede ou trama de significados foi colocada em evidência na comunidade de pesquisadores em educação por trabalhos de Nilson José Machado, em meados da década de 1990 [26]. Trata-se de imaginar os elementos de um corpo de conhecimentos como nós de uma malha, os quais se conectam a muitos outros, cada conexão representando uma relação estabelecida entre esses elementos, que resulta em um significado.

A representação do conhecimento como rede leva Machado a descrever a compreensão da seguinte forma:

De modo geral

- *compreender é apreender o significado;*
 - *apreender o significado de um objeto ou acontecimento é vê-lo em suas relações com outros objetos ou conhecimentos;*
 - *os significados constituem, pois, feixes de relações;*
 - *as relações entretecem-se, articulam-se em teias, em redes, construídas social e individualmente, e em permanente estado de atualização;*
- (p.138)

A representação em rede afasta-se das concepções correntes em vários aspectos. Destacamos os dois que nos parecem mais notáveis, relativos à disciplinaridade e linearidade.

Normalmente, se concebe o conhecimento de forma disciplinar, em setores nitidamente separados, enquanto que na rede não se definem fronteiras. Implicações da concepção habitual afetam nosso dia-a-dia em várias situações. Por exemplo, na organização escolar com suas matérias estanques ou em certa prática da medicina, na qual um tratamento especializado do fígado pode ter sucesso à custa de comprometer o paciente como um todo. A visão da rede, por outro lado, conduziria a articulações disciplinares promovendo saberes escolares mais abrangentes ou a uma medicina em que, sem descartar o cuidado especializado do fígado, o paciente seria tratado integralmente. No caso da matemática, abre-se a possibilidade de se buscar seus significados em outros domínios da ciência ou na vivência subjetiva de um aprendiz.

Há também o hábito de se imaginar o conhecimento como uma cadeia linear, uma escada, ou, ainda, uma espécie de edifício, no qual cada tijolo corresponde a um elemento apreendido. O tijolo – ou o elemento – só se encaixa em local preciso, sendo seus pré-requisitos os tijolos situados mais abaixo. Essa idéia está evidentemente presente no diagnóstico-clichê, segundo o qual o aluno X “vai mal nas provas porque lhe falta base”. Também estava presente no lendário episódio em que Euclides, em bom estilo euclidiano, afirmou ao faraó não haver uma estrada real, isto é, mais cômoda, para a compreensão da geometria. Na rede, porém, tais idéias se tornam dúbias. Nenhuma ordenação está determinada, não havendo a priori pontos de partida nem caminhos privilegiados para se chegar a cada objeto de saber. Assim, o aprendizado é favorecido porque se ampliam suas opções, sendo possíveis várias escolhas de ponto de partida e de caminho. Se desejarmos chegar aos números racionais, nada nos obriga a começar pelas frações, como a tradição manda. Talvez haja caminhos mais simples e diretos, como, digamos, partir das subdivisões da moeda nacional e dos significados que o educando produziu para elas.

Algumas outras propriedades da noção de rede merecem menção: sua mutabilidade e sua escala.

Em relação à primeira, lembramos que significados de palavras se transformam ao longo do tempo, à medida que vão se associando a outros significados. Generalizando essa idéia para outros objetos ou acontecimentos, chegamos a entender a mutabilidade da rede. Os significados originais de cada noção podem ser transformados ou esquecidos, a tal ponto que se torna necessário recorrer à história para reencontrar sentidos perdidos. Certamente, isso pode ocorrer no âmbito da matemática, o que recomendaria conhecer sua história.

A noção de escala em relação à rede pode ser esclarecida por uma imagem. Se, na visão habitual, o conhecimento se assemelharia a um edifício, na concepção de rede ele seria um mapa, em que as cidades representam os nós e as estradas, vias férreas ou rotas aéreas indicam as conexões. O detalhamento de um mapa depende de sua escala. Em certos casos, o mapa mostra apenas as conexões principais entre os grandes nós (estradas ligando capitais, digamos); em outros, apresenta inúmeros nós e conexões, incluindo as pequenas estradas vicinais; em certo ponto, chegaremos a ver também os nós (cidades) como uma rede de conexões. Isso sugere a conveniência de se adotar escalas adequadas para cada aprendizado.

Vimos que a concepção de conhecimento em termos de rede traz vantagens para o aprendizado, mas convém assinalar certas dificuldades. Desaparecem as balizas fornecidas pela separação em disciplinas e pela linearidade dos programas. As decisões didáticas se tornam árduas porque a rede está em constante mutação e há várias escolhas possíveis na escala de abordagem. Tudo isso não faria um professor se perder?

Para Machado as dificuldades não se superam a partir de restrições, mas, sim, por uma visão ampla da rede, que permita mapear nós e percursos relevantes. Retomaremos essa noção quando discutirmos a forma de conhecer adequada para o professor, no capítulo 3.

De posse da idéia de rede, podemos refinar a noção preliminar sobre o “conhecer”. Continuaremos considerando que conhecer implica compreensão e mobilização, mas esclarecemos a idéia de compreensão, expressando-a em

termos de rede de significados. Fica implícita nessa caracterização a infinita tarefa do compreender, pois cada objeto ou acontecimento admite inúmeros significados, dependendo do observador e do ponto de vista com que é observado.

Acreditamos que nosso referencial melhorado permite explicar de maneira mais precisa e sintética os problemas de conhecimento musical já discutidos, levando-nos a uma visão mais clara da forma de conhecer de cada personagem.

Podemos dizer, por exemplo, que Fulano apreendeu muitos significados extra musicais, o que lhe permite orientar a interpretação de certas peças e, em consequência, mobilizar seus saberes no ensino de música. Por outro lado, falta-lhe percorrer conexões específicas entre saberes musicais e, por isso, não domina técnicas, nem se mostra capaz de mobilizar saberes para performance estritamente musical. Já Beltrano parece ter percorrido apenas porções da rede ligadas aos elementos técnicos do conhecimento musical. Seu repertório de significados se afigura limitado demais para transmitir ao público as idéias ou sensações contidas nas peças musicais, porque não percorreu as conexões entre os elementos musicais e outros, de ordem histórica ou cultural. Percebemos ainda que Sicrano captou muitos significados musicais e extra musicais. Como seu conhecimento é implícito e não acadêmico, isso teria ocorrido simplesmente por meio de experiências vividas em um ambiente adequado.

Em todo caso, não estenderemos as considerações musicais. É tempo de nos voltarmos para nosso objetivo principal, o conhecimento matemático dos professores, campo em que devemos desenvolver uma análise mais cuidadosa.

2.3 Os significados em matemática

De acordo com as considerações anteriores, “conhecer matemática” depende da “compreensão de saberes” matemáticos, que decorre da “apreensão de significados” dos objetos matemáticos e, portanto, os significados constituem a base das idéias até aqui desenvolvidas. Em consequência, julgamos necessário abordar alguns objetos matemáticos a partir de seus significados, para ilustrar as possibilidades trazidas pelo referencial de rede.

Certamente há significados explícitos nos discursos matemáticos, particularmente em sua forma mais freqüente de apresentação, ou seja, o discurso de padrão euclidiano. Tais significados nós os chamaremos de imediatos ou literais. Eles são expostos na definição de conceitos, no enunciado de teoremas, na descrição dos passos de um procedimento.

Entretanto, já foi observado (em 1.2.3) que as exposições euclidianas ou similares são elaboradas atendendo estritamente uma estrutura dedutiva, o que leva a ignorar todos os significados que não se encaixam nessa estrutura. Por exemplo, na geometria euclidiana em sua exposição clássica, não figura o significado de ângulo em termos de rotação por ser desnecessário na organização da teoria. Essa observação ilustra a existência, além dos significados literais, de um outro universo de significados a ser revelado pela reflexão.

Além disso, também já nos referimos à amplitude da noção de significado, dependente do observador e do ponto de vista. Tomemos como exemplo um evento histórico, digamos a Primeira Guerra Mundial. Podemos associá-la a mortandades e trincheiras, mas também ao final de uma época de prosperidade na Europa (a “belle-époque”), ao naufrágio de uma particular concepção do mundo vigente nas classes dominantes das potências da época, a um conflito pelo domínio de mercados inerente ao modo de produção capitalista e até à recorrente, e talvez insuperável, barbárie dos seres humanos. Todas essas idéias constituem significados do episódio, colhidos em diferentes contextos, sob diversos ângulos de visão, o que nos leva a estender ainda mais o referido universo de significados.

Poderíamos distinguir, como Vigotsky já o fez, os *significados* propriamente ditos do *sentido*, atribuindo a este último um valor ligado a contexto, à percepção subjetiva, a motivações [27]. Entretanto, não nos parece essencial tal exatidão. Pensaremos nos significados de objetos e acontecimentos com elasticidade, englobando seu sentido, sem tentar defini-los, buscando harmonia com a concepção de que o conhecimento é uma rede de significados.

Para dar uma idéia desse universo que na matemática costuma ficar encoberto, vamos, então, aos exemplos.

2.3.1 Um caso de teoria formalizada

Este primeiro exemplo busca ilustrar como a apreensão de significados que vão além dos significados explícitos amplia a compreensão e orienta a mobilização de saberes. Nós o emprestamos de um instigante trabalho, que explora conexões entre as obras de Gödel, Escher e Bach, visando, porém, objetivos distintos daqueles pretendidos por seu autor, Douglas Hofstadter [28].

Consideremos o sistema formal \mathcal{M}_i , cujas sentenças bem formadas são do tipo $xmyiz$, nas quais x, y, z são variáveis que representam quantidades não nulas de \mathcal{M} . Complete o sistema com dois axiomas:

(A1) *Vale $xm - i x -$.*

(A2) *$xmyiz$ implica $xm y - i z -$.*

Com essas poucas informações parece difícil decidir se uma sentença específica do sistema é verdadeira ou não. Apesar de sabermos o significado explícito das variáveis e dos axiomas, nada nos foi mostrado para orientar nosso raciocínio. Por exemplo, como decidir se a sentença bem formada

$--m---i-----$

é verdadeira? Como proceder para encontrar a resposta?

Gostaríamos que nosso eventual leitor se sentisse um pouco perdido nesse sistema formal, para que faça uma idéia do estado de espírito de muitos estudantes, tanto de níveis mais elementares como da licenciatura em matemática, após algum tempo de exposição a uma teoria matemática formalizada. Eles se vêem desorientados, incapazes de distinguir verdades óbvias de absurdos ululantes, acreditam que nada do que aprendem tem sentido. Já tivemos algumas dessas experiências desconfortáveis em nossa vida estudantil e não nos agradaria repeti-las.

Voltando à sentença em discussão, informamos que se trata de um teorema, cuja demonstração é a seguinte:

- (A1) *implica $--m - i ---$*

- Usando este fato e (A2) obtemos $--m---i-----$
- Usando este último fato e (A2), concluímos que
 $--m---i-----$

Parece que chegar a demonstrações desse tipo, tão concisas e abstratas, demandaria pelo menos meia hora de reflexão, não é? No entanto, esse sistema aparentemente incompreensível pode perder seu caráter misterioso em poucos instantes. Bastaria interpretá-lo da seguinte maneira:

$-$ corresponde a 1	m corresponde a $+$
$--$ corresponde a 2	i corresponde a $=$
$---$ corresponde a 3	
etc.	

Dessa maneira, o teorema que demonstramos corresponde à sentença $2 + 3 = 5$, de cuja veracidade não duvidamos. Os símbolos $1, 2, 3, \dots, +, =$ constituem, portanto, um modelo do sistema formal, que chamaremos de modelo aditivo. O modelo confere significado ao sistema, a tal ponto que podemos decidir facilmente se uma dada sentença é verdadeira ou não. Isto é, a apreensão do significado traz uma compreensão inédita, que permite identificar os teoremas e encontrar o caminho da demonstração.

Observamos, no entanto, que nosso modelo aditivo do sistema $--m i$ também é um sistema formal e só nos parece “concreto”, além de carregado de significado, porque estamos bastante familiarizados com ele. Para quem ignora os símbolos $1, 2, +, =$ etc., quem sabe fosse mais fácil descobrir os teoremas verdadeiros no sistema inicial, no qual, aos poucos, se perceberia um padrão nas sentenças do tipo $--m---i-----$.

Devemos assinalar, portanto, que o modelo aditivo adquiriu significado porque ele próprio pôde em algum momento de nossas vidas ser interpretado

como modelo abstrato apoiado em uma realidade imediata, na qual, por exemplo, “dois pirulitos, reunidos a três pirulitos, resultam em cinco pirulitos”.³

2.3.2 O caso dos números atômicos

Nosso segundo exemplo apresenta uma situação explorada muitas vezes junto a professores e em salas de aula do ensino fundamental. Também neste caso, a atribuição de significados revela-se positiva para a compreensão e performance dos alunos.

Como autor de livros didáticos, Luiz Márcio Imenes mantém freqüentes contatos com professores de matemática do ensino fundamental e médio. Ele nos relatou uma atividade oral que costuma realizar em suas palestras. A proposta tem algo de abstrato e fantasioso, mas atrai atenção.

O ponto de partida consiste em eleger o número natural “mais importante”, aquele capaz de gerar os demais. Os professores, pensando em adições, sugerem rapidamente o número 1, uma opinião que parece inspirada nos antigos pensadores gregos, que viam na unidade a origem de todos os números. De fato, esse número surge, digamos assim, como o “pai de todos” porque $1 + 1 = 2$, $1 + 1 + 1 = 3$ e assim por diante. No entanto, o que ocorre quando se considera apenas a operação multiplicação?

Nesse caso, o número 1 parece estéril, porque nenhum outro resulta dele. Com alguma ajuda, alguns professores percebem que o número 2 gera infinitos outros: $4 = 2 \times 2$, $8 = 2 \times 2 \times 2$ e assim por diante. Ele não gera, porém, todos os números. Logo, descobre-se que 3 exerce papel similar e que 2 e 3 juntos geram muitos números tais como 6, 12 ou 18. A partir das intervenções do palestrante vai se alargando o conjunto dos geradores, incluindo 5 e 7. Somente nessa altura e, às vezes até mais tarde, o público começa a perceber que os geradores de todos os números naturais, com exceção de 0 e de 1, são os números primos.⁴

³ Nesses parágrafos nos referimos a dois tipos distintos de modelos. O modelo aditivo representa o sistema formal ou é uma de suas interpretações. Ele, por sua vez, é um modelo matemático da realidade sensível, aquela em que se somam quantidades de objetos.

⁴ Consideramos o mdc pouco importante (em 1.1.1), mas estamos valorizando os números primos. Não haveria aqui uma certa incoerência? De acordo com a tradição, a resposta é negativa. O conceito de número primo é central para a teoria básica dos números enquanto o mdc tem apenas o papel de coadjuvante. Em

Por que os professores presentes na atividade demoram tanto para perceber a presença dos números primos? Será possível que ignorem o papel desses números, que há tantos anos figuram em suas aulas? No entanto, isso acontece freqüentemente, constituindo mais uma evidência em apoio da idéia de que os significados dos objetos matemáticos estão ausentes do ensino e da aprendizagem.

A definição de primo (número natural maior do que 1 que tem dois e apenas dois divisores distintos) fornece um significado literal do conceito, mas não nos informa acerca de sua relevância. Por que se interessar por números de dois divisores, relegando os de três ou cinco divisores ao anonimato? Se houvesse o hábito de interrogar o texto matemático, buscar suas motivações, talvez a inocente definição revelasse seu propósito ou sentido. No entanto, alunos do ensino fundamental e professores educados na rotina atual dificilmente o fazem.

O significado profundo, que revela o papel dos primos na teoria dos números, vem do teorema fundamental da aritmética: *Todo número natural maior do que 1 e não primo pode ser expresso como produto de números primos de maneira única, exceto pela ordem dos fatores.* Conviria que os alunos apreciassem o teorema, porque usam certos procedimentos envolvendo os primos (como o algoritmo de cálculo do mínimo múltiplo comum) que só se tornam lógicos, não arbitrários, como decorrência dele. No entanto, embora o enunciado do teorema seja inteligível, a linguagem formal com que é enunciado oculta aquilo que os jovens alunos deveriam ver.

Acreditamos que a dificuldade seria resolvida se os números primos fossem abordados de maneira a enfatizar seu significado como geradores dos demais números. Trata-se do significado contido no teorema, mas que deveria surgir sob outro aspecto, acessível a alunos de, digamos, 12 ou 13 anos de idade.

A possibilidade, que já testamos muitas vezes, consiste em partir da atividade oral descrita, complementada, após alguma discussão, por uma

certo momento, porém, ele adquire destaque, justamente na demonstração do teorema fundamental da aritmética (ver 3.2.3). Tendo em vista a concepção de rede, não excluimos a possibilidade de inverter a importância relativa desses dois conceitos, mas ainda não encontramos exemplo na literatura matemática.

metáfora. A idéia é simples o suficiente para figurar em textos dirigidos ao ensino fundamental, como, por exemplo, no texto didático que elaboramos junto com Imenes [29]. Lá se diz que os números primos podem ser imaginados

... como os átomos que formam toda a matéria existente. Qualquer ser mineral, vegetal ou animal é formado por átomos. (...) De forma similar, qualquer número natural composto é formado pela multiplicação de primos. (p. 17)

A metáfora atômica ilumina a faceta mais importante dos números primos. A compreensão de que eles são geradores dos demais números pela multiplicação orienta a dedução de uma série de teoremas da teoria dos números, ou a descoberta de vários fatos sobre múltiplos e divisores. Ela ainda justifica o nome primo, que significa primeiro, denominação razoável para os primeiros em ordem de importância, uma vez que geram os demais.

A metáfora também se mostra etimologicamente adequada porque Leucipo e Demócrito conceberam os átomos como as partículas indivisíveis (indivisíveis como os primos!) que formavam toda a matéria. Além disso, em nossa opinião, o conceito de primo deve ter contribuído para os filósofos citados conceberem a idéia de átomo. Assim, nos dias atuais, usar os átomos na compreensão dos primos, expressaria uma forma de justiça poética.

Certamente não pretendemos que a específica relação entre primos e átomos constitua condição necessária para a compreensão do papel central desses números, tanto no caso dos matemáticos fundadores da teoria dos números, como para os estudantes universitários atuais. No entanto, muitos de nós, ao demonstrar um teorema ou resolver um problema envolvendo os primos, recorreremos a alguma formulação mental equivalente a essa idéia. Trata-se, em nossa opinião, de uma metáfora forte e especialmente útil no ensino fundamental, opinião corroborada por professores adotantes do livro didático acima mencionado. Outra consequência do paralelismo que estabelecemos entre números primos e átomos está na percepção de que, quando se concebe o conhecimento em termos de rede, as metáforas ganham status de recurso fundamental na produção de significados.

2.3.3 O caso do logaritmo

Discutindo esse tema abordaremos significados que aproximam a matemática dos fazeres humanos, lhe dão sentido e valor educativo. Escolhemos o exemplo motivados pela recente publicação, em um dos mais importantes jornais do país, de um artigo cujo título continha a palavra logaritmo, revelando desde o início, a busca do sentido do conceito.

Antes de tratar do texto referido, vejamos como se aborda o logaritmo em nosso ensino médio. Há o costume de definir logaritmo de um número real positivo em termos da potenciação: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$, com $b > 0$, $b \neq 1$ e $a > 0$. Em seguida, são propostos exercícios pedindo o valor do logaritmo de alguns números em certas bases, ou o valor do número cujo logaritmo em certa base é conhecido etc. Na seqüência, mostram-se as propriedades do logaritmo e a função logarítmica. A partir desse ponto, os alunos passam a resolver uma série de equações e inequações logarítmicas de tipos diversos.

Acontece de estudantes, e até professores, concentrados nos detalhes técnicos, perderem de vista os significados envolvidos, acabando por se esquecerem até mesmo de que o logaritmo é um expoente. A situação parece ser tão freqüente que foi tomada como emblemática pela jornalista Marilene Felinto, em uma de suas habitualmente ferozes apreciações da realidade em que vivemos, quando intitulou um artigo com a pergunta *Para que serve o ensino médio do logaritmo?* [30]

Ela não questionava o ensino de um tópico específico. Na verdade, investia contra todo um sistema educacional que oferece apenas informações circunstanciais, desligadas tanto das necessidades práticas quanto de reflexões teóricas que auxiliam a compreender realidades físicas ou sociais.

O aluno pode até saber – e freqüentemente sabe – resolver uma equação logarítmica dada, mas não sabe para que serve aquilo na vida prática (...)

Dito de outro modo, o logaritmo é apresentado apenas com um significado imediato, insuficiente para torná-lo significativo, situação similar àquela observada no caso dos números primos. Esse significado literal recebe menção no artigo,

como se fosse o único. Na verdade há outros, um deles referente ao papel histórico e social do logaritmo, que apresentaremos logo a seguir. Se houvesse recebido essas informações em sua vida escolar, talvez a jornalista escolhesse exemplo distinto. No entanto, o sentido dos objetos matemáticos não pertence ao texto mais ou menos formal dos livros didáticos, nem ao discurso dos professores. Claro que há exceções, pois o sentido histórico do logaritmo já era tomado como ponto de partida de seu estudo em um livro didático inovador do final da década de 1970 [31]. Mais recentemente, em outros textos didáticos, surgem notas a esse respeito, embora não se procure articular a referência histórica com o desenvolvimento do conteúdo matemático. O fato da idéia não se difundir reforça o diagnóstico já citado de que os modos de ensino hegemônicos se fecham nos saberes matemáticos.

Textos de história da matemática nos contam que Briggs, ao visitar Napier, o primeiro inventor do logaritmo, teria declarado solenemente:

*Meu senhor, dispus-me a esta longa viagem especialmente para vê-lo e descobrir por que mecanismos de engenho e arte o senhor foi o primeiro a pensar nesse que é o mais valioso dentre os recursos da astronomia, ou seja, nos logaritmos. (p. 192) [32]*⁵

Nesta saudação vislumbramos a razão de ser do conceito. Os logaritmos foram concebidos para facilitar cálculos numéricos complexos, essenciais para construir tabelas de posições dos astros. Suas conhecidas propriedades permitem transformar, digamos, radiciações em divisões e estas em subtrações, ou seja, cálculos trabalhosos em equivalentes mais simples. Eles surgiram numa época em que os principais recursos de cálculo numérico consistiam nos algoritmos habituais até hoje ensinados na escola elementar, que se difundiram na Europa nos séculos XV e XVI. Depois dos logaritmos, apesar de novos algoritmos trazidos pelo cálculo diferencial e integral, avanços tão importantes para o dia-a-dia só ocorreram com a popularização de computadores e calculadoras eletrônicas.

⁵ Nas eventuais citações de textos em outras línguas, a tradução é nossa.

O aspecto mais relevante desse auxiliar do cálculo não se resumiu no progresso da astronomia, mas, acima de tudo, em sua repercussão no comércio, finanças e práticas científicas das sociedades ocidentais. Acontece que se iniciava a exploração das riquezas do Novo Mundo, com grande expansão da navegação, cujo recurso básico de orientação eram as posições dos astros. Assim, a criação de Napier acabaria favorecendo as viagens marítimas e, em conseqüência, o fluxo de mercadorias, a expansão do comércio, o avanço do capitalismo europeu.

Como se não bastasse, a partir dessa época e até meados do século XX, os logaritmos ainda se constituíram em recurso fundamental para diversos campos. Os cálculos de juros e amortizações, que fizeram possível uma variada gama de operações financeiras, necessárias como suporte da produção capitalista, dependiam das tábuas de logaritmos. O mesmo ocorria com os cálculos essenciais para a indústria e a pesquisa científica aplicada. Lembremos de um fragmento do célebre escritor Primo Levi, que trabalhou muitos anos como químico. Ele narra que ao se transferir de emprego e de cidade em meio à Segunda Guerra Mundial, forçado a carregar apenas o indispensável, junto a uns poucos livros levou sua tábua de logaritmos. [33]

Dessas considerações emerge um novo significado do logaritmo, um significado extra matemático, que, sob certos pontos de vista, é o mais relevante porque mostra o sentido, a razão de ser do conceito em termos sociais e econômicos.

Entretanto, mesmo o significado do logaritmo como facilitador de cálculos talvez soasse insatisfatório para quem contesta o ensino desligado de aplicações práticas. Devemos admitir que o logaritmo tornou-se obsoleto nesse papel, após o advento das calculadoras científicas. Aliás, trata-se de evento que ilustra a mutabilidade da rede do conhecimento, conforme já assinalamos (ver 2.2).

Apesar disso, é possível encontrar outros propósitos nos logaritmos.

A matemática do ensino médio costuma estudar funções, enfocando-as com um pouco de formalismo inútil e técnicas irrelevantes (ver 1.1.5). No entanto, sob outra perspectiva, elas poderiam ser encaradas como o instrumento

matemático adequado para descrever certas variações que ocorrem na natureza e nas sociedades humanas. Aliás, a nosso ver, é com este significado que elas deveriam ser abordadas no ensino médio atual. Por exemplo, o crescimento das populações em relação ao tempo é convenientemente expresso por funções exponenciais ou suas compostas. A função logarítmica, por sua vez, surgiria como aquela adequada para modelar a situação inversa, quando uma variação exponencial provoca mudanças lineares. Nesse caso, teremos uma função em que $f(x^a) = af(x)$ ou, mais geralmente, $f(xy) = f(x) + f(y)$. Esse tipo de função tem aplicações práticas. Por exemplo, o aumento linear nos graus da escala Richter, que avalia a intensidade dos terremotos, depende de um aumento exponencial da energia dispendida no tremor.

Chegamos assim a mais um significado do logaritmo, mas de mesma natureza que o anterior, pois mostra o propósito da criação do conceito a partir de aplicações práticas. Em outras palavras, sua razão de ser decorreria da possibilidade de retratar certas variações que ocorrem na natureza.

Podemos encerrar nossas considerações sobre logaritmo, agora que apresentamos alguns significados que, em nossa opinião, tornariam seu ensino e aprendizado mais interessante e valioso. Advertimos apenas que não buscamos contestar a essência do artigo de Marilene Felinto, segundo o qual, o problema da falta de significado na escola brasileira vai muito além do ensino de matemática.

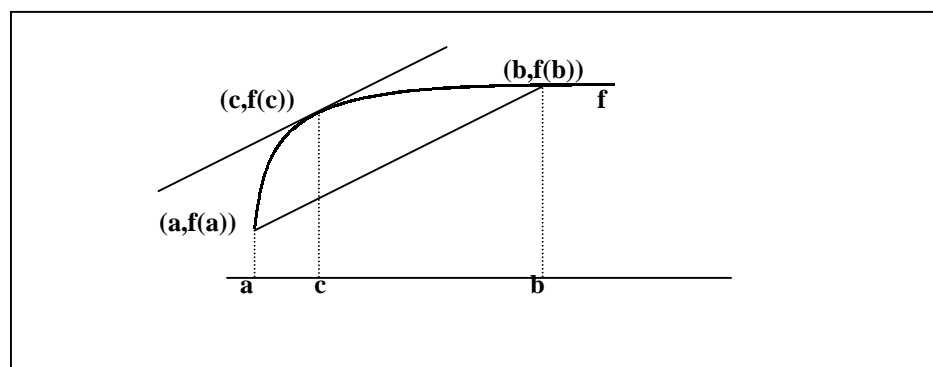
2.3.4 O caso do teorema do valor médio

Neste último exemplo, vamos explorar um significado de maneira a quase substituir a demonstração formal de um teorema, tornando seu enunciado plausível, natural e significativo.

O teorema em questão destaca-se na teoria do cálculo diferencial, quando a disciplina é abordada com certo rigor, demonstrando-se a maioria de suas proposições. Diversos resultados referentes ao comportamento de funções deriváveis resultam do teorema do valor médio. Apesar disso, alguns textos atuais vêm omitindo o teorema, devido à intenção de expor o cálculo diferencial de maneira predominantemente intuitiva. Veja-se, por exemplo, o livro-texto de Simons, que pretende se afastar do ponto de vista especializado e, como o autor

reforça, limitado, do matemático puro [34]. Sem dúvida esta pode ser uma posição correta em muitas situações, seu único inconveniente consistindo em cair em um tecnicismo estéril. Em todo caso, tal discussão escapa a nossos objetivos.

Pensemos no teorema do valor médio e seus significados. Do ponto de vista literal, seu enunciado nos informa que dada uma função contínua e derivável no intervalo fechado $[a, b]$ existe um ponto c do intervalo tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Assim, afirma-se a validade de uma fórmula cujo interesse nos escapa à primeira vista. Que importância tem a derivada, em algum ponto desconhecido, assumir um certo valor? Felizmente, os livros de cálculo interpretam a fórmula geometricamente, a partir da figura seguinte.



A reta que une os pontos de coordenadas $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ tem inclinação (ou coeficiente angular) igual a $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. O teorema afirma que essa reta tem pelo menos uma paralela que é tangente ao gráfico da função, em um ponto $(c, f(c))$. A inclinação da tangente ao gráfico, no ponto considerado, é dada por $f'(c)$, o que acarreta a igualdade na fórmula.

Certamente, a interpretação geométrica traz um novo significado ao teorema, esclarecendo o enunciado e sugerindo intuitivamente sua veracidade, mas não conta tudo. Em particular, por que o teorema se chama “do valor médio”? De que média se trata? Por isso, parece-nos interessante acrescentar outro significado, nem sempre contemplado nos textos de cálculo.

Em nosso esboço de gráfico, apresentamos uma função crescente que pode perfeitamente representar o espaço percorrido por um móvel no intervalo de

tempo $[a, b]$. Nesse intervalo, o espaço percorrido pelo móvel é $f(b) - f(a)$. Portanto, a velocidade média – eis a média, enfim! – do móvel no intervalo de tempo considerado é o quociente entre o espaço percorrido $f(b) - f(a)$ e o tempo gasto nesse percurso, ou seja, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Por outro lado, a velocidade instantânea do móvel em cada instante x do intervalo de tempo é $f'(x)$. Portanto, o teorema afirma que, em algum ponto c do percurso, a velocidade instantânea é igual à velocidade média. Por que isso seria verdadeiro?

Vamos admitir que a velocidade instantânea não seja sempre igual à velocidade média, senão nada haveria a demonstrar. Imaginemos, então, uma velocidade instantânea que ora supera a média, ora está abaixo da média. É óbvio que ela não pode estar *sempre* abaixo, ou *sempre* acima da média.

Temos certeza intuitiva de que a velocidade instantânea dos corpos móveis, sejam eles carroças ou mísseis, não dá saltos bruscos de um instante para outro. (Seriam exceções as naves da ficção científica quando entram nas dobras espaciais?) Assim, em algum momento c , a velocidade instantânea, ao passar de um valor inferior à velocidade média para um superior, ou vice-versa, precisará igualar-se à velocidade média. Nesse instante, teremos $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. É justamente isto o que o teorema nos diz.

A argumentação precedente não só confere novo significado ao teorema como até o demonstra sob certas condições limitadas. Admitimos que os atuais padrões de rigor matemático não permitiriam aceitá-la como demonstração e haveria críticos prontos a afirmar que é o teorema do valor médio que garante a igualdade entre as velocidades em um dado instante e não o contrário. No entanto, a história mostra que foi o conhecimento implícito sobre velocidades que levou à descoberta do teorema, como defende o especialista François de Gandt [35]. Assim, parece-nos que uma argumentação intuitiva como a apresentada, além de legítima, é relevante por si só, alargando o significado do teorema, e vale muito mais que nenhuma demonstração como ocorre muitas vezes.

2.3.5 Algumas observações sobre os significados matemáticos

Acreditamos que os exemplos anteriores tenham esclarecido o que entendemos por significados, completando a caracterização do “conhecer” empreendida neste capítulo.

Supomos ainda que eles mostrem de forma convincente como a apreensão de significados acarreta a compreensão. Admitindo o fato, ocorre-nos perguntar por que motivo isso ocorre.

Sabemos que significados envolvem conexões. Ligamos números primos e átomos, teorema do valor médio e velocidades e até todo um sistema formal com um modelo matemático e este com uma fração da realidade. Aliás, tudo isso em harmonia com a interpretação do conhecimento como rede, na qual os significados constituem conexões entre os nós.

Nos exemplos relativos ao sistema formal, aos primos e ao teorema do valor médio, os significados que propiciam a compreensão são relações entre um domínio até certo ponto desconhecido com outro, mais bem conhecido, dessa forma iluminando facetas desconhecidas do primeiro domínio.

Hofstadter, em obra já citada, interpreta essa relação entre domínios, no caso do sistema formal – m_i e seu modelo aditivo, como um isomorfismo, definindo esse termo aproximadamente, em termos de uma correspondência entre dois domínios que preserva certo tipo de informação [28]. Por exemplo, cada teorema do sistema – m_i corresponde a uma adição, na qual as quantidades de – presentes no enunciado estão representadas adequadamente por números naturais. Da mesma forma, cada fato da geometria euclidiana, se esta é concebida como teoria formal, corresponde a uma configuração do modelo de imagens formado por pontos, retas, circunferências etc.

Observamos que a mesma idéia, isto é, de correspondências preservando informações, ocorre em analogias, metáforas e alegorias, ainda que de maneira atenuada. Esses três conceitos são, às vezes, empregados de maneira tal que se confundem. Mesmo sem intenção de aprofundar o tema, podemos esclarecê-lo um pouco.

Uma analogia é uma relação de semelhança entre uma coisa e outra. Uma metáfora, como figura de linguagem, consiste em transpor o significado de um termo para outro termo ou expressão, em virtude da analogia. Ou seja, as analogias originam as metáforas.

Quando há uma transposição de significados entre objetos e acontecimentos dentro da rede, dizemos que se construiu uma metáfora. Assim, quando nos referimos aos números primos considerando-os números atômicos ou números geradores, construímos metáforas. Se os primos se comportam *como* os átomos, há algum significado que pode ser transportado dos primos para os átomos e vice-versa.

Uma alegoria consiste em alguma produção no campo da comunicação, digamos uma história, uma imagem ou até um carro alegórico de uma escola de samba, que representa um conceito, uma idéia, um acontecimento. Toda alegoria também tem por base uma ou mais analogias e pode-se dizer que acaba funcionando como uma metáfora mais extensa ou prolongada.

No exemplo dos números primos (2.3.2), relatamos uma atividade que começa por uma espécie de história, buscando os números “mais importantes”, que geram os demais, e terminamos por encontrar os números primos. A atividade se baseou, portanto, na busca de números geradores, dos “números pais dos outros”, em suma, em uma alegoria.

Modelos, metáforas e alegorias ocupam parte importante na reflexão de Nilson José Machado, uma vez que ele vê tais entidades como fundamentais na produção de significados dentro da rede [36].

Comentando a idéia de que toda ciência se inicia por raciocínios qualitativos e metafóricos, para depois chegar à precisão do quantitativo, Machado contrapõe a idéia de um constante intercâmbio entre esses campos. Um exemplo desse ir e vir seria a longa evolução que leva da percepção de mudança na natureza (as idéias qualitativas e metafóricas de Heráclito) ao cálculo diferencial (a quantificação da variação de Newton e Leibnitz), do qual nascem as idéias qualitativas da topologia. Isto é, o percurso nasce no qualitativo, alcança o quantitativo, do qual avança para um novo qualitativo.

Especialmente em relação à educação, Machado afirma

(...) na construção do conhecimento, como nos processos de ensino, a primeira como a última palavra parece estar sempre com a metáfora, com a imaginação. (p.39)

Como Machado agrupa modelos, metáforas e alegorias em uma mesma classe, considerando que se tratam de formas similares de produção de significados, adotaremos o mesmo ponto de vista e chamaremos os significados assim produzidos de alegóricos. Os exemplos que apresentamos nos levam a concluir que esses significados, além de produzirem compreensão, influenciam a performance matemática de maneira direta e positiva.

Nos últimos tempos, esse ponto de vista vem sendo reforçado também por estudos psicológicos sobre a aprendizagem.

Rafael Nuñez e George Lakoff, psicólogos cognitivistas, vêm conduzindo investigação sobre a gênese das idéias matemáticas [37]. Concebendo a cognição como resultado de uma interação corpo-mente, em que grande parte dos processos permanece implícita ou inconsciente, esses pesquisadores têm apresentado evidências empíricas de que muitos objetos matemáticos nascem como metáforas de experiências motoras e sensoriais do cotidiano de todas as pessoas, sendo refinados evolutivamente pela cultura. As exceções estariam constituídas por objetos criados especificamente para superar as limitações dos objetos anteriores.

Podemos ilustrar essas idéias examinando alguns objetos matemáticos. A teoria dos conjuntos, por exemplo, se originaria da relação continente-conteúdo que faz parte das experiências elementares de todos nós. É certo que os axiomas da teoria não apresentam vestígios de sua origem, mas talvez todos os aprendizes lancem mão da metáfora continente-conteúdo para compreendê-la. Um possível exemplo das exceções seria a definição de limite com épsilons e deltas, criada justamente para corrigir as limitações lógicas das definições anteriores, em geral mais ligadas à experiência sensível.

Assim, de acordo com Nuñez e Lakoff, boa parte dos objetos matemáticos se origina de metáforas fundamentais, ligadas à vivência humana do dia-a-dia, ou das necessidades de superar essas noções fundamentais. Em consequência, eles sugerem que conhecer matemática depende de dominar metáforas adequadas, o que se encaixa muito bem no referencial de rede.

Além disso, outros psicólogos cognitivistas, bem como pedagogos, vêm examinando o uso da analogia e, por extensão das metáforas e alegorias, como método de ensino. Um trabalho de Marie-Dominique Gineste, de 1997, que informa sobre o “estado da arte” nesse setor, traz também as primeiras verificações experimentais do valor desses recursos no aprendizado [38].

Em seguida, voltamo-nos para outro tipo de significados. Lembrando do caso do logaritmo, somos levados a considerar os significados que lá emergiram como de natureza diferente dos anteriores. Eles também surgiram de conexões, pois referimo-nos a significados que o logaritmo teria para a ciência, a navegação, o comércio, mas será que produzem compreensão e ajudam a performance?

Supomos que sim, por muitas razões. Primeiro, produzem compreensão extra matemática, pois contribuem para o entendimento de outros eventos ou objetos. Em segundo lugar, podem motivar o aprendizado da disciplina, levando indiretamente à compreensão matemática. Além disso, a relação entre o objeto matemático e alguma realidade extra matemática, em certo momento do passado já levou à performance matemática, porque dela resultou a criação do próprio objeto e nada impede que isso volte a ocorrer, à medida que o objeto ganhe novos significados.

A nosso ver, a principal compreensão produzida por esses significados se deve ao fato de conferir sentido ao fazer matemático, na medida em que permitem apreciá-lo sob pontos de vista externos. Como escreveu Vigotsky:

Para compreender a fala de outrem não basta entender as suas palavras – temos que compreender o seu pensamento. Mas nem mesmo isso é suficiente – também é preciso conhecer sua motivação. [27] (p.130)

É óbvia a importância do sentido das coisas porque nós, seres humanos, temos um interesse recorrente em encontrar propósito no mundo em geral. Assim, esses significados adquirem um valor especial, ampliando as possibilidades educativas da matemática, mostrando sua contribuição a outros campos do saber e suas motivações humanas.

Como chamar tais significados? Arriscamo-nos a batizá-los de teleológicos, uma vez que o termo se aplica às finalidades de uma idéia. No caso do logaritmo, eles resultam de aplicações da matemática na realidade, mas isso não constitui regra, pois nem sempre a matemática é criada devido a necessidades do mundo concreto. Por exemplo, um significado teleológico do axioma de Euclides segundo o qual “dois pontos distintos determinam uma e uma só reta” poderia ser uma diferenciação entre retas e demais curvas porque, afinal, dois pontos distintos pertencem a infinitas curvas distintas.

As considerações dos parágrafos anteriores nos levaram a identificar três tipos de significados (literais, alegóricos e teleológicos). Talvez existam outros, mas contentamo-nos com esses que já dão uma boa noção da extensão do tema.

Mais fundamental é assinalar que especialmente os significados alegóricos e teleológicos (e outros que venham a ser identificados), acabam por tecer um discurso que podemos chamar de meta-matemático ou, mais simplesmente, um discurso *sobre* matemática, distinto do discurso *de* matemática com o qual os saberes matemáticos costumam ser apresentados e que todos nós conhecemos.

Talvez o discurso *sobre* matemática constitua exatamente a forma alternativa de aquisição de saberes matemáticos referida na introdução deste trabalho quando citamos a educadora Beatriz D'Ambrosio. Discutiremos mais a idéia logo a seguir.

2.4 Conhecimento do professor: o problema

No início deste trabalho, apresentamos alguns episódios reveladores de certos problemas no conhecimento matemático dos professores. Verificamos que tal ocorrência era compatível com as condições de formação e com os modos de ensino de matemática hegemônicos em nosso sistema educacional. Faltou-nos

esclarecer a natureza dos problemas de conhecimento detectados, que acabaram formulados de maneira vaga. Parece-nos que, agora, dispomos de mais recursos para analisar a questão.

Em nossa apreciação inicial referimo-nos a uma certa limitação na compreensão dos saberes matemáticos ou das relações entre esses e outros saberes, noção que podemos agora esclarecer.

Uma compreensão limitada equivale à aquisição de um conjunto estreito de significados, que, na maioria dos casos, ficam restritos ao campo matemático porque pouco se exploram as conexões das noções matemáticas com outros campos. Considerando nosso entendimento dos significados, todos os problemas sugeridos parecem se enquadrar na carência deles.

Tratar por deficiência o desconhecimento do mdc, por parte dos jovens alunos, sugere que se ignora, não o significado matemático desse objeto, mas seu significado na educação matemática e nos currículos. Por que foi incluído na programação? Que papel representa? Que aplicações propiciaria?

Na raiz de cada “por quê” ausente no ensino, encontramos a falta de algum significado. Por exemplo, um dos significados mais intuitivos da divisão, o de “verificar quantas vezes uma quantidade cabe em outra”, pode explicar parcialmente porque não se divide por zero. Não há como descobrir quantas vezes zero cabe em qualquer outro número. Se esse outro número não é zero, não se obtém resposta alguma; se for o próprio zero, obtêm-se infinitas respostas. Claro que a matemática formaliza as intuições iniciais e aqui se usa implicitamente a idéia de que uma operação deve produzir resultado único.

Quando o papel da semelhança de triângulos na trigonometria passa despercebido, evidencia-se que o significado do que vem a ser uma teoria matemática não foi explorado. Dessa maneira, não se reconhecem a estruturação lógica, certas relações entre conceitos, a forma de encadeamento das noções. Fica prejudicada até a compreensão específica da matemática, de suas formas de produção, de seus métodos de validação dos fatos, da natureza dos problemas de que se ocupa.

O episódio relativo à incógnita, chamada de “coisa”, mostra que significados históricos, como a origem do termo, não são explorados. Mais ainda, até o significado matemático do que vem a ser a solução de uma equação fica em segundo plano.

A função das funções não é levada em conta porque não são abordados os significados extra matemáticos dos objetos matemáticos, ignorando-se, neste caso, o propósito da criação do conceito e suas aplicações.

Finalmente, não se percebe relação entre matemática e sociedade porque o próprio significado da matemática entre os fazeres humanos não se considera.

Essas diversas ausências de significado indicam percursos restritos na rede do conhecimento, estritamente limitados aos nós e conexões matemáticas. Faz falta, sem dúvida, visualizar a rede como um todo, porque, por enquanto, a forma de conhecimento do professor torna muito difícil a compreensão da matemática ensinada na escola fundamental e média, reduz seu valor educacional, sua utilidade prática e o número de interessados em carreiras que dela dependem.

Terminamos o primeiro capítulo interessados em “discutir outras formas de conhecer matemática, permitindo ao professor uma compreensão mais satisfatória da matemática e de seu ensino”. Ao término deste segundo capítulo, parece-nos que as formas alternativas dependem de um tratamento dos significados dos objetos matemáticos ou, dizendo de outro modo, dependem da articulação de discursos *sobre* matemática, idéia que adquire consistência lógica quando se visualiza o conhecimento como uma rede de significados.

Acreditamos que o discurso *sobre* matemática deveria configurar o ensino de matemática nos cursos de licenciatura e procuraremos reforçar essa idéia no decorrer do próximo capítulo.

Capítulo 3

A forma de conhecer do professor

Este capítulo é composto por dois blocos distintos, sumariados a seguir.

(i) Inicialmente procuramos apontar as características desejáveis na forma de conhecer matemática do professor. Partimos das expectativas consensuais sobre sua atuação docente e tomamos como base a concepção sobre conhecer desenvolvida no capítulo 2.

(ii) Buscando maneiras de atingir as características desejáveis, examinamos propostas para a formação de professores e métodos de ensino-aprendizagem que apontam nessa direção. Como adendo, procuramos mostrar que a literatura paramatemática também poderia dar uma contribuição para esse objetivo.

3.1 As características desejáveis

Adotamos a fórmula segundo a qual “conhecer matemática” equivale a compreender saberes matemáticos percorrendo a rede do conhecimento e a mobilizar esses saberes para determinadas finalidades. Bastariam essas idéias para explicitar a maneira de conhecer matemática adequada à atuação docente?

Certamente não, porque mesmo para saberes idênticos há diferentes maneiras de compreensão e mobilização. Para se ter uma idéia, basta comparar textos de física e de matemática quando se referem a objetos do cálculo diferencial e integral. Nos primeiros, encontramos muitos raciocínios baseados em acréscimos infinitesimais de, digamos, comprimentos, denotados por dx . Já alguns autores de textos matemáticos costumam nos alertar que símbolos como dx não significam coisa alguma. Acontece que para os físicos são úteis certos

significados intuitivos, que muitos matemáticos descartaram desde o século XIX por trazerem problemas do ponto de vista lógico⁶.

Em geral, categorias profissionais interagindo com matemática criam maneiras próprias de compreendê-la e usá-la, como já observou Ubiratan D'Ambrósio em mais de uma ocasião [39, 40]. Nessas circunstâncias, a forma de conhecer matemática adequada à atuação docente deve se harmonizar com as atribuições do professor em seu contexto educacional, ou seja, sua compreensão e mobilização de saberes devem atender às concepções atuais sobre sua tarefa.

3.1.1 A tarefa do professor e sua compreensão de matemática

Importância da forma de conhecer

O que se espera do professor de matemática do ensino fundamental e médio? Acreditamos que a resposta seja praticamente consensual. Ele deve promover o aprendizado de matemática de seus jovens educandos como parte de um trabalho educativo global, visando a construção da cidadania. A atual Lei de Diretrizes e Bases da Educação adota tal concepção, referindo-se em seu artigo 2º ao

... pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania ...

Decorre desses princípios que a aquisição dos saberes próprios de cada disciplina não é a finalidade última da educação básica. Os saberes constituem meios para facilitar a inserção positiva do jovem na sociedade e favorecer seu desenvolvimento cognitivo.

Em relação à inserção social, convém que os saberes ensinados estejam conectados à realidade vivida e possam subsidiar estudos posteriores, os quais dependem de fatores muito variados. Nesse contexto, parece evidente que a forma de conhecer do professor exerce papel fundamental, como já se percebe em 1.1.6, por exemplo. Veremos que a forma de conhecer também se revela importante em relação ao desenvolvimento cognitivo do educando.

⁶ No cálculo non-standard, criado por volta de 1970, mas que não faz parte dos currículos de graduação, os

O fator cognitivo nos remete à questão da compreensão. Nas concepções pedagógicas atuais, em especial no domínio lógico-matemático, só se aceita uma aprendizagem com compreensão. Talvez sejamos indevidamente otimistas, mas parece-nos que vai longe o tempo em que os professores de matemática recomendavam a seus alunos que decorassem, porque “um dia tudo aquilo faria sentido”.

No entanto, o que é a compreensão? O discurso dos educadores, especialmente aqueles da educação matemática, freqüentemente se refere à compreensão em termos similares aos que usamos no capítulo anterior. Em particular, ela é definida precisamente como apreensão de significados nos *Parâmetros Curriculares Nacionais* referentes à matemática [2]. Nessas condições, a compreensão não é apenas uma questão de método de ensino como às vezes se pensa. Ela envolve também a forma de conhecer matemática, como veremos.

É verdade que tendências de ensino construtivistas, incluindo as sócio-interacionistas, e socioetnocultural de variados matizes (ver 1.2.2), quase sempre influenciadas pelos estudos da cognição desenvolvidos por Piaget e Vigotsky, apresentam contribuições significativas, em termos de métodos de ensino, para um aprendizado com compreensão. Suas idéias mais aceitas, que já encontram lugar em propostas curriculares de vários países, entre os quais o nosso, pretendem favorecer a compreensão pela colocação de saberes em contextos significativos para os educandos, por sua reflexão (o que inclui a resolução de problemas) e pela interação social (acarretando troca de idéias entre educandos e entre estes e professores).

Essas idéias podem ser ilustradas por um relato que encontramos em uma revista voltada para o ensino fundamental. Trata-se de uma reportagem contando como as professoras Luciana Andrade Moura e Maria Maroni Lopes desenvolveram a noção de ângulo junto com seus alunos de 7^a série [41]⁷.

infinitésimos como dx têm existência lógica. Entretanto, eles não são iguais aos dos textos de física.

⁷ Apesar da falta de modéstia, não resistimos ao registro de que as professoras se inspiraram em um texto paradidático de nossa co-autoria [42].

Tendo notado entre os meninos a mania do “skate de dedo”, brincadeira em que se usam miniaturas de “skates”, as professoras, de início, pediram que os praticantes mostrassem manobras como “dar um 180” (ou seja, efetuar meia volta), “dar um 360” (uma volta completa) etc. e, depois, começaram a perguntar sobre o motivo dessas denominações.

Observamos que o ponto de partida foi um contexto significativo, que acabou por contagiar todo o grupo. A turma reuniu informações provenientes de várias fontes e, com alguma ajuda das professoras, após discussões e argumentações, ou seja, interação social e reflexão, todos juntos desenvolveram as noções de rotação, medida de rotação e ângulo.

Para nós o relato interessa especialmente porque não mostra apenas métodos favorecedores da aprendizagem. Chama a atenção o surgimento da noção de ângulo por um caminho muito diferente daquele preconizado pela tradição euclidiana, que se refere a “semi-retas de mesma origem”. Em vez disso, as professoras usaram o pouco explorado significado de ângulo em termos de rotação.

Concluimos que a forma de conhecer matemática das professoras, evidenciada pelo significado de ângulo escolhido, constituiu fator determinante para propiciar a compreensão. Em geral, o professor consegue favorecê-la ou dificultá-la, dependendo dos significados destacados na abordagem de cada tópico.

Nessa ordem de idéias, convém recordar ainda que os significados dependem da interpretação de cada sujeito, como observamos em 2.2. Em conseqüência, há casos em que não basta a escolha de um bom significado para propiciar a compreensão. A diversidade de interesses, repertórios e meios culturais dos alunos podem recomendar o uso de diferentes abordagens para um mesmo tópico, possibilitando a apreensão de diferentes significados. Ora, a possibilidade dessa variação de enfoque também depende do conhecimento matemático do professor.

Características da compreensão do professor

As considerações precedentes sugerem uma série de condicionantes à ação docente que precisam ser levados em conta na maneira de tratar cada um dos objetos do ensino. Suponhamos, por exemplo, o aprendizado da representação decimal dos números racionais. Nas condições dadas, torna-se insuficiente ter apenas o objetivo de que os alunos dominem leitura, escrita, técnicas operatórias. Sem a pretensão de um levantamento exaustivo, apontamos outros objetivos que o professor deve buscar, de acordo com as concepções atuais.

- Pensando na inserção social do educando, faz-se necessário relacionar a escrita decimal dos racionais a seus usos na realidade, percorrendo entre outras possibilidades os universos das medidas (metros, centímetros, mililitros), das práticas comerciais (quantias em dinheiro, percentuais), dos descritores sociais e econômicos (índices, indicadores).

- Pensando no desenvolvimento cognitivo, visando, portanto, a compreensão, os educandos devem apreender os significados ocultos na escrita decimal, de tal maneira que possam entender os “por quês” típicos desse contexto (Por que $0,2 = 0,20$? Por que, para efetuar $2 \div 5$ com o algoritmo habitual, se começa escrevendo $20 \underline{)5}$?(Note bem, escreve-se 20 e não 2.)

- Tanto o cuidado com a compreensão quanto com o contexto social exigem do professor uma reflexão sobre as abordagens que devem ser adotadas. Tradicionalmente, os significados da representação decimal se apoiam nas frações: 0,1 seria apenas uma outra representação de $\frac{1}{10}$. Atualmente, porém, a reduzida presença das frações no dia-a-dia não recomendaria outras opções? Talvez a escrita decimal devesse nascer da “continuação” de uma divisão como $2 \div 5$. Quiçá seja melhor, dependendo das experiências prévias da turma, partir das unidades monetárias vigentes e de um problema simples, no qual se calcularia o preço de um pãozinho, quando 5 deles custam 2 reais. Quem sabe – terceira possibilidade! – não fosse melhor adotar a estratégia descrita pelo professor Armando Marchesi, em uma obra voltada a experiências de sala de

aula? [43] Esse colega tomou como ponto de partida atividades problematizadoras com calculadora e as discussões resultantes.

- Pensando nos eventuais estudos futuros dos educandos, conviria discutir aspectos problemáticos da representação. Para ilustrar, eis um desafio que provoca tanto celeuma quanto compreensão em muitas salas de aula de 5^{as} ou 6^{as} séries: *Entre os “números com vírgula”, haveria o sucessor de zero?*

- Finalmente, como a matemática é um dos instrumentos da formação básica, portanto geral, vale a pena em certos momentos tratar da história da criação da escrita decimal, suas implicações para o progresso dos cálculos, influenciando no comércio, nas finanças e nas ciências. Dessa maneira se mostra o papel da matemática na construção do mundo em que vivemos.

Todos os aspectos considerados e muitos outros fazem parte do estudo da representação decimal dos números racionais na escola básica. Trata-se de um processo de aprendizagem que pode começar nas séries iniciais, à medida que as crianças percebem a escrita dos centavos, e continuar avançando ainda no ensino médio, quando a reta dos números reais adquire interesse. Um único professor talvez só possa contribuir em poucos momentos dessa trajetória, mas é claro que todos precisam ter uma idéia do processo inteiro, se realmente desejarem compreender o que ensinam, dando sua contribuição didática no momento oportuno.

O caso da representação decimal pode ser generalizado, com as alterações necessárias, para os mais diversos tópicos constantes dos currículos habituais, o que nos permite avaliar um pouco melhor a extensão da tarefa do professor.

Assim, desse exemplo e de sua generalização para outros tópicos, concluimos a necessidade do professor

- *dominar um repertório de significados* dos objetos matemáticos;
- *articulá-los* de maneira a contribuir para que todos alcancem um conhecimento razoavelmente amplo e coerente.

Das mesmas premissas decorre também a necessidade de relacionar saberes matemáticos com outros domínios da realidade, por vários motivos. O sentido da matemática pode ser encontrado fora de suas fronteiras disciplinares e, reciprocamente, a matemática tem a possibilidade de propiciar a compreensão de objetos e acontecimentos de vários outros campos. Além disso, quando se visa uma educação geral, a diversidade dos interesses e possibilidades dos educandos também sugere tratamentos plurais, que ultrapassem os saberes matemáticos. Resumiremos tais idéias dizendo que o professor deve construir uma *compreensão transdisciplinar* da matemática.

Nos parágrafos precedentes apontamos duas características da forma de conhecer matemática do professor, que resumiremos com as “palavras de ordem” *atenção aos significados e compreensão transdisciplinar*. Elas em parte se inspiram nos exemplos de atuação docente que relatamos. Entretanto, não podemos deixar de assinalar que tais formas de atuação ainda ocorrem raramente. É mais comum encontrarmos professores que, fragilizados pela formação inadequada, se rendem às exigências de programas – tomados como a verdade última – e produzem abordagens redutoras, em geral tecnicistas. Mesmo reconhecendo que tudo deveria ser diferente, não encontram opção. Os significados e os sentidos dos objetos matemáticos, bem como a diversidade de interesses dos educandos, sequer são considerados. Pudemos ilustrar tais atitudes em nosso capítulo inicial, no episódio do mdc, na impossibilidade de relacionar cidadania e matemática, nas definições rituais de função abandonadas no restante do curso, em suma, na alienação frente aos saberes ensinados.

Deve haver, portanto, uma característica do perfil de conhecimento que preceda as que já mostramos, ao menos para torná-las possíveis. Vamos chamá-la de postura crítica. O professor necessita de uma *postura crítica relativa aos saberes de sua especialidade*, que lhe permita distinguir noções e práticas fundamentais das simplesmente coadjuvantes, em cada situação de ensino. Ele precisa ser capaz de apreciar a relevância matemática, cognitiva e social dos tópicos, realçando os significados mais adequados às diferentes situações de aprendizagem e à diversidade dos educandos.

Trata-se de condição para forjar projetos de ensino, encontrar as abordagens certas, escolher os recursos didáticos condizentes com cada situação.

A postura crítica apoiada na atenção aos significados e na visão transdisciplinar impedirá que o professor se perca no emaranhado da rede, pois lhe permitirá mapear os percursos relevantes, conforme havia sido previsto em 2.2. Em particular, as três características de conhecimento reunidas constituem antídoto para a “cegueira” apontada por Chevallard (ver 1.1.7).

A escolha do livro didático também se liga à postura crítica. Consideramos o livro como apoio valioso para o trabalho docente, mas é claro que ele não pode dar conta da diversidade das turmas e das condições escolares. Em consequência, ele deve ser usado pelo professor de acordo com seu projeto pedagógico, vez ou outra deixado em segundo plano, jamais convertido em programa a ser cumprido. Somente a partir da crítica, obtêm-se as condições para um uso equilibrado e proveitoso do livro didático.

Pode-se supor que as características de conhecimento apresentadas – atenção aos significados, compreensão transdisciplinar, postura crítica – sejam necessárias apenas em relação aos objetos da matemática elementar, que constituirão tópicos de aprendizagem. No entanto, dificilmente se consegue uma visão global da paisagem quando se permanece na planície. Por exemplo, se for preciso apreciar a relevância de um significado, deve-se ter noção de suas conexões em uma porção ampla da rede do conhecimento matemático. Além disso, ver um objeto elementar como parte da grande rede, permite compreendê-lo ainda mais. Não é verdade que a noção de representação decimal se enriquece quando se estuda a topologia dos números reais? Dessa forma, acreditamos ser necessário que a compreensão apresentada alcance também os tópicos fundamentais da matemática superior. Naturalmente, tudo isso implicaria nova orientação nos cursos de licenciatura.

3.1.2 A questão da cidadania

Dissemos que a ação docente faz parte de um processo que visa a construção da cidadania. Vamos nos deter um pouco nesse tópico.

As mais recentes propostas curriculares (de Espanha, Portugal, Brasil) citam a educação para a cidadania; nossa Lei de Diretrizes e Bases também a menciona. Entretanto, nada disso garante que o professor trabalhe nessa direção. Logo de início devemos perguntar de que cidadania se fala. Afinal, os processos educativos sempre tiveram objetivos sociais e políticos e raramente visaram reforçar a cidadania. Como observou Louis Althusser, o modelo ocidental de escola esteve mais freqüentemente a serviço da ideologia das classes dominantes, o que o levou a colocá-lo entre os aparelhos ideológicos do estado burguês [44]. Por exemplo, a valorização do patriotismo durante boa parte do século XX, serviu em parte para oferecer um inimigo comum a todas as classes, atenuando a contestação aos grupos hegemônicos. (Naturalmente, esse fato não impede que certo tipo de patriotismo tenha aspectos positivos.)

Será que o atual discurso voltado para a cidadania também não visa preservar interesses das classes mais favorecidas? A resposta é afirmativa segundo Iara Cristina Bazan da Rocha em artigo já citado [12]. A educadora supõe que nossos Parâmetros Curriculares levam a um conceito de cidadania que se resume em

... pagar seus impostos, cumprir as leis, votar sempre que seu voto for exigido, ter acesso à saúde pública, à educação pública e à propriedade (caso a possua),

isto é, propõem a cidadania de aceitação das condições vigentes. Parece-nos uma opinião severa demais, mas estamos de acordo que uma educação interessada em manter o status quo dificilmente contribui para a melhoria da humanidade como um todo. Acreditamos na necessidade de buscar um futuro novo, particularmente em nosso país, detentor de uma das mais desiguais distribuições de renda do planeta.

Se não são as leis e propostas curriculares que garantem uma ação docente voltada para a cidadania, serão os métodos pedagógicos ou a própria forma de conhecer seu campo de saber que o farão?

Acreditamos que a forma de conhecer matemática que estamos delineando (conectada a métodos de ensino já citados) tem maior probabilidade de levar o

professor de matemática a educar para a cidadania, em comparação com as formas de conhecer derivadas da formação euclidiana ou da formação tecnicista. Entretanto, parece ainda não bastar como exemplificamos a seguir.

Há alguns anos o prestigioso jornal parisiense *Le Monde* relatou um escândalo no sistema escolar francês. Um professor pediu a seus alunos que calculassem as quantidades de substâncias letais usadas nas câmaras de gás dos campos de concentração nazistas. O pretexto era aproximar a ciência da realidade, o que de certa forma se relaciona com a compreensão transdisciplinar que defendemos.

Teria sido apenas acidente o caso francês? Em nossa experiência de pai de aluno ocorreu fato assombrosamente similar. Tratava-se de uma escola privada, cuja proposta pedagógica destacava noções éticas. Mesmo assim, um professor, nesse caso de biologia, propôs tarefa análoga, sem discutir ou sequer mencionar o imenso crime relacionado à situação.

Nesse episódio não ocorreu escândalo e o colega prontamente admitiu o deslize quando questionado. Entretanto, esses fatos revelam uma tendência recorrente na escola de se limitar a saberes, omitindo valores.

Em conseqüência, a educação para a cidadania depende, antes de tudo, de certo compromisso pessoal do professor. Apontamos como condições mínimas para tal objetivo a defesa de valores democráticos e ações visando a autonomia do educando.

A democracia se justifica porque garante direitos de opinião e participação. Dessa maneira, como observa Marilena Chauí, abre-se a perspectiva de os indivíduos se organizarem para defender seus ideais e propor transformações [45]. A autonomia é necessária porque torna o cidadão capaz de crítica e decisão, o que pode levá-lo a se engajar na busca de melhorias pessoais e sociais.

Desde que aceite essas condições, o professor de matemática pode dar sua contribuição na educação para a cidadania, a partir da forma de conhecer delineada e dos métodos de ensino e aprendizagem já citados. Os professores

que acreditavam que o conhecimento matemático “não tem nada a ver” com tal finalidade (ver 1.1.6), certamente não haviam tido oportunidade para discutir tais idéias.

Os elementos metodológicos já referidos – valorização de contextos significativos, reflexão e interação social – permitem reunir esforço coletivo e contribuição individual na construção do saber matemático, desenvolvendo um convívio democrático entre educandos e a autonomia de cada um. Nessas situações, diálogo e argumentação reforçam a idéia de coletividade mostrando, no mínimo, a necessidade de existir um interlocutor para se alcançar os fins desejados.

Levando em conta que as características da forma de conhecer do professor – atenção a significados, compreensão transdisciplinar, postura crítica – ajudam a implementar os métodos citados, concluiríamos que uma certa maneira de conhecer matemática “tem muito a ver” com a cidadania, na medida que educa, desenvolve o próprio pensamento, em vez de apenas informar ou treinar. Em uma de suas últimas entrevistas, o geógrafo e pensador da realidade brasileira Milton Santos, reforçava essa consideração:

Se você só é treinado, você não está apto a discutir os seu lugar na sociedade e este é o debate central [46].

Talvez se possa avançar mais se a postura crítica do professor se estender a domínios extra matemáticos. Dessa forma, ela se exerceria também sobre elementos da realidade tematizados na aula de matemática. Nesse caso, percentuais, índices, estatísticas nunca serviriam para acostumar os alunos a injustiças e desigualdades, ao contrário, seriam discutidas com intuito de compreender problemas sociais e buscar soluções. Isto ampliaria significativamente a contribuição do professor de matemática na educação para a cidadania.

3.1.3 A tarefa do professor e a mobilização de seus saberes

A compreensão de saberes matemáticos com as características apresentadas deve servir à atuação docente. Os principais problemas que o

professor deve enfrentar pertencem aos domínios pedagógicos e não aos da matemática.

Entretanto, o conhecimento matemático dos alunos, que o professor busca ampliar, também se compõe de compreensão e mobilização de saberes. Esta, no caso dos jovens educandos, se volta em grande parte para a resolução de problemas matemáticos, com várias finalidades. Muitos problemas serão enfrentados porque servem ao desenvolvimento cognitivo; outros, por constituírem base para aquisição de saberes específicos (o professor pode estar preparando futuros engenheiros ou agrimensores ou técnicos em eletrônica); outros ainda, devem ser considerados pelo seu eventual uso no dia-a-dia de qualquer membro de uma sociedade moderna.

Assim, justamente a mobilização de saberes na função docente, torna necessária uma mobilização auxiliar, em setores exclusivamente matemáticos. No caso dos problemas, é preciso que o professor *mostre uma performance razoável no campo de problemas relativo a cada tópico matemático que aborda com seus alunos.*

Aprofundando a última consideração, observamos que os tópicos curriculares se transformam com o tempo e que problemas do dia-a-dia, originados por abordagens transdisciplinares, podem ter caráter absolutamente inusitado. Isso indica a necessidade do professor ter alguma experiência no enfrentamento de problemas novos. Isto é, não se fixar apenas nos problemas típicos de objeto de ensino, os quais, afinal, acabam deixando de ser problemas, convertendo-se em meros exercícios solucionados pela aplicação de métodos automatizados.

Além disso, vez ou outra, a tarefa do professor exigirá que ele próprio crie problemas, jogos, textos, ou ainda que investigue objetos matemáticos. Todo esse trabalho deverá resultar em organizações teóricas destinadas a promover certos aprendizados.

Os dois tipos de atividades abordados – resolução de problemas novos, elaboração de organizações teóricas – envolvem, em maior ou menor grau, a

produção de saberes matemáticos. Apresentamos, portanto, mais uma forma de mobilização de saberes voltada para o setor matemático.

Ao resolver problemas novos e produzir algum saber matemático, o professor estará sendo um pouco um matemático, sem pretender exercer a atividade no mesmo nível dos profissionais. Imaginamos que todos possam ser assim e desejamos o mesmo em relação a nossos alunos. Nossa experiência, e a de outros colegas, sugerem uma infinidade de situações nas quais descobrimos ou redescobrimos, criamos ou recriamos pequenas gotas do oceano matemático. Um caminho novo para demonstrar uma antiga fórmula, um problema inusitado surgido em sala de aula que não figura nos compêndios, uma indagação sobre uma regularidade específica que leva a uma curiosa propriedade, constituem alguns dos momentos que nos levam a produzir matemática.

O resultado dessas experiências complementa a compreensão da matemática, permitindo apreender significados implícitos, contribuindo também para a autonomia do professor.

3.1.4 Considerações complementares

O professor de matemática do ensino fundamental e médio deve ter uma compreensão dos saberes matemáticos voltada para seus significados, com uma visão transdisciplinar e uma postura crítica. A mobilização desses saberes dentro da matemática se destina à resolução de problemas elementares típicos e a alguma produção matemática (problemas novos, organizações teóricas etc.). Os elementos assinalados levam o professor a possuir – lembrando a caracterização de conhecimento *sobre* e *de* matemática na parte final de 2.3.5 – amplos conhecimentos *sobre* matemática articulados a razoáveis e necessários conhecimentos *de* matemática.

Resumimos assim as conclusões obtidas no exame da forma de conhecer do professor. Para ressaltar sua especificidade, consideramos a seguir sua relação com a idéia de rede e com outras maneiras de conhecer.

A rede e o perfil de conhecimento

Insistimos que a forma de conhecer delineada se apoia na noção de conhecimento como rede de significados. A maneira tradicional de ver o conhecimento, em especial o de natureza científica, é disciplinar, valoriza somente os significados literais e, no caso da matemática, não vislumbra a possibilidade de outros pontos de vista – históricos, sócio-políticos, existenciais – sobre seus saberes. A matemática, concebida isoladamente, distante dos fazeres humanos, pode ser idealizada, imaginada neutra e absolutamente objetiva, o que envolve, a nosso ver, um reducionismo nocivo a seu aprendizado e uso.

A concepção de rede permite uma visão aberta da matemática, ligando-a com diversas instâncias do fazer humano. Torna possível, então, explicitar noções como postura crítica, visão transdisciplinar ou apreensão de significados relevantes. Admitimos que tais idéias têm sido apresentadas várias vezes, independentemente da concepção de rede, mas, talvez devido à falta dessa base epistemológica, raramente se traduzem em ações concretas.

Um único exemplo não prova nossa afirmação, mas pode ilustrá-la muito bem. Relatamos a seguir um episódio ocorrido em uma reunião com um grupo de professores, todos com excelente domínio técnico da disciplina. O objetivo era traçar a programação de uma escola no curso médio.

Em certo momento, os colegas expressaram sua desconformidade com o ensino de determinantes. Julgavam tratar-se de tópico de pouca utilidade na resolução de sistemas de equações, praticamente desnecessário para a formação do aluno do curso médio e lamentavam a obrigação de abordá-lo.

Nessas condições, sugerimos que se limitassem a discorrer sobre a origem do objeto em questão. Poderiam contar a história dos esforços de matemáticos do passado no sentido de encontrar uma maneira automática, um algoritmo, para resolver sistemas lineares. Mostrariam como a questão foi solucionada em sistemas de ordem dois, resolvendo um sistema cujos coeficientes fossem literais. Talvez devessem também fazer o mesmo com sistemas de ordem três, realçando os padrões que levaram ao conceito de determinante. Terminariam dizendo que esse objeto tinha se revelado pouco útil para a finalidade original, pois a resolução

“automática” pretendida conduzia a cálculos excessivos, mas que havia sido aproveitado em outras situações, mais especializadas, que não interessavam no curso médio.

Nossa proposta causou decepção. Não houve comentários imediatos, mas, em outra ocasião, os professores explicaram que ensinavam matemática, não eram contadores de histórias, não viam sentido em abordar um tópico omitindo regras e definições precisas.

Era verdade, havíamos proposto exatamente uma história, até mesmo superficial, mas que expressava um significado fundamental desse objeto matemático. A abordagem era coerente com a concepção de rede, ao revelar significados não explícitos, situados fora do domínio matemático e ao apresentar uma crítica do próprio saber discutido. Ademais, como a idéia de rede permite detalhar os tópicos em diferentes escalas (ver 2.2), tínhamos proposto uma abordagem mínima, de acordo com o desejo do grupo.

A incompreensão dos colegas, sua tácita oposição a nossa sugestão, resultou, em nossa opinião, da permanência de uma visão cartesiana de conhecimento, exclusivamente disciplinar, centrada na matemática, ordenada e linear.

Comparando perfis de conhecimento

Na caracterização do “conhecer”, começamos por considerar o trio Fulano, Beltrano, Sicrano e suas relações com os saberes musicais (ver 2.1). Como se relaciona a forma de conhecer do professor, tal como delineada, com a do trio?

Desejamos que o professor se assemelhe a Fulano na apreensão e apreciação de significados, mas mantenha diferenças em termos de mobilização dos saberes compreendidos. Enquanto Fulano consegue apenas desempenho didático, esperamos que o professor vá além. Como condição para seu desempenho didático ele deve produzir saber matemático, ainda que em pequena escala.

Já em relação a Beltrano, o hábil pianista com lacunas de compreensão, esperamos que o professor tenha apenas diferenças. Ele não deve ignorar

significados fundamentais, mas, em contrapartida, pode exibir habilidades técnicas apenas razoáveis, sem necessidade de se tornar um virtuose.

Também na comparação com Sicrano, cujos conhecimentos são fundamentalmente implícitos, o professor deveria se diferenciar. Ele precisa de conhecimentos explícitos e da capacidade para expô-los em várias linguagens, condição para orientar explorações e debates em torno dos significados matemáticos. É certo que os saberes implícitos – “feeling”, intuição, “insight” – seriam valiosos para o professor, especialmente ao enfrentar novos problemas matemáticos, mas tal possibilidade depende de fatores individuais ligados a esforço e talento.

Outra comparação de interesse pode ser estabelecida entre o conhecer que delineamos para o professor e aquele que se espera do bacharel em matemática pura ou aplicada, especialmente porque já se assinalou a semelhança entre cursos de bacharelado e licenciatura em algumas universidades (ver 1.2.1).

Como, ao menos em tese, o curso de bacharelado visa formar futuros pesquisadores, que alargarão as fronteiras do conhecimento matemático, a forma de conhecer matemática do bacharel difere daquela do professor em pelo menos dois aspectos.

O primeiro se refere aos significados não literais. O professor os utiliza explicitamente como explicamos em parágrafo anterior. O bacharel, também os usa, por exemplo, na resolução de problemas, na compreensão de teorias. Como afirmou Gauss, citado por Ian Stewart, em matemática importam *non notationes, sed notiones* (não símbolos, mas sim idéias) [47]. No entanto, o bacharel pode usar os significados apenas implicitamente. Eles não aparecem na comunicação matemática acadêmica, que registra somente significados literais. Nem estão presentes nas eventuais atividades docentes, pois o bacharel costuma se dirigir a educandos com certa maturidade, provavelmente com competências voltadas para o raciocínio lógico-matemático, que podem construir suas próprias metáforas e alegorias.

O segundo aspecto se manifesta na mobilização de saberes. Espera-se do bacharel um desempenho superior na resolução de problemas e produção de saberes matemáticos, o que não é essencial para o professor. Diríamos que o bacharel se prepara para ser virtuoso enquanto o professor pretende orientar; ou então, que o bacharel está para o atleta assim como o professor está para seu técnico. Em conseqüência, o curso de bacharelado deveria valorizar mais as atividades de resolução de problemas que o de licenciatura. Entretanto, parece que isso pouco acontece em qualquer dos dois cursos.

Provavelmente, outras distinções poderiam ser assinaladas, caso continuássemos a análise. Por exemplo, idéias como visão transdisciplinar e postura crítica parecem estranhas a um curso de bacharelado. Entretanto, talvez se devesse levar em conta certos perigos de uma especialização excessiva. Nossa experiência pessoal indica que há bacharéis que, após mestrado e doutorado, acabam se assemelhando aos jogadores de xadrez descritos pelo poeta:

Quando o rei de marfim está em perigo,

Que importa a carne e o osso

Das irmãs e das mães e das crianças? [48]

Profissionais tão isolados, dificilmente contribuem para a educação em geral e, em particular, para a formação de professores. Quando se ocupam das disciplinas específicas de matemática em cursos de licenciatura, acabam obtendo resultados pouco animadores.

3.2 A construção das características desejáveis

Tendo delineado um perfil de conhecimento matemático adequado à tarefa do professor de matemática, surge naturalmente a questão de como atingi-lo. Como a formação básica do professor ocorre no curso de licenciatura, devemos considerar o desenho desse curso e seus métodos de ensino.

Evidentemente, não esperamos que o curso de licenciatura forme integralmente o perfil desejado, tarefa na verdade infundável, que a prática e o

estudo irão delineando ao longo do tempo. O curso deve, porém, permitir a aquisição das concepções fundamentais que orientarão esse contínuo aprimoramento.

Examinando a literatura atual da educação matemática brasileira com foco na licenciatura, encontramos – até com alguma surpresa – propostas e experiências em andamento que fazem o curso de formação aproximar-se bastante dos objetivos pretendidos.

A seguir, apontaremos exemplos dessas situações colhidos em trabalhos recentes. A apresentação não é exaustiva, limitando-se a indicar tendências, ou, mais propriamente a única tendência alternativa ao modelo habitual.

3.2.1 Observações sobre disciplinas e projetos de cursos

Alguns anos atrás havia a impressão de que o sentido dos saberes matemáticos do curso de licenciatura podia ser evidenciado pela história da matemática. Por exemplo, em uma entrevista que figura na tese de doutorado de Carlos Roberto Vianna, a professora Elza Gomide defendeu essa opinião [49]. Como ela dirigiu o Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, contribuiu para a formação de vários licenciados, bacharéis, mestres e doutores em matemática e, ainda, traduziu para nossa língua o clássico de Carl Boyer sobre história da matemática, sua opinião merece atenção.

Entretanto, o tempo trouxe uma visão com mais nuances. Em relação à história, um estudo de Antonio Miguel mostra prós e contras de seu uso para a aprendizagem e destaca a inexistência de textos abordando em primeiro plano a epistemologia dos objetos matemáticos e os contextos sociais, políticos, culturais ou existenciais que os originaram [50]. Ademais, já vimos que a história pode realmente desvendar significados, mas não todos eles (ver 2.3).

Atualmente, busca-se o sentido da licenciatura colocando em evidência os saberes matemático-pedagógicos produzidos pelo movimento de educação matemática nas últimas décadas, o que pode incluir a história da matemática.

Um exemplo típico é relatado por Maria Laura Magalhães Gomes em artigo publicado em 1997, ao tratar das disciplinas *Matemática e Escola I, II e III*, introduzidas desde 1987 na programação do curso de licenciatura da Universidade Federal de Minas Gerais [51]. Abordando conteúdos habituais do ensino fundamental e médio por meios variados (análise de textos, livros didáticos, vídeos educativos, além de seminários e visitas a escolas) e ministradas por dois docentes, um da área de educação, outro do departamento de matemática, as disciplinas estabelecem pontes entre os saberes matemático e educacional. As monografias que os alunos devem elaborar nessas disciplinas, muitas voltadas para tópicos matemáticos, constituem momentos de produção de saberes matemáticos.

Intenções similares guiaram a reformulação do curso de licenciatura do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, conforme relatam Vânia M. P. dos Santos-Wagner, Lilian Nasser e Lúcia Tinoco em um texto de 1997 [52]. O processo, que vem desde 1987, deve muito a estágios dos licenciandos no Projeto Fundão. Nesses momentos, eles investigam e testam propostas para ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos em várias escolas públicas. Também têm importância disciplinas novas na programação da licenciatura, como *Evolução da Matemática*, exemplo de um uso aberto e profícuo da história que aborda aspectos sócio-histórico-culturais dos objetos matemáticos, e *Matemática na Escola*, que tematiza a relação dos alunos do ensino fundamental e médio com o conteúdo matemático que recebem.

O projeto pedagógico do curso de licenciatura da Universidade Estadual de São Paulo, campus de Bauru, implementado em 1991, também teve como referencial a educação matemática, conforme relatam Antonio Vicente Marafioti Garnica e Ronaldo Marcos Martins em artigo de 1997 [53]. Buscou-se que as disciplinas tivessem

... um enfoque diferenciado da visão meramente conteudística, articulando-as no sentido de levar à apreensão dos conceitos de Matemática e das Ciências da Educação do ponto de vista de suas estruturas fundamentais.

O curso de licenciatura da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, oferece mais um exemplo na mesma ordem de idéias, talvez mais enfático que os anteriores, de acordo com Vera Clotilde Carneiro em artigo publicado em 2000 [54]. No currículo implantado em 1993, as disciplinas ligadas à educação matemática contribuem com mais de metade da carga horária, dividindo-se entre as que tratam de questões pedagógicas e epistemológicas da matemática elementar, as que abordam pesquisas avançadas de educação matemática e as voltadas para práticas de ensino e reflexão sobre estas.

Na mesma linha, embora mais radical, colocamos o curso de licenciatura sugerido por Ubiratan D'Ambrosio, em uma entrevista concedida a Célia Maria Carolino Pires e publicada em 1999 [55]. O destacado papel de D'Ambrosio na educação matemática em nosso país e fora dele, nos leva a ouvi-lo atentamente. Ele descreve um curso referenciado na educação matemática, especialmente na tendência etnomatemática, incluindo disciplinas voltadas para uma cultura da paz, o exame crítico da atualidade a partir da mídia, a história da matemática, a etnomatemática com ênfase nas culturas indígenas brasileiras, sociologia e política da educação. Naturalmente, há disciplinas específicas do saber matemático, mas um tanto limitadas: teoria dos números básica, geometria, construção dos conjuntos numéricos, idéias do cálculo, sem preocupação com técnicas. A nosso ver, os conteúdos matemáticos propostos parecem insuficientes para a formação do professor. Entretanto, as idéias apresentadas por D'Ambrosio valem por iluminar aspectos fundamentais da licenciatura. Estão claramente presentes a visão transdisciplinar da matemática e uma postura crítica que abarca a sociedade como um todo. Acima de tudo, o curso tenderia a formar professores que educariam por meio da matemática, em vez de professores que apenas ensinam fatos e procedimentos da matemática.

Supomos que os exemplos examinados bastem para dar uma idéia da tendência de uma licenciatura referenciada na educação matemática. Convém, ainda, assinalar seu razoável sucesso, no sentido de formar professores mais competentes, com boa reputação no mercado de trabalho. No trabalho já referido, Carneiro afirma que a nova licenciatura produz além de um professor, um pesquisador da aprendizagem, que se reconhece possuidor de saberes

específicos, o que resgata a dignidade profissional, que tanto vinha decaindo desde a década de 1970 [54].

Os referenciais da educação matemática têm sido aplicados ainda para ampliar saberes e perspectivas de professores em exercício, oriundos da licenciatura curta (ver 1.2.1). Um testemunho positivo pode ser encontrado na obra *Transformações no ensino de Matemática*, coordenada pela diretora do Centro de Ciências Exatas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Tânia Maria Mendonça Campos [56].

Por que motivo cursos que implementam conhecimentos pedagógico-matemáticos fazem o licenciado se aproximar da forma de conhecer que delineamos?

Parece-nos claro que a educação matemática constitui um campo multidisciplinar, uma vez que na busca de recursos para otimizar a aprendizagem da matemática devem ser considerados elementos matemáticos (o conteúdo que se ensina), psicológicos (como se pode aprendê-lo), sociais (relevância social do conteúdo, influências do grupo no aprendizado) e diversos outros.

Dessa maneira, o objeto matemático deixa de ser contemplado isoladamente, passa a integrar uma teia de relações envolvendo saberes de diversos domínios, o que acarreta a atenção aos significados relevantes, a visão transdisciplinar e contribui para uma postura crítica sobre conteúdos matemáticos. Dependendo dos meios utilizados nos estudos – determinadas pesquisas, monografias, experimentos didáticos – também se obtém alguma produção de saberes matemáticos.

Assim, projetos de licenciatura similares aos referidos em parágrafos anteriores se constituem em possibilidade concreta para se obter uma forma de conhecer próxima daquela que consideramos desejável, fazendo emergir parte de suas características.

Essa opinião favorável deve, porém, ser contrabalançada por certos fatores negativos. Colocar a educação matemática como referencial da licenciatura não altera o modo euclidiano ou tecnicista em disciplinas estritamente matemáticas,

como cálculo, álgebra, álgebra linear etc. (Uma possível exceção ocorreria quando essas disciplinas fossem tomadas como campo de pesquisa de aprendizagem, conforme sugestão de Carneiro no artigo citado [54]. Outra exceção observamos na proposta de Ubiratan D'Ambrosio, mas esta não se concretizou ainda [54].) Em geral, continua faltando o discurso *sobre* matemática para levar o educando a um novo conhecimento dos saberes específicos. Além disso, no universo de mais de três centenas de cursos de licenciatura, apenas alguns, talvez uma ou duas dezenas, estão sintonizados com as idéias da educação matemática.

Portanto, a forma de conhecer pretendida ainda é um objetivo muito distante. A disseminação da concepção do conhecimento como rede poderia torná-la mais próxima, porque daria um referencial epistemológico para essa maneira alternativa de conhecer matemática.

3.2.2 Observações sobre métodos de ensino e aprendizagem

A exposição euclidiana

A julgar por indícios que surgiram ao longo deste trabalho, salvo as exceções que confirmam a regra, o método de ensino nas disciplinas matemáticas predominante nas licenciaturas de nosso país pode ser resumido em aulas expositivas que gradativamente apresentam um determinado corpo teórico de maneira estritamente linear, ora tendo como base um modo tecnicista de ver a matemática, enfatizando cálculos, algoritmos, métodos de resolução, ora se apoiando no modo euclidiano, partindo dos axiomas e demonstrando cuidadosamente as proposições.

O modo tecnicista estrito, voltado apenas para desenvolver técnicas e cálculos, não se harmoniza com a forma de conhecer delineada neste trabalho e torna-se, além do mais, anacrônico, diante da evolução tecnológica. Já existem calculadoras capazes de realizar todas as operações algébricas, resolver equações dos mais variados tipos – polinomiais, trigonométricas, logarítmicas etc. – derivar e integrar funções, apresentar seus gráficos, dar a solução das equações diferenciais básicas e muito mais. Nem é preciso pertencer ao movimento de educação matemática para descartar a ênfase em técnicas. Na

citada entrevista a Carlos Vianna, a doutora Elza Gomide defende o mesmo ponto de vista [49].

Em troca, a exposição euclidiana deve ser levada a sério. Trata-se da forma oficial ou acadêmica de apresentação dos saberes matemáticos, incluindo em sua estrutura a maneira de validar os fatos matemáticos aceita pela comunidade especializada, isto é, a demonstração. Constitui, além disso, uma conquista do pensamento que tem influenciado significativamente a civilização ocidental nos dois últimos milênios. Assim, não teria sentido privar o professor de matemática de tão importante elemento cultural, ainda mais porque pertence a seu domínio de conhecimento e porque talvez ainda o ignore quando ingressa na universidade, dada a provável hegemonia do modo tecnicista no ensino fundamental e médio de matemática.

Por tudo isso, acreditamos que a exposição euclidiana deve fazer parte dos métodos de ensino na licenciatura, sem esquecer seu peso negativo já discutido (em 1.2.3). Na proposta de licenciatura de D'Ambrósio, já comentada, ele chega a dizer do método euclidiano usado na geometria que

... basta demonstrar, com todos os detalhes e comentários, um teorema [55].

Parece-nos que um teorema é muito pouco, mas outra vez, concordamos com o princípio enfatizado. De maneira nenhuma a exposição euclidiana deveria predominar no estudo dos conteúdos matemáticos da licenciatura.

Aliás, a licenciatura deveria, admitindo-se um mínimo de sensibilidade e sensatez, tomar como ponto de partida o estágio de conhecimento do aluno ingressante. Tendo em vista sua provável “origem tecnicista”, forjada no ensino fundamental e médio, o modo euclidiano logo de início colocaria obstáculos consideráveis a seu aprendizado.

Problemas, problematizações

A origem tecnicista faz com que muitos futuros professores cheguem à licenciatura com a crença de que matemática constitui um acúmulo de fórmulas e

algoritmos e que a atividade de resolver problemas se limita ao uso da fórmula ou do algoritmo “certos”, como observou certa vez Beatriz D’Ambrosio [57].

Nessas condições, algumas sessões de resolução de problemas de matemática elementar, até mesmo em sentido mais restrito que o indicado por Polya, no célebre *A Arte de Resolver Problemas*, já constitui um experiência salutar [58]. Referimo-nos à resolução de problemas algo artificiais, mas engenhosos, com ênfase nos processos resolutivos ou heurísticas.

Esse tipo de atividade tem sido usado no preparo de jovens estudantes do ensino fundamental e médio para as olimpíadas matemáticas, competições freqüentes em vários países. Muitas vezes, acaba formando especialistas em quebra-cabeças, o que não é condenável, mas tem pouco valor educativo, nos termos de uma educação com vistas à cidadania. Entretanto, aproveitada com moderação na licenciatura, faria o futuro professor enfrentar problemas novos, convidando à formulação de estratégias de resolução, promovendo debate de idéias, ampliando as concepções restritas de matemática com que ele chega à licenciatura. Poderia até favorecer uma certa autonomia em relação aos saberes matemáticos, mostrando a possibilidade de atuar matematicamente sem instrução prévia.

Uma proposta mais abrangente que a anterior, consiste em propiciar o aprendizado por meio da resolução de problemas, idéia favorecida por tendências construtivistas e usada no ensino superior em várias áreas, incluindo a medicina. Propõem-se problemas ou questões para discussão em que resoluções e debates levam à compreensão de teorias ou ajudam a construí-las.

Nessa linha de trabalho, podemos citar a gestão de aula à maneira de Lakatos. O célebre filósofo da matemática chegou a propor um modo de ensino que se oporia ao euclidiano, no qual a história das idéias matemáticas forneceria contextos para a reflexão sobre os significados das definições e teoremas. Uma referência ao uso dessa idéia, reportando-se ao ensino superior, encontramos em Davis e Hersh:

O exemplo heurístico de Lakatos, de demonstração e refutações, que foi formulado para a cultura matemática geral, pode ser naturalmente aplicado pelo

indivíduo em suas tentativas de criar matemática nova. O autor tem usado o método com sucesso moderado em suas aulas (p. 329) [23].

Infelizmente, não encontramos exemplos no ensino superior brasileiro.

Duas faces da engenharia didática

A problematização é também o objetivo nos produtos da engenharia didática, uma criação da vertente francesa de educação matemática (*Didactique des Mathématiques*, na denominação de seus autores).

Tais produtos, que se caracterizam por seqüências de atividades organizadas de modo a propiciar o aprendizado de certos tópicos, costumam permanecer dentro das fronteiras do conhecimento matemático, pouco se relacionando com realidades externas e quase nunca colocando em questão os saberes cuja aprendizagem se busca. Entretanto, recentemente, os didatas franceses vêm alargando seus horizontes e incorporando nas engenharias didáticas o recurso ao metac conhecimento matemático, ou, em nossos termos, o uso de saberes *sobre* matemática (conforme explicamos em 2.3.6), de acordo com informações das pesquisadoras Aline Robert e Jacqueline Robinet em um artigo de 1996 [59].

As autoras oferecem como exemplo uma engenharia didática relativa à álgebra linear, proposta pelo didata francês Marc Rogalsky. A referida disciplina, organizou-se por volta de 1930, reunindo conhecimentos dispersos (sobre vetores, geometria analítica, sistemas lineares, determinantes, transformações lineares no plano) em uma estrutura comum, sob uma base axiomática. Tal origem parece causar muitas das dificuldades dos estudantes, porque tendo surgido para unificar distintos ramos da matemática, simplificando sua abordagem, a disciplina não oferece, de início, problemas interessantes ou aplicações motivadoras antes que seu formalismo se torne familiar, mas este surge para os estudantes como esforço inútil, de pouco sentido. Enfrentando tais dificuldades, Rogalsky propôs iniciar o curso por meio de uma reflexão epistemológica, conforme descrevem Robert e Robinet:

O professor explica (por escrito) que essa noção é introduzida para resolver da mesma maneira toda uma série de problemas do mesmo tipo. Propõe, então, a resolução de uma série de exercícios relativos a espaços muito diferentes, recaindo todos, porém, em resolução de equações (...).Essa reflexão precede o enunciado dos axiomas de espaço vetorial, sendo tomada como referência explícita para o curso.

O conhecimento *sobre* também tem sido lembrado em outras engenharias que visam ensino no modo euclidiano. Há interesse em explicitar logo de início o papel de axiomas e das demonstrações, porque até mesmo o ensino francês está contaminado pela tendência tecnicista (ver 1.2.4) e muitos alunos chegam à universidade sem noção do que seria demonstrar um teorema.

A engenharia didática é também, ou principalmente, um método de pesquisa em educação matemática, como nos informa Silvia Dias de Alcantâra Machado em obra dedicada à vertente francesa da educação matemática [60]. Antes de chegar às seqüências didáticas para uso em sala de aula, seu formulador deve pesquisar as origens do tópico de aprendizagem proposto aos alunos. Essa tarefa propicia a descoberta de significados ligados á origem dos objetos matemáticos. Apreender os princípios dessa forma de pesquisa, certamente ajuda os licenciandos a se aproximar da forma de conhecer matemática que delineamos. Provavelmente, os que participam de estágios no Projeto Fundação (ver 3.2.1) usam formal ou informalmente idéias da engenharia didática.

Modelagem

Uma outra forma de problematização, talvez a de perspectivas mais abertas, é a modelagem, o método mais discutido na literatura nacional de educação matemática, com entusiasmados defensores especialmente na tendência socioetnocultural.

Trata-se de procedimento típico da matemática aplicada, consistindo em reduzir um fenômeno da realidade a um modelo matemático, de modo a descrevê-lo ou a solucionar problemas relacionados a ele. Por exemplo, quando se mostra que a variação da população de um país a cada ano, pode ser dada

pelos termos de uma progressão geométrica, cria-se um modelo matemático do fenômeno da variação populacional, como historicamente foi feito por Malthus.

Segundo Rodney Bassanezi, matemático especializado em equações diferenciais e um dos primeiros advogados da modelagem entre nós, seu uso

... conduz para o ensino de conteúdos matemáticos conectados com outras formas de conhecimento. [61].

Algumas das experiências de ensino via modelagem descritas na literatura de educação matemática, particularmente aquelas realizadas em cursos universitários de engenharia ou matemática, chamam a atenção. Dão a sensação de que alunos e professores se engajam vivamente no estudo de realidades próximas de necessidades sociais e econômicas – a capacidade de reciclagem de lixo necessária para uma cidade nos próximos anos ou a distância entre sementes que otimiza a produção de tomates, tudo isso determinado a partir de funções, derivadas e integrais – e de que a matemática é poderoso instrumento de descrição de fenômenos e de previsão de suas condições futuras.

Por outro lado, um estudo de Jônei Cerqueira Barbosa, na época preparando seu mestrado em educação matemática, apresenta as imensas dificuldades para o uso desse método [62]. Professores e alunos se intimidam. O caráter aberto e inusitado do curso torna o professor inseguro, já que ele não pode prever se terá competência ou tempo para enfrentar os desafios que podem surgir. O aluno, acostumado a receber o conhecimento do professor, perde seus referenciais, quase se recusa a aprender. A possibilidade de vários modelos e soluções para um dado problema, a freqüência com que aparecem respostas aproximadas, o caráter secundário da exposição de teorias, constituem outros elementos, que abalam a regularidade e certeza do aprendizado.

Em suma...

As considerações anteriores indicam que nenhum método de ensino e aprendizagem pode ser descartado a priori, exceto aquele decorrente de uma visão absolutamente tecnicista, quando se pretende um curso de licenciatura nos

moldes que procuramos. O emprego de vários desses métodos em algumas licenciaturas faz o ensino se aproximar da forma de conhecer pretendida.

A resolução de problemas na versão mais restrita pode contribuir para a mobilização de saberes na resolução dos problemas habituais ou novos da matemática elementar. Os métodos problematizadores, em especial os inspirados em Lakatos ou no recurso ao metaconhecimento ajudam a desvendar parte dos significados dos objetos matemáticos, em alguns casos dando elementos para uma postura crítica sobre saberes matemáticos. A modelagem, forma de resolução de problemas em contexto real, esclarece especialmente significados decorrentes das aplicações da matemática na realidade, dando sentido à atividade de fazer matemática e favorecendo a visão transdisciplinar.

Nenhum método abarca todas as características da forma de conhecer matemática que delineamos, mas isto se podia esperar. Também não há remédio que cure todos os males. Provavelmente, o uso de diferentes métodos, de acordo com a disciplina, deve ser a melhor contribuição na formação do perfil de conhecimento desejado.

3.2.3 Uma possibilidade pouco explorada: os textos paramatemáticos

Terminaremos o capítulo sugerindo um recurso incomum, que contribui para o licenciando construir a forma de conhecer delineada neste trabalho. Trata-se do aproveitamento das obras paramatemáticas, que, a nosso ver, teriam utilidade no curso de licenciatura como bibliografia para estudo e discussão, além de poderem acompanhar o professor ao longo de sua vida profissional como fonte de aprimoramento constante.

A seguir, procuraremos caracterizar esse tipo de literatura e mostrar sua relevância.

Primeira caracterização

Existem textos cujo objetivo principal, ou até mesmo exclusivo, é tratar de conhecimentos *de* matemática. Referimo-nos a livros didáticos, memórias acadêmicas, artigos em revistas especializadas.

Há também textos *sobre* matemática, que contêm elementos *de* matemática para apoiar suas considerações. Enquadram-se nessa categoria os trabalhos de história da matemática, filosofia da matemática, educação matemática etc.

Consideremos, finalmente, textos que, como os anteriores, reúnem conhecimentos *sobre e de* matemática mas que não ficam circunscritos a campos específicos como filosofia, educação ou história, embora possam abarcar um pouco de todos eles. Chegamos aqui aos textos paramatemáticos⁸. O fato de reunirem conhecimentos *sobre e de* matemática já bastam para explicar nosso interesse por eles.

Parece razoável defini-los como literatura de divulgação científica com foco na matemática. Entretanto, quem colocaria o conhecido clássico de Polya, *A Arte de Resolver Problemas*, uma abordagem das estratégias básicas de resolução, entre os trabalhos de divulgação científica? [58] Mais comum é considerá-lo um ensaio sobre educação matemática, embora, em nossa opinião, se trate de legítima obra paramatemática.

Talvez devêssemos pensar nas intenções que levam o autor a elaborar um texto dessa natureza. Os objetivos quase sempre são:

- apresentar fatos ligados à matemática por meio de narrativas;
- registrar biografias de matemáticos;
- discorrer sobre curiosidades, propor problemas matemáticos surpreendentes;

⁸ Um tipo de obra aparentado, cujo público alvo é o aluno do ensino fundamental e médio é o livro paradidático, mais próximo da programação escolar, como indica o nome.

- interpretar teorias matemáticas, mas sem formalismos, sem a organização dos livros didáticos ou a exaustividade de compêndios.

Narrativas levam a romances, contos, ou, em geral, a obras ficcionais. Biografias ou autobiografias constituem outro gênero inconfundível. Curiosidades, problemas e interpretações de teorias poderiam ser tomados como ensaios, que o Houaiss, na edição de 2001, define como

... prosa livre que versa sobre tema específico, sem esgotá-lo, reunindo dissertações menores, menos definitivas que as de um tratado formal, feito em profundidade.

Certamente continuamos sem definir a obra paramatemática, mas sabemos que toma a forma de ficção, biografia ou ensaio. Procuremos mais exemplos.

O clássico de Malba Tahan, *O Homem que Calculava* [63], foi elaborado como romance pontilhado de problemas e raciocínios interessantes, assim como o recente best-seller francês *O Teorema do Papagaio*, de Denis Guedj [64], intriga juvenil de aventura que conta ao mesmo tempo a história da matemática.

Nessas obras, os fatos ligados à matemática se destacam mais que outros elementos da narração, como enredo e personagens. Eis aí uma característica da obra ficcional paramatemática, que, porém, não deixa de ter exceções. O romance *Tio Petrus e a Conjectura de Goldbach* do diretor de cinema e bacharel em matemática Apostolos Doxiadis [65], constitui trabalho fundamentalmente literário, voltado para a história de uma vida misteriosa, com a matemática em segundo plano. No entanto, as percepções matemáticas que o autor faz aflorar aqui e ali, ao longo do texto, permitem incluí-lo também no rol das obras paramatemáticas.

Dentre as biografias, citamos *O Homem Que Só Gostava de Números*, a vida do célebre matemático contemporâneo Paul Erdős, na visão de Paul Hoffman [66]. Certamente pode haver biografias de matemáticos que não consideraríamos obra paramatemática, por falta de noções *sobre e de*

matemática, mas este não é o caso do trabalho citado, porque sempre nos ensina algo sobre a teoria dos números.

Os textos paramatemáticos mais comuns pertencem ao gênero ensaio, no qual reunimos os trabalhos em torno de curiosidades e os que interpretam teorias. A copiosa produção de Martin Gardner, com títulos (na edição espanhola) como *Carnaval Matemático* [67], *Circo Matemático* [68], *Nuevos pasatiempos matemáticos* [69], constitui exemplo bem conhecido de coletânea de curiosidades e problemas, verdadeiro bric-a-brac de matemática nem sempre fácil. Para exemplificar as obras interpretativas, campo de enorme diversidade, podemos citar *A Experiência Matemática*, o best-seller de Davis e Hersh [23], que é precisamente uma abrangente coleção de ensaios, alguns filosóficos, outros matemáticos, o célebre *Provas e Refutações* de Lakatos [21], uma visão profunda de como se produz matemática, ou uma obra de objetivos menos épicos como *2+2 As aventuras de um Matemático no Mundo da Comunicação*, de Luiz Barco, cujos ensaios, abordando problemas curiosos e aspectos da matemática em nosso dia-a-dia, revelam um mundo rico e insuspeitado [70].

Citamos os diversos títulos atendendo ao objetivo de exemplificar, sem levar em conta nosso gosto. Lamentamos não ter encontrado ocasião para lembrar algumas de nossas obras preferidas. Acreditamos ter dado uma idéia suficiente sobre o tipo de literatura considerado e passamos a discutir outro aspecto.

Relevância

Na quarta capa de uma obra paramatemática antiga e clássica, *Números y Figuras* (na versão espanhola) escrita no início do século XX por dois importantes matemáticos de língua alemã, Otto Toeplitz e Hans Rademacher [71], o editor informa que os autores

... propuseram-se (...) possibilitar ao leitor não especializado – bastam conhecimentos básicos de geometria plana e álgebra elementar para seguir sem dificuldades todos os raciocínios – a familiarização com os aspectos mais sugestivos da matemática, sepultados em tantas ocasiões por procedimentos

didáticos áridos e rotineiros que (...) deixam como vestígios uma insuperável antipatia em relação às ciências exatas.

As afirmações do editor soam adequadas em relação aos procedimentos áridos e rotineiros, mas deixam uma dúvida. Seria possível abordar conhecimentos matemáticos relevantes, partindo apenas de noções básicas? Conteria esse trabalho matemática verdadeira?

De fato, às vezes, não se leva a sério um texto científico voltado para leigos. O notável escritor argentino Ernesto Sábato, que na juventude parecia destinado a uma carreira promissora como físico, expressou essa opinião em uma de suas primeiras obras [72]. É certo que ele se referia à divulgação de teorias da física, mas o fato não altera muita coisa, dada a presença essencial da linguagem matemática no exemplo escolhido, a divulgação para o público da teoria da relatividade geral:

Com muito entusiasmo, lhe falo de tensores e geodésicas tetradimensionais.

– Não entendi uma só palavra, me diz, estupefato.

Reflico alguns instantes e logo, com menos entusiasmo, lhe dou uma explicação menos técnica, conservando algumas geodésicas, mas fazendo intervir aviadores e disparos de revólver.

Nessa altura, o interlocutor já compreende mais, escapando-lhe porém as geodésicas e coordenadas. O autor faz uma última tentativa.

... com verdadeira ferocidade, me dedico exclusivamente a aviadores que fumam enquanto viajam com a velocidade da luz, chefes de estação que disparam um revólver com a mão direita e verificam tempos com um cronômetro na mão esquerda, trens e campainhas.

– Agora sim, agora entendo a relatividade, exclama meu amigo com alegria.

– Sim, respondo-lhe com amargura, mas agora não é mais a relatividade.

(p. 42,43)

Certamente discordamos de Sábato e acreditamos que o próprio criador da teoria geral da relatividade compartilharia nossa opinião. De fato, Albert Einstein, no mesmo ano em que concluiu sua criação, dedicou-se a apresentá-la sem formalismo matemático para o público leigo [73]. Mesmo dentro de tais limites, no prefácio, ele alerta o leitor de sua intenção de não

ocultar as dificuldades inerentes ao assunto,

que incluem noções sobre as coordenadas gaussianas e a curvatura do espaço.

Outro físico de primeira grandeza que deixou de lado as exposições formalizadas foi Richard Feynman. No seu caso, isso ocorreu mesmo em trabalhos avançados, embora o exemplo mais notável se encontre nas célebres *Lectures on Physics*, que apresenta toda a física básica de um curso universitário de graduação. Citamos a seguir a opinião de Paul Davies, um dos melhores autores de divulgação científica da atualidade:

O mais impressionante na exposição cuidadosamente forjada de Feynman é a capacidade de desenvolver noções físicas abrangentes com o mínimo de investimento em conceitos e de utilização de matemática e jargão técnico. Ele tem o dom de encontrar a analogia ou o exemplo do dia-a-dia exato para apresentar a essência de um princípio profundo, sem obscurecê-lo com detalhes incidentais ou irrelevantes.[74a] (p. 13)

Nesse texto, Davies se refere a analogias, mas se usasse nossa linguagem diria metáforas. Feynman, porém, vai além destas. Por exemplo, para esclarecer a lei da conservação de energia, cria uma engenhosa história, ou seja, uma alegoria, protagonizada por Denis, personagem de quadrinhos conhecido entre nós por Pimentinha.

Acrescentamos uma pequena história envolvendo Feynman, contada por dois professores do California Institute of Technology, que indica os limites das apresentações informais, baseadas em metáforas e alegorias. O grande físico havia se proposto a realizar uma palestra para calouros, explicando “por que

partículas de spin 1/2 obedecem à estatística de Fermi-Dirac”. Após uma semana de reflexão, cancelou o evento. Sua justificativa:

– *Veja bem, não consegui fazê-lo. Não consegui reduzi-lo ao nível dos calouros. Isto significa que realmente não o compreendemos.* [74b] (p. 25)

Concluimos que as verdadeiras limitações de uma apresentação teórica sem formalismo parecem estar no conhecimento insuficiente do tema e não em uma inevitável traição a seu espírito. Dizendo de outro modo, textos paramatemáticos podem ter muito mais relevância que sisudos compêndios cuja leitura só traz aborrecimento.

Seis exemplos

Para ilustrar as possibilidades das obras paramatemáticas na forma de conhecer delineada, apresentamos alguns exemplos que ganham significação quando comparados com os episódios relatados em 1.1, nos quais levantamos indícios do conhecimento inadequado dos professores em geral.

(i) Os ensaios de *Números y Figuras* tratam essencialmente de matemática [71]. Os autores, porém, têm a capacidade de olhar a rede do conhecimento matemático de pontos de vista externos, o que lhes permite indagar sobre os rumos da teoria, questionar seus propósitos.

Um dos ensaios pergunta se realmente é única a decomposição em fatores primos e apresenta exemplos que nos convencem de que, embora pareça natural supor que sim, que a decomposição é única, há motivos para duvidar. Em seguida, os autores provam essa unicidade, que é a parte mais delicada do teorema fundamental da aritmética, apresentando duas demonstrações elaboradas na virada do século XIX para o XX, diferentes da proposta clássica que usa uma propriedade do mdc. Comentando *en passant* a demonstração tradicional, já implícita no *Elementos* de Euclides, eles nos dão uma pista para justificar a presença do mdc nos currículos antigos (ver 1.1.1). A demonstração tradicional se vale de uma propriedade do mdc. Portanto, na teoria dos números, esse tópico se constituía em pré-requisito para o teorema fundamental da aritmética. A transposição didática da teoria para alunos de 5^a série eliminou as

demonstrações, mas manteve a ordenação lógica da teoria original, embora essa ordem tivesse perdido seu sentido.

Essas explicações não aparecem na obra, mas o leitor atento as descobre. A postura problematizadora, os comentários perspicazes dos autores ajudam o leitor a compreender criticamente as estruturas teóricas da matemática acadêmica.

(ii) A pequena obra prima, intitulada na versão em língua inglesa, *Playing with Infinity* foi escrita pela matemática húngara Rózsa Péter em 1943, visando explicar a matemática para um amigo poeta, que confessava ignorar o assunto [75]. Partindo das noções mais elementares, passando pelo cálculo diferencial e integral, até chegar ao teorema da incompletude de Gödel, cuja demonstração é explicada em essência, o texto é um modelo de simplicidade, elegância e originalidade.

Vejamos um trecho do capítulo sobre equações. Partindo de problemas do tipo “Pensei em um número”, a autora acaba propondo este:

... Pensei em um número, multipliquei-o por 5, então dividi por 2, aí acrescentei 3 e obtive o número 18. Em que número pensei?

Na seqüência, após certas considerações, ela sugere a resolução seguinte:

... me será permitido sugerir que o resolvidor escreva X no lugar do número desconhecido, que espera ser descoberto. Ele, então, escreverá o seguinte: X era o número original e foi multiplicado por 5 transformando-se em 5X; foi então dividido por 2, de maneira que se tornou $\frac{5X}{2}$; aí acrescentou-se 3, tornando-se $\frac{5X}{2} + 3$, de maneira que obtivemos 18. Em outras palavras, $\frac{5X}{2} + 3 = 18$. O número pensado originalmente satisfaz esse tipo de “equação”; é dela que seu valor pode ser extraído.

Existem pessoas que têm uma percepção dos números tão especial, que podem encontrar o valor do número apenas olhando a equação nessa forma.

Aqueles que não têm essa percepção, podem voltar atrás um passo; se alguma coisa se tornou 18 após acrescentarmos 3, então ela deve ter sido 15 antes:

$$\frac{5X}{2} = 15$$

Deste ponto é mais fácil encontrar qual era o valor de X que foi pensado. Aqueles que ainda não conseguem fazê-lo, podem facilitar as coisas voltando mais um passo. Se obtivemos 15, ao dividir algo por 2, então esse algo deve ter sido 30 antes da divisão:

$$5X = 30$$

Agora, todo mundo percebe que se tomarmos 5 vezes um número e obtivermos 30, então o número só pode ser 6. (p.66, 67)

Talvez não façamos justiça à obra traduzindo exatamente essa passagem, apesar da admirável atenção da autora com o significado essencial da técnica resolutive. Entretanto, o trecho nos interessou por sua relação com a professora que buscava ensinar o significado da “coisa” (ver 1.1.4). Temos a impressão – quase diríamos a certeza – de que se ela tivesse lido este texto, abordaria o tópico com mais proveito para os alunos.

(iii) Uma obra pioneira no sentido de mostrar a gênese dos objetos matemáticos como decorrentes de duas fontes diversas – as necessidades sócio-econômicas e as exigências da organização lógica – é *Conceitos Fundamentais da Matemática*, escrita sob uma perspectiva marxista pelo matemático português Bento de Jesus Caraça [76]. Está fora de nosso propósito dar uma noção da riqueza de idéias desse trabalho, mas, lembrando as passagens em que tratamos de funções (ver 1.1.5), consideraremos um pequeno trecho.

O autor começa por abordar a idéia de lei natural, como a lei da queda dos corpos ou a da gravitação universal. Ele exemplifica as leis com formulações qualitativas e, depois, quantitativas, por meio de tabelas e suas regularidades. Diga-se de passagem, as escolhas mostram sua sensibilidade, explorando regularidades em 1941, época em que raramente surgiam nos textos matemáticos.

Após algumas considerações sobre variáveis, Caraça chega afinal a seu objetivo:

Assim, o conceito de função aparece-nos, no campo matemático, como o instrumento próprio para o estudo das leis. (p. 129)

A obra segue com uma definição formal do conceito.

(iv) Talvez, para complementar o autor português, interessasse obter uma visão histórica da evolução dessa idéia dentro da própria matemática. Nesse caso, a obra quase homônima – e não menos brilhante –, *As Idéias Fundamentais da Matemática*, do matemático brasileiro Manoel Amoroso Costa, poderia dar sua contribuição [77]. Em uma sucinta passagem desfila o conceito de função aos olhos de Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler, Fourier, até chegarmos à definição de Dirichlet, empregada por Caraça.

(v) Se ainda quiséssemos ver outras facetas das funções, recebendo o bônus de percorrer as idéias do cálculo diferencial e integral, um texto paramatemático recomendável seria *A Tour of the Calculus* (na edição em língua inglesa), de David Berlinsky, uma obra que alguns qualificam como emocionante [78]. Algumas citações ao acaso:

Os objetos característicos do cálculo não são números, nem lugares, pontos, intervalos de tempo ou símbolos; nem são coordenadas ou sistemas de coordenadas. No recanto úmido, escuro, repleto de morcegos, em que surgem as funções, lá o cálculo encontra suas ferramentas essenciais (...)

Uma função levando números reais para números reais, ou dizendo de outro modo, – uma função real, como é conhecida entre os profissionais – é cheia de energia nervosa: entregue-lhe um número real e tchan! você recebe um número real. (...)

As funções que levam números reais para números reais podem servir também para fazer corresponder um dos eixos do sistema de coordenadas cartesianas com o outro, criando assim uma conexão entre tempo e espaço. (p. 69)

Pode ser que Berlinsky seja literário demais. Talvez Caraça e Amoroso Costa bastassem para revelar a função das funções. Mais provavelmente os três e muitos outros deveriam ser mais divulgados.

(vi) Um último exemplo – apesar de nosso desejo de apresentar muito mais – extraímos de uma obra do conhecido educador e matemático Morris Kline, que sempre buscou apresentar a matemática ligada a contextos da realidade. Na edição em língua inglesa o título é *Mathematics for the Nonmathematician* e trata-se na verdade de um livro didático para estudantes de letras e artes em curso superior, mas tão pouco convencional que podemos incluí-lo em nossa classificação [79]. O seguinte trecho encerra uma discussão sobre a distribuição normal:

Ninguém deve presumir, entretanto, que todas, ou praticamente todas, distribuições de frequência seguem a curva normal. As distribuições de renda das famílias ou indivíduos e de número de famílias possuindo 0, 1, 2, 3, 4 automóveis não são normais. O fato da renda não se ajustar à curva normal levanta uma questão interessante porque as habilidades físicas e mentais têm distribuição normal e essas qualidades deveriam determinar a renda. (p. 510)

Acreditamos que a questão levantada seria estimulante quando se pensa em relacionar matemática e sociedade (ver 1.1.6).

Em suma ...

Esperamos a essa altura, pela força dos exemplos, ter esclarecido porque os textos paramatemáticos contribuiriam para a forma de conhecer matemática que delineamos.

Os autores escrevem para um público relativamente leigo e pretendem ser compreendidos. Em consequência enfatizam as idéias, isto é, os significados e o sentido dos objetos matemáticos. Valem-se de metáforas e alegorias, das origens históricas e do propósito da criação de cada objeto, propiciando a compreensão exatamente porque evidenciam os significados fundamentais.

Antes de ser compreendido, o texto paramatemático precisa ser lido. Por isso, os autores usam a narrativa, contam histórias, aproximam as idéias tratadas

de nossas vidas e interesses. De certa forma, a matemática se humaniza, pode ser vista como uma de nossas atividades naturais.

Embora tenham quase sempre os objetos matemáticos como atores principais, as necessidades da narrativa, dos aspectos motivadores e humanos dirigem as abordagens. Dessa forma, torna-se inevitável afastar-se das rígidas organizações lineares, em que cada tópico serve apenas como pré-requisito para o seguinte. Cumpre buscar caminhos variados, às vezes com idas e vindas. Em cada caminho, o ponto inicial não atende a necessidades lógicas ou técnicas e sim, em geral, ao interesse humano.

Com tais características, o texto paramatemático reflete percursos na rede do conhecimento, aproveitando-se de suas propriedades: as conexões entre diferentes domínios, os pontos de partida indeterminados, os vários caminhos possíveis para um mesmo objetivo, a escolha de escala adequada, revelando em muitos casos as mutações da rede por meio do recurso à história.

Acreditamos que o tipo de obra apresentada contribuiria muito para o professor conhecer matemática da forma adequada.

Além disso, tratando da matemática na perspectiva de rede, atendendo a um processo de comunicação humano entre autor e leitor, os textos paramatemáticos alcançam muitas vezes o domínio literário. Por isso mesmo não costuma valer a pena conhecê-los de segunda mão, pela descrição de outrem. Para fruí-los, é melhor proceder à leitura própria, exatamente como acontece com muitas obras literárias de valor.

No entanto, devemos lembrar que os estudantes – até mesmo os de literatura! – lêem pouco e que obras paramatemáticas em nossa língua são raras. (Apesar disso, existe há vários anos uma revista editada pela Sociedade Brasileira de Matemática que volta e meia publica textos paramatemáticos. Trata-se da *Revista do Professor de Matemática* – RPM.)

Balanço final

Chegamos ao final do percurso anunciado na introdução desta dissertação. Supomos ter explicitado o problema fundamental no conhecimento matemático do professor, cujos indícios foram levantados no capítulo 1. A partir de uma concepção do que significa “conhecer matemática”, desenvolvida no capítulo 2, julgamos ter mostrado, no capítulo 3, qual seria a forma de conhecer adequada ao professor. Nesse mesmo capítulo apresentamos maneiras de construir essa forma de conhecer.

As ações que vêm sendo desenvolvidas em alguns cursos de licenciatura, com base nos estudos da educação matemática, apontam em direção a essa construção. Métodos de ensino propostos também pela educação matemática convergem na mesma direção. Textos paramatemáticos, que, aos poucos, vêm sendo mais editados em nosso país, emprestam sua colaboração no mesmo sentido.

É certo que a base epistemológica fornecida pela concepção de conhecimento em termos de rede poucas vezes comparece de maneira explícita nas ações e métodos a que nos referimos. Entretanto, ela vem sendo gradativamente posta em evidência, como forma de tratar interações complexas. Os pesquisadores da cognição humana, por exemplo, começam a ver o aprendizado, o da matemática em particular, na perspectiva da rede como anotamos em 2.3.5.

Dessas evidências – ações sobre a licenciatura, estudos cognitivos – concluímos haver possibilidades concretas de se modificar a forma de conhecer dos licenciandos em geral, aproximando-se daquela delineada neste trabalho.

Em nossa opinião, tais mudanças beneficiariam o professor sob o ponto de vista pessoal e profissional.

No aspecto pessoal, os conhecimentos *sobre* e *de* matemática levariam o professor a construir pouco a pouco uma *cultura matemática*, entendendo-se o termo cultura em suas várias acepções derivadas do radical latino da palavra.

No sentido mais popular, cultura indica uma posse no campo dos saberes. Quando dizemos que alguém tem cultura, referimo-nos a uma posse ampla,

abrangente, tanto que a frase dificilmente se aplica a uma pessoa que possua apenas saberes especializados (por exemplo, apenas conhecimentos de matemática). Em nosso caso, essa posse ampla é induzida pela concepção de rede. Um de seus valores é que pode ser compartilhada sem que dela nada se perca, o que o professor certamente fará pela natureza de sua missão.

Cultura se refere também a algo que se cuida, se cultiva, se faz florescer. Neste caso, cultiva-se uma concepção que conecta o mundo, a sociedade e a matemática, fazendo-a intervir de maneira efetiva na formação individual e social dos educandos.

Cultura lembra ainda culto e aqui se trata de cultuar conquistas humanas em termos de pensamento. Um culto pressupõe um ritual, uma cerimônia. De acordo com as concepções que usamos, o ritual mais adequado em nosso culto seria percorrer a rede do conhecimento e produzir ou desvelar significados na ação didática.

Finalmente, cultura constitui um conjunto de idéias, práticas, valores característicos de grupos humanos específicos. Em nossa visão, o professor adquiriria uma cultura matemática particular, mas o faria de tal maneira – por meio de significados, visão transdisciplinar, postura crítica – que poderia reconhecer e compreender outras formas de cultura matemática.

Essa cultura que projetamos forma educadores, ou seja, justamente o que a nosso ver se necessita no momento, no lugar de simples instrutores.

Voltando-nos agora para o aspecto profissional, lembramos que Nilson José Machado, em um de seus escritos, apresentou três qualidades distintivas das profissões fundadas em saberes e procedimentos específicos desenvolvidos ao longo do tempo, como ocorre com as chamadas profissões liberais:

- competência específica em alguma área do conhecimento;
- autonomia relativa no exercício da profissão;
- comprometimento pessoal com objetivos socialmente acordados [80].

Acreditamos que a forma de conhecer pretendida, levando a uma cultura matemática com suas várias acepções, propicia as qualidades profissionais referidas.

Supomos que a apreensão dos significados matemáticos relevantes, o desempenho, mesmo que restrito, na produção de saberes matemáticos e a visão transdisciplinar implicam competência em certo domínio do conhecimento.

A postura crítica relativa a saberes matemáticos e, de novo, a visão transdisciplinar constituem o primeiro passo para se estabelecer a autonomia.

Por último, oferece-se aos professores de matemática a possibilidade de contribuir para a construção da cidadania nos jovens alunos, a valorização da democracia e da autonomia, projeto coletivo que justifica o comprometimento pessoal.

Da competência, da autonomia e do comprometimento deveriam resultar uma identidade profissional forte. Os professores poderiam regular o exercício da profissão com base em parâmetros definidos em parte pelos próprios praticantes, bem como ganhariam o direito e o dever de interferir nos rumos da educação matemática. Os professores norte-americanos alcançaram esse status, em particular os de matemática, reunidos no influente National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática) e os colegas brasileiros poderiam chegar a esse papel por meio da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Pelas razões apresentadas nos três últimos parágrafos, acreditamos que o perfil de conhecimento delineado ajuda a construir a identidade individual e profissional do professor de matemática, e o faz de tal maneira que favorece a educação como um todo.

Na verdade, quando dispõem de um mínimo de condições, os próprios professores atuam nessa direção. Em nossas andanças como autor didático, vez ou outra, mesmo a centenas de quilômetros dos grandes centros, encontramos grupos de colegas que trabalham unidos, reúnem-se, discutem, constroem sua cultura e identidade profissional.

Após todas essas considerações, tentando mostrar que é provável e conveniente avançar na direção pretendida, devemos admitir a imensa dificuldade do projeto.

Quem, como nós, já lecionou em cursos de licenciatura de faculdades particulares, logo se lembra do obstáculo representado pela carência escolar de grande parte dos estudantes. Entretanto, esta não é uma dificuldade maior. Justamente para esses estudantes, uma forma de conhecer referenciada no

conhecimento *sobre* matemática surgiria como a melhor possibilidade de aprendizado, uma vez que confere sentido aos conteúdos específicos e à educação matemática como um todo.

O verdadeiro obstáculo tem caráter mais global. Este é um país tão grande quanto seus problemas e um dos maiores está em sua política educacional. Certamente os recursos do estado brasileiro sofrem limitações, mas produzem na educação menos melhorias do que deveriam devido a opções de investimento educacional. Poucas vezes acontece de os governantes terem como prioridade o professor, ou, mais precisamente, os seres humanos que exercem tal profissão. Todos os gastos materiais – livros didáticos, televisores, antenas parabólicas, computadores – com que se equipam as escolas, merecem aprovação, mas não deveriam substituir um esforço concreto na melhoria de condições de trabalho do professor.

Assim, mesmo grandes progressos nos cursos de licenciatura poderiam não se refletir nas redes de ensino porque o status profissional do professor não é devidamente amparado por políticas públicas.

Enquanto isso não ocorrer, os poucos profissionais que vêm se formando de maneira adequada – muitos deles por esforço próprio – e mesmo os muitos que poderão se graduar no futuro em licenciaturas renovadas, justamente por terem construído a cultura matemática que descrevemos e disporem de saberes e autonomia, abandonarão o trabalho docente mal remunerado por atividades de melhores perspectivas.

Bibliografia

Relação de obras citadas, na ordem em que aparecem no texto

- [1] DOMITE, M. C. Comunicação verbal em Mesa redonda sobre Tendências Contemporâneas na Formação Docente na III Semana de Educação da FE-USP. São Paulo 2002.
- [2] MEC/SEF. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: SEF/MEC, 1998.
- [3] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston,VA: NCTM, 2000
- [4] D'AMBROSIO, B. S. Formação de Professores de Matemática para o Século XXII: o Grande Desafio. Pro-Posições. Campinas: Unicamp, v.4, n.1[10], p.35-41, março 1993.
- [5] THOMPSON, A. G. A Relação Entre Concepções de Matemática e de Ensino de Matemática de Professores na Prática Pedagógica. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.5, n.8, p.11-44, julho/dezembro 1997.
- [6] ARGOLO, P. Divisores, Múltiplos e Decomposição em Fatores primos. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, n.20, p.31-2.
- [7] LORENZATO, S. Os “Por Quês” Matemáticos dos Alunos e as Respostas dos Professores. Pro-Posições. Campinas: Unicamp, v.4, n.1[10], p.73-7, março 1993.
- [8] BRIGUENTI, M. J. L. Alterando o Ensino de Trigonometria em Escolas Públicas de Nível Médio: A Representação de Algumas Professoras. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.8, n.13/14, p.51-79, janeiro a junho/julho a dezembro, 2000.
- [9] PINTO, R. A., FIORENTINI, D. Cenas de uma Aula de Álgebra: Produzindo e Negociando Significados Para “a Coisa”. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.5, n.8, p.45-71, julho/dezembro 1997.
- [10] BIGODE, A. J. L. Matemática Atual – 7ª série. São Paulo: Atual, 1996.
- [11] ZUFFI, E. M., PACCA, J. L. A. Sobre Funções e a Linguagem Matemática de Professores do Ensino Médio. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.8, n.13/14, p.7-28, janeiro a junho/julho a dezembro, 2000.
- [12] BAZAN, I. C. da R. Ensino de Matemática: Formação para a Exclusão ou para a Cidadania? Educação Matemática em Revista. São Paulo: SBEM, a.8, n.9/10, p.22-31, abril 2001.
- [13] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M., GASCÓN, J. Estudar Matemáticas – O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: ARTMED, 2001.
- [14] PAIS, L. C. Didática da Matemática – Uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- [15] CHEVALLARD, Y. La Transposition Didactique – du Savoir Savant au Savoir Enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

- [16] FARIAS E SOARES, E., FERREIRA, M. C. C., MOREIRA, P. C. Da Prática do Matemático Para a Prática do Professor: Mudando o Referencial da Formação Matemática do Licenciando. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.5, n.7, p.25-36, janeiro/junho, 1997.
- [17] CURI, E. Formação de Professores de Matemática: Realidade Presente e Perspectivas Futuras. São Paulo: PUC, 2000 (Dissertação de mestrado)
- [18] INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS – INEP. Resultados do Exame Nacional de Cursos 2000. www.inep.gov.br/enc.sintese/sintese2000.htm
- [19] DEMO, P. Formação de Formadores Básicos. Em Aberto. Brasília: ^a 12, n. 54, abril/junho, 1992.
- [20] FIORENTINI, D. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino de Matemática no Brasil. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, a.3, n.4, p.7-28, p. 1-37, novembro 1995.
- [21] LAKATOS, I. a Lógica do Descobrimto matemático – Provas e Refutações. Trad. Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.
- [22] IMENES, L. M. P. Um Estudo Sobre o Fracasso do Ensino e da Aprendizagem da Matemática. Rio Claro: UNESP, 1989. (Dissertação de mestrado)
- [23] DAVIS P. J., HERSH, R. A Experiência Matemática. Trad. João Bosco Pitombeira, 2^a ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.
- [24] KUMON, T. Estudo Gostoso de Matemática – O segredo do Método Kumon. Trad. Silvia Shiota, 5^a ed. São Paulo: Ediouro, 1998.
- [25] SCIENCE ET VIE. L'échec des maths à l'école. Science et Vie, n.1008, p36-52. Paris: Excelsior, setembro 2001.
- [26] MACHADO, N. J. Epistemologia e Didática. São Paulo: Cortez, 1995.
- [27] VIGOTSKY, L. S. Pensamento e Linguagem. Trad. Jefferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1996.
- [28] HOFSTADER, D. R. Gödel, Escher, Bach: na Eternal Golden Braid. New York: Vintage Books, 1980.
- [29] IMENES, L. M., LELLIS, M. Matemática Paratodos – 7^a série. São Paulo: Scipione, 2001.
- [30] FELINTO, M. Para que serve o ensino médio do logaritmo? Artigo no jornal Folha de São Paulo, p.C2, 28 de agosto 2001.
- [31] TROTTA, F., IMENES, L. M., JAKUBOVIC, J. Matemática Aplicada – 2^o grau, v.1. São Paulo: Moderna, 1979.
- [32] RESNIKOFF, H. L., WELLS JR., R. O. Mathematics in Civilization. New York: Dover, 1984.
- [33] LEVI, P. A Tabela Periódica. Trad. Luiz Sergio Henriques. Rio de Janeiro: Relume Dumará, 1994.
- [34] SIMONS, G. F. Cálculo com Geometria Analítica, v.1. Trad. Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

- [35] GANDT, F. Matemáticas y realidad física en el siglo XVIII (de la velocidad de Galileo a las fluxiones de Newton) IN GUÉNARD, F., LELIÈVRE, G. (org.) Pensar la Matemática. Trad. para espanhol Carlos Bidón-Chanal, 3ª ed. Barcelona: Tusquets, 1999.
- [36] MACHADO, N. J. Matemática e Educação – Alegorias, tecnologias e temas afins. São Paulo: Cortez, 1992.
- [37] NUÑEZ, R. Comunicação verbal em palestra no I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Serra Negra: 2000.
- [38] GINESTE, M.-D. Analogie et Cognition. Paris: Presse Universitaires de France, 1997.
- [39] D'AMBROSIO, U. Socio-cultural bases for Mathematics Education. Campinas: Unicamp, 1985.
- [40] D'AMBROSIO, U. Etnomatemática..São Paulo: Ática, 1990.
- [41] PRADO, R. Mania de Aprender. Reportagem na revista Nova Escola. São Paulo: Abril, a.XII, n.149, p.38-40, janeiro/fevereiro 2002.
- [42] IMENES L. M., JAKUBOVIC, J., LELLIS, M. Ângulos. 13ª ed. São Paulo: Atual, 1999.
- [43] MARCHESI, A. Inversão de mão na rua dos racionais: dos números com vírgula para os fracionários IN FIORENTINI, D., MIORIM, M. A. Por trás da porta, que matemática acontece? Campinas: FE/Unicamp/CEMPEM, 2001.
- [44] ALTHUSSER, L. Ideologia e Aparelhos Ideológicos do Estado. São Paulo: Martins Fontes, s.d.
- [45] CHAUI, M. Convite à Filosofia, 11ª ed. São Paulo: Ática, 1999.
- [46] SANTOS, M. Entrevista concedida a Ana Gabriela Roiffe no jornal Folha de São Paulo, Caderno especial, p.4, 27 de março de 2001.
- [47] STEWART, I. Natures Numbers – Discovering Order and Pattern in the Universe. London: Eidenfeld & Nicolson, 1995.
- [48] PESSOA, F. “Ouvi contar que outrora...” IN Obra Poética, 4ª ed. Rio de Janeiro: Aguilar, 1972.
- [49] VIANNA, C. R. Vidas e Circunstâncias na Educação Matemática. São Paulo: FE-USP, 2000. (Tese de doutorado)
- [50] MIGUEL, A. As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão: Argumentos Reforçadores e Questionadores. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.5, n.8, p.73-105, julho/dezembro 1997.
- [51] GOMES, M. L. M. Matemática e Escola: uma Experiência Integradora na Licenciatura em Matemática da Universidade de Minas Gerais. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.5, n.7, p.95-109, janeiro/junho, 1997.
- [52] SANTOS-WAGNER, V. M. P., NASSER, L., TINOCO, L. Formação Inicial do Professor de Matemática. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.5, n.7, p.37-49, janeiro/junho, 1997.
- [53] GARNICA, A. V. M., MARTIN, R. M. Avaliação de um Projeto Pedagógico para a Formação de Professores de Matemática: um estudo de caso.

- Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.7, n.12, p.51-74, julho/dezembro, 1999.
- [54] CARNEIRO, V. C. Mudanças na Formação de Professores de Matemática: um estudo de caso. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.8, n.13/14, p.81-116, janeiro a junho/julho a dezembro, 2000.
- [55] D'AMBROSIO, U. Entrevista concedida a Célia Maria Carolino Pires. Educação Matemática em Revista. São Paulo: SBEM, a.6, n.7, p.5-10, julho 1999.
- [56] CAMPOS, T. M. M. (coord.) Transformações no Ensino de Matemática: a experiência positiva dos professores do Pólo 4. São Paulo: SE/PUC/PROEM, 1998.
- [57] D'Ambrosio, B. Como Ensinar Matemática Hoje. Temas e Debates. Brasília: SBEM, a. II, n. 2, p.15-19, 1989.
- [58] POLYA, G. A Arte de Resolver Problemas. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- [59] ROBERT, A., ROBINET, J. Prise en Compte du Méta en Didactique des Mathématiques. Recherches en Didactiques des Mathématiques. Grenoble: v.16, n.2, p.145-176, 1996.
- [60] MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática IN MACHADO, S. D. A. (org.) Educação Matemática – Uma Introdução. São Paulo: EDUC, 1999.
- [61] BASSANEZI, R. C. Modelling as a teaching-learning strategy. For the Learning of Mathematics. Vancouver: v.14, n.2, p.31-5, junho 1994.
- [62] BARBOSA, J. C. O que pensam os professores sobre a Modelagem matemática? Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.7, n.11, p.67-85, janeiro/junho, 1999.
- [63] TAHAN, M. (Júlio Cesar de Mello e Souza) O Homem que Calculava, 21^a ed. Rio de Janeiro: Conquista, 1962.
- [64] GUEDJ, D. O Teorema do papagaio. Trad. Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.
- [65] DOXIADIS, A. Tio Petrus e a Conjectura de Goldbach. São Paulo: Editora 34, 2001.
- [66] HOFFMAN, P. O Homem que só Gostava de Números. Trad. Jaime Ramos. Lisboa: Gradiva 2000.
- [67] GARDNER, M. Carnaval Matemático, 4^a ed. Madrid: Alianza, 1984.
- [68] GARDNER, M. Circo Matemático, 2^a ed. Madrid: Alianza, 1985.
- [69] GARDNER, M. Nuevos Pasatiempos Matemáticos, 5^a ed. Madrid: Alianza, 1984.
- [70] BARCO, L. 2 + 2: Uma aventura de um matemático no mundo da comunicação.
- [71] RADEMACHER, H., TOEPLITZ, O. Números y Figuras. Madrid: Alianza, 1970.
- [72] SABATO, E. Uno y el Universo, ed. definitiva. Barcelona: Seix Barral, 1998.

- [73] EINSTEIN, A. A Teoria da Relatividade Especial e Geral. Trad. Carlos Almeida Pereira. Rio de Janeiro: Contraponto, 1999.
- [74 a] DAVIES, P. Prefácio IN FEYNMAN, R. P. Física em Seis Lições. Trad. Ivo Korytnowski. Rio de Janeiro: Ediouro, 1995.
- [74 b] GOODSTEIN, D. L., NEUGEBAUER, G. Prefácio Especial IN FEYNMAN, R. P. Física em Seis Lições. Trad. Ivo Korytnowski. Rio de Janeiro: Ediouro, 1995.
- [75] PÉTER, R. Playing with Infinity. Trad. para inglês Zoltan P. Dienes. New York: Dover, 1976.
- [76] CARAÇA, B. J. Conceitos Fundamentais da Matemática. Lisboa: 1975.
- [77] COSTA, M. A. As Idéias Fundamentais da Matemática e outros ensaios. São Paulo: EDUSP, 1971.
- [78] BERLINSKI, D. A Tour of the Calculus. New York: Vintage Books, 1997.
- [79] KLINE, M. Mathematics for the Nonmathematician. New York: Dover, 1985.
- [80] MACHADO, N. J. Educação: Projetos e Valores. São Paulo: Escrituras, 1999.

Relação das obras citadas em ordem alfabética por autor

- ALTHUSSER, L. Ideologia e Aparelhos Ideológicos do Estado. São Paulo: Martins Fontes, s.d.
- ARGOLO, P. Divisores, Múltiplos e Decomposição em Fatores primos. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, n.20, p.31-2.
- BARBOSA, J. C. O que pensam os professores sobre a Modelagem matemática? Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.7, n.11, p.67-85, janeiro/junho, 1999.
- BARCO, L. 2 + 2: Uma aventura de um matemático no mundo da comunicação.
- BASSANEZI, R. C. Modelling as a teaching-learning strategy. For the Learning of Mathematics. Vancouver: v.14, n.2, p.31-5, junho 1994.
- BAZAN, I. C. da R. Ensino de Matemática: Formação para a Exclusão ou para a Cidadania? Educação Matemática em Revista. São Paulo: SBEM, a.8, n.9/10, p.22-31, abril 2001.
- BERLINSKI, D. A Tour of the Calculus. New York: Vintage Books, 1997.
- BIGODE, A. J. L. Matemática Atual – 7ª série. São Paulo: Atual, 1996.
- BRIGUENTI, M. J. L. Alterando o Ensino de Trigonometria em Escolas Públicas de Nível Médio: A Representação de Algumas Professoras. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.8, n.13/14, p.51-79, janeiro a junho/julho a dezembro, 2000.
- CAMPOS, T. M. M. (coord.) Transformações no Ensino de Matemática: a experiência positiva dos professores do Pólo 4. São Paulo: SE/PUC/PROEM, 1998.
- CARAÇA, B. J. Conceitos Fundamentais da Matemática. Lisboa: 1975.
- CARNEIRO, V. C. Mudanças na Formação de Professores de Matemática: um estudo de caso. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.8, n.13/14, p.81-116, janeiro a junho/julho a dezembro, 2000.
- CHAUÍ, M. Convite à Filosofia, 11ª ed. São Paulo: Ática, 1999.
- CHEVALLARD, Y. La Transposition Didactique – du Savoir Savant au Savoir Enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.
- CHEVALLARD, Y., BOSCH, M., GASCÓN, J. Estudar Matemáticas – O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: ARTMED, 2001.
- COSTA, M. A. As Idéias Fundamentais da Matemática e outros ensaios. São Paulo: EDUSP, 1971.
- CURI, E. Formação de Professores de Matemática: Realidade Presente e Perspectivas Futuras. São Paulo: PUC, 2000 (Dissertação de mestrado)
- D'Ambrosio, B. Como Ensinar Matemática Hoje. Temas e Debates. Brasília: SBEM, a. II, n. 2, p.15-19, 1989.
- D'AMBROSIO, B. S. Formação de Professores de Matemática para o Século XXII: o Grande Desafio. Pro-Posições. Campinas: Unicamp, v.4, n.1[10], p.35-41, março 1993.

- D'AMBROSIO, U. Entrevista concedida a Célia Maria Carolino Pires. Educação Matemática em Revista. São Paulo: SBEM, a.6, n.7, p.5-10, julho 1999.
- D'AMBROSIO, U. Etnomatemática..São Paulo: Ática, 1990.
- D'AMBROSIO, U. Socio-cultural bases for Mathematics Education. Campinas: Unicamp, 1985.
- DAVIES, P. Prefácio IN FEYNMAN, R. P. Física em Seis Lições. Trad. Ivo Korytnowski. Rio de Janeiro: Ediouro, 1995.
- DAVIS P. J., HERSH, R. A Experiência Matemática. Trad. João Bosco Pitombeira, 2ª ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.
- DEMO, P. Formação de Formadores Básicos. Em Aberto. Brasília: a 12, n. 54, abril/junho, 1992.
- DOMITE, M. C. Comunicação verbal em Mesa redonda sobre Tendências Contemporâneas na Formação Docente na III Semana de Educação da FE-USP. São Paulo 2002.
- DOXIADIS, A. Tio Petrus e a Conjectura de Goldbach. São Paulo: Editora 34, 2001.
- EINSTEIN, A. A Teoria da Relatividade Especial e Geral.Trad. Carlos Almeida Pereira. Rio de Janeiro: Contraponto, 1999.
- FARIAS E SOARES, E., FERREIRA, M. C. C., MOREIRA, P. C. Da Prática do Matemático Para a Prática do Professor: Mudando o Referencial da Formação Matemática do Licenciando. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.5, n.7, p.25-36, janeiro/junho, 1997.
- FELINTO, M. Para que serve o ensino médio do logaritmo? Artigo no jornal Folha de São Paulo, p.C2, 28 de agosto 2001.
- FIORENTINI, D. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino de Matemática no Brasil. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, a.3, n.4, p.7-28, p. 1-37, novembro 1995.
- GANDT, F. Matemáticas y realidad física en el siglo XVIII (de la velocidad de Galileo a las fluxiones de Newton) IN GUÉNARD, F., LELIÈVRE, G. (org.) Pensar la Matemática. Trad. para espanhol Carlos Bidón-Chanal, 3ª ed. Barcelona: Tusquets, 1999.
- GARDNER, M. Carnaval Matemático, 4ª ed. Madrid: Alianza, 1984.
- GARDNER, M. Circo Matemático, 2ª ed. Madrid: Alianza, 1985.
- GARDNER, M. Nuevos Pasatiempos Matemáticos, 5ª ed. Madrid: Alianza, 1984.
- GARNICA, A. V. M., MARTIN, R. M. Avaliação de um Projeto Pedagógico para a Formação de Professores de Matemática: um estudo de caso. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.7, n.12, p.51-74, julho/dezembro, 1999.
- GINESTE, M.-D. Analogie et Cognition. Paris: Presse Universitaires de France, 1997.
- GOMES, M. L. M. Matemática e Escola: uma Experiência Integradora na Licenciatura em Matemática da Universidade de Minas Gerais. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.5, n.7, p.95-109, janeiro/junho, 1997.

- GOODSTEIN, D. L., NEUGEBAUER, G. Prefácio Especial IN FEYNMAN, R. P. Física em Seis Lições. Trad. Ivo Korytnowski. Rio de Janeiro: Ediouro, 1995.
- GUEDJ, D. O Teorema do papagaio. Trad. Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.
- HOFFMAN, P. O Homem que só Gostava de Números. Trad. Jaime Ramos. Lisboa: Gradiva 2000.
- HOFSTADER, D. R. Gödel, Escher, Bach: na Eternal Golden Braid. New York: Vintage Books, 1980.
- IMENES L. M., JAKUBOVIC, J., LELLIS, M. Ângulos. 13ª ed. São Paulo: Atual, 1999.
- IMENES, L. M. P. Um Estudo Sobre o Fracasso do Ensino e da Aprendizagem da Matemática. Rio Claro: UNESP, 1989. (Dissertação de mestrado)
- IMENES, L. M., LELLIS, M. Matemática Paratodos – 7ª série. São Paulo: Scipione, 2001.
- INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS – INEP. Resultados do Exame Nacional de Cursos 2000.
www.inep.gov.br/enc.sintese/sintese2000.htm
- KLINE, M. Mathematics for the Nonmathematician. New York: Dover, 1985.
- KUMON, T. Estudo Gostoso de Matemática – O segredo do Método Kumon. Trad. Silvia Shiota, 5ª ed. São Paulo: Ediouro, 1998.
- LAKATOS, I. a Lógica do Descobrimto matemático – Provas e Refutações. Trad. Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.
- LEVI, P. A Tabela Periódica. Trad. Luiz Sergio Henriques. Rio de Janeiro: Relume Dumará, 1994.
- LORENZATO, S. Os “Por Quês” Matemáticos dos Alunos e as Respostas dos Professores. Pro-Posições. Campinas: Unicamp, v.4, n.1[10], p.73-7, março 1993.
- MACHADO, N. J. Educação: Projetos e Valores. São Paulo: Escrituras, 1999.
- MACHADO, N. J. Epistemologia e Didática. São Paulo: Cortez, 1995.
- MACHADO, N. J. Matemática e Educação – Alegorias, tecnologias e temas afins. São Paulo: Cortez, 1992.
- MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática IN MACHADO, S. D. A. (org.) Educação Matemática – Uma Introdução. São Paulo: EDUC, 1999.
- MARCHESI, A. Inversão de mão na rua dos racionais: dos números com vírgula para os fracionários IN FIORENTINI, D., MIORIM, M. A. Por trás da porta, que matemática acontece? Campinas: FE/Unicamp/CEMPEM, 2001.
- MEC/SEF. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: SEF/MEC, 1998.
- MIGUEL, A. As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão: Argumentos Reforçadores e Questionadores. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.5, n.8, p.73-105, julho/dezembro 1997.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston,VA: NCTM, 2000

- NUÑEZ, R. Comunicação verbal em palestra no I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Serra Negra: 2000.
- PAIS, L. C. Didática da Matemática – Uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- PESSOA, F. “Ouvi contar que outrora...” IN *Obra Poética*, 4ª ed. Rio de Janeiro: Aguilar, 1972.
- PÉTER, R. *Playing with Infinity*. Trad. para inglês Zoltan P. Dienes. New York: Dover, 1976.
- PINTO, R. A., FIORENTINI, D. Cenas de uma Aula de Álgebra: Produzindo e Negociando Significados Para “a Coisa”. *Zetetiké*. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.5, n.8, p.45-71, julho/dezembro 1997.
- POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- PRADO, R. Mania de Aprender. Reportagem na revista *Nova Escola*. São Paulo: Abril, a.XII, n.149, p.38-40, janeiro/fevereiro 2002.
- RADEMACHER, H., TOEPLITZ, O. *Números y Figuras*. Madrid: Alianza, 1970.
- RESNIKOFF, H. L., WELLS JR., R. O. *Mathematics in Civilization*. New York: Dover, 1984.
- ROBERT, A., ROBINET, J. *Prise en Compte du Méta en Didactique des Mathématiques*. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. Grenoble: v.16, n.2, p.145-176, 1996.
- SABATO, E. *Uno y el Universo*, ed. definitiva. Barcelona: Seix Barral, 1998.
- SANTOS, M. Entrevista concedida a Ana Gabriela Roiffe no jornal *Folha de São Paulo*, Caderno especial, p.4, 27 de março de 2001.
- SANTOS-WAGNER, V. M. P., NASSER, L., TINOCO, L. *Formação Inicial do Professor de Matemática*. *Zetetiké*. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.5, n.7, p.37-49, janeiro/junho, 1997.
- SCIENCE ET VIE. *L'échec des maths à l'école*. *Science et Vie*, n.1008, p36-52. Paris: Excelsior, setembro 2001.
- SIMONS, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica*, v.1. Trad. Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- STEWART, I. *Natures Numbers – Discovering Order and Pattern in the Universe*. London: Eidenfeld & Nicolson, 1995.
- TAHAN, M. (Júlio Cesar de Mello e Souza) *O Homem que Calculava*, 21ª ed. Rio de Janeiro: Conquista, 1962.
- THOMPSON, A. G. *A Relação Entre Concepções de Matemática e de Ensino de Matemática de Professores na Prática Pedagógica*. *Zetetiké*. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.5, n.8, p.11-44, julho/dezembro 1997.
- TROTTA, F., IMENES, L. M., JAKUBOVIC, J. *Matemática Aplicada – 2º grau*, v.1. São Paulo: Moderna, 1979.
- VIANNA, C. R. *Vidas e Circunstâncias na Educação Matemática*. São Paulo: FE-USP, 2000. (Tese de doutorado)

VIGOTSKY, L. S. Pensamento e Linguagem. Trad. Jefferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

ZUFFI, E. M., PACCA, J. L. A. Sobre Funções e a Linguagem Matemática de Professores do Ensino Médio. Zetetiké. Campinas: Unicamp/CEMPEM, v.8, n.13/14, p.7-28, janeiro a junho/julho a dezembro, 2000.