PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Luciane Santos Rosenbaum

Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2010

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

Luciane Santos Rosenbaum

Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação do ***Professor Doutor Armando Traldi Junior.***

São Paulo

2010

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** _______________

O EDUCADOR MORRE QUANDO DEIXA DE APRENDER COM SEUS ALUNOS.

PAULO FREIRE

À memória de meu pai Carlos Rosenbaum,
por seu exemplo de humildade, bondade,
honestidade e esforço.

AGRADECIMENTOS

À **Deus** por me proporcionar a oportunidade de aprender com meus erros e procurar viver o mais intensamente possível cada minuto da minha existência.

Aos meus filhos, **Felipe** e **Isabela**, que me presentearam com o amor e procuraram compreender as ausências da saudosa mãe durante todo o curso. Vocês são a razão do meu viver...

Ao meu marido, **Mário**, sem sua companhia, e apoio eterno não poderia conquistar esse sonho. O seu amor me fortaleceu nos momentos de fraqueza e seu riso banhou minha alma nos momentos de angústia.

À minha Mãe, **Magdalena**, a quem devo a vida, a oportunidade de estudar e o exemplo de como ser uma incansável Mãe. Mesmo com suas limitações sempre foi o colo para aconchego e o empurrão para continuar.

À minha irmã, **Rosana**, que na prorrogação conseguiu marcar um gol de placa. Sua dedicação só pode demonstrar o nosso amor.

Aos meus sobrinhos, **Alê e Vini**, por entenderem a minha ausência, me auxiliarem e continuar me amando.

Às minhas irmãs de coração: **Lu Nakamuta e Lu Mendonça**, que apareceram na mesma época na minha vida e foram anjos que me auxiliaram na árdua caminhada.

Ao **Antônio** e à **Nildes** que trabalharam nos bastidores desta empreitada.

À **Carmo**, que com seu jeito meigo me conquistou e respeitou meu jeito de trabalhar.

Aos **meus alunos**, que compreenderam minhas ausências como momentos para aprimorar meu ensino.

À **todos professores** que me permitiram chegar aqui: desde os anos de Educação Infantil aos professores do curso.

À **equipe da escola Bairro dos Penteados**, em especial à **Regina**, **Ricardo**, **Sueli** e **Hilda** pelo apoio que me ofereceram durante todos estes anos.

Ao **Benedito**, **Fabiana**, **Paloma**, **Muniz** e, principalmente, à **Karina** por me acolherem gentilmente e permitirem que eu desenvolvesse meu projeto.

Ao professor **Iezzi** que me fez acreditar no meu sonho.

À professora **Célia Carolino**, pelas palavras de carinho e incentivo que não me deixaram abandonar o curso e, me permito afirmar, que sou eternamente grata.

Ao professor **Armando Traldi**, que me acolheu e me permitiu ter segurança para acreditar no meu potencial.

Às professoras **Laurizete** e **Rosa** que me deram o privilégio de recebê-las na minha banca e proporcionaram momentos valorosos.

À **Secretaria de Educação do Estado de São Paulo**, pela bolsa concedida que permitiu que eu realizasse meu sonho.

À **todos** que acreditaram no meu trabalho e me incentivaram a continuar, muito obrigada.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo verificar: como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino de Funções Trigonométricas; como as pesquisas na área de Educação Matemática, que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem, podem contribuir para a organização do ensino de Funções Trigonométricas que potencialize boas situações de aprendizagem aos alunos; como a atuação do professor de Matemática se revela, no que se refere às atividades de planejamento do ensino de Funções Trigonométricas, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem. Desenvolvemos um estudo de natureza qualitativa com 2 professores e 70 alunos da 2.ª série do Ensino Médio de uma escola da rede pública do Estado de São Paulo. Este trabalho, tem como fundamentação teórica os trabalhos de Simon (1995) sobre o uso de THA no ensino de Matemática para formular modelos de ensino baseados no construtivismo. Como componente do Ciclo de Ensino de Matemática desenvolvido por Simon, a THA elaborada fez uso de resultados de pesquisas para o desenvolvimento de Funções Trigonométricas por meio de atividades e resolução de problemas que envolveram: construções com régua e compasso, material manipulativo, calculadora científica, construção de gráficos usando o *software* Geogebra e papel e lápis. Os resultados obtidos nos levaram a concluir que o uso de pesquisas contribui para a organização do ensino de Funções Trigonométricas, no entanto é necessário possibilitar o acesso dos professores a tais pesquisas. Verificou-se que embora as THAs sejam potencialmente ricas, é complexa a tarefa de elaboração de atividades para que se efetive uma aprendizagem numa perspectiva construtivista. Constatamos que a participação em tarefas que envolvem o uso de tecnologia e manipulação de materiais potencializa o aprendizado de Funções Trigonométricas. Porém, a THA elaborada não é suficiente para que a aprendizagem ocorra, pois a atuação do professor tem papel decisivo na mediação da construção do conhecimento dos seus alunos. Da mesma forma vimos que a interação entre alunos, e estes com o professor são essenciais para uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Funções Trigonométricas. Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Educação Matemática. Currículo de Matemática. Ensino Médio. Perspectiva Construtivista.

ABSTRACT

This present work aims to verify: as compatible constructivist perspectives of learning with the planning of Trigonometric Functions; teaching the as researches in mathematics education field , which brings important results on the learning process may contribute to the organization of the Trigonometric Functions teaching that leverage best learning situations for students, as the performance of teachers of mathematics is revealed, with regard to planning activities in the teaching of Trigonometric Functions, consistent with a constructivist view of learning. We developed a qualitative study with two teachers and 70 students from the 2nd Grade of high school in a public school in the State of São Paulo. Its theoretical work of Simon (1995) on the use of HLT in teaching mathematics to formulate models of teaching based on constructivism. As a component of the Mathematics Teaching Cycle developed by Simon, the elaborate HLT was made use of the research findings for the development of Trigonometric Functions through activities and solve problems involving: constructions with ruler and compass, manipulative material, scientific calculator, construct graphs using software GeoGebra and paper and pencil. The results led us to conclude that the use of research contributes to the education organization of Trigonometric Functions; however you must provide access to such teachers to such research. Although the HLT are potentially rich, complex is the task of developing activities to accomplish a constructivist learning perspective. We note that participation in tasks involving the use of technology and material handling enhances the learning of Trigonometric Functions. However, the HLT is not prepared enough for learning to occur, because the teacher performance has a decisive role in mediating the construction of knowledge of the students. In the same way we experience the interaction and participation between students and teacher which is essential for learning.

Keywords: Trigonometric Functions. Hypothetical Learning Trajectory. Mathematics Education. Mathematics Curriculum. High School. Constructivist Perspective.

SUMÁRIO

I. Inserção deste trabalho no Projeto de Pesquisa

A presente investigação integra o projeto “Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio: uma pesquisa colaborativa entre pesquisadores e professores”. Iniciado no segundo semestre de 2007 e desenvolvido na PUC-SP com a participação de mestrandos e doutorandos sob a coordenação da professora Dra. Célia Maria Carolino Pires e do professor Dr. Armando Traldi Junior.

O projeto tem como objetivo o desenvolvimento de um conjunto de pesquisas de mestrado e doutorado, com enfoque na organização e desenvolvimento curricular na área de Matemática, a fim de conceber propostas de apoio à inovação curricular, a partir dos princípios apresentados nas Diretrizes e Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio. O objetivo das dissertações de mestrado é o de construir, analisar e avaliar situações de aprendizagem em relação a diferentes expectativas do aprendizado no Ensino Médio, a partir da construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA). Segundo Simon (1995), a THA consiste em delinear objetivos para a aprendizagem dos estudantes, sugerir tarefas matemáticas que serão usadas para promover o aprendizado e do levantar hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos.

O projeto está integrado à linha de pesquisa “Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores” do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Com o desenvolvimento do projeto os pesquisadores participantes pretendem contribuir para aproximar as teorias e estudos da área de Educação Matemática dos currículos praticados nas salas de aula do Ensino Médio, em tarefas que envolvem resolução de problemas, investigação, uso de tecnologias e abordagens interdisciplinares. Participam do projeto alunos do Mestrado e Doutorado, professores de Matemática do Ensino Médio, da rede pública estadual de São Paulo.

As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNEM) propõem que o currículo para o Ensino Médio seja organizado a partir de três áreas do conhecimento: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias; Linguagens, Códigos e suas tecnologias; Ciências Humanas e suas tecnologias. Este documento destaca a importância de exploração de situações contextualizadas a serem trabalhadas por meio da resolução de problemas e/ou da modelagem.

A proposta do projeto de pesquisa é o envolvimento de docentes dos cursos de formação inicial e de cursos de formação continuada de professores juntamente com professores de Ensino Médio da rede pública, no sentido de constituir possibilidades de implementação de uma proposta curricular na prática, mais condizente com os pressupostos curriculares inovadores.

O trabalho cooperativo ou colaborativo desenvolvido pelos pesquisadores participantes é indicado como altamente positivo no que se refere ao desenvolvimento profissional de professores. Estudos como os de Traldi Júnior (2005) evidenciam que professores envolvidos em grupos colaborativos ganham maior autonomia na busca e na produção de recursos para subsidiar seu trabalho em sala de aula, tornam-se mais reflexivos a respeito de suas práticas a ponto de questionar concepções e crenças sobre a matemática e seu ensino.

Para Boavida e Ponte (2002) a colaboração constitui uma estratégia fundamental para lidar com problemas que se afiguram demasiado pesados para serem enfrentados individualmente. Também ressaltam que em estudos investigativos sobre a prática, a colaboração oferece importantes vantagens, ao agregar diversas pessoas com experiências, competências e perspectivas diversificadas, reúnem-se mais recursos para concretizar, com êxito, um dado trabalho, possibilitando um acréscimo de segurança e promovendo mudanças e inovações; juntando diversas pessoas que se empenham num grupo com objetivos comuns, reúnem-se, mais energias do que as que possuem uma única pessoa, fortalecendo-se, assim, a determinação em agir; agregando diversas pessoas que interagem, dialogam e refletem em conjunto, criam-se sinergias que possibilitam uma capacidade de reflexão acrescida e um aumento das possibilidades de aprendizagem mútua, permitindo, assim, ir muito mais longe e criando melhores condições para enfrentar, com êxito, as incertezas e obstáculos que surgem.

O grupo de pesquisa amparou seus estudos em um texto do pesquisador Martin A. Simon, de 1995, e outro de Pedro Gómez e José Luis Lupiáñez, de 2007, onde é apresentada a noção de trajetória hipotética de aprendizagem (THA), como parte do modelo de Ciclo de Ensino de Matemática, proposto por Simon.

A partir das discussões e reflexões, o grupo desenvolveu estudos que permitiram responder as seguintes questões: Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com a planificação do ensino, aproximando currículos prescritivos e currículos realmente praticados? Como as pesquisas na área de Educação Matemática que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem podem contribuir para a organização de um ensino que potencialize situações de aprendizagem aos alunos? Que atuação pode ter um professor de Matemática no que se refere às atividades de planejamento do ensino, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem?

Os temas a serem desenvolvidos pelos subgrupos de pesquisa deverão objetivar a construção de competências e habilidades que permitam ao aluno do Ensino Médio:

- Compreender a Matemática como fruto de construções humanas, entendendo como ela se desenvolveu ao longo dos anos, relacionando o desenvolvimento científico com a transformação da sociedade;
- Analisar qualitativamente dados quantitativos, representados gráfica ou algebricamente, relacionados a contextos sócio-econômicos, científicos ou cotidianos;
- Identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações, interpolações e interpretações;
- Identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para o aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade;
- Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades;
- Compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências e das tecnologias e das atividades cotidianas;

- Entender o impacto das tecnologias associadas à Matemática na sua vida pessoal, nos processos de produção, no desenvolvimento do conhecimento e na vida social;
- Aplicar as tecnologias associadas à Matemática, na escola, no trabalho e em outros contextos relevantes para sua vida.

O presente estudo tem por objetivo construir, discutir e avaliar uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) a respeito do tema Funções Trigonométricas. Esta pesquisa pretende contribuir para uma nova visão do ensino deste tema no currículo do Ensino Médio.

II. A escolha do tema Funções Trigonométricas

O tema escolhido envolve a construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem para o conteúdo: funções trigonométricas. A escolha desse assunto se deve ao fato de que o seu desenvolvimento articula dois campos da matemática que não são explorados de uma forma satisfatória na educação básica: funções e geometria. As pesquisas apresentadas neste estudo evidenciam que os professores apresentam uma formação insuficiente quanto aos conhecimentos, competências e habilidades para o desenvolvimento destes temas. Geralmente, quando esse estudo é realizado, sua abordagem é superficial, não prioriza a construção dos conceitos relacionados ao conteúdo e encerra o assunto sem a discussão de questões como: Por que é melhor utilizar o círculo trigonométrico com o raio unitário? Por que o número de voltas no círculo pode ser infinito? No que implica a alteração da posição dos parâmetros na representação da função, como por exemplo, $f(x)=2+\text{sen}(x)$, $f(x) = 2\text{sen}(x)$ e $f(x) = \text{sen}(2x)$?

Desta forma, temos como propósito elaborar uma THA para o desenvolvimento de Funções trigonométricas por meio de atividades e resolução de problemas que envolvam: construções com régua, compasso e uso de material manipulativo, tarefas que permitam o uso de calculadora, construção de gráficos usando o *software* Geogebra e com papel e lápis.

Além disso, visamos contribuir para o desenvolvimento profissional dos professores parceiros ao propor uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) construída a partir do levantamento de resultados de pesquisas sobre o tema. Deste modo, pretendemos: elaborar atividades que visem à melhoria dos assuntos pertinentes ao tema, buscar recursos didáticos que permitam explorar o conteúdo Funções Trigonométricas e, a partir do acompanhamento do desenvolvimento da THA em sala de aula, verificar possíveis mudanças, necessárias na mesma, após o encerramento do trabalho com os alunos.

Uma das expectativas desta investigação é promover o uso das tecnologias, que segundo recomendações dos PCN (1998), contribui com o processo de ensino e aprendizagem. Porém, quando se investiga o uso de calculadoras e computadores nas escolas, ainda encontramos muitos professores resistentes. É mister influenciar os educadores no uso das tecnologias, visando à incorporação delas à sua prática de ensino.

Pretendemos usar os pressupostos da concepção construtivista de aprendizagem que norteiam os trabalhos de Martim Simon, para aproximar os professores de tal metodologia de ensino e aprendizagem que ainda se apresenta muito aquém de ser aplicada nas salas de aula.

Sendo assim temos como objetivo de pesquisa verificar: como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino de Funções Trigonométricas; como as pesquisas na área de Educação Matemática, que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem, podem contribuir para a organização do ensino de Funções Trigonométricas que potencialize boas situações de aprendizagem aos alunos; como a atuação do professor de Matemática se revela, no que se refere às atividades de planejamento do ensino de Funções Trigonométricas, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem.

III. Questões de pesquisa

Para alcançar o objetivo desta pesquisa, este trabalho busca responder às seguintes questões:

a) Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino de Funções Trigonométricas?

b) Como as pesquisas na área de Educação Matemática, que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem, podem contribuir para a organização do ensino de Funções Trigonométricas que potencialize boas situações de aprendizagem aos alunos?

c) Como a atuação do professor de Matemática se revela, no que se refere às atividades de planejamento do ensino de Funções Trigonométricas, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem?

IV. Procedimentos metodológicos

Desenvolvemos um estudo com 2 professores e 70 alunos da 2.ª série do Ensino Médio de uma escola da rede pública do Estado de São Paulo localizada no município de Embu-Guaçu.

A investigação realizada é de natureza qualitativa (BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K, 1994) e sua dinâmica conta com coleta de dados por meio de observações das aulas, entrevistas com professores e alunos participantes do projeto e protocolos realizados pelos alunos.

A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como instrumento principal. A coleta de dados ocorreu por meio de gravação em áudio e observação participante, que serve de escopo para a análise do investigador. A observação foi realizada no ambiente natural dos sujeitos para entender o contexto da investigação e como este influencia nos resultados da pesquisa.

Os dados coletados são predominantemente descritivos. Os resultados são apresentados apenas para ilustrar e exemplificar análises feitas pelo pesquisador. A fim de garantir a idoneidade da coleta, respeitamos, tanto quanto possível, a forma como foram coletados.

Numa abordagem qualitativa tudo é potencialmente relevante e pode ser utilizado como instrumento de análise do objeto de estudo. Esta abordagem ocorre estabelecendo uma relação dialógica entre o pesquisador e os sujeitos da pesquisa. Deste modo, impressões, frases e comentários citados no decorrer deste trabalho são detalhes minuciosos que fazem parte do escopo da investigação.

A presente pesquisa foi desenvolvida em duas etapas. A primeira teve início com a revisão bibliográfica: teses, dissertações e artigos referentes ao ensino e aprendizagem de Funções Trigonométricas. A partir dos resultados dessas pesquisas e embasados no quadro teórico elaboramos as atividades que constituem a THA. Após entrevistamos os professores que passam a ser denominados *professores parceiros*, apresentamos o projeto e discussão de propostas de mudanças da THA.

A segunda etapa iniciou com o desenvolvimento da THA em sala de aula pelos professores parceiros, seguida por discussões entre eles e a professora pesquisadora a respeito do andamento das atividades. Na conclusão destas foram realizadas entrevistas com os alunos para obter suas impressões sobre a trajetória e com os professores parceiros para discussão dos resultados alcançados e sugestões de alterações. A partir da análise dos dados coletados e sugestões apresentadas pelos professores parceiros, elaboramos a versão da THA e a síntese das considerações observadas.

V. Estrutura da investigação realizada

Organizamos nosso trabalho em cinco capítulos:

No primeiro apresentamos os marcos teóricos utilizados na fundamentação teórica que orienta essa pesquisa: os pressupostos construtivistas, as formulações de Martim Simon (1995), a revisão bibliográfica referente a pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Funções Trigonométricas e o tratamento do tema nos documentos curriculares;

No segundo descrevemos o processo de construção da 1.ª versão da THA e a versão da THA desenvolvida em sala de aula com os objetivos gerais e específicos das atividades que a constituem;

No terceiro capítulo apresentamos a aplicação da THA e, em seguida, descrevemos a análise e categorização dos dados coletados por meio do acompanhamento do desenvolvimento da mesma em sala de aula; da descrição dos relatórios de observações da atuação dos professores parceiros e dos alunos;

No quarto capítulo apresentamos a categorização dos dados coletados por meio do acompanhamento do desenvolvimento da mesma em sala de aula; da descrição dos relatórios de observações da atuação dos professores parceiros e dos alunos;

No quinto descrevemos como este estudo pode ser incrementado e modificado com a contribuição dos novos conhecimentos da professora pesquisadora e dos professores parceiros. No final apresentamos as modificações realizadas que aprimoraram a THA.

Introdução

Neste capítulo apresentaremos os pressupostos teóricos sobre o Construtivismo, em seguida as formulações de Martin Simon (1995), que retoma aspectos da perspectiva construtivista de aprendizagem para apresentar a(s) Trajetória(s) Hipotética(s) de Aprendizagem (THA); Abordamos também contribuições de outros autores para a reflexão sobre as THA; Realizamos um levantamento das THA desenvolvidas pelo grupo de pesquisa e destacamos as características que são comuns aos estudos.

No que se refere às Funções trigonométricas, apresentamos algumas contribuições advindas de: revisão dos documentos oficiais, dissertações de mestrado, tese de doutorado e artigos.

1.1. Construtivismo

Pesquisadores como Coll e Solé (2009) defendem a concepção construtivista como um princípio para análise de situações educativas que também pode ser utilizada para a tomada de decisões referentes ao planejamento, aplicação e avaliação do ensino. Tal aporte teórico permite auxiliar o professor no planejamento de situações de aprendizagem no que concerne aos conteúdos, elaboração de materiais didáticos, até os instrumentos de avaliação das mesmas. Para os autores, o Construtivismo subsidia a elaboração das situações de aprendizagem ao analisar e buscar recursos que visam compreender por que um aluno não aprende e como o professor deve desenvolver estratégias para tentar ensiná-lo.

Segundo Coll e Solé (2009) a concepção construtivista não deve ser utilizada como um manual a ser seguido, mas como um conjunto de diretrizes que auxiliam na tomada de decisões sobre o ensino. Assim é preciso adequá-la às metas de aprendizagem e ao contexto em que será aplicada. Para os autores as teorias devem ser utilizadas pelos professores como um marco guia, porém não determina as ações a serem executadas uma vez que estas dependem de uma série de fatores e imprevisões que não são de inteiro controle do professor.

Concordamos com Coll e Solé (2009) quando destacam que algumas perguntas devem nortear o trabalho do professor: Como, por que e quando os alunos aprendem? Por que às vezes não conseguem aprender? O que o professor deve e pode fazer para que os alunos aprendam? Aprender é construir conhecimentos ou repetir? Pretendemos promover estas reflexões nos professores parceiros, sujeitos deste estudo.

Para Coll e Solé (2009) na elaboração de um plano de ensino todas essas perguntas e outras devem servir de subsídio ao trabalho do professor. Deste modo, as teorias existem como suporte e explicação para tais interrogações que assolam o complexo processo de ensino e aprendizagem.

O papel do professor não se restringe ao de um mero "transmissor de informações", segundo Coll e Solé (2009). Sem dúvida, estende a algo maior e mais complexo, à tarefa de mediador entre o conhecimento e os alunos. Cabe ao professor o papel de gestor das aprendizagens e propor situações de ensino que melhor propiciem tal aprendizagem.

Autores como Pires (2009) e Simon (1995) criticam a interpretação errada, simplista e vaga da concepção construtivista: de que o professor deve deixar os alunos à vontade, para interagirem e aprenderem.

> Concordamos plenamente com Simon quando considera excessivamente simplista aproveitar a conexão do construtivismo para o ensino com a romântica noção de "deixar os alunos sozinhos e eles construirão seu conhecimento matemático". Ou então: "Colocar alunos em grupos e deixá-los socializar o modo como eles resolvem seus problemas".
>
> Nas experiências educacionais brasileiras, ideias como estas foram veiculadas de forma maciça e ocasionaram grandes problemas no que se refere ao papel do ensino e do professor. (PIRES, 2009, p. 154)

Coll e Solé (2009) argumentam que o aluno aprende e constrói seu conhecimento a partir da ajuda do professor, que deve conduzir as aprendizagens e fornecer auxílio que varia em quantidade, tipo e qualidade para atender à necessidade do aluno. Esta ajuda pode partir de uma simples atenção, socialização de um conteúdo às demonstrações minuciosas. Assim, a ajuda do professor deve propiciar o desenvolvimento da autonomia dos alunos.

A aprendizagem, segundo Coll e Solé (2009) ocorre quando o aluno elabora uma representação pessoal sobre um objeto ou conteúdo. Quando consegue assimilar o objeto ou conteúdo por meio das suas experiências, interesses e mobilização de conhecimentos prévios podemos dizer que ele aprendeu. Para Coll e Solé, o caráter ativo da aprendizagem, leva a aceitar que :

> esta é fruto de uma construção pessoal, mas na qual não intervém apenas o sujeito que aprende; os "outros" significativos, os agentes culturais, são peças imprescindíveis para essa construção pessoal... (COLL E SOLÉ, 2009, p 19)

Gostaríamos de destacar outro componente do processo de ensino e aprendizagem que é definido por Solé (2009, p. 40): "O autoconceito refere-se ao conhecimento de si mesmo e inclui juízos valorativos, chamado de autoestima." Segundo a autora, a crença na própria capacidade pode servir de estímulo para que o aluno realize esforços na busca da execução de uma tarefa ou, em contrapartida, nem inicie a atividade uma vez que se desqualifica para conseguir executá-la. Solé refere-se às relações interpessoais vivenciadas pelo aluno com os pais, irmãos, professores e colegas como responsáveis pela visão elaborada sobre si mesmo.

Solé (2009) ressalta que o professor traz uma visão da sala de aula, que muitas vezes subestima a capacidade dos aprendizes e julga que não estejam aptos de realizar tais tarefas. Para a autora "não existe qualquer dúvida sobre o fato de que as expectativas dos professores sobre o rendimento de seus alunos podem chegar a modificar seu rendimento real."(2009, p. 46). Nesse sentido, Miras (2009) sugere que é imprescindível o professor ter ciência dos conhecimentos prévios que os alunos possuem. Para a autora, há várias maneiras de explorar os conhecimentos prévios: o professor pode lançar mão de atividades exploratórias e diagnósticas, observação em sala de aula e a própria experiência docente. Após alguns anos de docência espera-se que o professor saiba identificar e definir quais as principais dificuldades dos alunos em determinados aspectos, como evitar determinados erros, quais atividades propor para facilitar a compreensão de determinado conteúdo.

Para Mauri (2009) o professor deve ensinar o aluno a aprender a aprender. Nesta perspectiva, os alunos são aprendizes ativos que constroem o próprio conhecimento. A autora critica a concepção errônea da teoria construtivista: quando professores abandonam os alunos à própria sorte ao acreditarem que se "ajudarem" os aprendizes estarão dando pistas ou respostas que deveriam ser conquistadas pelos alunos. Não podemos refutar tal afirmação, porém o professor deve perceber em que ocasião intervir para não perder o momento de aprendizagem. Assim como é importante que o professor perceba em que momento deve adaptar a atividade a um grau de dificuldade maior ou menor dependendo do desenvolvimento e compreensão dos aprendizes.

Segundo Mauri (2009) para qualquer processo de ensino e aprendizagem é imprescindível garantir dois requisitos: saberes pessoais dos alunos (conhecimentos prévios, motivação para aprender, crença na própria capacidade de aprender e autoconceito) e disposição dos professores para ensinar (como ativar os conhecimentos prévios através de atividades adequadas ao nível da classe que permitam estabelecer relações entre a nova tarefa e as realizadas anteriormente).

Há outros fatores que exercem influência na disposição do aluno diante da aprendizagem que são destacados por Miras (2009) como determinantes no ânimo de aprender um novo conteúdo: “a representação e as expectativas que têm em relação ao professor e aos seus próprios colegas” (Ibid., p. 59).

Outro tema frequente nesta literatura é o papel reflexivo do professor. Como refere Onrubia (2009): o professor deve ser um profissional reflexivo, mesmo após o planejamento das situações de ensino, e observar a execução das atividades para avaliar sua aplicação e, quando preciso, efetuar alterações e ajustes para a melhor execução das atividades. Deste modo o professor abandona o papel de mero executor de tarefas ou aplicador mecânico de fórmulas e prescrições vindas de fora do ambiente escolar para um papel ativo e reflexivo. No simples ato de planejar uma aula de 45 minutos, o autor sugere que o professor deve se preocupar com diversas variáveis como: qual tempo disponho para este assunto (uma aula, duas ou será necessário um prazo maior), como devo organizar os alunos (em certas atividades a interação em pequenos grupos é necessária, em outros para determinadas turmas, será motivo de distração e não contribuem para o aprendizado), o tipo de atividade (debate, aula expositiva, projetos). A concepção que o professor dá à educação e ao ensino irá nortear as decisões que tomará no planejamento e execução das situações de aprendizagem (ZABALA, 2009). Para o autor, se o professor acredita que o aluno constrói conhecimentos a partir de experiências pessoais, serão elaboradas atividades que facilitem e estimulem a experimentação. Em contrapartida acredita-se que a repetição de exercícios mecânicos é a maneira mais eficaz de aprender, as atividades serão apresentadas por meio de listas de exercícios que estimulem a memorização dos conteúdos. Solé (1991, apud Zabala, 2009) defende que o clima da aula deve propiciar aceitação e respeito mútuo em que todos se sintam desafiados a aprender e estejam confiantes para pedir ajuda quando necessário; o planejamento das atividades necessita prover recursos para que o aluno consiga usar de forma autônoma o material de modo que permita que o professor faça intervenções apenas para alunos com maiores dificuldades; as execuções das tarefas devem fomentar a autoestima do educando de modo que ele venha a atribuir um significado à atividade e comportar-se de modo ativo, autônomo e motivado na busca pelo conhecimento.

1.2. Trajetória(s) hipotética(s) de aprendizagem, segundo Simon

Há quinze anos, Simon (1995) argumentou que vários estudos comprovavam que o construtivismo indicaria caminhos que auxiliavam a compreensão de como ocorre a aprendizagem, mas, mesmo com os resultados de pesquisa em mãos, pouco havia sido feito para a reconstrução de uma Pedagogia da Matemática.

Nos dias atuais encontramos um panorama semelhante no artigo de Pires (2009), que corrobora as observações que Simon apregoou em 1995 ao afirmar que ainda não é uma tradição na comunidade de educadores matemáticos brasileiros o debate e a pesquisa sobre questões curriculares. A autora ressalta que parte bastante significativa das pesquisas na área de Educação Matemática desenvolvidas nas últimas décadas situam-se no campo da Didática da Matemática com influência da abordagem construtivista, porém:

> Os resultados dessas pesquisas, contudo, não têm influência direta na elaboração ou ressignificação de propostas de ensino compatíveis com as informações que as pesquisas indicam a respeito das formas de aprendizagem dos alunos. (PIRES, 2009, p. 149)

Comentamos, no início deste capítulo, que a concepção construtivista não pretende fornecer modelos de aulas, o construtivismo fornece contribuições acerca de como se processam as aprendizagens e deve ser utilizado para promover mudanças na Pedagogia da Matemática (Simon, 1995). Para tal, Simon destaca que o construtivismo traz contribuições que vão além do trabalho do professor e aborda temas como currículo na práxis, construído em sala de aula, o desenvolvimento de materiais didáticos e a elaboração de pesquisas na área educacional.

Para Simon (1995) os recentes debates epistemológicos sobre o desenvolvimento do conhecimento são vistos, fundamentalmente, como um processo psicológico (cognitivo) ou um processo sociológico. Para o autor, a organização do conhecimento em sala de aula é a coordenação dessas duas perspectivas. A análise psicológica tem como foco o conhecimento individual sobre a Matemática, a análise sociológica refere-se à construção do conhecimento com a efetiva participação dos alunos nas aulas de Matemática. Na concepção construtivista de Simon, a aprendizagem é definida como um processo de construção individual e social mediados por professores com a concepção de um trabalho estruturado na qual se entende a aprendizagem dos alunos.

Simon (1995) desenvolveu o Ciclo de Ensino de Matemática (Figura 1), para apresentar um modelo que representa as relações cíclicas entre os conhecimentos do professor, pensamento e reflexões e tomada de atitudes. O ciclo é uma proposta de formulação dos modelos de ensino. Este ciclo é necessário uma vez que o objetivo inicialmente planejado, muitas vezes necessita ser modificado para melhor se adaptar ao grupo de aprendizes. Segundo Simon (1995) quando um determinado tema é desenvolvido em sala de aula, as atividades elaboradas anteriormente podem sofrer ajustes em consequência das observações dos alunos. .O termo Ciclo de Ensino assim se justifica, pois quando o professor tece observações a respeito do uso da atividade e demanda esforços para elaborar novas, o ciclo se inicia, caracterizando as relações cíclicas.

A consideração do objetivo da aprendizagem, das atividades de aprendizagem e do pensamento e conhecimento dos estudantes são elementos importantes na construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem - THA, a parte chave do Ciclo de Ensino de Matemática que Simon apresentou em seu artigo publicado em 1995. Para ele, o desenvolvimento de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem tem como meta promover mudanças no ensino da Matemática embasadas no construtivismo.

Em seu texto, Simon (1995) destaca os domínios do conhecimento do professor necessários para o desenvolvimento de atividades de aprendizagem: conhecimento do ensino a respeito do conceito a ser desenvolvido (provindo de pesquisas, livros ou da própria experiência docente); ter ciência de materiais e recursos disponíveis para o desenvolvimento do tema e conhecimento de variadas atividades que permitem melhor compreensão do assunto.

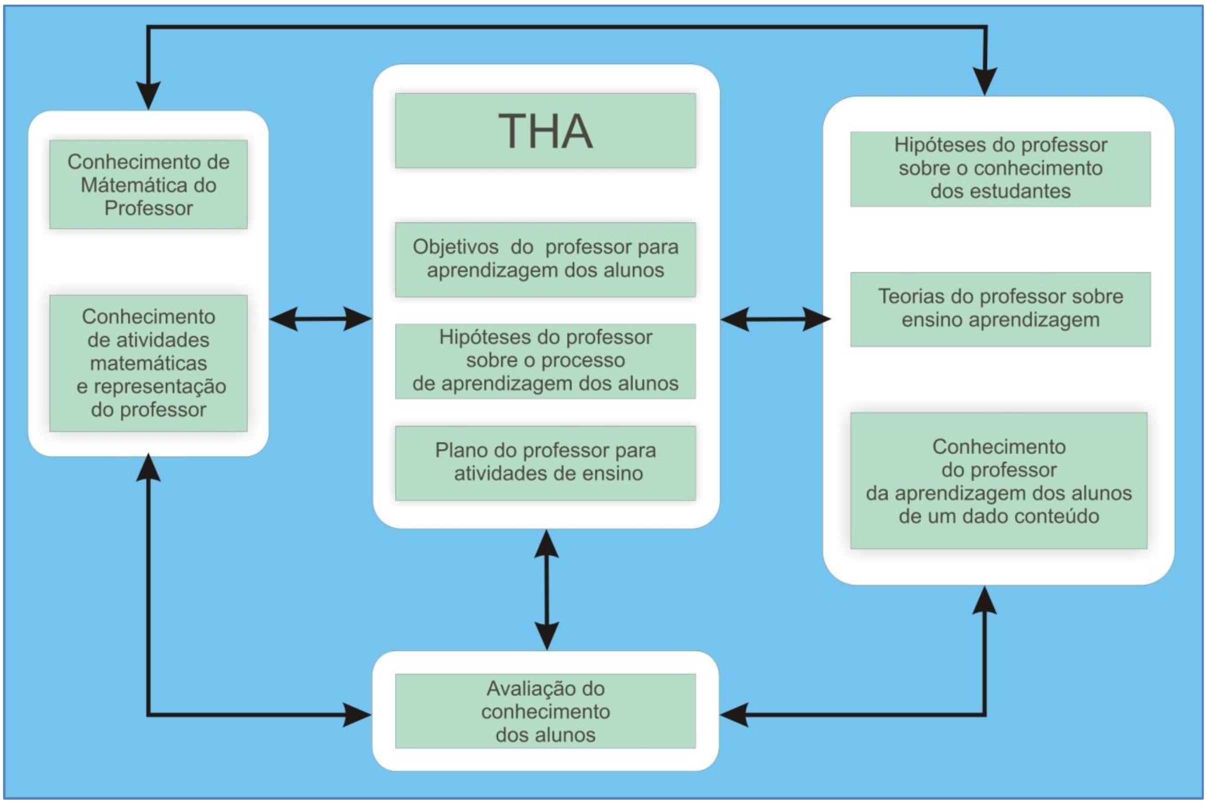


Figura 1: Ciclo de Ensino da Matemática, THA – adaptado (Simon, 1995, p, 56).

O termo Trajetória Hipotética de Aprendizagem, cunhado por Simon (1995), tem especial relevância para compreender o pensamento do autor. A trajetória se refere aos caminhos que os alunos devem seguir para a construção dos conhecimentos pretendidos. Para o autor, o termo hipotético compreende duas perspectivas: a que entende que o professor tem acesso apenas às hipóteses dos conhecimentos dos alunos, isto é, ele não consegue acessar diretamente o conhecimento dos aprendizes e a outra perspectiva, que utiliza o termo hipótese para fazer referência ao prognóstico, à expectativa do professor, a respeito de como a aprendizagem será processada pelos alunos.

Segundo Simon (1995), uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) é constituída por três componentes:

- *os objetivos do professor*: compreende os conteúdos, conhecimentos e habilidades que o professor pretende desenvolver;

- *as atividades de ensino*: compreende as atividades a serem desenvolvidas para promover a aprendizagem dos alunos;

- *o processamento hipotético de aprendizagem*: abrange hipóteses acerca do entendimento e dos pensamentos mobilizados pelos aprendizes no desenvolvimento das atividades de ensino.

Na elaboração da trajetória hipotética de aprendizagem, Simon (1995) afirma que vários conhecimentos do professor são mobilizados: conhecimentos acerca dos objetivos do ensino, das teorias que estudam o processo de ensino e aprendizagem específicos de determinados temas, entre outros.

Autores como Wood, Cobb e Yackel citados por Simon (1995), afirmam que os professores devem ter como propósito a construção de uma prática que capacite seus alunos a percorrerem o caminho da aprendizagem matemática. Esta perspectiva deve orientar os professores de Matemática a reconstruir meios para fazer conhecer a Matemática na escola e, deste modo, meios para ensinar Matemática.

Para Simon, o papel dos alunos e a interação entre professores e alunos são elementos importantes na construção do conhecimento:

> Quando os alunos começam a exercer as atividades planejadas, o professor se comunica com eles e os observa, que leva o professor à uma nova compreensão das concepções dos estudantes. O ambiente de aprendizagem evolui como resultado da interação entre o professor e os alunos e como eles se envolvem no conteúdo matemático. [...] O professor pode apresentar uma tarefa. No entanto, é o que os alunos fazem dessa tarefa e sua experiência com ela que determina seu potencial de aprendizagem. (SIMON, 1995, p. 32).

1.3. Outras referências para a utilização de THAs

Nos estudos de Pedro Gómez e José Luis Lupiáñez (2007), encontramos uma análise sobre o interesse de diferentes pesquisadores no uso de THAs, especialmente no que se refere ao processo de formação inicial de professores. Para os autores, a partir da publicação de um número de Mathematicas Thinking and Learning, dedicado à sua discussão (Clements y Sarama, 2004) o interesse pelas THAs foi reconhecido, destacando a relevância desta noção dentro da

Educação Matemática. Steffe (2004, apud Gomez e Lupiánez, 2007 p. 81) ressalta a importância da THA:

> A construção de THAs dos alunos é um dos desafios mais urgentes que a educação matemática enfrenta atualmente. É também um dos problemas mais apaixonantes, pois é ali onde podemos construir nossa compreensão da matemática dos alunos e, como nós professores, podemos influenciar nessa matemática. (GÓMEZ E LUPIÁÑEZ, 2007, p.81)

Simon e Tzur (2004, apud Gomez e Lupiañez, p. 81, 2007) identificam as principais características de uma trajetória hipotética de aprendizagem da seguinte maneira:

> A construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) se baseia nos quatros pressupostos:
>
> 1 A construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem se baseia na compreensão do conhecimento atual dos estudantes que receberam durante sua formação.
>
> 2 Uma trajetória hipotética de aprendizagem é um meio de planificar a aprendizagem de conceitos matemáticos específicos.
>
> 3 As tarefas matemáticas proporcionam as ferramentas para promover a aprendizagem dos conceitos matemáticos específicos e, portanto, são um elemento chave no processo de ensino.
>
> 4 Dada à natureza hipotética inerente às incertezas deste processo, o professor se verá obrigado a modificar constantemente cada aspecto da trajetória hipotética de aprendizagem.

No artigo, Gómez e Lupiáñez (2007) revelam que os diversos investigadores reconhecem os três elementos centrais da THA (objetivos de aprendizagem, tarefas matemáticas e hipóteses sobre o processo de aprendizagem) e aceitam os quatro pressupostos mencionados anteriormente, sendo que cada um interpreta e usa a noção com propósitos e maneiras distintas. Para Gomez e Lupiáñez são perceptíveis dois usos claramente diferenciados: como ferramenta de investigação e como ferramenta para planejamento.

> Os trabalhos de Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) e Clements, Wilson e Sarama (2004) são trabalhos essencialmente de investigação nos quais se explora a THA para temas específicos.
>
> Por outro lado, os trabalhos de Gravemeijer (2004) e Simon e Tzur (2004) mesmo explorando também THA, preocupam-se com maior ênfase por seu uso no planejamento do professor. Finalmente, o trabalho de Batista (2004) centra-se na avaliação. (GÓMEZ E LUPIÁÑEZ, 2007, p.81)

Os trabalhos pesquisados por Gómez e Lupiáñez (2007) desenvolveram exemplos de THA em temas específicos. Para tanto, os investigadores assumiram o papel de professores em aulas reais.

> Mesmo que existam professores que participam de alguns projetos, não são eles que produzem os resultados das explorações. De fato, alguns destes trabalhos, como o de Steffe (2004) e de Gravemeijer (2004), veem a construção de THAs como um trabalho do investigador, cujos resultados podem apoiar o trabalho do professor. (GÓMEZ E LUPIÁÑEZ, 2007, p.82)

As principais diferenças de interpretação da noção de THA entre os estudos elencados por Gómez e Lupiáñez (2007) têm a ver com o nível de concretização com que a utilizam: desde o planejamento de várias aulas, até o trabalho com atividades específicas numa parte de uma aula.

Por exemplo, Gómez e Lupiáñez (2007) destacam os estudos de Gravemeijer (2004), Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) que utilizam a noção de THA para descrever a aprendizagem dos estudantes ao longo de várias sessões nas quais se trabalha um tema.

No entanto, estes autores citam Baroody, Cibulskis, Lai y Li (2004) que sugerem que a noção de THA pode ser utilizada para promover o "desenvolvimento microconceitual". Estes pesquisadores fazem comentários quanto à falta de universalidade, isto é, se é provado que uma trajetória hipotética de aprendizagem é válida em uma circunstância particular (em um determinado contexto, com um grupo de alunos e um professor), isto não quer dizer que essa trajetória tenha sentido em outras circunstâncias.

Uma questão importante discutida por Gómez e Lupiáñez (2007) aponta as preocupações de Gravemeijer (2004, p. 107 apud GÓMEZ E LUPIÁÑEZ, 2007) que reconhecem as dificuldades dos professores para construir THA como as que são produzidas pelos investigadores. No entanto, isso não quer dizer que a única coisa que se pode entregar aos professores sejam meras sequências de ensino para usar. Ele sugere dois elementos que podem ser úteis aos professores: (a) um marco de referência e (b) sequências de atividades que lhes sirvam de exemplo.

Para Gómez e Lupiáñez (2007), a seleção de tarefas que compõem atividades de ensino e aprendizagem deve ser um processo reflexivo e cíclico. Para cada tarefa, se determinam as capacidades que esta tarefa pode por em jogo e, a partir da análise dos objetivos de aprendizagem previstos anteriormente pelo professor, é possível modificar a tarefa e realizar uma nova análise. Finalmente, estes autores apontam que, para realizar este processo cíclico, o professor deve ter uma ideia de quais os possíveis caminhos de aprendizagem podem levar os estudantes do seu estado atual (capacidades que já tenham desenvolvido) ao estado que representa os objetivos da aprendizagem (capacidades que se pretende desenvolver).

Ao adaptar a noção de trajetória hipotética de aprendizagem em cursos de formação inicial de professores de matemática, Goméz e Lupiañez (2007) pretendem propor uma ferramenta que permite ao futuro professor relacionar a análise do conteúdo matemático, às capacidades e desenvolvimento dos estudantes em relação a esse conteúdo e os tipos de tarefas que podem propor aos alunos para que desenvolvam as capacidades. Encerram o artigo com o argumento de que o desenho de atividades de ensino e aprendizagem se converte em um processo sistemático, aberto à crítica e discussão e que aborda a planificação sugerida por Simon (1995).

Goméz e Lupiañez (2007) defendem que, nos cursos de formação inicial, os futuros professores devem desenvolver competências para construir trajetórias hipotéticas de aprendizagem. Entretanto, sugerem uma adaptação da THA uma vez que os futuros professores não têm experiência docente. Com a elaboração das trajetórias hipotéticas de aprendizagem, os autores propõem uma ferramenta que permite ao futuro professor relacionar a análise do conteúdo matemático, às capacidades e desenvolvimento dos estudantes em relação a esse conteúdo e aos tipos de tarefas que podem propor aos alunos para que desenvolvam suas capacidades. Para estes autores o desenho de atividades de ensino e aprendizagem se converte em um processo sistemático, aberto à crítica e discussão e que aborda a planificação sugerida por Simon (1995).

Percebemos proximidades entre o conceito de trajetória hipotética de aprendizagem de Simon (1995) e a unidade de análise definida por Zabala (2009). Em seu ponto de vista, Zabala (2009) defende que o professor deve desenvolver “unidades didáticas” que possibilitem trabalhar múltiplos conteúdos em um determinado tempo.

> Poderíamos definir a unidade de análise que viemos desenhando como um conjunto ordenado de atividades, estruturadas e articuladas para a consecução de um objetivo educativo em relação a um conteúdo concreto. (ZABALA, 2009, p. 179)

Para Zabala (2009) o desenvolvimento de uma unidade de análise deve compreender os seguintes aspectos: o conteúdo da aprendizagem, os objetivos educativos, o papel do professor e dos alunos, os materiais curriculares necessários e os meios de avaliação da unidade.

Na concepção construtivista proposta por Zabala (2009), ao elaborar a unidade didática o professor deve considerar a diversidade de aprendizes e promover diversos tipos de interações (em pequenos grupos, em grupos maiores, atividades individuais) de modo a favorecer as interações e troca de conhecimentos entre os alunos.

1.4. A pesquisa educacional na prática do professor

A seguir apresentamos os estudos de outros pesquisadores que também abordam a aproximação entre as pesquisas educacionais e a sala de aula.

Pesquisadores do Mid-continent Research for Education and Learning (McREL) analisaram resultados de pesquisas sobre estratégias de ensino que poderiam ser usadas por professores nas salas de aula. Utilizaram a técnica de metanálise para determinar o efeito médio de uma determinada técnica. As pesquisas referenciadas analisaram as estratégias empregadas por educadores extremamente eficientes da educação infantil ao Ensino Médio (Marzano, Pickering e Pollock., 2008). Para os pesquisadores, a pedagogia eficaz deve compreender três áreas relacionadas: as estratégias de ensino; as técnicas de manejo, e o currículo criado pelo professor.

A pesquisa na área de educação deve romper com as barreiras da academia e chegar à sala de aula. Para tal, Marzano, Pickering e Pollock(2008) defendem que:

> Reconhecidas todas as limitações deste livro, afirmamos mais uma vez nossa crença de que estamos no início de uma nova era na educação – uma era em que a pesquisa vai proporcionar uma orientação explícita para o professor da classe. (p. 14, 2008)

Durante a elaboração da THA nos preocupamos em criar atividades a serem realizadas em duplas, que promovessem a troca entre os pares de modo que desenvolvesse nos alunos participantes da pesquisa a prática da aprendizagem cooperativa. Para Marzano, Pickering e Pollock (2008), as pesquisas na área educacional recomendam que este tipo de agrupamento torna-se mais eficaz quando aplicado de maneira sistemática, mas sem exageros na utilização. Os pesquisadores Anderson, Reder e Simon (1997, apud Marzano, Pickering e Pollock., 2008) recomendam cuidado no emprego indiscriminado de aprendizagem cooperativa: o uso inadequado ocorre quando as tarefas não estão bem estruturadas e quando a abordagem é usada com tanta frequência, que os alunos não têm tempo suficiente para treinar independentemente as habilidades e os processos que se objetivavam alcançar.

Outro resultado da pesquisa de Marzano, Pickering e Pollock (2008) indica que o uso de tarefas estruturadas para guiar os alunos por meio da geração e testagem de hipóteses pode contribuir para avanços na aprendizagem. A investigação experimental, por exemplo, apregoa que os alunos devem resolver atividades que envolvam testar hipóteses formuladas pelos próprios aprendizes. Outra estratégia defendida pelos autores são atividades nas quais os alunos devem explicar suas hipóteses e conclusões.

O que alguns autores denominam de “conhecimentos prévios” é utilizado pelos pesquisadores Marzano, Pickering e Pollock (2008) como pistas, perguntas e organizadores avançados. Para estes últimos, as pesquisas educacionais indicam que a “ativação de conhecimento prévio é fundamental para todo tipo de aprendizagem. Na verdade, nosso conhecimento anterior pode influenciar até mesmo o que percebemos.”(ibid, p. 103, 2008). A utilização de pistas e perguntas auxilia os alunos a usar o que já sabem sobre o conteúdo estudado. Neste mesmo estudo podemos observar que o professor deve aguardar um “tempo de espera” ou pausa entre a formulação da pergunta e a resposta dos alunos. Quanto maior a complexidade da pergunta, maior deve ser o intervalo para a resposta.

No artigo de Zeichner (1998) encontramos uma crítica à pesquisa educacional, e a necessidade de eliminar a separação que atualmente existe entre o mundo dos professores-pesquisadores e o mundo dos pesquisadores acadêmicos. O ponto de vista dos professores é que a pesquisa educacional conduzida pelos acadêmicos é irrelevante para suas vidas nas escolas. Zeichner referencia alguns trabalhos (Mitchel, 1985; Cookson, 1987; Gurney. 1989; Doig. 1994) para argumentar que a maior parte dos professores não procura a pesquisa educacional para instruir e melhorar suas práticas. Por outro lado, Zeichner comenta que os pesquisadores acadêmicos não consideram a pesquisa dos professores das escolas como uma forma de produção de conhecimentos.

O objetivo de Zeichner (1998) não é questionar se a pesquisa acadêmica tem ou não influenciado o pensamento e a prática nas escolas, ou, se a pesquisa dos professores tem influenciado o pensamento e a prática na academia. Segundo o autor "há claras evidências de que somente em poucos casos a pesquisa acadêmica tem estimulado reformas em escolas." (1998, p. 1).

Algumas razões para o ceticismo dos professores sobre pesquisa educacional são elencadas por Zeichner (1998): o uso de linguagem especializada no meio dos acadêmicos, que faz sentido somente para os pesquisadores; frequentemente os professores se veem descritos de forma negativa, sentem que os pesquisadores acadêmicos são insensíveis às complexas circunstâncias vivenciadas em seus trabalhos e se sentem explorados pelos pesquisadores universitários.

Zeichner (1998) tece um comentário na forma como a pesquisa educacional chega ao professor. Seus resultados são simplesmente apresentados como certos e definitivos, ou usados como justificativas para impor algum programa prescritivo a ser seguido pelos professores.

Um dos projetos apresentados por Zeichner (1998) foi dirigido por Luis Moll, da Universidade do Arizona. O projeto buscou desenvolver inovações no ensino, extraídas dos conhecimentos e habilidades encontrados nos lares da comunidade Américo mexicana em Tucson (Moll et al., 1992). O autor cita que neste, como no projeto de matemática, professores e acadêmicos trabalharam juntos como parceiros. Mesmo não sendo possível uma igualdade absoluta, uma vez que ambos trazem diferentes conhecimentos para a colaboração, há paridade no relacionamento e cada um reconhece e respeita a contribuição do outro.

No artigo de Passos et al (2006) encontramos uma discussão sobre o trabalho coletivo, tais como colaboração e cooperação. Os autores indicam a concepção de colaboração de Johnston e Kairschner (1996 apud Ferreira, 2003):

> A colaboração não pode ser imposta, ela deve ser construída. Ela é construída dentro de relacionamentos nos quais os indivíduos sentem vontade de compartilhar suas diferenças e, ao contrário das formas típicas de autoridade atribuídas aos papéis e relacionamentos institucionais, busca por formas mais inclusivas de envolver múltiplas perspectivas e fala através das questões da confiança, mutualidade e equidade. Estabelecer relacionamentos leva tempo. [...] (PASSOS et al, 2006, p. 202)

Os autores apresentam também uma concepção para cooperação, como um modo de trabalho coletivo em que, apesar de serem “realizadas ações conjuntas e de comum acordo, parte do grupo não tem autonomia e poder de decisão sobre elas” (Fiorentini, 2004, apud Passos et al, 2006).

Os estudos de Zeichner e Diniz-Pereira (2005) apontam que nas décadas de 1980 e 1990 muitos países promoveram reformas educacionais utilizando termos como pesquisa-ação, prática reflexiva e profissional reflexivo. Não pretendemos classificar nosso trabalho como pesquisa-ação ou pesquisa colaborativa. Pois encontramos algumas características de uma ou de outra, porém nenhuma das metodologias é completamente satisfeita, não se apropria a definição de pesquisa-ação tal como Zeichner e Diniz-Pereira (2005) afirmam, nosso estudo não é “uma pesquisa sistemática feita por profissionais sobre as suas próprias práticas”. Não é uma pesquisa do professor sobre a sua prática, mas a pesquisa do investigador sobre a prática do professor parceiro. Assim também não podemos considerar como pesquisa colaborativa, pois para o envolvimento do pesquisador com os professores parceiros deveria ter alguns aspectos que não foram contemplados no nosso trabalho.

Apropriamo-nos do discurso de Zeichner e Diniz-Pereira (2005), ao defenderem a participação dos educadores em projetos de pesquisa-ação, para justificar a elaboração de THAs pelos próprios professores como forma de aproximar os professores parceiros dos conhecimentos educacionais gerados nas universidades. Deste modo, tal como explicitado por Zeichner e Diniz-Pereira, pretendemos transformá-los em “consumidores” mais críticos do conhecimento educacional gerado nas universidades com a intenção de melhorar a compreensão destes professores a respeito de como tal conhecimento é produzido nos meios acadêmicos. Os autores analisam os diferentes resultados de pesquisa-ação sobre as ações potenciais de mudança da prática e de promoção do desenvolvimento profissional dos professores. Destacam que a experiência:

> Ajuda ainda os professores a se tornarem mais confiantes em suas habilidades de ensinar, mais ativos e independentes ao lidarem com situações difíceis que surgem durante as aulas, assim como mais seguros ao adquirirem hábitos e habilidades de pesquisa que utilizam para analisar mais a fundo suas estratégias de ensino. A pesquisa dos professores parece também desenvolver neles motivação e entusiasmo em relação ao ensino, além de revalidar a importância de seu trabalho. Há ainda evidências da relação entre a pesquisa-ação e melhorias no aprendizado, comportamento e atitude dos

> estudantes. Os professores envolvidos na pesquisa de suas próprias práticas parecem ainda adotar modelos de ensino mais centrados nos alunos e se convencem da importância de ouvir, observar e procurar entender os alunos. (ZEICHNER E DINIZ- PEREIRA, 2005, p. 68).

Nos estudos de Passos (2007), encontramos uma importante tendência, nos últimos anos, de articulações entre os pesquisadores da academia e os professores da escola básica. A autora faz uma análise de anais de encontros de pesquisadores brasileiros nos últimos anos para justificar tal argumento. Neste mesmo artigo, Passos discute pontos frágeis nesta relação usando como referência os estudos de Tardif e Zourhlal (2005, apud Passos, 2007) sobre as relações entre a pesquisa acadêmica sobre o ensino e a prática profissional dos professores para discutir semelhanças entre os estudos do pesquisador canadense e a realidade dos problemas brasileiros.

Um dos pontos destacados por Passos refere-se ao fato de que os professores novatos ou com condições precárias de trabalho são os que menos se interessam pelos resultados de pesquisa ou a eles têm acesso. Outro ponto elencado por Passos, também comentado por Zeichner (1998), se refere à linguagem acadêmica usada nas pesquisas, que pode justificar o afastamento dos professores, que vêm sua prática descontextualizada.

Concordamos com o destaque que Passos (2007) faz à formação inicial como determinante do interesse dos professores pelos resultados de pesquisas. E, com uma importante consideração feita por Passos quanto aos interesses políticos na difusão das pesquisas no ensino básico. Com os sistemas atuais, são pífios os incentivos para que os professores realizem pesquisas e os resultados de pesquisa não são difundidos como deveriam entre a classe de docentes e profissionais da área de educação.

E neste ponto que o nosso quadro teórico converge: à necessidade de levar os professores a utilizar as teorias da educação e os resultados das pesquisas educacionais como instrumentos de auxílio à prática. Para ser professor é necessário compreender como se aprende e como ensinar para promover este aprendizado. Compreender uma gama de variáveis complexas que influenciam nesse processo como: diversidade de conteúdos, agrupamentos de alunos, contexto cultural e escolar e características pessoais de alunos e do próprio professor que contribuem ou não com o processo de ensino e aprendizagem.

A proposta construtivista defendida por Martin Simon que criou o termo Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THA – vem para trazer mais um referencial para análise, reflexão e atuação dos professores. A própria definição de hipotética nos mostra que cada professor deve utilizar sua experiência profissional e seus conhecimentos para atribuir sentido e significados as atividades da trajetória a ser desenvolvida com os alunos.

1.5. Análise dos Documentos Oficiais

A Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação, com o objetivo de colaborar na consolidação das políticas de fortalecimento do Ensino Médio, implantou em 2009 o Ensino Médio Inovador (BRASIL, 2009). Um programa de apoio para promover inovações pedagógicas das escolas públicas de modo a fomentar mudanças necessárias na organização curricular desta etapa educacional e o reconhecimento da singularidade dos sujeitos que atende.

O programa propõe uma nova organização curricular ao erigir uma escola ativa e criadora construída a partir de princípios educativos. Encontramos, neste programa, algumas semelhanças com nosso quadro teórico: promover a aprendizagem criativa como processo de sistematização dos conhecimentos elaborados, como caminho pedagógico de superação a mera memorização; articular teoria e prática, vinculando o trabalho intelectual com atividades práticas experimentais; utilizar novas mídias e tecnologias educacionais, como processo de dinamização dos ambientes de aprendizagem; estimular a capacidade de aprender do aluno, desenvolvendo o autodidatismo e autonomia dos estudantes; promover atividades sociais que estimulem o convívio humano e interativo do mundo dos jovens.

Encontramos, nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), indicações sobre conteúdos de Ensino Médio e alternativas didático-pedagógicas para a organização do trabalho pedagógico, a fim de atender às necessidades e às expectativas das escolas e dos professores na estruturação do currículo para nível de ensino.

As recomendações deste documento são que o estudo de Funções deve ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre grandezas em diferentes situações: área do círculo e raio, tempo e distância percorrida, tempo e crescimento populacional, tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. A abordagem qualitativa também é recomendada ao esboçar os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento. Encontramos um destaque quanto ao significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros na representação algébrica. A partir da recomendação deste documento procuramos desenvolver as atividades da THA que evitassem a construção de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica, uma vez que tal documento referencia que esta estratégia não permite avançar na compreensão do comportamento das funções.

Este documento recomenda que, antes de iniciar o estudo das funções trigonométricas, é necessário um trabalho com a trigonometria, o qual deve anteceder a abordagem das funções seno, cosseno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos no Ensino Médio. O documento recomenda que as razões trigonométricas seno e cosseno devem ser introduzidas a partir das propriedades de semelhança de triângulos. O estudo da razão trigonométrica tangente é indicado pela sua importância na resolução de diversos tipos de problemas.

Neste sentido elaboramos uma sequência inicial que antecede a THA de Funções Trigonométricas com o objetivo de assegurar a abordagem das razões trigonométricas. Mas destacamos que estas atividades não foram acompanhadas por não ser o foco da nossa pesquisa que prioriza as Funções Trigonométricas.

Mais uma indicação deste referencial dispensa o estudo das outras três razões trigonométricas e o uso de fórmulas para sen (a+b) e cos (a+b), que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas.

Finalmente, destacamos outra prescrição deste documento quanto à atenção a ser dispensada à transição do seno e cosseno no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus), para o seno e o cosseno definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário (com medida em radianos). Deste modo, as funções trigonométricas devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas então definidas para ângulos com medida entre 0º e 180º. Segundo estas orientações, na construção dos gráficos referentes às funções trigonométricas, os alunos devem entender que, quando se escreve f (x) = sen (x), usualmente a variável x corresponde à medida de arco de círculo tomada em radianos. Na construção das atividades da THA procuramos atender às recomendações aqui citadas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 1999) recomendam que o estudo da Trigonometria, deve estar ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Este documento recomenda um projeto envolvendo a Física de modo a possibilitar a oportunidade de situações de aprendizagem significativas.

Nos PCN+ (BRASIL, 2002) as propriedades trigonométricas são recomendadas como possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância. A sugestão apresentada pelo documento, quanto à origem das razões trigonométricas como resultado do avanço tecnológico do período das grandes navegações do século 16, tem a intenção de apresentar a Matemática como um instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de ideias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem à elas. A recomendação deste referencial é que o estudo deve ater-se às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas.

A Proposta Curricular do Estado de São Paulo “São Paulo faz escola” implantada em abril de 2008, criou uma base curricular comum para toda a rede de ensino estadual para os níveis de Ensino Fundamental – Ciclo II e Médio. Para elaborar o documento, a Secretaria de Estado da Educação pediu aos professores, coordenadores e diretores que enviassem relatos de boas experiências de aprendizagem na rede pública de ensino.

A Proposta é constituída por um documento básico que apresenta os princípios orientadores para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo. Integra esta Proposta Curricular um segundo documento, de Orientações para a Gestão do Currículo na Escola, dirigido aos diretores, assistentes tecnicopedagógicos, professores coordenadores e supervisores. Esse segundo tem a finalidade específica de apoiar o gestor na implementação desta proposta curricular nas escolas públicas estaduais de São Paulo. Como parte integrante da Proposta Curricular, foram apresentados aos professores os Cadernos do Professor, organizados por bimestre e por disciplina. Neles, são apresentadas situações de aprendizagem para orientar o trabalho do mesmo no ensino dos conteúdos disciplinares específicos. Esses conteúdos, habilidades e competências são organizados por série e acompanhados de orientações para a gestão da sala de aula, avaliação e recuperação, bem como de sugestões de métodos e estratégias de trabalho nas aulas, experimentações, projetos coletivos, atividades extraclasse e estudos interdisciplinares.

Neste documento encontramos a preocupação em evitar impor o currículo aos professores. O documento recomenda as situações de aprendizagem, mas permite ao professor, a partir da realidade de cada escola, respeitando suas circunstâncias e seus projetos, privilegiar mais ou menos cada tema, determinando seus centros de interesse e detendo-se mais em alguns deles, sem eliminar os demais. O documento traz também sugestões sobre avaliação e indica materiais disponíveis para a exploração dos conteúdos a serem desenvolvidos.

A Proposta pretende relacionar teoria e prática ao integrar disciplinas e séries por meio de um enfoque didático que definiu conteúdos, competências e habilidades, metodologias, avaliação e recursos didáticos. Parte integrante desta proposta, o assunto Funções Trigonométricas está inserido no Caderno 1 do 2º ano do Ensino Médio com o objetivo de estabelecer a ligação entre o eixo Geometria e Medidas e o eixo Número e Funções.

Na análise deste documento encontramos uma importante justificativa quanto aos conhecimentos das relações métricas do triângulo retângulo para a compreensão das Funções trigonométricas.

> O estudo da Trigonometria, ao relacionar esses eixos, permite que sejam associadas entre si relevantes ideias matemáticas. No caso da Geometria e Medidas, o elemento norteador de todo trabalho é a proporcionalidade... Números e funções têm, por detrás de si, a ideia fundamental de periodicidade de determinados fenômenos, e a possibilidade de modelá-los, isto é, representá-los por intermédio de uma equação matemática... A ideia de proporcionalidade está presente no estudo das relações métricas entre lados do triângulo e a noção de semelhança, base para a aplicação das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. (SEESP, 2009, Caderno do Professor, EM, 2ª série, volume 1, p.9).

Este documento apresenta uma recomendação quanto ao uso de atividades que propiciem que o aluno relacione as razões trigonométricas do triângulo retângulo às medidas das projeções do ponto sobre os eixos coordenados. Encontramos também destaque à apresentação dos gráficos cartesianos das funções y = sen x e y = cos x, de modo a conduzir o aluno a agregar significados conceituais como periodicidade das funções trigonométricas. O referencial propõe o estudo das transformações sofridas nos gráficos das funções y = sen x e y = cos x, com a inclusão de parâmetros nas funções como exemplo, analisar o comportamento da função g(x)=2+sen(x), translação da função f(x)=sen (x).

No estudo deste documento procuramos atender à recomendação de garantir que os conhecimentos das relações métricas do triângulo retângulo devem ser verificados antes do início do estudo das Funções trigonométricas. Como também procuramos desenvolver atividades que propiciassem a compreensão de parâmetros nas funções.

Achamos relevante apresentar os resultados de duas pesquisas desenvolvidas que tiveram como tema a análise das percepções do professores sobre a Proposta Curricular, e enunciarmos os resultados obtidos por dois motivos: o primeiro em relação ao contexto onde os sujeitos estão inseridos, ser uma escola estadual, logo é importante analisar como professores que têm perfil semelhante aos professores parceiros; e o segundo por se tratar de uma discussão curricular recente que se aproxima do nosso quadro teórico, acreditamos que esta breve discussão será enriquecedora.

O trabalho de Oddi (2009) investigou as percepções de professores do Ensino Médio sobre o Projeto “São Paulo faz escola” privilegiando o que revelam a respeito do seu processo de implementação. Os sujeitos da pesquisa foram cinco professores de matemática do Ensino Médio que atuam em duas escolas da Grande “São Paulo”. Foi utilizada a abordagem qualitativa e a entrevista semiestruturada como instrumento de coleta de dados. Segundo Oddi, os professores revelaram uma boa aceitação do material, embora não se tenha indícios claros em relação à apropriação do projeto em seu cotidiano. O autor relata que os elementos dificultadores da implementação do projeto, segundo os sujeitos da pesquisa foram: a surpresa com a chegada do projeto no início de 2008, o pouco tempo para apresentação e discussão do material dificultou a discussão entre os pares para sanar dúvidas, os erros identificados no material, à quantidade de aulas para o desenvolvimento adequado do material, o curto prazo e, principalmente, as dificuldades dos alunos com a organização dos conteúdos propostos. Um dado interessante é apresentado pelo pesquisador que comenta a angustia de um dos sujeitos da pesquisa que declara que o material modificou a sua atuação e tirou um pouco "o seu entusiasmo criativo, quer seja, na elaboração do material específico para seus alunos." (ODDI, 2009, p 116).

O segundo estudo de Carvalho (2010) também utiliza a abordagem qualitativa cujo objetivo foi investigar as mudanças que ocorreram em relação ao trabalho dos professores do primeiro ano do Ensino Médio da rede estadual paulista, frente ao material sobre Progressões integrante da Proposta Curricular do Estado de São Paulo de 2008. A pesquisadora realizou entrevistas semiestruturadas, com cinco professores da rede estadual de ensino. Os resultados indicam que foi unânime a aceitação e aprovação dos professores quanto a esse material, além de ter proporcionado mudanças significativas nas aulas dos docentes e de ter sensibilizado os professores que desconheciam o tema: "Observação de regularidades e generalização de padrões". Uma observação importante é que "todos os professores, com exceção de um que preferiu continuar trabalhando da forma como fazia anteriormente e utilizou os exercícios do contidos no Caderno do Professor como aprofundamento" (CARVALHO, 2010, p. 82), seguiram as recomendações do Caderno do Professor apenas tirando algum exercício por falta de tempo ou porque acreditavam ser muito complexo. A pesquisadora relata que os sujeito da pesquisa apresentaram um desconhecimento das indicações da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo que recomenda que cada professor deve definir a forma de abordagem de acordo com a turma de alunos, ou seja, não era obrigatório seguir o material da forma como estava exposto.

1.6. Pesquisas sobre o uso de Trajetórias Hipotéticas de Matemática desenvolvidas no projeto

Relatamos agora os principais resultados alcançados pelas pesquisas desenvolvidas no projeto "Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio: uma pesquisa colaborativa entre pesquisadores e professores”.

Todas as pesquisas desenvolvidas fizeram uso de abordagem qualitativa. Os dados foram coletados por meio de relatórios de observação das aulas com professores e alunos de turmas de 2º ano do Ensino Médio da rede pública do Ensino Oficial do Estado de São Paulo. Cada pesquisador elaborou uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre um tema, que foi aplicada pelos professores participantes com suas respectivas turmas.

O tema desenvolvido por Barbosa (2009)[1] foi às razões e as funções trigonométricas. A pesquisa de Angiolin (2009) desenvolveu a THA sobre funções exponenciais. Cabral (2009) investigou a THA sobre probabilidade. Outro trabalho analisado foi à dissertação de mestrado de Lima (2009) que desenvolveu uma THA sobre Funções logarítmicas. Os estudos de Luna (2009) foram realizados a partir da construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem sobre o tema Geometria Espacial. Na investigação de Mesquita (2009) a pesquisadora desenvolveu uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções polinomiais do 2.º grau. O trabalho de Freitas (2010) teve por objetivo construir, discutir e avaliar a construção de uma THA a respeito do tema Isometrias. A pesquisa de Tonnetti (2010) investigou o uso de THA no ensino de Estatística.

Apresentamos agora as categorias que construímos para discutir os pontos em comum observados em todas as pesquisas do projeto a fim de identificar se conseguimos verificar estes resultados na presente pesquisa.

1.6.1. Atuação do professor

Encontramos um ponto em comum entre todos os pesquisadores: a atuação do professor. Os resultados dão indícios de que a THA não foi o principal instrumento para a aprendizagem, mas o desempenho do professor e suas concepções sobre como ensinar Matemática. Autores como Pires (2009), Coll e Solé (2009) e Simon (1995) que defendem que o professor deve ser orientador ou

[1] Nossa pesquisa dará continuidade ao trabalho de Barbosa (2009), essa pesquisa foi analisada com maior aprofundamento na revisão bibliográfica do tema funções trigonométricas.

mediador das aprendizagens. Lima (2009) apresenta um importante destaque à atuação do professor construtivista.

> A partir dessas reflexões, entendemos que a possibilidade de compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento de ensino é possível e bastante promissora para aprendizagem efetiva dos alunos, porém exige uma reflexão mais profunda dos envolvidos no ambiente escolar (coordenadores, diretores e professores); uma vez que identificamos a dificuldade e o despreparo dos professores em trabalhar com essa perspectiva, por mais que se esforçassem. Demonstração de que a perspectiva construtivista é pouco ou nada utilizada no ambiente escolar. (LIMA, 2009, p.187)

Freitas (2010) utiliza um termo que nenhum outro participante do projeto citou, mas concordamos que é relevante para o projeto: o comprometimento do professor.

> Vale lembrar que o comprometimento do professor é o que faz toda a diferença no processo ensino-aprendizagem. Um professor pode fazer de uma tarefa simples uma aula repleta de conexões e significados, ou de uma atividade extremamente elaborada uma simples lista de exercícios. (FREITAS, 2010, p. 153)

> Quanto ao professor P2, percebemos que não tinha como hábito o planejamento de suas aulas, pois chegava despreparado na sala, muitas vezes sem saber qual seria o tema a ser discutido. Percebemos que este fato comprometeu seu desempenho que culminou numa total desmotivação dele mesmo e de seus alunos. (FREITAS, 2010, p. 156)

Será que a postura de ouvir os alunos vale apenas para a perspectiva construtivista ou também para outras abordagens? O papel mediador do professor e a interação com os alunos é destaque de Angiolin(2009) com os seguintes comentários:

> Percebemos que na turma em que o professor constantemente proporcionou um espaço maior de comunicação em sala de aula criou-se um ambiente em que os alunos puderam interagir com o professor e com as atividades, mostrando assim, o caráter reflexivo do professor em relação à aprendizagem do aluno. No entanto, na turma do outro professor, a maneira como desenvolveu a THA provocou, em alguns momentos, o desinteresse dos alunos em resolver as atividades, pois sentiam-se inseguros e até mesmo desmotivados em realizá-las sem auxílio do professor. (ANGIOLIN, 2009, p. 129)

Como citamos anteriormente acerca da perspectiva construtivista, o professor não pode “deixar os alunos à vontade”, tal comportamento foi observado pela pesquisadora Angiolin:

> Podemos dizer que ficou bastante forte a ideia de que não basta ter em mãos um planejamento de ensino com uma perspectiva

> construtivista se o professor que irá desenvolvê-la em sala de aula não atuar de maneira adequada com essa perspectiva, se não for capaz de desafiar os alunos na medida certa, de fazer intervenções adequadas, de dar informações quando elas são necessárias, de não apenas socializar, mas também de sistematizar o que foi aprendido. (ANGIOLIN, 2009, p. 129)

1.6.2. Dificuldade na elaboração da THA

A discussão acerca dos próprios professores elaborarem a THA a ser utilizada em sala de aula é tema dos seguintes trechos. Alguns pesquisadores do projeto relataram a própria dificuldade na elaboração da THA:

> A primeira delas diz respeito à rotina do professor. Não estamos acostumados a elaborar trajetórias de aprendizagem, ou seja, estabelecer objetivos de aprendizagem, determinar atividades levando em consideração o pensamento do aluno e prever prováveis dificuldades que eles possam encontrar. [...]necessita de muita pesquisa em trabalhos que já ofereçam uma direção com relação ao processo ensino-aprendizagem do conteúdo escolhido. Além disso, preparar atividades motivadoras, onde os alunos são colocados à frente de situações contextualizadas e problematizadoras, para que, a partir delas, possam construir seus conhecimentos, não é tarefa simples. (FREITAS, 2010, p. 151)

1.6.3. Professor como "transmissor de conhecimentos"

Segundo os pesquisadores participantes do projeto, a dificuldade dos professores em trabalhar com a perspectiva construtivista, a resolução de problemas e o uso de *softwares* é consequência da concepção dos professores como transmissores de conhecimentos:

> Também consideramos que embora atividades envolvendo a resolução de problemas, investigação, contextos interdisciplinares, o uso de softwares e aplicação de conceitos e procedimentos matemáticos a situações do cotidiano e em outras áreas de conhecimento possam favorecer a compreensão dos temas de estudo, ainda há muita dificuldade dos professores em trabalhar dessa forma em sala de aula, pois predomina a ideia de que os alunos só podem aprender mediante exposições/explicações dos professores. (ANGIOLIN, 2009, p. 130)

O pesquisador tece comentários acerca da visão, que os professores possuem, sobre aprendizagem. Alguns não conseguem dar o tempo de resposta aos alunos e fazem intervenções inapropriadas:

> A participação dos alunos na construção dos conhecimentos matemáticos impôs um novo ritmo às aulas. Percebemos que em algumas situações o professor acabou intervindo diretivamente, atropelando o processo de construção do conhecimento por parte do aluno. (CABRAL, 2009, p. 93)

Aqui encontramos um trecho que corrobora com a maioria dos trabalhos desenvolvidos com THA que discutem a pouca discussão dos professores parceiros com as atividades da THA. Neste trecho a pesquisadora relata que notou uma reflexão dos professores a respeito da sua prática e sobre aprendizagem dos alunos:

> Embora os professores não tenham alterado significativamente as THAs, notamos que o desenvolvimento do projeto e o compartilhar discussões, baseadas na dinâmica da sala de aula proporcionou aos professores reflexões sobre suas práticas pedagógicas e, consequentemente sobre as hipóteses de aprendizagem dos alunos. (LUNA, 2009, p.97)

1.6.4. A elaboração de uma THA pelo professor

Como já apresentamos anteriormente, Gómez e Lupiáñez (2007) questionam como o professor pode elaborar sua própria THA? Um desafio que Cabral (2009) discute em seu trabalho foi fazer os professores participantes da pesquisa sentir-se como coautores na reelaboração e desenvolvimento da THA.

O desconhecimento acerca dos objetivos das atividades, a condução inadequada das mesmas e a necessidade da não interferência do pesquisador é assim comentada por Mesquita:

> Sentimos muitas vezes vontade de interferir nas aulas dos professores, pois conhecíamos os objetivos de cada atividade e os fundamentos didáticos que as sustentavam. (MESQUITA, 2009, p.110)

> Nenhum resultado é possível se o professor não entende os objetivos da atividade para aprendizagem dos alunos e as utiliza de maneira equivocada. (LIMA, 2009, p.188)

A discussão sobre o currículo, desde a sua inovação à implantação, é muito oportuna neste trabalho e nos ajuda a compreender porque a atuação do professor não condiz com o planejado pelo pesquisador.

> Isso nos leva à reflexão de que o professor não poderá nunca ser mero aplicador de atividades, das quais não conhece os objetivos nem os fundamentos didáticos que as sustentam. Aprendemos que a THA não é o principal instrumento para proporcionar uma

> aprendizagem com perspectivas construtivista: sua efetivação depende da atuação do professor. (ANGIOLIN, 2009, p. 127)

> Acreditamos que este fato se dá, pois, conforme indica Pires (2008), existem vários problemas relacionados à implementação das propostas presentes destes documentos. Sendo assim, alguns professores permanecem com a concepção de que são meramente transmissores de conteúdo. (FREITAS, 2010, p. 157)

Tonnetti (2010) constata que elaborar a THA não é tarefa fácil, porém ressalta que não basta entregar às atividades para o professor:

> E necessário que o professor compreenda o objetivo e a importância de cada atividade, de modo a interagir com o aluno nas intervenções necessárias, inclusive modificar a THA durante sua execução. (TONNETTI, 2010, p. 121)

A retroalimentação do Ciclo de Ensino de Matemática proposta por Simon (1995) e o papel do professor como orientador das aprendizagens numa perspectiva construtivista são assim comentados no seguinte trecho da pesquisa de Luna:

> O professor precisa envolver-se com o pensamento/entendimento dos alunos, para buscar compreender seus pensamentos na resolução matemática, gerando a transformação constante do conhecimento do professor, bem como sua (re) organização na elaboração das atividades. [...] Observamos que, no mínimo, podem garantir um caminho para a reflexão da atuação do professor, tanto no aspecto profissional como no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes. (LUNA, 2009, p.98)

Um interessante comentário acerca do papel do professor no Ciclo de Aprendizagem da Matemática de Simon (1995) é expresso por Mesquita;

> Nosso trabalho mostra que sem o professor se apropriar e participar do ciclo de aprendizagem esboçado por Simon, que parte do “conhecimento do professor” para organizar THA para seus alunos, identificando boas atividades (e que não necessariamente precise criá-las); a partir de objetivos claramente definidos e de atenção às hipóteses de aprendizagem de seus alunos[...] não é possível avançar na qualidade da aprendizagem matemática. . (MESQUITA, 2009, p.111)

> Desde que o professor garanta não apenas uma organização e decisão dos conteúdos matemáticos e tarefas que serão desenvolvidas pelos alunos, mas, investigue o pensamento do aluno durante a realização das atividades em sala de aula, de modo a enriquecer e reformular as expectativas estabelecidas anteriormente, redirecionando o planejamento de aulas. (LUNA, 2009, p.97)

Mesquita (2009) discute que não basta o professor receber materiais prontos, seu papel é fundamental para o desenvolvimento de trajetórias em sala de aula. E sugere mudanças nos currículos de formação inicial e continuada de professores para que o professor assuma o protagonismo na condução do processo de ensino e aprendizagem.

Freitas argumenta que é possível o uso de THA pelos professores, porém discute que as condições de trabalho atuais dificultam sua implementação:

> Percebemos também que, quando os professores encontram uma proposta de atividade que tenha características construtivistas e estratégias diferenciadas, como é o caso da THA, e possuem apoio para tirar dúvidas, discutir atividades ou sugerir modificações, sentem-se mais satisfeitos e motivados para ensinar e para aprender também, pois enriquecem as aulas com seus comentários e seus conhecimentos do conteúdo.
>
> Porém, percebemos também, que este é um caminho demorado, que depende de inúmeros fatores que vão desde a formação de professores até as condições de ensino da rede pública estadual, visto que, como cita Pires (2008), as propostas curriculares oficiais apresentam diversos problemas com relação à sua implementação. (FREITAS, 2010, p. 152)

Concordando com Gómez e Lupiáñez (2007), para Freitas a elaboração de uma THA é uma tarefa mais condizente aos pesquisadores que aos professores. Entretanto, segundo a autora, o pesquisador pode elaborar uma primeira versão de THA, que contenha a sua parte central, como recomenda Simon (1995).

> Que esta versão pode ser o ponto de partida para o professor. Ao aplicar esta versão, interagir com os alunos e avaliar os resultados, o professor estará adquirindo novos conhecimentos e se sentirá seguro para modificar a versão inicial e criar suas próprias versões, concluindo assim o ciclo proposto por Simon[...] (FREITAS, 2010, p. 152).

O uso de pesquisas na elaboração da THA é citado por Freitas:

> Apropriar-se dessas teorias e dos resultados de pesquisa trazem ao professor uma gama de conhecimentos que certamente farão diferença na elaboração das atividades da THA. Não que isto garanta o sucesso, pois uma THA válida numa determinada circunstância pode não ter sentido em outras circunstâncias, mas permite que as frequentes dificuldades enfrentadas pelos alunos sejam minimizadas propiciando uma aprendizagem mais consistente. (FREITAS, 2010, p. 154)

Para Tonnetti, a proposta de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem, tal como Simon propôs (1995) contribui para reconstruir uma “Pedagogia da Matemática” “o desenvolvimento da THA em sala de aula, modificou o conhecimento de todos os professores envolvidos.”(TONNETTI, 2010, p. 120).

A dificuldade em encontrar professores parceiros dispostos a desenvolver a THA é apontada por Tonnetti (2010) como desconfiança, receio e resistência ao desconhecido. No estudo encontramos semelhante entrave, ao conversar com os Diretores de duas escolas, ambos gostaram do Projeto, mas esclareceram que a decisão de participar ou não caberia ao professor. Na primeira escola um professor temporário que atua há 6 anos na área gostou do projeto, usou algumas atividades iniciais, mas se recusou a ter as aulas observadas alegando constrangimento. Enquanto outra professora, efetiva da escola com mais de 25 anos de experiência, se negou participar do projeto, sequer quis ver as atividades, declarando que do modo que já estava acostumada a trabalhar tinha um bom rendimento e não necessitava de novidades.

1.7. Pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem das Funções Trigonométricas

Para auxiliar na elaboração de nossa trajetória hipotética de aprendizagem, buscamos estudos realizados sobre o tema: Funções Trigonométricas. Para tanto, fizemos uma pesquisa no Banco de Teses da Capes, bibliotecas de Universidades e sites recomendados por professores do programa de Pós-Graduação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Nessa busca, utilizamos como palavras-chave as expressões: trigonometria, seno, cosseno e tangente. Inicialmente, a seleção foi feita a partir da leitura dos resumos, em seguida escolhemos as investigações que se aproximavam com o nosso quadro teórico.

Embora qualquer pesquisa acadêmica pressupõe uma revisão dos trabalhos desenvolvidos na área, em nosso estudo este tópico tem uma especial relevância. Gostaríamos de lembrar uma das questões de pesquisa deste estudo:

> *Como as pesquisas na área de Educação Matemática, que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem, podem contribuir para a organização do ensino de Funções Trigonométricas que potencialize boas situações de aprendizagem aos alunos?*

Para responder esta questão é significativo verificar o que estas pesquisas indicam, quais resultados alcançaram e como foram obtidos e quais dificuldades evitar na elaboração da THA.

Selecionamos duas dissertações de mestrado que fizeram o estudo do ensino da trigonometria no triângulo retângulo: Lindegger (2000) e Nascimento (2005). Para o levantamento dos trabalhos que fizeram o estudo das funções trigonométricas elegemos a dissertação de Costa (1997), a dissertações de mestrado e tese de doutorado de Briguenti (1994, 1998), a dissertação de Klein (2009) e o trabalho de Brito e Morey (2004). Utilizamos também os trabalhos de Martins (2009), Barbosa (2009) e Borges (2009) que apresentaram o estudo do ensino da trigonometria no triângulo retângulo e das funções trigonométricas.

O objetivo do trabalho de Lindegger (2000) foi investigar uma abordagem para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, onde se pretendeu introduzir os conceitos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente a partir da manipulação de modelos. O experimento foi aplicado em duas turmas de 8º série: o grupo de referência com abordagem tradicional e o grupo experimental com a sequência de ensino desenvolvida a partir de situações problema utilizando um "paralelo com a história". O autor iniciou o estudo por questões práticas, ligadas à realidade, para em seguida realizar a formalização sob o ponto de vista geométrico.

Lindegger apresenta erros comuns cometidos entre alunos concluintes do Ensino Médio ou estudantes do curso superior. A análise foi realizada a partir de observações empíricas advindas da prática do pesquisador ou de discussões com outros professores de matemática. Os erros de notação ou conceituais cometidos pelos alunos são apresentados a seguir.

Ao apresentar a expressão "cos . x", Lindegger (2000) sugere que tal erro pode ter sido cometido por não ter entendido o significado de "cosseno de um ângulo x" e propõe que o aluno faz uma associação indevida de cos x com cos x do mesmo modo que 5x significa 5.x.

Outro tipo de erro ocorre em associações como $sen\,75° = sen\,30° + sen\,45°$. O pesquisador ressalta que a própria verificação da expressão $sen\,30° + sen\,45°$ explicita o erro, uma vez que $sen\,30° = 0{,}50$ e $sen 45° \cong 0{,}71$, assim $sen 75° \cong 1{,}21$ o que é impossível.

Lindegger (2000) aponta que na associação errônea de tg x = 1 e tg x = 45º, o aluno pode estar se referindo ao ângulo de 45º sem compreender a função “tg x”. Em expressões como “tg x = sen/cos x” ou “tg = sen/cos” o autor sugere uma simplificação de notação ou falta de compreensão das razões trigonométricas.

O pesquisador critica o uso mecanizado das fórmulas das razões trigonométricas que dificulta a aplicação na resolução de problemas. Os resultados obtidos por Lindegger(2000) indicaram que o processo de construção dos conceitos básicos da trigonometria é satisfatório quando iniciado a partir da resolução de problemas concretos, dirigindo-se para os problemas formais, quando os conceitos se tornam mais abstratos e abrangentes.

O trabalho de Nascimento (2005) teve como objetivo a construção de uma tabela trigonométrica, com base em levantamentos históricos. A pesquisadora aplicou sua sequência de atividades para uma turma de 1º ano do Ensino Médio e identificou algumas defasagens em Geometria e Álgebra. Durante a aplicação das atividades, os alunos identificavam apenas figuras elementares, não citavam propriedades de tais figuras (não diferenciavam uma circunferência de um círculo, por exemplo). Apresentaram pouca familiaridade com instrumentos como: régua, compasso, transferidor e calculadora; a falta de familiaridade em justificar seus resultados foi detectada em atividades de justificativas de estratégias utilizadas. Segundo Nascimento (2005), o uso de atividades diversificadas e situações-problema promoveram motivações e permitiram que os alunos construíssem o significado das razões trigonométricas, desenvolvessem a argumentação e investigação e possibilitasse a modificação de concepções errôneas. A pesquisadora recomenda o trabalho em duplas como metodologia reconhecida que permite ao aluno expressar melhor suas ideias e argumentos para confrontá-las com as dos colegas.

Nascimento (2005) recomenda que para aprimorar o ensino da Trigonometria, muitas vezes, o professor deve “utilizar instrumentos construídos pelos alunos ou não, para auxiliar a representação, incentivando o uso de desenhos, construções geométricas, argumentação, tornando o ato de ensinar dinâmico, interativo e criativo.” (NASCIMENTO, 2005, p. 195)

A proposta de Costa (1997) sugere uma sequência didática com o uso de formas não tradicionais por meio da utilização de contextos “mundo experimental” e “computador” para introduzir as funções seno e cosseno dando-lhes um tratamento que as torne significativas para o aluno e que considere seu desenvolvimento cognitivo. Alunos do 1º e 2º ano do Ensino Médio foram distribuídos em três grupos: o grupo A recebeu atividades do ensino formal, denominado grupo de referência; o grupo B recebeu atividades do “mundo experimental”, seguidas pelo “computador” e o grupo C recebeu atividades do “computador”, seguidas pelo “mundo experimental”.

No contexto “mundo experimental” as atividades apresentavam manipulação de objetos reais com o objetivo de permitir que o aluno “faça um paralelo com o mundo real”. O contexto do “computador” foi utilizado por permitir a simulação do mundo concreto, a elaboração de conjecturas e o *“feed back”* imediato fornecido pelos *softwares*. Depois dessas situações iniciais a pesquisadora propôs atividades que permitiram os alunos descontextualizar e generalizar as funções trigonométricas seno e cosseno. A pesquisadora infere que o grupo de alunos que teve maior sucesso foi o que passou primeiro pelas atividades construídas no contexto do “mundo experimental” e seguidas das atividades do “computador”.

Os principais objetivos do trabalho de Briguenti (1994) foram: verificar as dificuldades e os erros mais frequentes que os alunos (do 3º grau) apresentam na aprendizagem de Trigonometria; estudar o desenvolvimento histórico, as relações da Trigonometria com outros conteúdos da Matemática e suas aplicações para embasar a formulação de uma proposta de ensino alternativa baseando-se nas teorias cognitivas.

A autora apresenta um levantamento de erros cometidos por alunos ingressantes nos cursos superiores de bacharelado em Ciências da Computação e Química e Licenciatura em Matemática. A intenção da pesquisadora era verificar se os conceitos básicos de trigonometria foram interiorizados pelos alunos participantes do teste. Briguenti (1994) destaca a dificuldade que os mesmos apresentaram: na leitura e interpretação do enunciado e na formulação de hipóteses; na aplicação de conceitos básicos de trigonometria e dificuldade em generalizar e extrapolar os conceitos aprendidos para situações novas. A autora faz referência, também às falhas em conceitos como: propriedades dos triângulos, razões trigonométricas e conhecimentos de funções trigonométricas como domínio, período e imagem. A pesquisadora observou que mais de 65% dos alunos da turma de Licenciatura em matemática podem ter falhas conceituais deste tópico e aponta que podem ser cometidos erros como:

$$\frac{\text{sen}2\text{x}}{\text{x}} = \text{senx} \qquad \text{ou} \qquad (\text{cosx})^2 = \text{cosx}^2$$

A pesquisadora aplicou algumas atividades de razões trigonométricas no triângulo retângulo para uma turma de 8º série do Ensino Fundamental. Na turma da 2º série do Ensino Médio foi utilizada a proposta completa que teve início nas razões trigonométricas no triângulo retângulo e término com Funções Trigonométricas. A pesquisadora utilizou o computador e data show para apresentar os gráficos das funções trigonométricas que depois foram reproduzidos pelos alunos em papel quadriculado. Segundo Briguenti (1994), tal estratégia foi motivadora e favoreceu a compreensão dos gráficos.

Em sua tese de doutoramento, Briguenti (1998) realizou uma análise qualitativa dos dados encontrados em entrevistas realizadas com três professoras de Matemática de escolas da rede pública estadual. As concepções das professoras acerca da proposta (anteriormente desenvolvida pela pesquisadora em sua dissertação) e o envolvimento dos alunos durante o processo foram analisados.

Os resultados alcançados por Briguenti (1998) sugerem que a proposta investigada facilita o processo de ensino e aprendizagem uma vez que motiva e exige uma participação ativa do aluno na construção do seu conhecimento. A utilização de materiais manipulativos e do ciclo trigonométrico estimulou o desenvolvimento do pensamento reflexivo dos alunos e o relacionamento entre eles. A pesquisadora declara que o trabalho dos alunos em equipe contribuiu para o sucesso da utilização da proposta, uma vez que os alunos levantavam hipóteses que eram comprovadas ou refutadas após a discussão coletiva. Finalmente, a autora destaca que a postura reflexiva das professoras no acompanhamento das atividades contribuiu com o seu desenvolvimento profissional.

Os estudos de Brito e Morey (2004) foram realizados partindo dos resultados do projeto de pesquisa intitulado “Estudo do círculo: pesquisa histórico-pedagógica dos conceitos geométricos e trigonométricos”. O projeto incluía, entre seus objetivos, investigar as dificuldades dos professores acerca de conceitos de geometria e trigonometria; analisar como o ensino destes conceitos vem sendo proposto nos livros didáticos das últimas quatro décadas. Os sujeitos da pesquisa participavam de um curso de formação continuada. As pesquisadoras elaboraram atividades que contemplavam as possíveis dificuldades. Os professores participantes do curso realizaram as atividades em forma de oficinas.

Os livros didáticos analisados pelas autoras foram publicados na época da formação inicial da amostra de estudo (década de 80). Devido a dificuldade de encontrar livros editados entre as décadas de 70 e 80, as autoras do estudo fizeram a análise de dois livros. Apenas um dos livros analisados apresentou a conveniência de se considerar o raio unitário. Assim como não foi observada nenhuma orientação para a manipulação dos instrumentos de desenho geométrico, nenhum dos livros utilizou os conceitos de simetria de figuras para a explicação dos valores trigonométricos da primeira volta do círculo.

As pesquisadoras identificaram dificuldades em questões elementares como simetria e semelhança: *"Na realização da tarefa, alguns professores traçaram dois triângulos retângulos quaisquer e justificaram que estes eram semelhantes apenas pelo fato de ambos terem um ângulo reto*." (BRITO E MOREY, 2004, p. 66)

A dificuldade na manipulação de instrumentos foi identificada por Brito e Morey ao propor atividades de medição de ângulos. As pesquisadoras observaram que alguns professores tinham dificuldade em utilizar o transferidor como instrumento de medida. Quando questionados se a partir de um ângulo notável 30º era possível encontrar os valores de seno e cosseno dos ângulos de 150°, 210°, 330°, os professores não utilizavam os conceitos de simetria.

As pesquisadoras sugerem que os cursos de formação continuada devem permitir aos professores "expor suas dúvidas, realizar atividades de maneira autônoma, refletir sobre os conceitos envolvidos nas mesmas e socializar seus saberes construídos..." (BRITO E MOREY, 2004, p. 69). Encerram suas considerações com a recomendação que o ensino de trigonometria, nos cursos de formação inicial de professores, deve garantir uma aprendizagem significativa dos conceitos por parte desses futuros profissionais.

O principal objetivo do estudo de Klein (2009) foi propor uma metodologia de ensino que possa contribuir para uma construção significativa dos conceitos envolvidos no campo conceitual da trigonometria. O experimento foi aplicado em uma turma de segunda série do Ensino Médio.

A autora apresenta alguns erros comuns cometidos entre alunos em conceitos básicos de geometria como vemos no seguinte comentário de Klein (2009,

p. 39): “*Em nenhum dos registros foi citado ou mencionado o fato de que a denominação triângulo retângulo estivesse associada ao motivo do ângulo de 90º ser chamado de ângulo reto...*” Outra dificuldade identificada por Klein foi à falta de habilidade de manusear o transferidor.

As situações desenvolvidas por Klein (2009) priorizam o uso de material manipulativo e instrumentos como régua e transferidor para possibilitar uma construção significativa dos conceitos. Um interessante uso do trabalho em grupo utilizado por Klein (2009) é a confecção de gráficos em papel pardo. Para tal, os alunos construíram inicialmente uma tabela e faziam uso de calculadora científica (para facilitar os cálculos das funções trigonométricas) e depois usaram os dados da tabela para construir os gráficos das funções.

O uso do *software Graphmática* foi proposto por Klein (2009) para facilitar a construção de representações gráficas que despendiam muito tempo, como também servir como elemento motivador para a turma de alunos. A intenção da autora era trabalhar, no ambiente computacional, conceitos como: período, domínio e imagem que haviam sido explicitados anteriormente e que neste momento eram aprofundados.

A pesquisa desenvolvida por Barbosa (2009)[2] constitui parte do projeto de pesquisa “Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio: uma pesquisa colaborativa entre pesquisadores e professores”, desenvolvido por pesquisadores da PUC/SP. O objetivo do experimento foi analisar a possibilidade de compatibilizar perspectivas de aprendizagem com a planificação de ensino relacionada às razões e às funções trigonométricas e verificar a atuação do professor de matemática diante de uma proposta de ensino visando uma perspectiva construtivista.

Os sujeitos da pesquisa foram três professores do 2º ano do Ensino Médio e seus respectivos alunos. Os resultados obtidos indicam que é possível compatibilizar perspectiva de aprendizagem com a planificação de ensino, e a importância da atuação do professor de matemática para que ocorra aprendizagem.

[2] Como participantes do mesmo projeto de pesquisa pretendemos dar continuidade ao trabalho desenvolvido por Barbosa (2009) apenas fazendo algumas alterações e acrescentando tópicos que não foram abordados pelo pesquisador. Algumas perguntas serão retiradas pois, concordamos com o relato de um dos alunos: “*O ponto forte foi à participação da sala, mas o ponto fraco foram as questões terem o mesmo sentido tanto na pergunta quanto na resposta*.” (BARBOSA, 2009, pag. 97)

O estudo de Barbosa (2009) permitiu identificar várias dificuldades enfrentadas pelos alunos como: operações com números racionais; aplicação do conceito de semelhança e proporcionalidade; aplicação do Teorema de Pitágoras; racionalização de denominadores e esboçar uma figura envolvendo conceitos geométricos e localização de um número na reta real. A dificuldade no uso de instrumentos como esquadro, transferidor e compasso, é relatada pelo pesquisador.

Mais uma vez encontramos uma característica comum à maioria das pesquisas aqui relatadas: o uso de material manipulativo e a forma de organizar os alunos em grupos para que pudessem discutir e resolver as atividades propostas.

Pretendemos propor mais atividades que utilizem a reta real e a regra de Euler, para tornar mais significativo seu uso pelos alunos e à compreensão de que todos os números reais podem ser expressos por pontos no círculo trigonométrico.

Borges (2009) engendrou sua pesquisa para responder a seguinte questão: “Atividades com material manipulativo e com o computador podem favorecer a aprendizagem de alunos na transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico?”. O autor realizou um estudo histórico a respeito de Trigonometria lados de um triângulo retângulo e seus ângulos agudos. Participaram da pesquisa, 8 alunos do 2º ano do Ensino Médio.

A sequência de ensino de Borges (2009) utilizou o *software* de geometria dinâmica Geogebra para aplicar as atividades de transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico. O autor também empregou material manipulativo que denominou de “régua trigonométrica” ao propor a construção de dispositivo para ser utilizado sem o uso de tecnologia.

O pesquisador observou que os alunos não mobilizaram alguns conhecimentos prévios como semelhança de triângulos, comprimento de circunferência e coordenadas cartesianas. Apresentaram dificuldades para exporem suas observações por escrito em linguagem matemática e não conseguiram perceber a relação entre as razões trigonométricas de pontos simétricos. Assim como outros pesquisadores, o autor verificou que os alunos apresentaram dificuldades para utilizar instrumentos de construção e de medida como compasso, régua e transferidor. O comportamento dos alunos também mereceu destaque:

> Alguns alunos não tinham autonomia para executar as atividades como previmos em nosso aporte teórico, pois estavam acostumados a terem as respostas de seus professores e a todo instante ficavam pedindo explicações ao pesquisador. (BORGES, 2009, p. 139)

A análise dos dados indicou que houve avanços na aprendizagem dos alunos, o uso do *software* de geometria dinâmica despertou o interesse e melhorou a concentração dos mesmos.

O objetivo do trabalho de Martins (2003) foi investigar se os alunos atribuiriam significado aos conceitos de seno, cosseno e tangente partindo da introdução do conceito de seno e cosseno no triângulo retângulo, passando pelo ciclo trigonométrico e finalizando com os gráficos das funções correspondentes. Os alunos do 2º ano do Ensino Médio, já haviam estudado a trigonometria no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico e fizeram uso do *software Cabri-Géomètre* na construção dos gráficos das funções seno e cosseno.

No trabalho de Martins (2003) encontramos erros semelhantes aos verificados por Lindegger (2000) e outros: como:

$\frac{cosx}{x} = cos$; $\quad cosx = 4 \quad cos = 1 \quad tgx = 1 \Rightarrow tg\ x = 45°$

Em todos os casos apresentados pela pesquisadora há indícios de que o aluno não compreendeu o significado das funções. Ao fazer associações indevidas entre sen x com sen x , ou na simplificação incorreta do cosseno, Martins inferiu que o aluno não compreendeu os significados dos termos tg x e x. Assim também quando em erros como cos x = 4 o aluno não consegue perceber que a função cosseno é limitada no intervalo [-1;1]. Outro erro verificado por Martins: arcos que possuem mesmos valores para seno e cosseno são considerados iguais. Assim, para os alunos, arcos como $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ são respectivamente iguais.

Martins destaca a dificuldade apresentada pelos alunos na construção dos gráficos das funções trigonométricas: “Para os alunos, não parece lógico que o cosseno de um número real x seja definido como a abscissa da extremidade de um arco no ciclo trigonométrico, enquanto que, no gráfico da função, o valor do cosseno em cada ponto é a sua ordenada.” (MARTINS, 2003,p. 15)

Pretendemos elaborar atividades que permitam aos alunos compreenderem o uso de radianos para medir arcos e evitar a transformação sem significado de graus e radianos, que normalmente provoca confusão entre os alunos. Tal dificuldade também é destacada por Martins (2003):

> Quando inicia o estudo em trigonometria, aprende a medir arco e ângulos em graus e em radianos, porém é comum o educando, ao se deparar com um arco medido em radianos, convertê-lo em graus devido à familiaridade com a unidade.(p. 45).

As atividades de construção dos gráficos das funções seno e cosseno permitiram que os alunos compreendessem as funções de comportamento periódico. O uso do *software* permitiu que os alunos modificassem as figuras e percebessem as relações explícitas nas atividades. Observamos o comentário da pesquisadora: "*o software utilizado pôde proporcionar essa visão de movimento, o que poderia ser praticamente impossível apenas com o uso de lápis e papel.*" (MARTINS, 2003, p. 118)

Um dos objetivos esperados por Martins (2003) foi alcançado em comentários dos alunos que observaram que as razões trigonométricas seno e cosseno do triângulo retângulo são as mesmas estudadas no ciclo trigonométrico. A pesquisadora teve indícios que eles associaram o seno (ou cosseno) estudado no ciclo trigonométrico ao estudo das funções seno e cosseno.

Com a revisão bibliográfica referente ao tema trigonometria, percebemos que as recomendações dos pesquisadores convergem para o trabalho com situações problema significativo a partir de aplicações na vida cotidiana; trabalho em equipe de modo a permitir a troca de pontos de vista e o uso de computador para visualização e compreensão das funções trigonométricas, relembrando alguns pontos importantes, tais como a simbologia, o conjunto Domínio, o conjunto Imagem e as múltiplas representações de uma função.

CAPÍTULO 2 - CONSTRUÇÃO DA THA SOBRE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Introdução

Neste capítulo, apresentaremos o processo de construção da primeira versão da THA. Destacamos aqui os objetivos de aprendizagem, as hipóteses sobre as aprendizagens dos alunos e a seleção das atividades escolhidas. Em seguida apresentamos a versão da THA que foi desenvolvida em sala de aula. Como os professores parceiros fizeram poucas alterações, optamos por apresentar comentários apenas das atividades que foram modificadas.

O professor pesquisador elaborou a primeira versão da THA, fazendo uso de sua experiência profissional, pesquisa em livros didáticos e, principalmente, resultados de pesquisas sobre o tema Funções Trigonométricas.

Para fins de entendimento do texto retomamos as questões de pesquisa:

a) Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino de Funções Trigonométricas?

b) Como as pesquisas na área de Educação Matemática, que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem podem contribuir para a organização do ensino de Funções Trigonométricas que potencialize boas situações de aprendizagem aos alunos?

c) Como a atuação do professor de Matemática se revela no que se refere às atividades de planejamento do ensino de Funções Trigonométricas, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem?

2.1. Objetivos do professor pesquisador a respeito da aprendizagem dos alunos

Apresentamos a seguir os objetivos de aprendizagem para os alunos do 2º ano do Ensino Médio em relação ao tema Funções Trigonométricas:

- Calcular seno, cosseno, tangente, de um ângulo no círculo trigonométrico;
- Reconhecer a expressão algébrica; identificar e construir gráficos das funções y = sen x, y =cos x e y = tg x;
- Resolver situações-problema envolvendo situações do cotidiano e de outras áreas do conhecimento;
- Analisar graficamente crescimento e decrescimento, máximo ou mínimo, e identificar o período das funções y = sen x, y= cosx e y = tg x;
- Compreender as transformações que ocorrem no gráfico quando se variam os coeficientes na representação algébrica.

2.2. Hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos

A partir das leituras realizadas na revisão bibliográfica e nas recomendações sugeridas nos documentos oficiais, procuramos elaborar a THA embasada no que estas pesquisas apresentam, como e quais resultados alcançaram e quais dificuldades devemos evitar na elaboração da THA.

Assim, como recomendado no quadro teórico, procuramos desenvolver atividades para estimular a capacidade de aprender do aluno, desenvolvendo o autodidatismo e autonomia dos estudantes.

Na elaboração das atividades da THA, dispensamos o estudo das outras três razões trigonométricas (secante, cossecante e cotangente) e o uso de fórmulas que tanto exigem dos alunos para serem memorizadas.

Procuramos elaborar sequências de tarefas que permitissem ao aluno entender as funções trigonométricas, construir e analisar seus gráficos.

Como o tema Funções Trigonométricas é uma ligação entre o eixo Geometria e Medidas e o eixo Número e Funções, procuramos apresentar atividades que permitissem aos alunos transpor esses eixos e superar as dificuldades comuns em cada área temática.

Usamos o agrupamento em duplas, que permite ao aluno expressar melhor suas ideias e argumentos para confrontá-las com as dos colegas.

O uso de materiais manipulativos e *software* estimularam o desenvolvimento do pensamento reflexivo dos alunos que levantavam hipóteses que eram comprovadas ou refutadas após a discussão coletiva. Assim como o uso do *software* de geometria dinâmica tem a intenção de despertar o interesse e melhorar a concentração dos alunos.

A partir da revisão bibliográfica, fizemos um levantamento a respeito das dificuldades que os alunos apresentam no aprendizado de Funções Trigonométricas. Tais como: na simplificação de notação, no uso de instrumentos, na formulação de hipóteses, no conhecimento de funções e a dificuldade na construção dos gráficos das funções trigonométricas. Estes resultados foram o eixo norteador para a escolha das atividades da THA e serviram de base para que nós identificássemos as seguintes hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos na THA:

- Despertar os conhecimentos já existentes nos alunos de razões trigonométricas nos ângulos agudos para facilitar a transição para o círculo trigonométrico;
- Utilizar instrumentos de construção e medição para que o aluno associe as representações gráfica, algébrica e figural das funções trigonométricas e potencializar a construção do conhecimento do aluno referente ao objeto matemático Funções Trigonométricas;
- Reconhecer propriedades das funções trigonométricas a partir do círculo trigonométrico e da representação gráfica;
- Identificar gráficos que descrevem funções trigonométricas e reconhecer uma função trigonométrica a partir do seu gráfico;
- Resolver situações de aprendizagem contextualizadas e interdisciplinares;
- Utilizar recursos tecnológicos (*software* Geogebra e calculadora científica) a fim de contribuir para a formulação de conjecturas e validação de respostas.

2.3. Construção da 1.ª versão da THA

Essa primeira versão serviu de ponto de partida para a discussão com os professores parceiros, que apresentaram poucas alterações.

A trajetória hipotética de aprendizagem foi elaborada com o propósito que o professor pudesse trabalhar com o aluno a partir de uma perspectiva construtivista.

Optamos por indicar uma THA inicial com atividades em que, por meio da investigação, o aluno retomasse o conceito de Teorema de Pitágoras e razões trigonométricas no triângulo retângulo. Tal proposta teve a intenção de atingir dois objetivos: retomar conteúdos que possivelmente foram esquecidos ou não foram trabalhados com os alunos anteriormente e, também, começar a preparar alunos e professores a usar a perspectiva construtivista. Essa primeira etapa não foi observada pela pesquisadora uma vez que não era foco do estudo.

A primeira atividade de aprendizagem trata-se da transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico. Apresentamos inicialmente triângulos internos às circunferências concêntricas com o objetivo de fazer com que o aluno reconheça os ângulos no círculo trigonométrico e faça a extensão das razões trigonométricas para ângulo maiores que 90º. Esperamos que o aluno identifique as razões trigonométricas como a projeção de um ponto no círculo trigonométrico de raio unitário.

A segunda atividade de aprendizagem inicia com material manipulativo para que, por meio de experiências e conjecturas os alunos consigam encontrar a razão π. Em seguida apresentamos uma série de tarefas onde o aluno deve localizar arcos no circulo orientado. Faz parte desta atividade tarefas em que o aluno deve associar cada ponto do círculo trigonométrico a um número da reta real. Procuramos utilizar várias representações do círculo para que o aluno resgate os conhecimentos de representação fracionária em atividades que exijam a definição de arcos em π radianos.

A terceira atividade destina-se a determinar o seno, o cosseno e a tangente, de um ângulo no círculo trigonométrico, por meio de projeções nos eixos das funções utilizando instrumentos de construção (esquadro e transferidor). Esta atividade tem como objetivo também fazer com que o aluno faça conjecturas sobre ângulos complementares, suplementares e replementares e suas respectivas razões trigonométricas. O aluno deve identificar as relações de simetria entre os ângulos de mesmas razões seno, cosseno ou tangente.

O desempenho no uso de calculadoras científicas para calcular as funções trigonométricas é o foco da quarta atividade. Procuramos apresentar tarefas que preconizam os arcos na representação em graus e também em radianos. Esta atividade tem como objetivo sistematizar algumas razões trigonométricas que são obtidas por meios de fórmulas ou projeções. Apresentamos um pequeno manual de orientação ao uso da calculadora, indicado aos alunos que nunca fizeram uso de uma calculadora científica.

Na quinta atividade apresentamos o estudo da função seno. Inicialmente o aluno deve conjecturar sobre como o gráfico da função y = sen x. Escolhemos explorar as concepções iniciais por dois motivos: em primeiro lugar verificar quais conhecimentos os estudantes possuem sobre funções e, em segundo lugar, como o aluno imagina a representação gráfica da função. Nesta tarefa inicial não apresentamos a denominação dos eixos cartesianos para estimular a discussão entre os alunos. Após a tarefa inicial propomos que os alunos representem a função já apresentando os eixos cartesianos de sen x e os arcos em $\pi\, rad$.

Para favorecer a compreensão das variáveis visuais (parâmetros da função) e as transformações do gráfico da função f(x) = sen x, os alunos realizam tarefas no *software* Geogebra. Antes de começar a representação gráfica, os alunos fazem uma tarefa no círculo trigonométrico no *software* com dois objetivos: familiarização com o *software* e verificação que à medida que o ponto percorre a circunferência, os valores das funções seno, cosseno e tangente e seus respectivos gráficos, se alteram. Nas tarefas seguintes os alunos observam o comportamento do gráfico no *software* e reproduzem no papel para melhorar a observação e a compreensão desta representação da função. A atividade se encerra com alguns questionamentos que servem como sistematização dos conhecimentos abordados nas tarefas.

Na sexta atividade iniciamos o estudo da função cosseno, que pode ter duas abordagens: ser realizada pelos alunos organizados em duplas no laboratório de informática, tal qual a quinta atividade, ou o professor com o recurso de um retroprojetor pode construir os gráficos no Geogebra e exibir para os alunos copiarem no papel. A segunda abordagem pode dar a impressão de não ser motivadora, mas pode ser necessária para conseguir retomar as características da função seno que por ventura alguns alunos não conseguiram compreender e, na discussão coletiva, tais dificuldades são sanadas. A atividade se encerra com alguns questionamentos que servem como sistematização dos conhecimentos abordados nas tarefas.

Com o objetivo de estudar a função tangente, iniciamos a sétima atividade como a da função cosseno, que pode ter duas abordagens: ser realizada pelos alunos organizados em duplas no laboratório de informática ou pelo professor, que com o recurso de um retroprojetor, pode construir os gráficos no Geogebra e mostrar para os alunos reproduzirem no papel. A atividade se encerra com alguns questionamentos que servem como sistematização dos conhecimentos abordados nas tarefas.

Finalmente, na oitava atividade apresentamos as equações e inequações trigonométricas. Nesse momento propomos algumas situações-problema contextualizadas que envolvem a resolução de equações trigonométricas. Mais uma vez utilizamos os recursos visuais para facilitar a representação da solução de inequações trigonométricas.

2.4. Discussão da 1.ª versão da THA com os professores

Inicialmente apresentamos a proposta de desenvolver THA ao Diretor da escola que apreciou o projeto e solicitou que eu o aguardasse conversar com os professores e verificar se estes aprovavam a proposta. Após receber a confirmação marquei a primeira entrevista com os professores.

Gostaria de destacar neste momento o apoio incondicional que tive por parte da equipe gestora. Sempre esteve presente, atendeu a todas as solicitações da pesquisadora e, inclusive autorizando o uso de diversas reuniões de HTPC para discussão da THA com os professores.

Foram realizados dois encontros para o estudo da 1.ª versão da THA com os professores parceiros e a pesquisadora. Inicialmente apresentamos as etapas do projeto. A primeira compreende a elaboração da THA pela pesquisadora. A segunda etapa consiste na entrevista inicial e apresentação da THA para aprovação dos professores parceiros. Na terceira etapa ocorre o desenvolvimento da THA pelos professores parceiros com seus respectivos alunos. A etapa final compreende: entrevistas com alguns alunos participantes do projeto com o objetivo de elencar suas percepções acerca das atividades e a entrevista final com os professores a fim de verificar suas opiniões sobre a THA e discussão de possíveis modificações para a terceira versão da THA.

Os professores parceiros foram informados que a pesquisadora estaria presente em todas as aulas para realizar a observação dos mesmos e dos alunos, que as aulas seriam gravadas e fotografadas e, principalmente, que o professor continuaria a ministrar sua aula e se necessário poderia fazer alterações na THA.

Durante os encontros, a pesquisadora procurou apresentar as atividades e respectivas tarefas fundamentada em resultados de pesquisas para justificar o uso de determinadas estratégias. Sempre que questionados os professores concordaram com a utilização das tarefas e, algumas poucas vezes, solicitaram pequenas mudanças na THA.

Durante os encontros sempre nos colocamos como pesquisadores, mas também como professores em atuação, de modo a nos aproximarmos dos professores parceiros e construir uma relação de diálogo, confiança e colaboração.

Na análise das atividades os professores fizeram uma leitura superficial e só conseguiram identificar as dificuldades que seus alunos poderiam encontrar após a intervenção da pesquisadora explicitando as particularidades de cada atividade.

Gostaríamos de expor que desde os encontros iniciais a pesquisadora se colocou à disposição para discussão de todas as atividades da THA. O combinado com os professores parceiros era que a pesquisadora se comprometeria a entregar as folhas com orientações aos professores e as folhas de questões dos alunos com alguns dias de antecedência. Deste modo, o professor poderia analisar as atividades a serem desenvolvidas e, se necessário, fazerem alguma alteração. A pesquisadora se colocou à mercê para sanar qualquer dúvida a respeito das atividades, sempre procurava chegar à escola com antecedência para ter oportunidade de conversar com o professor e discutir a atividade antes da realização.

2.5. Professores e alunos envolvidos na investigação

Alunos participantes da pesquisa

Participaram da pesquisa 70 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual localizada na cidade de Embu-Guaçu. Os alunos da professora P1 estudam no período matutino e os do professor P2 são do período vespertino. A faixa etária é de 15 a 18 anos.

Professora 1

Docente do gênero feminino, 35 anos, concluiu Licenciatura em Matemática em 2001. Professora efetiva com 10 anos de magistério. Fez alguns cursos de extensão como Teia do Saber e Ensino Médio em Rede nos primeiros anos de magistério.

P1 relata que quando participou dos cursos era "*nova na rede e o curso serviu para abrir a mente e ver o tipo de aluno que estava recebendo"*. A professora se refere à troca de experiências entre os participantes do curso.

> *"Ajudou bastante com o grupo, com a troca de experiências com outros professores, não o professor do curso. Eles são totalmente fora da rede, não têm noção da nossa realidade e não acaba contribuindo. O que contribui, são os professores da rede, da sala, não o professor que está orientando."*

Em suas aulas, a professora normalmente utiliza a lousa e apoio de livros didáticos, não faz uso de materiais diferenciados ou tecnologias. No que se refere à Proposta Curricular do Estado de São Paulo a professora afirma seguir o conteúdo, porém afirma que explica normalmente usando o livro e depois faz uso da Proposta curricular do Estado: *"Se for uma atividade próxima da realidade do aluno eu entro com o caderninho e depois explico".*

Quanto ao tema Funções Trigonométricas, objeto de estudo dessa pesquisa, a docente normalmente inicia a abordagem com triangulo retângulo, medidas de ângulo, razão e proporção.

> *"Quando chega à função... Vou ser bem honesta, a parte de trigonometria vai ser importante para quem vai ser torneiro ou mexer na máquina para peças... Eu fiz gráfico no ano passado... é um assunto difícil para eles. A transformação.* ***Até eu não entendo****. Eu fiz a régua trigonométrica".*

A professora afirma que utiliza situações-problema, apenas na abordagem do triângulo retângulo.

Não faz uso do *software* por desconhecer aplicações na matemática. Afirma que tem laboratório na escola. *"Tem professor que não gosta da era da informática,* *não sabe e não tem o mínimo de vontade de aprender. Eu não tenho medo de computador."*

A consulta a resultados de pesquisas para auxiliar na elaboração de aulas não faz parte de sua prática docente, afirmando nunca ter buscado por esses resultados por não conhecer onde procurar. Conhece os PCN, mas não usa no dia a dia: "*Não uso os PNC, não sei decorado eles*."

Professor 2

Docente do gênero masculino, 43 anos, concluiu Licenciatura em Matemática em 2000. Professor efetivo com 22 anos de magistério. Atua também em escola particular na mesma cidade. Sua carga horária semanal é de 50 aulas. No período matutino leciona na escola particular e, à tarde, na escola estadual. É professor da escola há 10 anos.

O docente fez alguns cursos de extensão PEC e Ensino Médio em Rede. O professor relata que os contribuíram para mudar *"A utopia em querer transformar nossos alunos em matemáticos."*

Na descrição de sua metodologia de trabalho, afirma usar a exposição de conteúdos, atividades em grupo e a correção de exercícios. Para avaliar usa, principalmente, a observação: *"Avaliação escrita? Às vezes. Mas não levo muito em consideração".*

O professor relata que faz uso da Proposta Curricular do Estado e de livros didáticos. Para o docente, a proposta, na maioria das vezes, parte do principio que o aluno já sabe o conteúdo. A utilização de exercícios do livro didático é justificada como "subsidio para o aluno".

"*A gente de matemática costuma ser bem tradicional."*

Quando questionado sobre a abordagem do tema Funções Trigonométricas, o professor fez citações apenas no triangulo retângulo: elementos dele, razão, ângulo e proporção. Ao ser indagado sobre funções trigonométricas, afirma que explica o que é seno e cosseno. Utiliza a seguinte frase para justificar sua abordagem é: "*Confesso que é bem teórico."*

Para o professor, a principal dificuldade dos alunos para aprender Funções Trigonométricas é o desinteresse. Explicita sua opinião com a seguinte frase: "*Falta* *de ver naquilo uma coisa que vai servir para eles, contextualização daquilo na vida deles*."

A utilização de situações-problema, ocorre em suas aulas, na abordagem do triângulo retângulo apenas na oitava série. Não faz uso do *software* por desconhecer aplicações na matemática.

Nunca fez uso de resultados de pesquisa no planejamento das aulas. Afirma ter lido os PCN, mas não os utiliza no dia-a-dia. Usa a seguinte afirmação para justificar sua opinião: "*Não, tem que seguir a proposta.*"

2.6. THA –DESENVOLVIDA EM SALA DE AULA

Apresentamos as respostas esperadas para as questões propostas em cinza, tal como foi o material entregue aos professores parceiros. As figuras estão apresentadas na escala 1:2 em tamanho diferente ao utilizado com os alunos, esta opção tem a intenção de promover a discussão das expectativas das atividades e evitar um grande volume de páginas uma vez que a nossa THA é constituída por um número significativo de atividades e respectivas figuras.

Atividade I - Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico.

Tarefa I

Objetivo Específico: Convenção uso do raio unitário no círculo trigonométrico.

Materiais: Circunferência em anexo, régua, transferidor, calculadora.

Procedimento: Separar os alunos em duplas, entregar a figura 1 em anexo e pedir que meçam os lados dos triângulos e respondam as questões.

1. Observe os triângulos inscritos nas circunferências da Figura 1 para responder as questões.

$\hat{O} = 55°$	$\Delta A\hat{O}B$	$\Delta A_1\hat{O}B_1$	$\Delta A_2\hat{O}B_2$	$\Delta A_3\hat{O}B_3$	$CALCULADORA$
Raio	*1*	*5*	*8*	*10*	------
$sen\ \hat{O}$	$\frac{0,8}{1} \cong 0,8$	$\frac{4,1}{5} \cong 0,82$	$\frac{6,6}{8} \cong 0,85$	$\frac{8,3}{10} \cong 0,83$	$sen\ 55°$=*0,82*
$cos\ \hat{O}$	$\frac{0,6}{1} \cong 0,6$	$\frac{2,9}{5} \cong 0,58$	$\frac{4,6}{8} \cong 0,575$	$\frac{5,8}{10} \cong 0,58$	$cos\ 55°$=*0,57*
$tg\ \hat{O}$	$\frac{0,8}{0,6} \cong 1,3$	$\frac{4,1}{2,9} \cong 1,41$	$\frac{6,6}{4,6} \cong 1,43$	$\frac{8,3}{5,8} \cong 1,43$	$tg\ 55°$=*1,43*

1. Responda às questões:

   a) Em qual dos triângulos, o cálculo das razões trigonométricas foi mais fácil? Por quê?

Foi mais fácil os triângulos de raio 1 e raio 10 cm pois o cálculo é mais simplificado.

   b) O tamanho da hipotenusa do triângulo, que nesta atividade também é o raio da circunferência, pode interferir nas razões trigonométricas? Qual medida para a hipotenusa tornou o cálculo mais fácil?

Sim, o tamanho da hipotenusa, como o raio = 1 cm, tornou o cálculo mais simples.

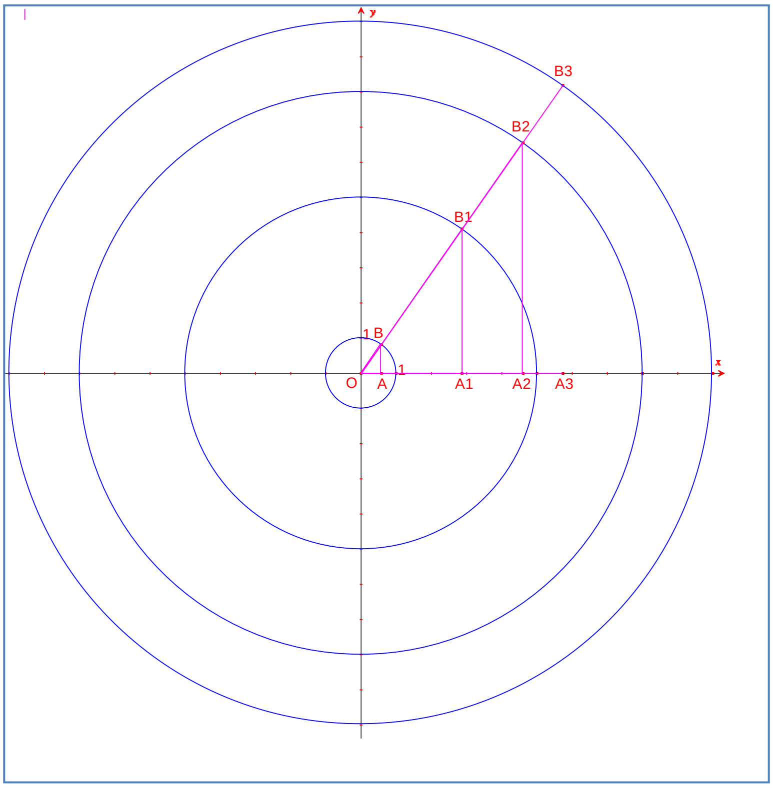


Figura 1

2. A partir da circunferência de raio unitário (Figura 2), construa os triângulos $A\hat{O}A_1$, $B\hat{O}B_1$ $C\hat{O}C_1$, para obter os valores das razões trigonométricas dos ângulos.

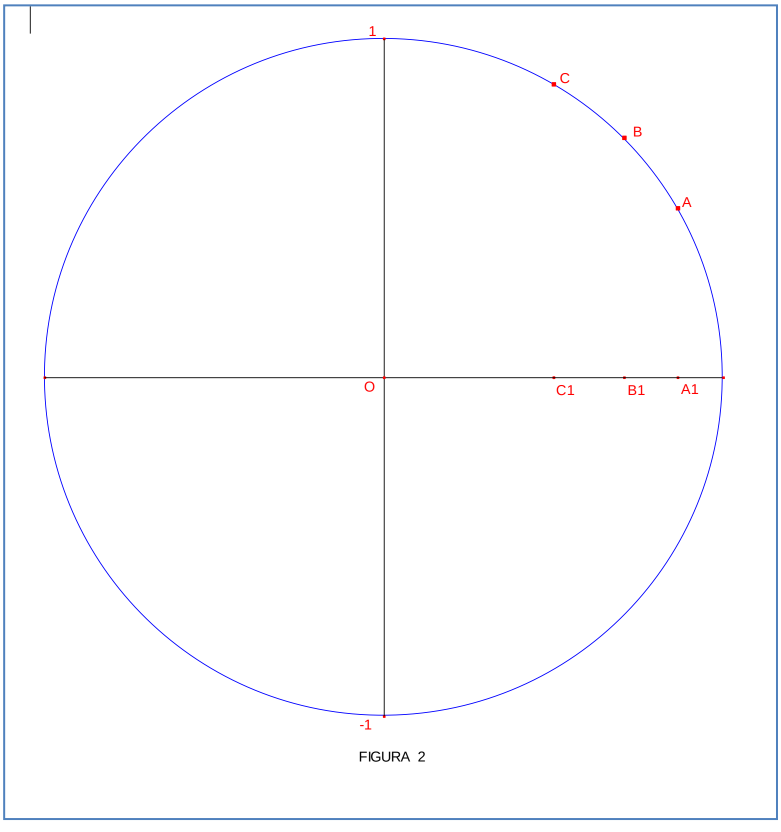


Figura 2

	$30°$	$45°$	$60°$
seno	$\frac{5}{10} = 0{,}5$	$\frac{7}{10} = 0{,}7$	$\frac{8{,}7}{10} = 0{,}87$
cosseno	$\frac{8{,}7}{10} = 0{,}87$	$\frac{7}{10} = 0{,}7$	$\frac{5}{10} = 0{,}5$
tangente	$\frac{5{,}8}{10} = 0{,}58$	$\frac{10}{10} = 1$	$1{,}73$

Tarefa II

Objetivo específico: Associar a projeção do ponto nos eixos às razões trigonométricas

Materiais: Circunferência em anexo, régua, transferidor, calculadora.

Procedimento: Separar os alunos em duplas.

1. Construa o triângulo AOA1, na circunferência de raio unitário (Figura 3) para encontrar o $sen\ \hat{O}$, $\cos \hat{O}$ e $tg\ \hat{O}$.

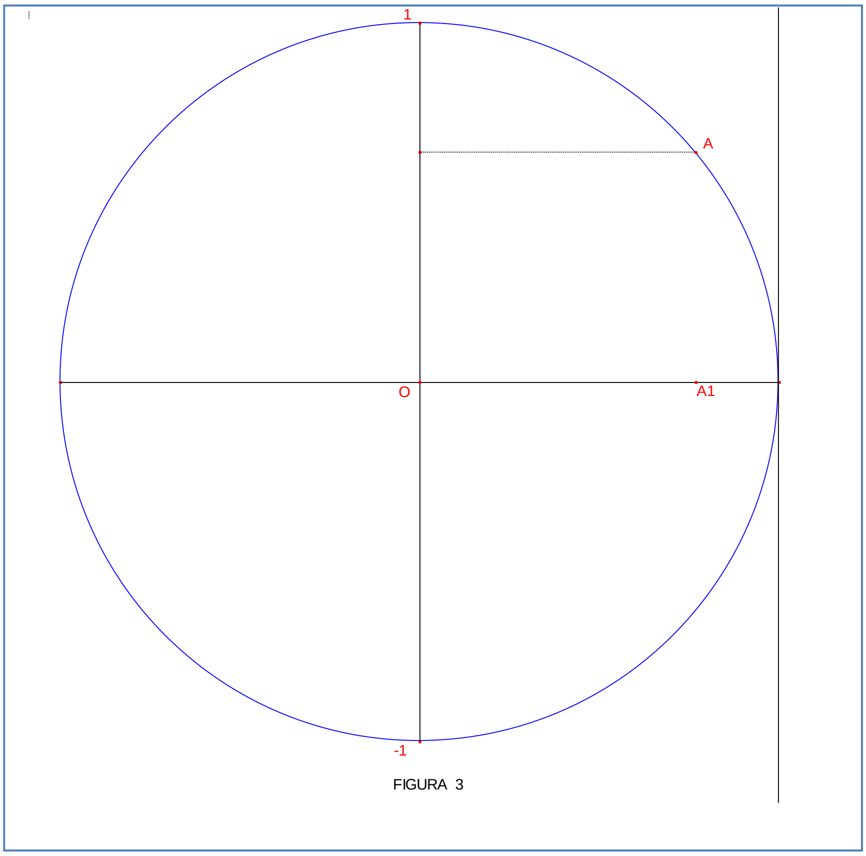


Figura 3

$$sen\hat{O} = \frac{6,4}{10}$$

$$sen\hat{O} = 0,64$$

$$cos\hat{O} = \frac{7,7}{10}$$

$$cos\hat{O} = 0,77$$

$$tg\hat{O} = \frac{6,4}{7,7}$$

$$tg\hat{O} \cong 0,83$$

2. Se retirarmos a circunferência (Figura 4) é possível identificar o sistema cartesiano x e y?

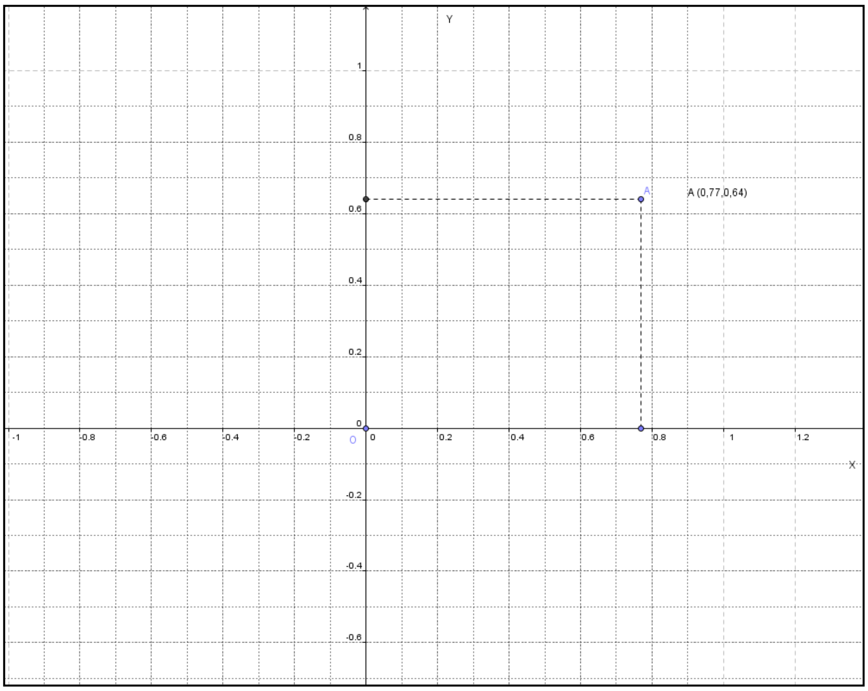


Figura 4

3. Quais as coordenadas do ponto A?

   A (0,77, 0,64)

4. Quais são os valores do $cos\ \widehat{O}$ e $sen\ \widehat{O}$?

   $\cos \widehat{O} = 0,77$

   $\text{sen}\ \widehat{O} = 0,64$

5. Há alguma relação entre as coordenadas e os valores das razões trigonométricas? Explique por que isso acontece.

Sim, quando o raio é unitário o cos e o sen do ângulo são as respectivas coordenadas.

Tarefa III

Objetivo específico: Associar a projeção do ponto nos eixos às razões trigonométricas

Materiais: Circunferência em anexo, esquadro, transferidor, calculadora.

Procedimento: Separar os alunos em duplas.

Agora você vai começar a ver que as razões trigonométricas também podem ser encontradas no circulo trigonométrico, basta definir qual o ângulo a ser considerado, inclusive para ângulos maiores que $90°$. É conveniente usarmos o raio unitário (pois podemos usar as coordenadas do ponto para obter as razões).

1. Complete a tabela das razões trigonométricas usando as coordenadas dos pontos localizados no círculo trigonométrico unitário (Figura 3):

	$\mathbf{10°}$	$\mathbf{20°}$	$\mathbf{70°}$	$\mathbf{80°}$	$\mathbf{90°}$
seno	0,17	0,34	0,94	0,98	1
cosseno	0,98	0,94	0,34	0,17	0
tangente	0,18	0,36	2,75	5,67	$\nexists$

Confira os valores obtidos pelas projeções com a tabela trigonométrica que você recebeu. Ou use a calculadora científica. Há outra maneira de conferir?

Pode usar a calculadora, a tabela, a relação $\text{sen}\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$ ou a relação $\cos\alpha = \text{sen}(90° - \alpha)$

Atividade II - Identificação do radiano como medida para o círculo trigonométrico

Tarefa I

Objetivo Específico: Identificar um radiano como a medida do arco correspondente à medida do raio, estabelecer o π.

1. Primeiro vocês devem transferir a base do objeto que vocês receberam para o papel.
2. Usem os esquadros para encontrarem o centro e traçarem o raio da circunferência.
3. Agora cortem pedaços do barbante que tenham a mesma medida do raio e colem na circunferência que vocês fizeram no papel.
4. Quantos pedaços de barbante, ou seja, raio, vocês conseguiram colar?
5. Copiem e completem o quadro abaixo no cartaz:

Objeto	Medida do Raio	Medida do Diâmetro	Comprimento da circunferência em raios	Comprimento da circunferência em cm	$\frac{\textbf{Comprimento da circunferência}}{\textbf{diâmetro}}$
CD	6 cm	12 cm	6 e poucos	37,8	$\frac{37,8}{12} = 3,15$
Relógio	11,2 cm	22,4 cm	6 e poucos	70,5	$\frac{70,5}{22,4} = 3,15$
Lata	2,8 cm	5,6 cm	6 e poucos	18	$\frac{18}{5,6} = 3,21$

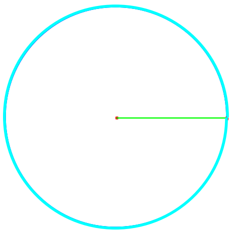
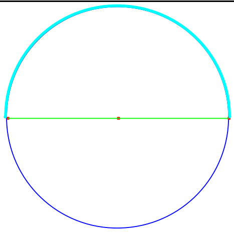
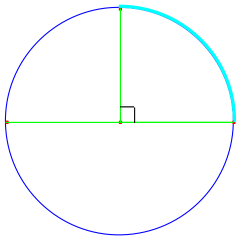
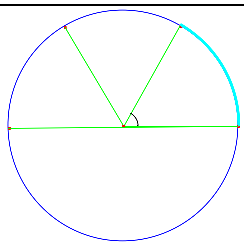
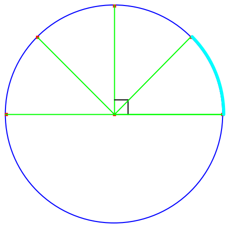
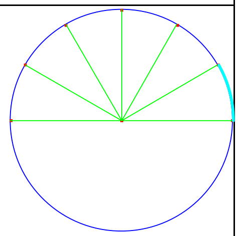
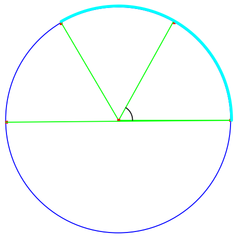
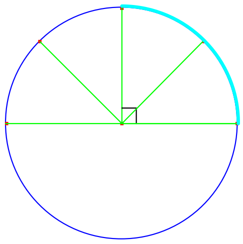
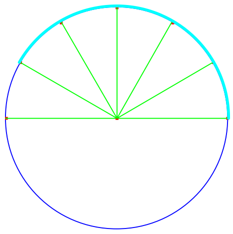
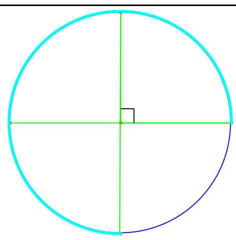
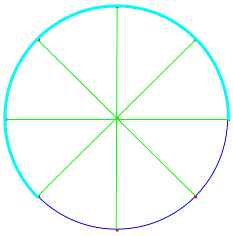
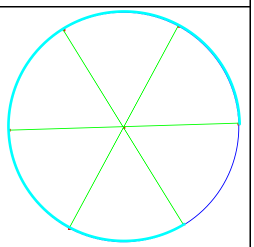
Ao transferir a medida do raio para a circunferência obtemos um arco de circunferência cujo comprimento é igual à medida do raio. Este arco recebe o nome de **radiano**.

Você conseguiu colocar 6,2 vezes o radiano. Vocês mediram o perímetro do círculo ou comprimento da circunferência que utilizamos com a fórmula $2\boldsymbol{\pi r}$, onde r é o raio. Como o radiano é um arco de mesma medida do raio podemos falar que a circunferência mede 2 $\boldsymbol{\pi}$rad.

Tarefa II

Objetivo Específico: Conversão grau em radiano

1. Complete com a medida dos arcos a seguir em π radianos e em graus.

			
π Radianos	2π	$\frac{2\pi}{2} = \pi$	$\frac{\pi}{2}$
Grau	$360°$	$180°$	$90°$
			
π Radianos	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
Grau	$60°$	$45°$	$30°$
			
π Radianos	$2.\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$	$2.\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$	$5.\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
Grau	$2.60° = 120°$	$2.45° = 90°$	$5.30° = 150°$
			
π Radianos	$3.\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$	$5.\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$	$5.\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$
Grau	$3.90° = 270°$	$5.45° = 225°$	$5.60° = 300°$

Tarefa III

Objetivo Específico: Localização de arcos no círculo trigonométrico.

1. Agora você deve usar o transferidor e marcar nas circunferências abaixo (use cores diferentes) os arcos cujas medidas são:

$\widehat{AB} = \frac{\pi}{6} rad$ $\widehat{AD} = \frac{3\pi}{2} rad$ $\widehat{MO} = \frac{3\pi}{4} rad$

$\widehat{AC} = \frac{\pi}{4} rad$ $\widehat{MN} = \frac{\pi}{3} rad$ $\widehat{MP} = 2\pi\, rad$

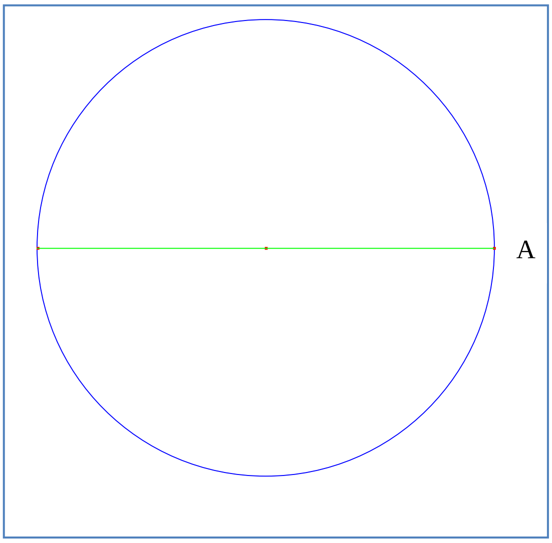


Figura 1

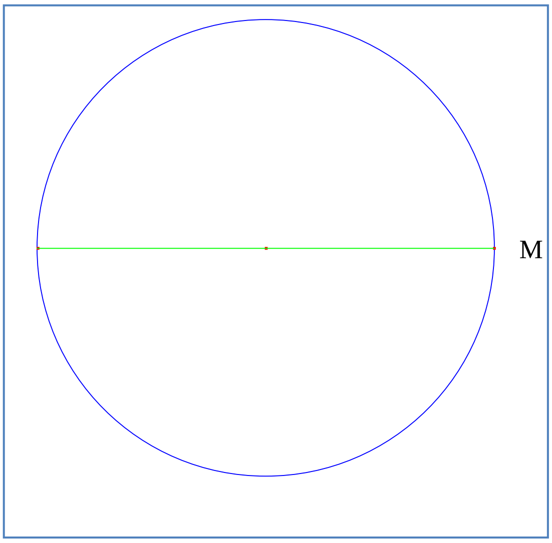


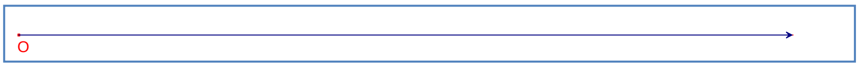
Figura 2

Tarefa IV

Objetivo Específico: Associar cada ponto do círculo trigonométrico a um número da reta real.

1. Trace uma circunferência no quadro abaixo de raio 2 cm.

2. Usando o compasso, transfira a medida do comprimento da circunferência para a reta numérica abaixo:



3. O comprimento da circunferência tem, aproximadamente, quantos cm?

   12,56 cm

4. Trace uma circunferência de 1 cm de raio. Logo, o arco de 1 radiano medirá, respectivamente, 1 cm.

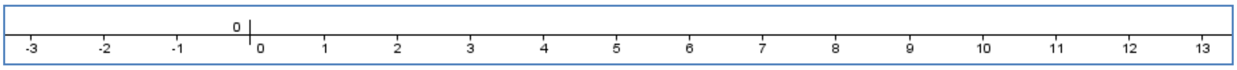
   a. Um arco de 1 radiano tem aproximadamente quantos graus?

      57°

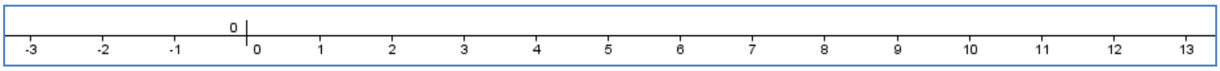
   b. Considere 1 radiano a imagem do número 1 e marque no ciclo trigonométrico as imagens dos números: 1, 2, 3, 5, 6,7.

5. O número π corresponde a quantos radianos? Localize o número π na reta numérica abaixo:

   3,14 radianos



6. Localize agora os números $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{rad}$, $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{rad}$, $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{rad}$, $\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{rad}$, $\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{rad}$, $\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{rad}$, na reta numérica abaixo. Use $\pi = 3\ cm$

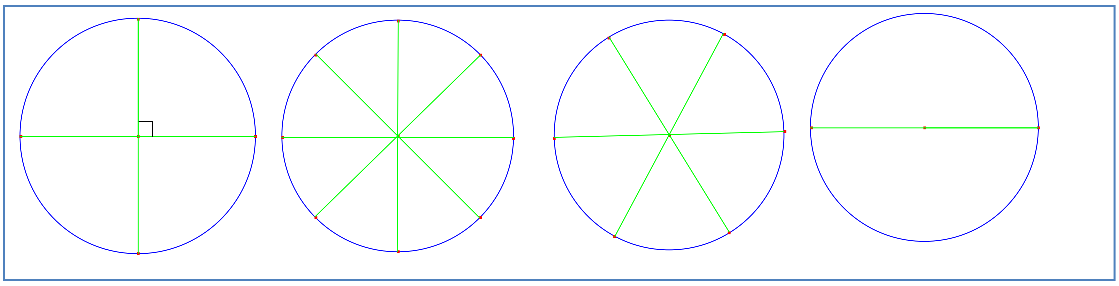


7. Podemos associar cada ponto da reta numérica a um ponto na circunferência?

   Sim, pois podemos ter *n* voltas na circunferência.

8. Imagine a reta numérica “enrolando” a circunferência. Você sabe que a reta numérica é infinita, utilize os círculos trigonométricos para localizar os pontos correspondente aos números:

A = $\frac{3\pi}{2}$, B = $\frac{9\pi}{4}$, C = $\frac{8\pi}{3}$ D = $5\boldsymbol{\pi}$



Tarefa V

Objetivo Específico: Orientar círculo trigonométrico

Material: Compasso e transferidor.

Como já vimos cada ponto da reta numérica tem um ponto correspondente na circunferência. Como a reta numérica não tem fim, também podemos “enrolar” inifinitamente a circunferência. Imagine como uma “mangueira” sendo enrolada no suporte.

Devemos escolher um ponto da circunferência para representar o zero. Tal como a reta real, precisamos definir onde colocar os números positivos e negativos. Por convenção vamos estabelecer o sentido anti-horário como positivo e como negativo o sentido horário (Figura1).

Se tomarmos como unidade o radiano, o ponto correspondente ao número 2 está localizado pelo arco de medida 2 rad (Figura 2).

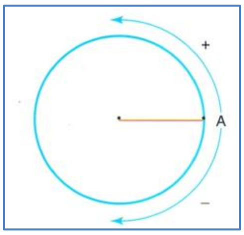


Figura 1

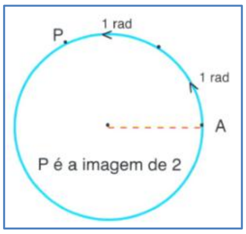
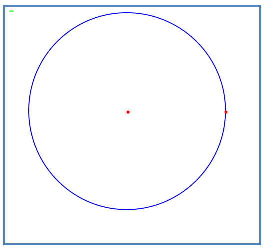


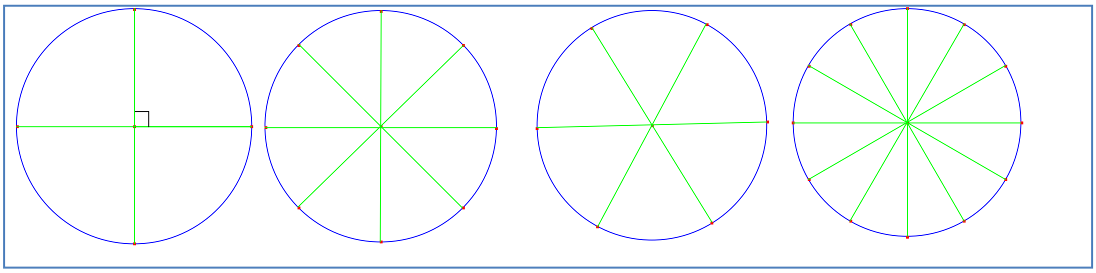
Figura 2

1. Use o compasso com a medida de 1 radiano = 1 cm e marque no ciclo trigonométrico as imagens dos números: -1, 2, -3, 4 e 5



2. Utilize os círculos trigonométricos para localizar os pontos correspondente aos números (pinte o arco até o ponto):

A = $\frac{\pi}{2}$, B = $-\frac{\pi}{3}$, C = $\frac{3\pi}{4}$, D = $-\frac{2\pi}{6}$, E = $\frac{10\pi}{6}$, F = $-\frac{\pi}{2}$ *e* G = $\frac{3\pi}{2}$,

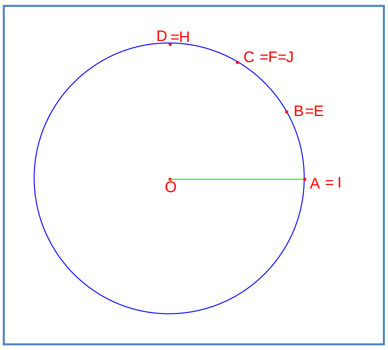


3. Os arcos $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ são iguais? Justifique.

Não, pois apesar de estarem sobre o mesmo ponto um tem a medida do arco de $\frac{3\pi}{2}$ e o outro $\frac{\pi}{2}$, embora no sentido negativo.

4. Localize na circunferência abaixo os arcos correspondentes:

a. $\widehat{AB} = 30°$
b. $\widehat{AC} = 60°$
c. $\widehat{AD} = 90°$
d. $\widehat{AE} = 390°$
e. $\widehat{AF} = 420°$
f. $\widehat{AH} = 450°$
g. $\widehat{AI} = 720°$
h. $\widehat{AJ} = 780°$



Você acabou de encontrar diversos *arcos côngruos*. Arcos côngruos são arcos que têm a mesma extremidade, mas diferem apenas pelo número de voltas inteiras na circunferência.

Esses arcos são representados por expressões como essa:

Os arcos $\widehat{AC}$ e $\widehat{AF}$ são chamados de arcos côngruos pois, têm a mesma expressão:

$\widehat{AC} = 60° + 360°.k,\ k \in Z$ ou $\widehat{AC} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$, neste caso k = 0

$\widehat{AF} = 60° + 360°.k,\ k \in Z$ ou $\widehat{AF} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$, neste caso k = 1

Onde k representa o número inteiro de voltas.

5. Determine a expressão geral dos arcos côngruos aos arcos de:
    a. 45° = $45° + 360°.k,\ k \in Z$ ou $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z$
    b. 90° = $90° + 360°.k,\ k \in Z$ ou $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$
    c. 180° = $180° + 360°.k,\ k \in Z$ ou $\pi + 2k\pi, k \in Z$
    d. 720 = $360°.k,\ k \in Z$ ou $2k\pi, k \in Z$

Atividade III Calcular seno, cosseno, tangente, de um ângulo no círculo trigonométrico.

Tarefa I

Objetivo específico: Localizar as razões trigonométricas no círculo.

Como já vimos nas atividades anteriores se utilizarmos uma circunferência orientada de raio um podemos encontrar o seno, cosseno e tangente de um ângulo apenas usando projeções nos eixos e na reta tangente à circunferência.

1. Usando a circunferência (Figura 1) dê os valores para o seno e cosseno dos ângulos e depois confira os valores obtidos com a calculadora científica.

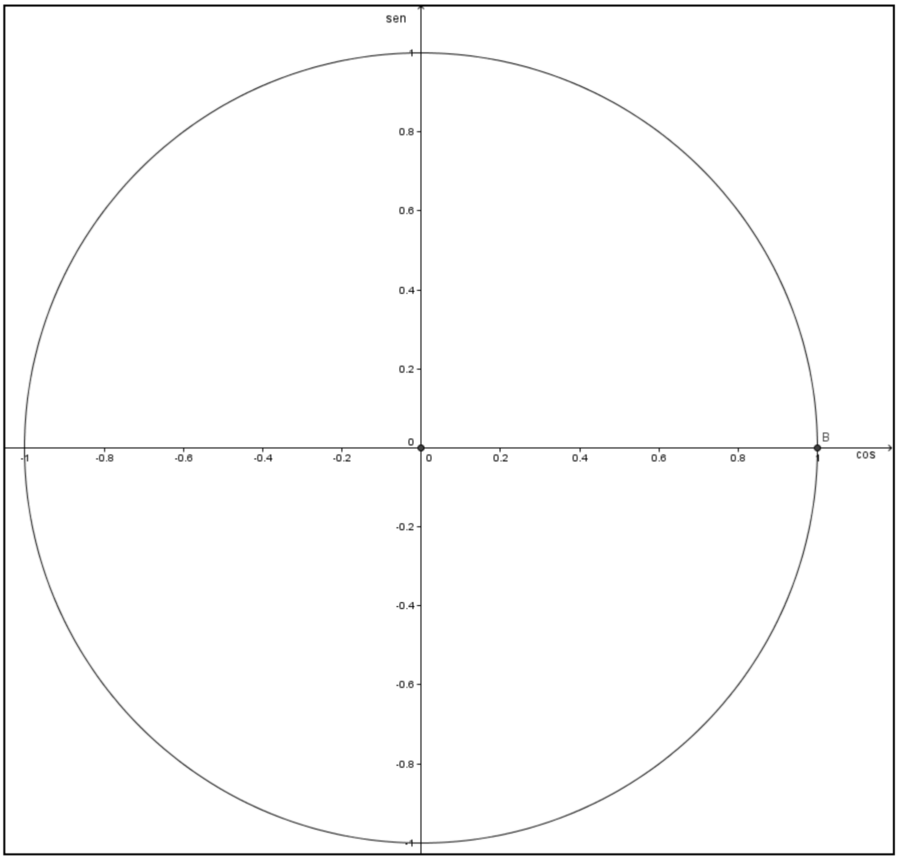


Figura 1

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
sen	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,9	-1	-0,9	-0,7	-0,5	0
cos	1	0,9	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,9	-1	-0,9	-0,7	-0,5	0	0,5	0,7	0,9	1

2. Responda às questões relativas ao seno usando a tabela do item 1:
   a) Escreva abaixo os pares de ângulos que têm o mesmo valor de seno.
   $0°\ e\ 180°$; $30°\ e\ 150°$; $45°\ e\ 135°$; $60°\ e\ 120°$ $210°\ e\ 330°$; $225°\ e\ 315°$; $240°\ e\ 300°$

   b) Você consegue perceber alguma regularidade que ocorre entre os pares de ângulos com o mesmo seno? Qual?
   Os pares de ângulos suplementares têm o mesmo seno.
   Sejam α e β, se $\beta + \alpha = 180 \Rightarrow sen\ \beta = sen\alpha$.
   Os ângulos simétricos em relação ao eixo dos senos têm o mesmo seno.

c) Escreva abaixo os pares de ângulos que têm valor opostos de seno.

$30° \, e \, 210°$; $45° \, e \, 225°$; $60° \, e \, 240°$; $90° \, e \, 270°$; $30° \, e \, 330°$; $45° \, e \, 315°$; $60° \, e \, 300°$

d) Você consegue perceber alguma regularidade que ocorre entre os pares de ângulos com senos opostos? Qual?

I. $\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\alpha.$

Exemplos: $sen\, 210° = sen(180° + 30°) = -sen30° = -0{,}5.$

$sen\, 225° = sen(180° + 45°) = -sen45° = -0{,}71.$

II. $\text{sen}\,(360° - \alpha) = -\text{sen}\alpha.$

Exemplos: $sen\, 330° = sen(360° - 30°) = -sen30° = -0{,}5.$

$sen\, 315° = sen(360° - 45°) = -sen45° = -0{,}71.$

3. Responda as questões relativas ao cosseno usando a tabela do item 1:

a) Escreva abaixo os pares de ângulos que têm o mesmo valor de cosseno.

$0° \, e \, 360°$; $30° \, e \, 330°$; $45° \, e \, 315°$; $60° \, e \, 300°$; $90° \, e \, 270°$;

$120° \, e \, 240°$; $135° \, e \, 225°$; $150° \, e \, 210°$

b) Você consegue perceber alguma regularidade que ocorre entre os pares de ângulos com o mesmo cosseno? Qual?

Os pares de ângulos replementares têm o mesmo cosseno.

Sejam α e β, $se\;\; \beta + \alpha = 360 \Rightarrow \cos\beta = \cos\alpha.$

Os ângulos simétricos em relação ao eixo dos cossenos têm o mesmo cosseno.

c) Escreva abaixo os pares de ângulos que têm valor opostos de cosseno.

$0° \, e \, 180°$; $30° \, e \, 150°$; $45° \, e 135°$; $60° \, e 120°$

$30° \, e \, 210°$; $45° \, e \, 225°$; $60° \, e \, 240°$

d) Você consegue perceber alguma regularidade que ocorre entre os pares de ângulos com cosseno opostos? Qual?

I. Os pares de ângulos suplementares têm valores para cosseno opostos. formatação

Sejam α e β, e $\beta + \alpha = 180 \Rightarrow cos\ \beta = -cos\alpha$.

Exemplos: $cos\ 0° = -cos180°$; $cos\ 30° = -cos150°$; $cos\ 45° = -cos135°$;

II. $cos(180° + \alpha) = -cos\alpha$.

Exemplos: $cos\ 210° = cos(180° + 30°) = -cos30° = -0{,}85$.

$cos\ 240° = cos(180° + 60°) = -cos60° = -0{,}5$.

4. Usando a circunferência (Figura 2) dê os valores para a tangente dos ângulos e depois confira os valores com a calculadora.

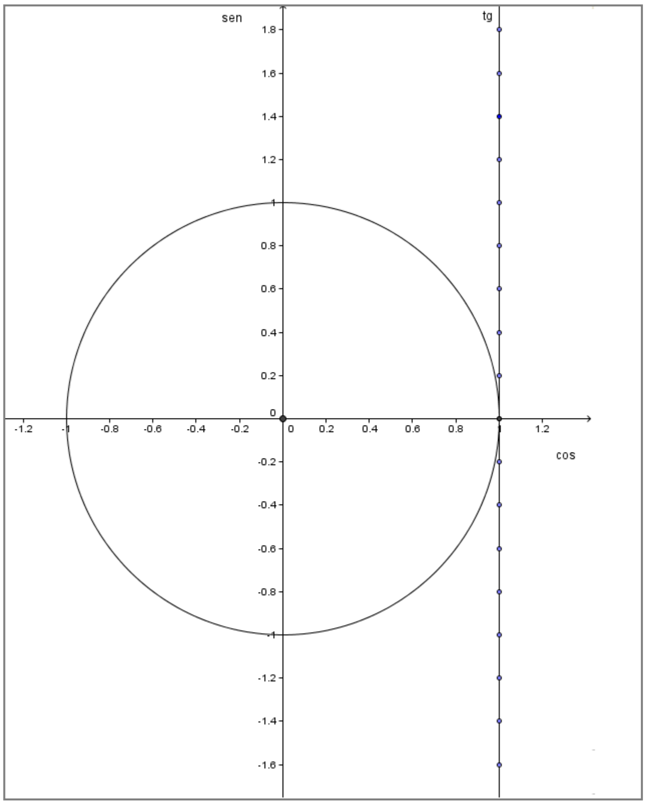


Figura 2

	0°	30°	45°	70°	90°	110°	135°	150°	180°	210°	225°	250°	270°	290°	315°	330°	360°
tg	0	0,58	1	2,75	-	-2,75	-1	-0,58	0	0,58	1	2,75	-	-2,75	-1	-0,58	0

a) Escreva abaixo os pares de ângulos têm o mesmo valor de tangente.

$0°, 180°\ e\ 360°$; $30°\ e\ 210°$; $45°\ e\ 225°$; $70°\ e\ 250°$; $110°\ e\ 290°$; $135°\ e\ 315°$; $150°\ e\ 330°$

b) Você percebeu alguma regularidade que ocorre entre os pares de ângulos com a mesma tangente? Qual?

$tg\ (180° + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha.$ Exemplos:

$tg\ 180° = tg(180° + 0°) = tg0° = 0.$

$tg\ 210° = tg(180° + 30°) = tg30° = 0{,}58.$

Os ângulos simétricos em relação à origem têm a mesma tangente.

c) Você percebeu que alguns valores são opostos? Escreva abaixo os pares de ângulos em que isso ocorreu:

$30°\ e\ 150°$; $30°\ e\ 330°$; $150°\ e\ 210°$; $45°\ e\ 135°$; $45°\ e\ 315°$;

$135°\ e\ 225°$; $70°\ e\ 110°$; $70°\ e\ 290°$, $110°\ e\ 250°$

d) Você percebeu alguma regularidade que ocorre entre os pares de ângulos com tangente opostas? Qual?

I. Os pares de ângulos suplementares têm valores para tangente opostos.

Sejam α e β, se $\beta + \alpha = 180 \Rightarrow tg\ \beta = -tg\alpha$.

Exemplos: $tg\ 30° = -tg150°$; $tg\ 45° = -tg135°$; $tg\ 70° = -tg110°$

II. Os pares de ângulos replementares têm valores para tangente opostos.

Sejam α e β, se $\beta + \alpha = 360 \Longrightarrow tg\ \beta = -\mathrm{tg}\alpha$.

Exemplos: $tg\ 30° = -tg330°$; $tg\ 45° = -tg315°$; $tg\ 70° = -tg290°$

Tarefa II

Objetivo Específico: Relação entre seno e cosseno de ângulos complementares.

1. Para lembrá-lo de uma importante propriedade, que já vimos no triângulo retângulo, vamos apresentar a tabela a seguir. Grife na tabela os valores iguais com a mesma cor e tente lembrar uma importante relação entre as funções trigonométricas.

	$0°$	$20°$	$45°$	$70°$	$90°$
sen	0	0,34	0,71	0,94	1
cos	1	0,94	0,71	0,34	0

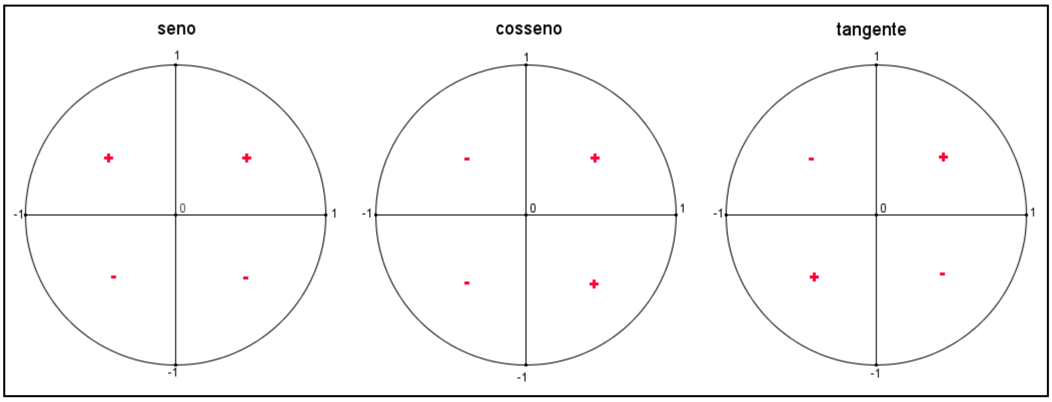
2. Agora você deve utilizar os conhecimentos que possui para completar a tabela abaixo. Se você quiser, utilize o círculo trigonométrico da Tarefa 1 (item 1) para facilitar a visualização:

	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$330°$	$360°$	$420°$	$570°$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Tarefa III

Objetivo Específico: familiarização com os sinais das funções trigonométricas.

1. Agora você deve observar os sinais das razões trigonométricas nos quadrantes do círculo e representá-los nos círculos abaixo (use + para positivo e – para negativo):



Atividade IV Uso da calculadora científica para o cálculo das funções trigonométricas.

1. Utilize as funções sin, cos e tan da calculadora científica para completar as tabelas (aproximação de 0,01).

Ângulo α	senα	cosα	tgα
0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$
π	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\nexists$
2π	0	1	0
$\frac{5\pi}{2}$	1	0	$\nexists$
3π	0	-1	0
$-\frac{\pi}{2}$	-1	0	$\nexists$
$-\pi$	0	-1	0
$-\frac{3\pi}{2}$	1	0	$\nexists$
-2π	0	1	0
$-\frac{5\pi}{2}$	-1	0	$\nexists$
-3π	0	-1	0
$-\frac{7\pi}{2}$	1	0	$\nexists$

Ângulo α	senα	cosα	tgα
$0°$	0	1	0
$30°$	0,5	0,87	0,58
$45°$	0,71	0,71	1
$60°$	0,87	0,5	1,73
$89°$	0,99	0,02	57,29
$90°$	1	0	Não
$91°$	0,99	-0,02	-57,29
$120°$	0,87	-0,50	-1,73
$135°$	0,71	-0,71	-1
$150°$	0,5	-0,87	-0,58
$180°$	0	-1	0
$210°$	-0,5	-0,87	0,58
$225°$	-0,71	-0,71	1
$240°$	-0,87	-0,5	1,73
$270°$	-1	0	Não
$271°$	-0,99	0,02	-57,29
$300°$	-0,87	0,5	-1,73
$315°$	-0,71	0,71	-1
$330°$	-0,5	0,87	-0,58
$360°$	0	1	0
$420°$	0,87	0,5	1,73
$450°$	1	0	Não
$720°$	0	1	0
$900°$	0	-1	0

Marca Classe/ Kenko Fraction - radianos

Inicialmente você deve alterar o tipo de número para radianos apertando a tecla **DRG** até aparecer **RAD** no visor. Você deve digitar **2ndf** (teclas superiores) em seguida $\boldsymbol{\pi}$**.** O visor deve apresentar o valor **3.141592654...** Depois digite a tecla **+/-**, seguida das teclas ÷, da tecla **2** e da tecla **=**. O visor deve apresentar o valor **-1.570796327..** Finalmente selecionar **sin**. O visor deve apresentar o valor **-1.**

Marca Classe/ Kenko Fraction – grau

Inicialmente você deve alterar o tipo de número para radianos apertando a tecla **DRG** até aparecer **DEG** no visor

Você deve digitar **90** seguido da tecla **sin.** O visor deve apresentar o valor **1.**

Marca Casio - radianos

Alterar o tipo de número para RAD apertando a tecla **MODE** seguida da tecla **5** até aparecer **RAD** no visor. Você deve digitar **AC** (teclas superiores) em seguida ou $\boldsymbol{\pi}$**.** O visor deve apresentar o valor **3.141592654...** Depois digite a tecla **+/-**, seguida das teclas ÷, da tecla **2** e da tecla **=**. O visor deve apresentar o valor **-1.570796327...** Finalmente selecionar **sin**. O visor deve apresentar o valor **-1.**

Marca Casio - grau

Inicialmente você deve alterar o tipo de número para **DEG** apertando a tecla **MODE** seguida da tecla **4** até aparecer **DEG** no visor Você deve digitar **90** seguido da tecla **sin.** O visor deve apresentar o valor **1.**

Marca Kenko Super - radianos

Inicialmente você deve alterar o tipo de número para radianos apertando as teclas **MODE CLR** e a tecla **2** até aparecer **R** no visor. Você deve digitar **sin.** O visor deve apresentar a função **sin**. Em seguida aperte as teclas **+/-.** O próximo passo é digitar a tecla **shift** (teclas superiores) seguida das teclas **(**$\boldsymbol{\pi}$ ÷ **2) =.** O visor deve apresentar o valor **-1.**

Marca Kenko Super – grau.

Alterar o tipo de número para radianos apertando as teclas **MODE CLR** e a tecla **1** até aparecer **D** no visor. Você deve digitar **sin.** O visor deve apresentar a função **sin**. Em seguida digitar a tecla **90** e **=.** O visor deve apresentar o valor **1.**

Atividade V - Estudo da função sen x

Tarefa I **Objetivo específico:** introdução ao estudo da função seno.

Como sen x é uma função, podemos utilizar um gráfico cartesiano para representar seu comportamento.

Vamos lembrar que um gráfico é a representação do domínio e do contradomínio da função. As coordenadas dos pontos do gráfico representam os valores do domínio e sua respectiva imagem.

Você deve pensar nisso antes de fazer o gráfico. Os gráficos de funções trigonométricas normalmente representam o ângulo em radianos.

1. Complete a tabela 1:

X rad	f(x) = sen(x)	P(x, f(x))
0	0	A(0,0)
$\frac{\pi}{2}$	1	B$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
π	0	C(π,0)
$\frac{3\pi}{2}$	-1	D$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$
2π	0	E(2π,0)
$\frac{5\pi}{2}$	1	F$\left(\frac{5\pi}{2}, 1\right)$
3π	0	G(3π,0)
$\frac{7\pi}{2}$	-1	H$\left(\frac{7\pi}{2}, -1\right)$
4π	0	I(4π,0)
$-\frac{\pi}{2}$	-1	J$\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$
$-\pi$	0	K($-\pi$,0)
$-\frac{3\pi}{2}$	1	L$\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)$
-2π	0	M(-2π, 0)
$-\frac{5\pi}{2}$	-1	N$\left(-\frac{5\pi}{2}, -1\right)$

Tabela 1

2. Representem no eixo cartesiano da figura 1, alguns pontos que você encontrou na atividade anterior.

   a) Qual seria o eixo dos arcos e como ele seria representado?

   O domínio, no eixo cartesiano é o eixo x.

   b) Qual seria o eixo dos senos e como ele seria representado?

   O conjunto imagem, no eixo cartesiano é o eixo y, que varia de -1 até 1.

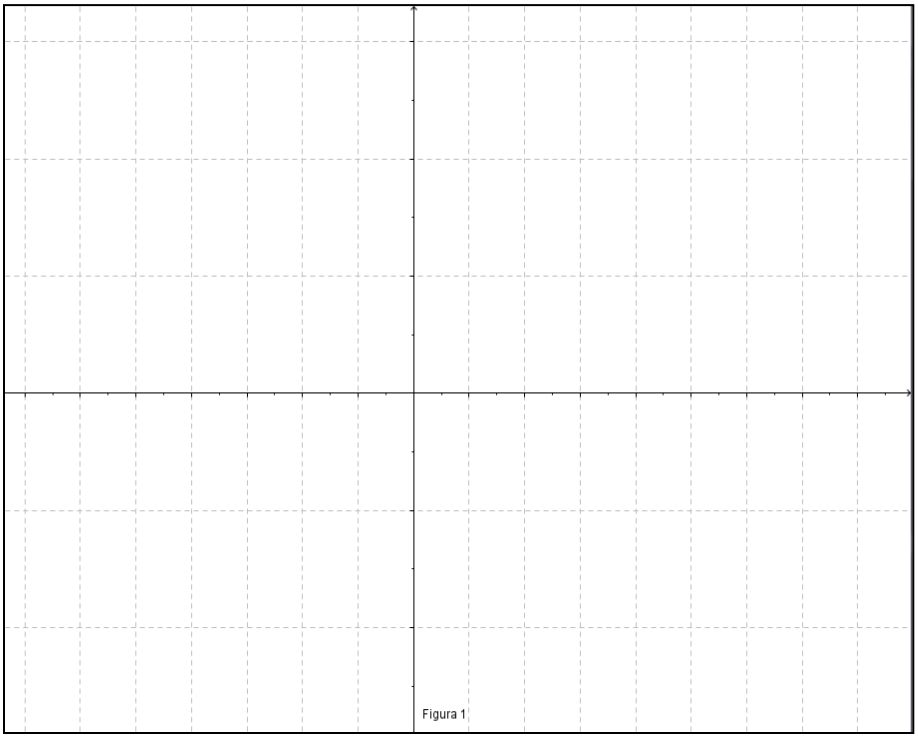


Figura 1

3. Este gráfico representa a função y = sen x? Justifique.

   A senóide não foi traçada, porém podemos ter uma noção do comportamento da função e perceber que ela é limitada e periódica.

4. Como vimos o seno é uma **função trigonométrica**. Assim, para todos os elementos do domínio temos um, e apenas um, elemento do conjunto imagem. Neste caso a função seno é contínua, ou seja, encontramos elementos do domínio não apenas entre os arcos fundamentais como $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$, etc. Mas também para outros ângulos como $\frac{\pi}{10}$. Logo, você deve traçar o gráfico que corresponda aos pontos da função y = sen x, sem descontinuidade, usando o eixo da figura 2.

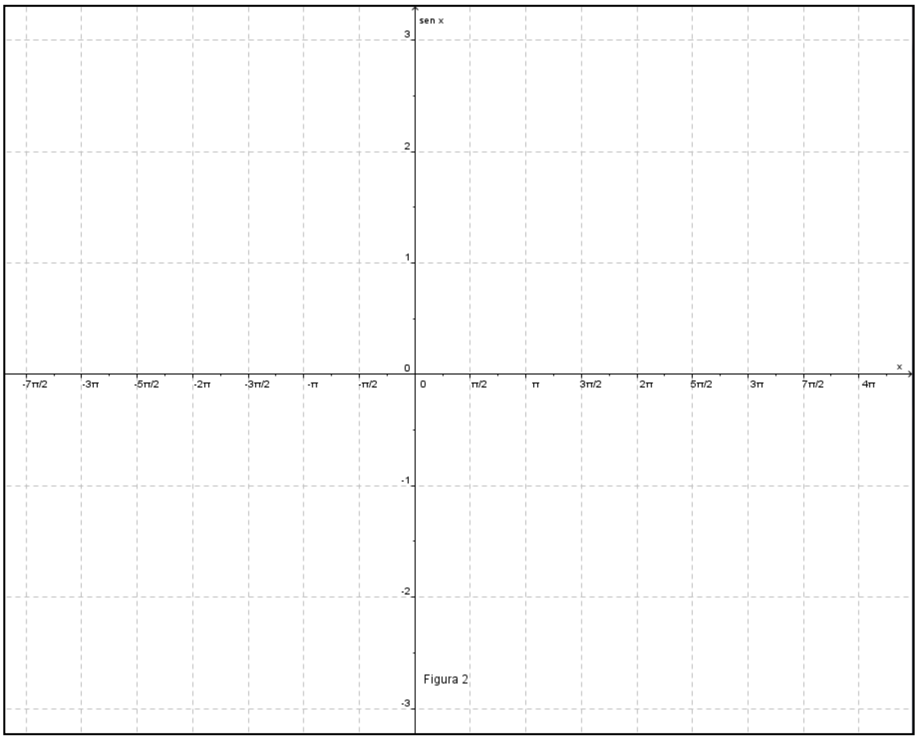


Figura 2

5. Responda às questões utilizando o gráfico da função y = sen x (figura 2).
   a) Qual é o domínio da função sen x?

   O Domínio de f(x) = sen x é o conjunto $\mathbb{R}$.

   b) Qual é o conjunto imagem da função sen x?

   $Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$

   c) Dizemos que a função sen x é uma função periódica. Explique por que ela recebe esta definição e dê um exemplo a partir do gráfico da função sen x.

   Periódica, pois se repete a cada 2π.

6. Responda, seja *x* o arco em radianos:
   a) Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o sinal de seno x é sempre + e a medida que x aumenta o seno x aumenta.
   b) Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, o sinal de seno x é sempre + e a medida que x aumenta o seno x diminui.
   c) Se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, o sinal de seno x é sempre - e a medida que x aumenta o seno x diminui.
   d) Se $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, o sinal de seno x é sempre - e a medida que x aumenta o seno x aumenta.
   e) Qual o valor máximo da função seno? E qual o valor mínimo da função seno?

O máximo é 1 e o valor mínimo – 1.

   f) Podemos afirmar que a função seno é uma função limitada? Justifique.

Sim, pois varia de -1 a 1.

   g) Você percebe alguma regularidade nos valores do seno?

Sim se repete a cada 2π. Período.

7. Complete a tabela:

sen x	**sinal**	**Crescente/decrescente**
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+	Crescente
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	+	Decrescente
$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	-	Decrescente
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	-	Crescente

Tarefa II

Objetivo específico: familiarização com o software *Geogebra* e associação entre os arcos do ciclo trigonométrico e os gráficos das funções trigonométricas.

Separar os alunos em duplas. Eles devem movimentar o ponto P e observar os gráficos construídos. Os alunos devem observar o comportamento das funções e, em seguida o professor deve fazer comentários a respeito dos gráficos que representam o comportamento das funções estudadas.

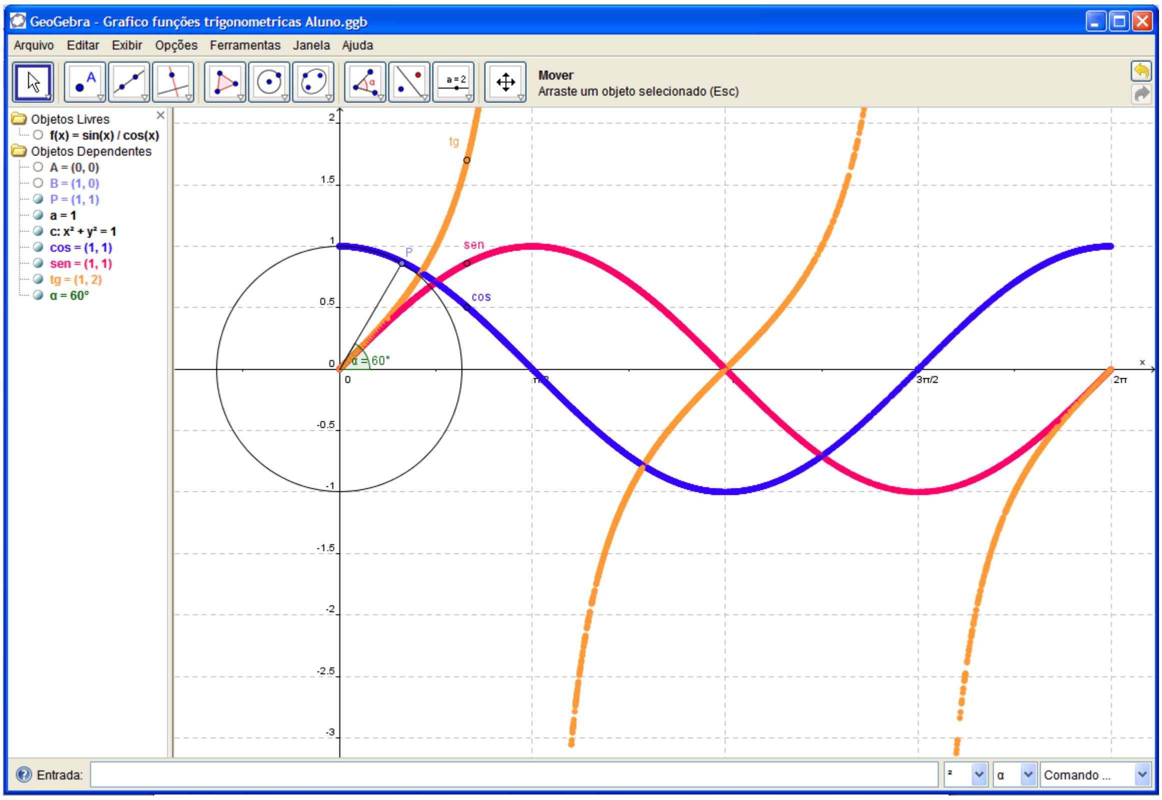


Figura 1

Abra o arquivo **Gráfico funções trigonométricas.ggb.** Movimente o ponto P pelo ciclo trigonométrico e observe os gráficos das funções.

1. Observando o comportamento dos gráficos das funções trigonométricas sen x, cos x e tg x, responda às questões seguintes:

   a) Para $x = \pi$, quais os valores das funções sen x, cos x e tg x?

   $sen\pi = 0$ $\quad\quad$ $cos\pi = -1$ $\quad\quad$ $tg\pi = 0.$

b) Para $x = \frac{\pi}{2}$, quais os valores das funções sen x, cos x e tg x?

$sen\frac{\pi}{2} = 1$ $\quad cos\frac{\pi}{2} = 0$ $\quad tg\frac{\pi}{2} = \nexists$

c) Para $x = \frac{\pi}{4}$, quais os valores das funções sen x, cos x e tg x?

$sen\frac{\pi}{4} \cong 0,7$ $\quad cos\frac{\pi}{4} \cong 0,7$ $\quad tg\frac{\pi}{4} = 1$

2. Complete a tabela com + ou -:

x	sen x	cos x	tg x
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+	+	+
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	+	-	-
$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	-	-	+
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	-	+	-

Tarefa III

Objetivo: Observar o comportamento do gráfico da função seno x com o de suas associadas

1. Traçar os gráficos das funções no eixo cartesiano dado na Figura 2 e completar a tabela (use cores diferentes para cada senóide): Observação: no software você deve usar **sin(x)** [3]**:**

Função	Domínio	Período	Imagem	x = 0	x = $\frac{\pi}{2}$	X = π	x = $\frac{3\pi}{2}$	x = 2π
f(x) = sen x	$\mathbb{R}$	2π	$[-1; 1]$	0	1	0	-1	0
g(x) = 1 + sen x	$\mathbb{R}$	2π	$[0; 2]$	1	2	1	0	1
h(x) = 2 + sen x	$\mathbb{R}$	2π	$[1; 3]$	2	3	2	1	2
i(x) = -2 + sen x	$\mathbb{R}$	2π	$[-3; 1]$	-2	-1	-2	-3	-2

[3] Atividade adaptada de: SILVA, B. A. [et al] Atividades para o estudo de Funções em Ambiente Computacional. São Paulo: Ed. Iglu. 2002

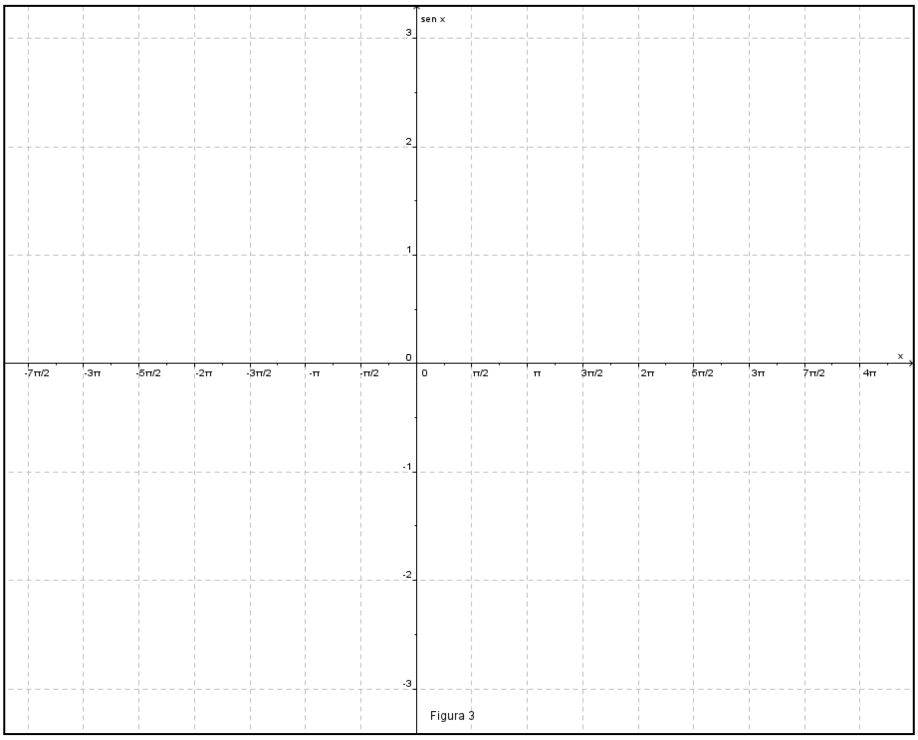
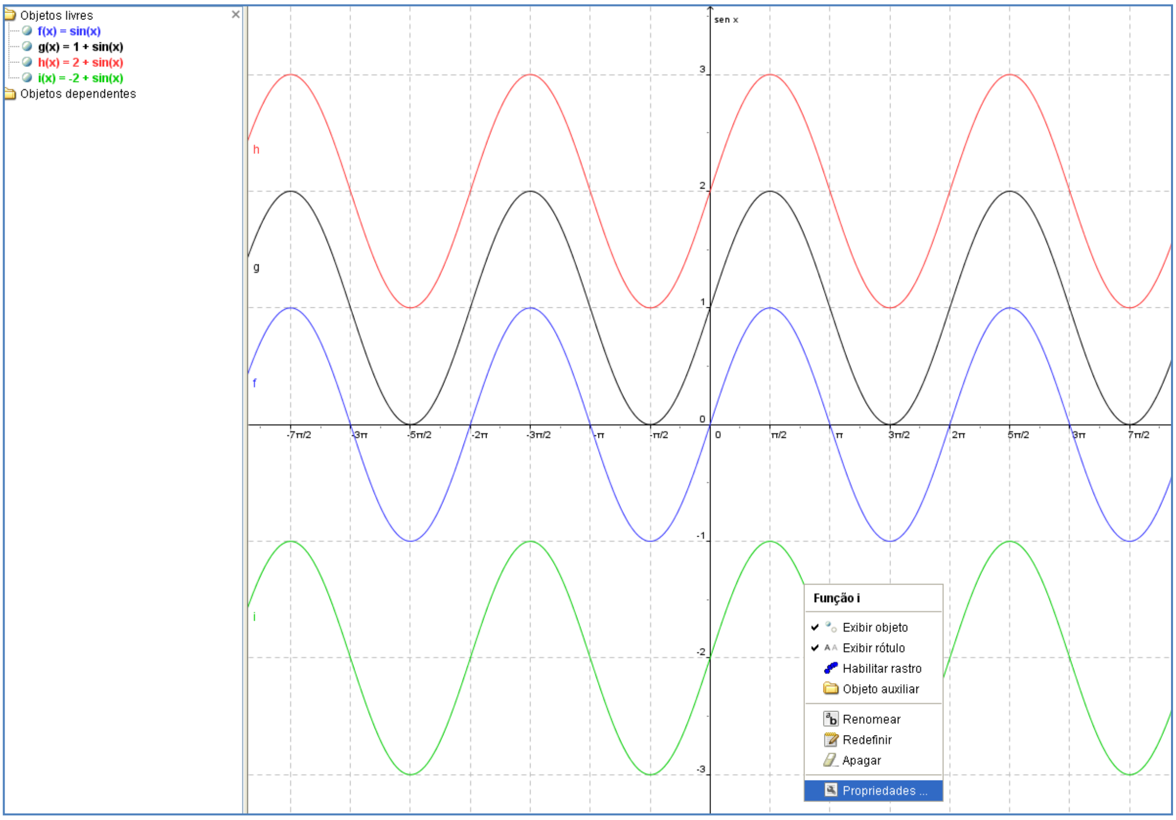


Figura 2

O que você observa comparando os gráficos da função referência f(x) = sen x com os gráficos das associadas?

O gráfico de cada uma das funções associadas é o gráfico da função f(x) = sen x transladado o número de unidades verticalmente para cima ou para baixo. O Domínio, a amplitude e o período das associadas são os mesmos da função f(x) = sen x. A cada limite (superior e inferior) do conjunto imagem é adicionado a constante k.

Assim a função g(x) = 1 + sen x, por exemplo, é o gráfico da função f(x) = sen x transladado 1 unidade verticalmente para cima. O conjunto imagem de f era [-1, 1] e para g(x) é de [0,2].

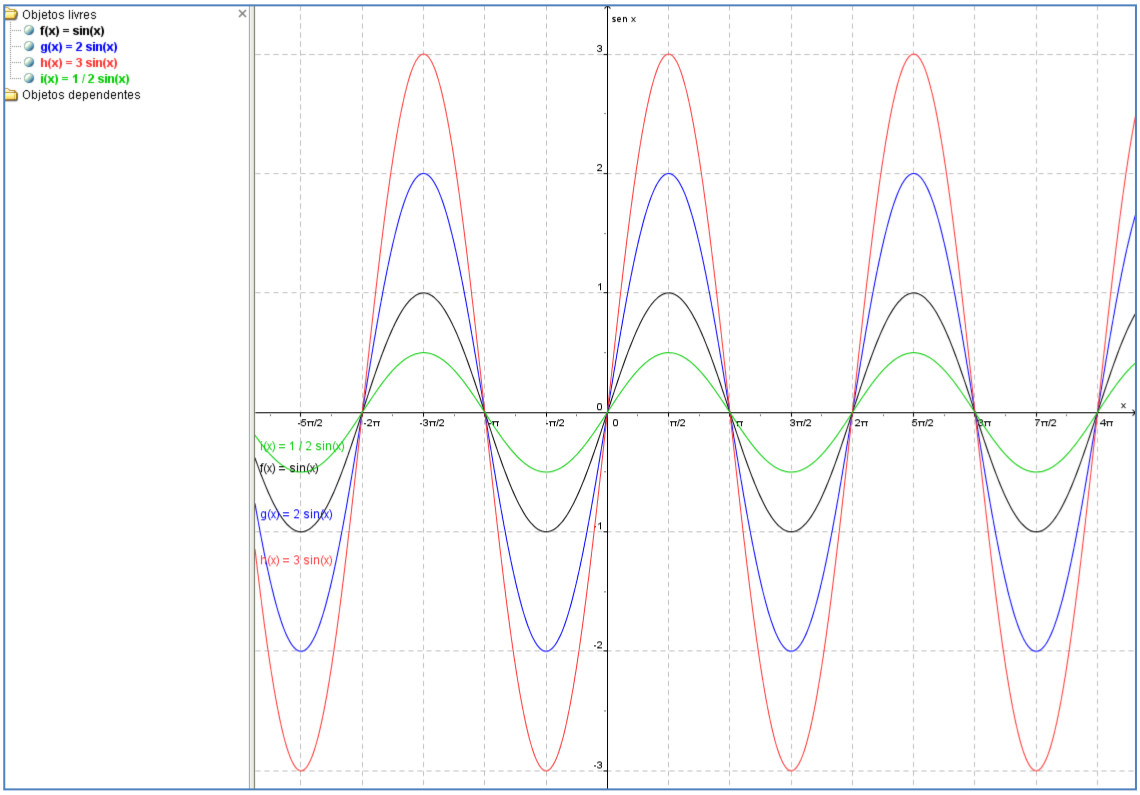


Gráficos exibidos no Geogebra item 1

Observação: As figuras 3,4, 5 e 6 são idênticas à Figura 2 da tarefa, para esta análise julgamos ser desnecessária tal reprodução.

2. Traçar os gráficos das funções no plano cartesiano dado na Figura 3 e completar a tabela (use cores diferentes para cada senóide):

Função	**Domínio**	**Período**	**Imagem**	**x = 0**	**x =** $\frac{\pi}{2}$	**X =** π	**x =** $\frac{3\pi}{2}$	**x =** 2π
f(x) = sen x	$\mathbb{R}$	2π	$[-1;1]$	0	1	0	-1	0
g(x) =2sen x	$\mathbb{R}$	2π	$[-2;2]$	0	2	0	-2	0
h(x) =3sen x	$\mathbb{R}$	2π	$[-3;3]$	0	3	0	-3	0
i(x) = $\frac{1}{2}$sen x	$\mathbb{R}$	2π	$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0



Gráficos exibidos no Geogebra item 2

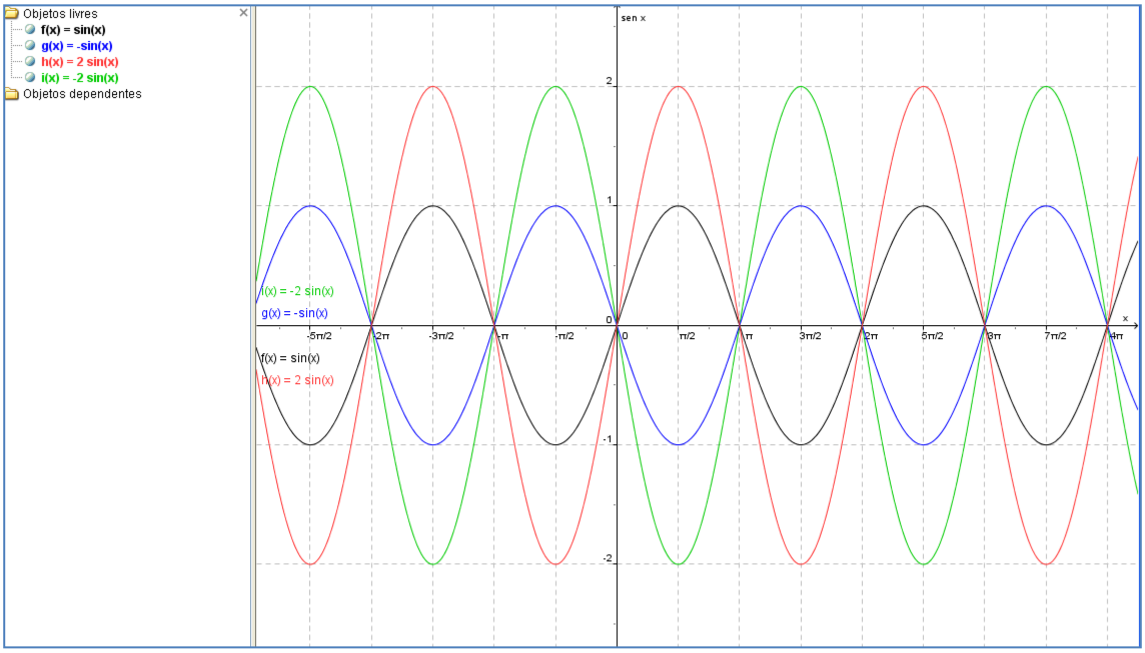
O que você observa comparando os gráficos da função referência f(x) = sen x com os gráficos das associadas?

Quando a função de referência f(x) = sen (x) é multiplicada por uma constante k (k. f(x)), o domínio e o período da associada é o mesmo de f. O gráfico da associada tem comportamento variado dependendo do valor e do sinal da constante. A cada limite (superior e inferior) do conjunto imagem é multiplicado pela constante k.

Por exemplo, a função h(x) =3 sen x, por exemplo, é o gráfico da função f(x) = sen x onde cada valor de f(x) é multiplicado por 3. Assim, a amplitude do gráfico de g é 3 unidades e o conjunto imagem [-3, 3].

3. Traçar os gráficos das funções no plano cartesiano dado na Figura 4 e completar a tabela (use cores diferentes para cada senóide):

Função	**Domínio**	**Período**	**Imagem**	**x = 0**	**x = $\frac{\pi}{2}$**	**X = π**	**x = $\frac{3\pi}{2}$**	**x = 2π**
f(x) = sen x	$\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$	0	1	0	-1	0
g(x) = - sen x	$\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$	0	-1	0	1	0
h(x) =2sen x	$\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -2 \leq y \leq 2\}$	0	2	0	-2	0
i(x) = -2sen x	$\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -2 \leq y \leq 2\}$	0	-2	0	2	0



Gráficos exibidos no Geogebra item 3

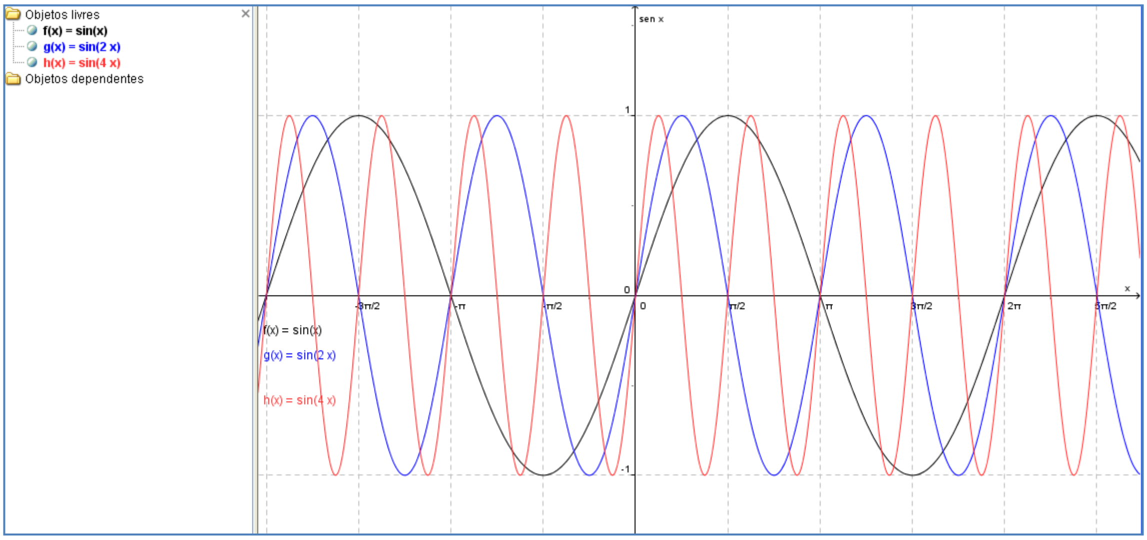
O que você observa comparando os gráficos da função referência f(x) = sen x com os gráficos das associadas?

Quando a função de referência f(x) = sen (x) é multiplicada por uma constante k (k. f(x)), o domínio e o período da associada são os mesmos de f. O gráfico da associada tem comportamento variado dependendo do valor e do sinal da constante. A cada limite (superior e inferior) do conjunto imagem da associada é o da função referência multiplicado pela constante k.

A associada, a função g(x) =-sen x, por exemplo, é o gráfico da função f(x) = sen x onde cada valor de f(x) é multiplicado por - 1. Assim, a amplitude e o conjunto imagem da função g são os mesmos da função f, e o gráfico de g é uma reflexão do gráfico da função f.

4. Traçar os gráficos das funções no plano cartesiano dado na Figura 5 e completar a tabela (use cores diferentes para cada senóide):

Função	**Domínio**	**Período**	**Imagem**	**x = 0**	**x =** $\frac{\pi}{4}$	**x =** $\frac{\pi}{2}$	**X =** $\frac{3\pi}{4}$	**X =** π	**x =** $\frac{5\pi}{4}$	**x =** $\frac{3\pi}{2}$	**x =** 2π
f(x) = sen x	$\mathbb{R}$	2π	$[-1;1]$	0	0,71	1	0,71	0	-071	-1	0
g(x) = sen2x	$\mathbb{R}$	π	$[-1;1]$	0	1	0	-1	0	1	0	0
h(x) =sen4x	$\mathbb{R}$	$\frac{\pi}{2}$	$[-1;1]$	0	0	0	0	0	0	0	0



Gráficos exibidos no Geogebra item 4

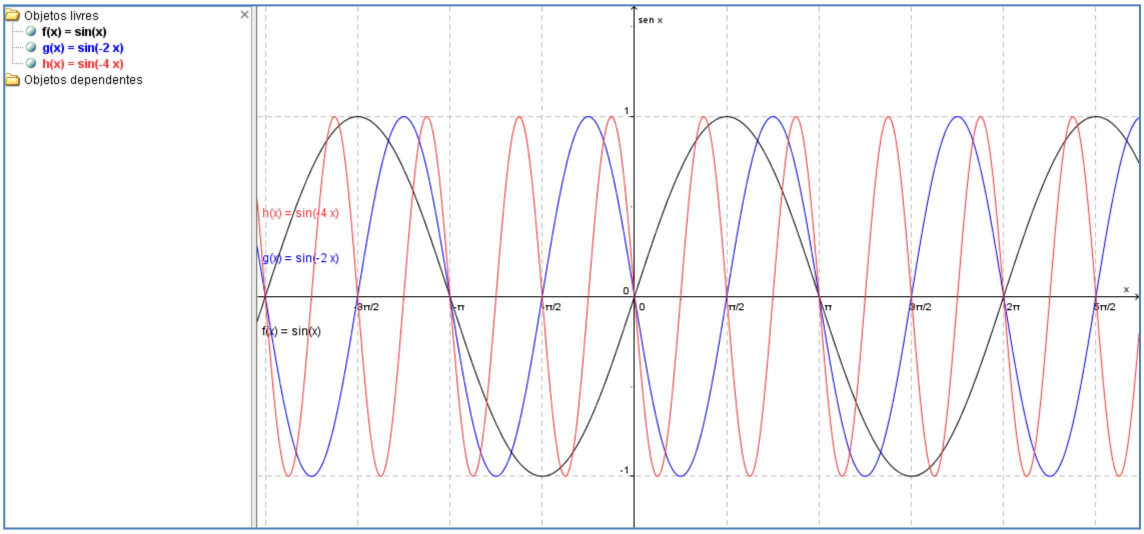
O que você observa comparando os gráficos da função referência f(x) = sen x com os gráficos das associadas?

Quando a variável da função de referência f(x) = sen (x) é multiplicada por uma constante k (f(k.x)), o domínio, a amplitude e o conjunto imagem da associada é o mesmo de f. O período da função associada será o período a função f multiplicada pelo inverso da constante. Assim, por exemplo, na função f(x) = sen x, o período é 2π, já a associada g(x) = sen 2x, o período é o período de f multiplicado por $\frac{1}{2}$, ou seja, será π.

O período da associada h(x) = sen 4x será o período da função de referência f multiplicado por $\frac{1}{4}$, ou seja, será $2\pi.\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$.

5. Traçar os gráficos das funções no plano cartesiano dado na Figura 6 e completar a tabela (use cores diferentes para cada senóide):

Função	**Domínio**	**Período**	**Imagem**	**x = 0**	**x = $\frac{\pi}{4}$**	**x = $\frac{\pi}{2}$**	**X = $\frac{3\pi}{4}$**	**X = π**	**x = $\frac{5\pi}{4}$**	**x = $\frac{3\pi}{2}$**	**x = 2π**
f(x) = sen x	$\mathbb{R}$	2π	$[-1; 1]$	0	0,71	1	0,71	0	-071	-1	0
g(x) = sen(-2x)	$\mathbb{R}$	π	$[-1; 1]$	0	-1	0	1	0	-1	0	0
h(x) =sen(-4x)	$\mathbb{R}$	$\frac{\pi}{2}$	$[-1; 1]$	0	0	0	0	0	0	0	0



Gráficos exibidos no Geogebra item 5

O que você observa comparando os gráficos da função referência f(x) = sen x com os gráficos das associadas?

Quando a variável da função de referência f(x) = sen (x) é multiplicada por uma constante k (f(k.x)), o domínio, a amplitude e o conjunto imagem da associada é o mesmo de f. O período da função associada será o período a função f multiplicada pelo inverso da constante. Assim, por exemplo, na função f(x) = sen x, o período é 2π, já a associada g(x) = sen -2x, o período é o período de f multiplicado por $\frac{1}{2}$, ou seja, será π e o gráfico de g é uma reflexão do gráfico da função sen 2x.

6. Responda:

Ao adicionarmos à função sen x uma constante o que se altera é o conjunto imagem.

Ao multiplicarmos a função sen x por uma constante o que se altera é o conjunto imagem.

Ao multiplicarmos a variável x da função sen x por uma constante o que se altera é período.

Ao multiplicarmos a função sen x por uma constante negativa o que se altera é o conjunto imagem.

Ao multiplicarmos a variável x da função sen x por uma constante negativa o que se altera é o período e o conjunto imagem.

7. Relacione a função à sua representação gráfica:

A = sen x

B = sen 2x

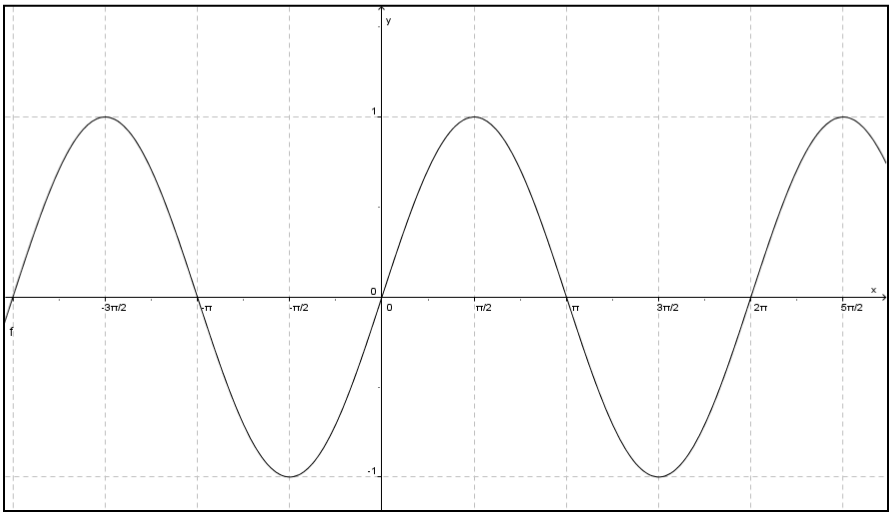
C = 2sen x

D = -1 sen x

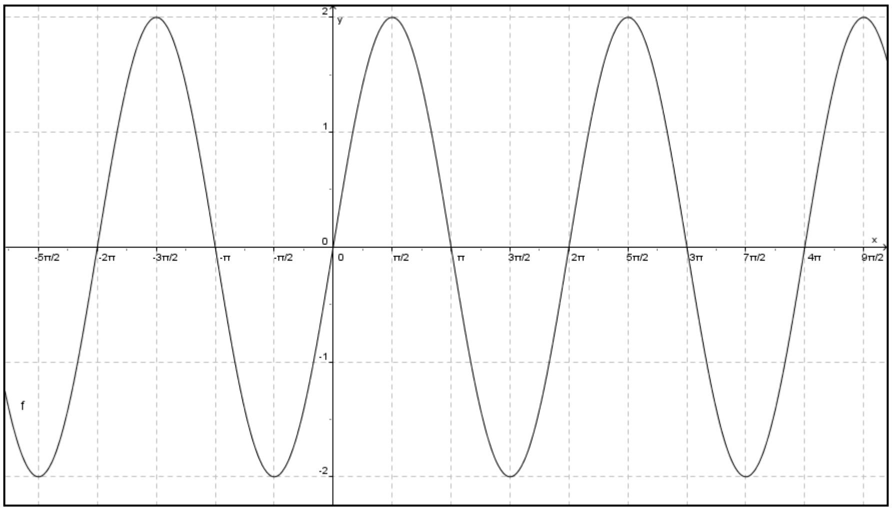
E = 2 + sen2x

F = sen $\frac{x}{2}$

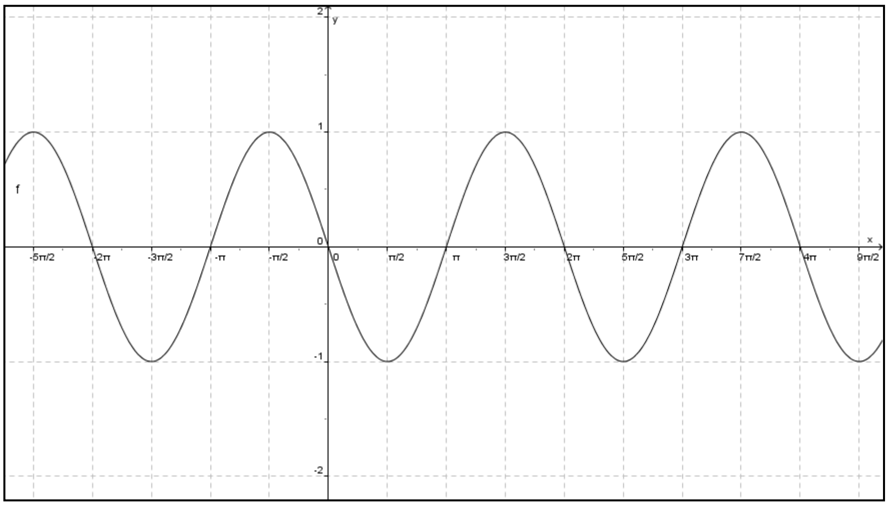
G = 2 + sen x



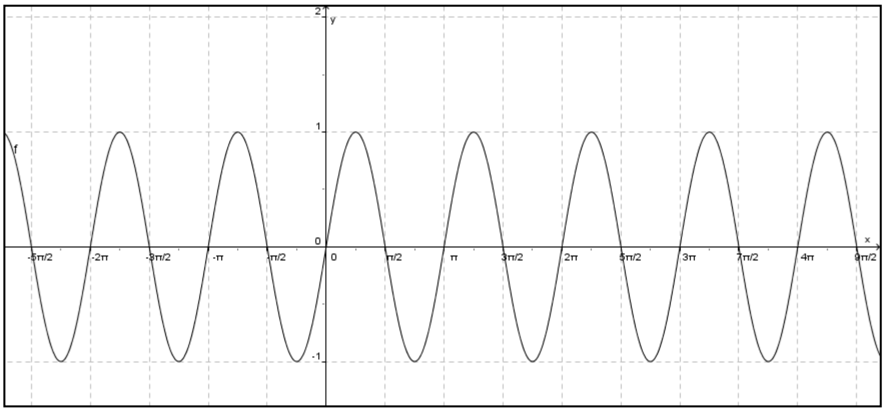
C = 2sen x



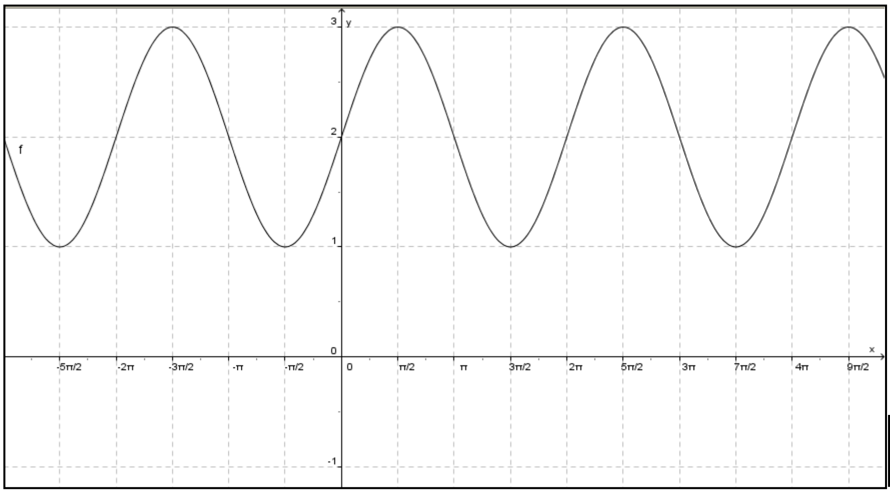
A = sen x



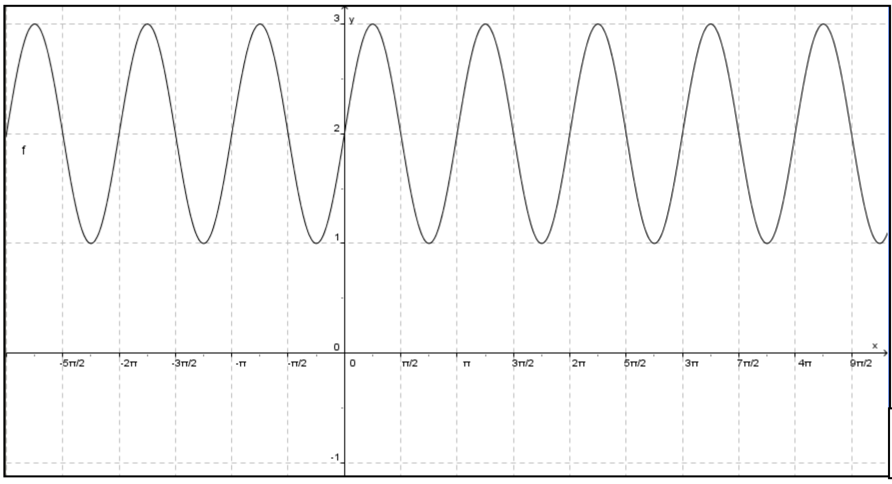
D = -1sen x



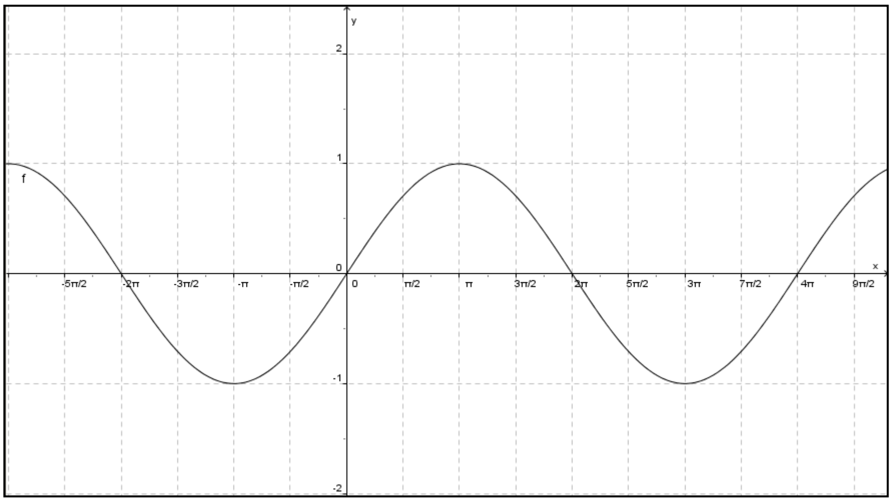
B = sen 2x



G = 2+ sen x



E = 2 + sen2x



F = sen $\frac{x}{2}$

Atividade VI – Estudo da função cosseno

Tarefa I

Objetivo: Observar o comportamento do gráfico da função cosseno x com o de suas associadas.

1. Complete a tabela 1: O cosseno é uma **função trigonométrica**. Logo, você deve traçar o gráfico que corresponda aos pontos da função y = cos x, usando a figura

X rad	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π
f(x) = cos(x)	1	**0**	**-1**	**0**	**1**	0	-1	0	1	0	-1	0	1

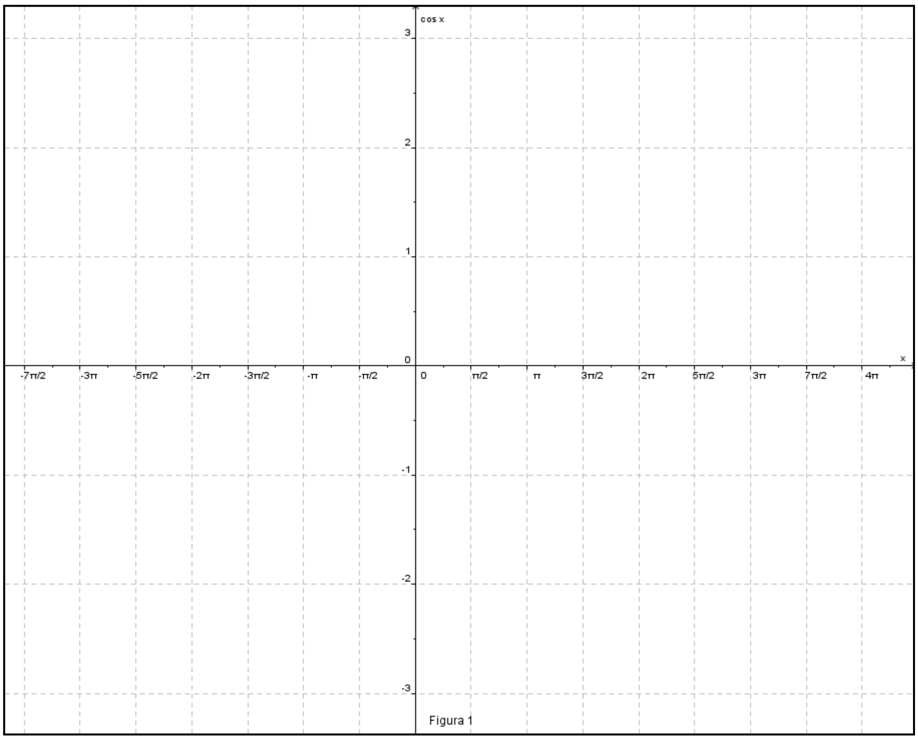


Figura 1

2. Responda as questões utilizando o gráfico da função y = cos x da figura 1 para responder.

   Qual é o domínio da função cos x?

   O Domínio de f(x) = cos x é o conjunto ℝ.

   a) Qual é o conjunto imagem da função cos x?

      $Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$.

   b) Dizemos que a função cos x é uma função periódica. Explique por que ela recebe esta definição e dê um exemplo a partir do gráfico da função cos x.

      Periódica, pois se repete a cada 2π.

3. Responda, seja x o arco em radianos: (complete com + ou -; aumenta ou diminui):

   a) Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o sinal de cos x é sempre + e à medida que x aumenta o cos x diminui.

b) Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, o sinal de cos x é sempre - e à medida que x aumenta o cos x diminui.

c) Se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, o sinal de cos x é sempre - e à medida que x aumenta o cos x aumenta.

d) Se $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, o sinal de cos x é sempre + e à medida que x aumenta o cos x aumenta.

e) Qual o valor máximo da função cos x? E qual o valor mínimo da função cos x?
O máximo é 1 e o valor mínimo – 1.

f) Podemos afirmar que a função cos x é uma função limitada? Justifique.
Sim, pois varia de -1 a 1.

g) Você percebe alguma regularidade nos valores do cosseno?
Sim se repete a cada 2π. Período.

4. Complete a tabela:

cos x	**sinal**	**crescente/decrescente**
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+	Decrescente
$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	-	Decrescente
$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	-	Crescente
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	+	Crescente

Tarefa II

Objetivo: Observar o comportamento do gráfico da função cosseno x com o de suas associadas

1. Traçar os gráficos das funções no plano cartesiano dado na Figura 2 e completar a tabela (use cores diferentes para cada cossenóide). Observação: no software você deve usar **f(x) =cos(x):**

Função	Domínio	Período	Imagem	x = 0	x = $\frac{\pi}{2}$	X = π	x = $\frac{3\pi}{2}$	x = 2π
f(x) = cos x	$\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$	1	0	-1	0	1
g(x) = 1 +cos x	$\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / 0 \leq y \leq 2\}$	2	1	0	1	2
h(x) = - 2 + cos x	$\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -3 \leq y \leq -1\}$	-1	-2	-3	-2	-1

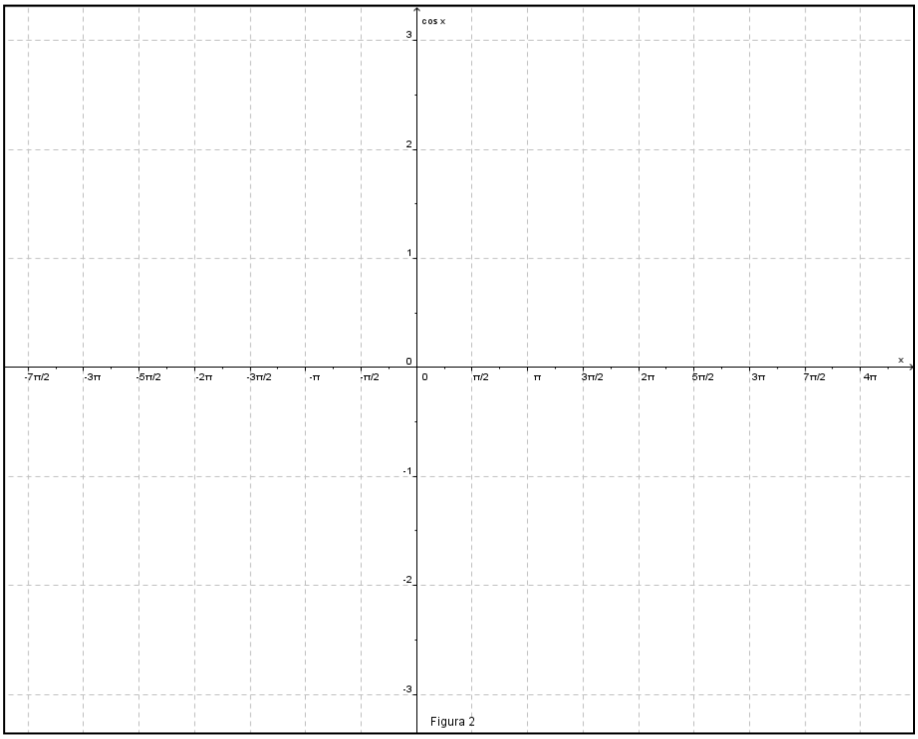
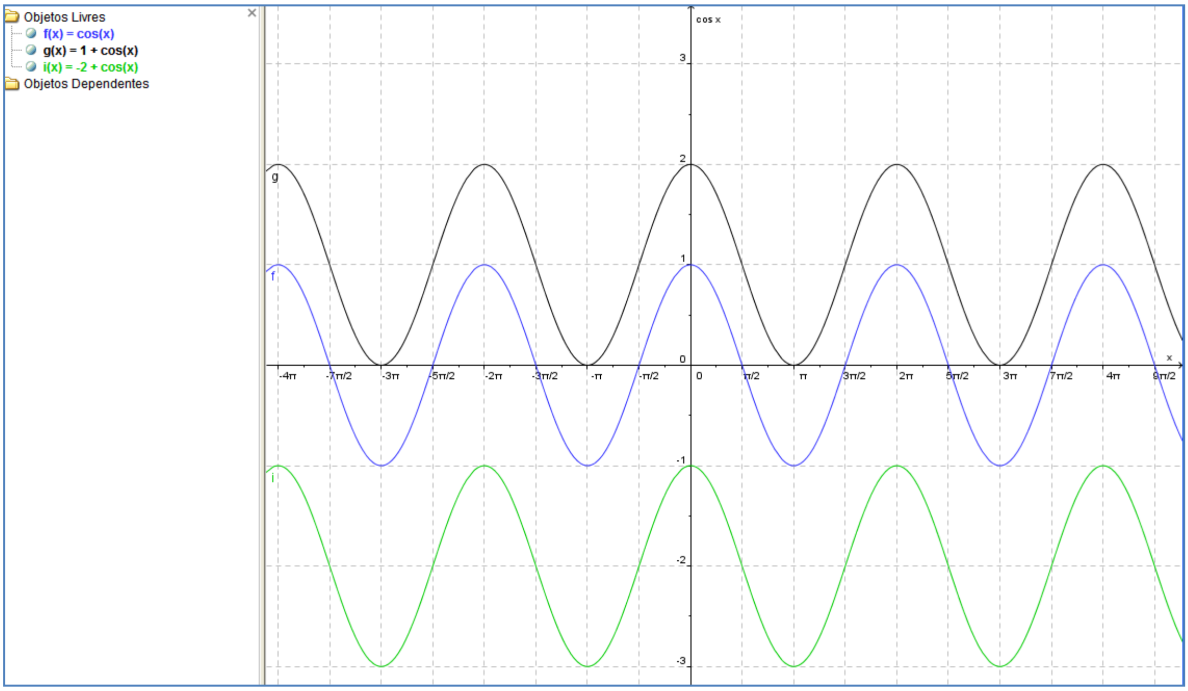


Figura 2

O que você observa comparando os gráficos da função referência f(x) = cos x com os gráficos das associadas?

O gráfico de cada uma das funções associadas é o gráfico da função f(x) = cos x transladado o número de unidades verticalmente para cima ou para baixo. O Domínio, a amplitude e o período das associadas são os mesmos da função f(x) = cos x. A cada limite (superior e inferior) do conjunto imagem é adicionado a constante k. Assim a função g(x) = 1 + cos x, por exemplo, é o gráfico da função f(x) = cos x transladado 1 unidade verticalmente para cima. O conjunto imagem de f era [-1, 1] e para g(x) é de [0,2].



Gráficos exibidos no Geogebra item 1

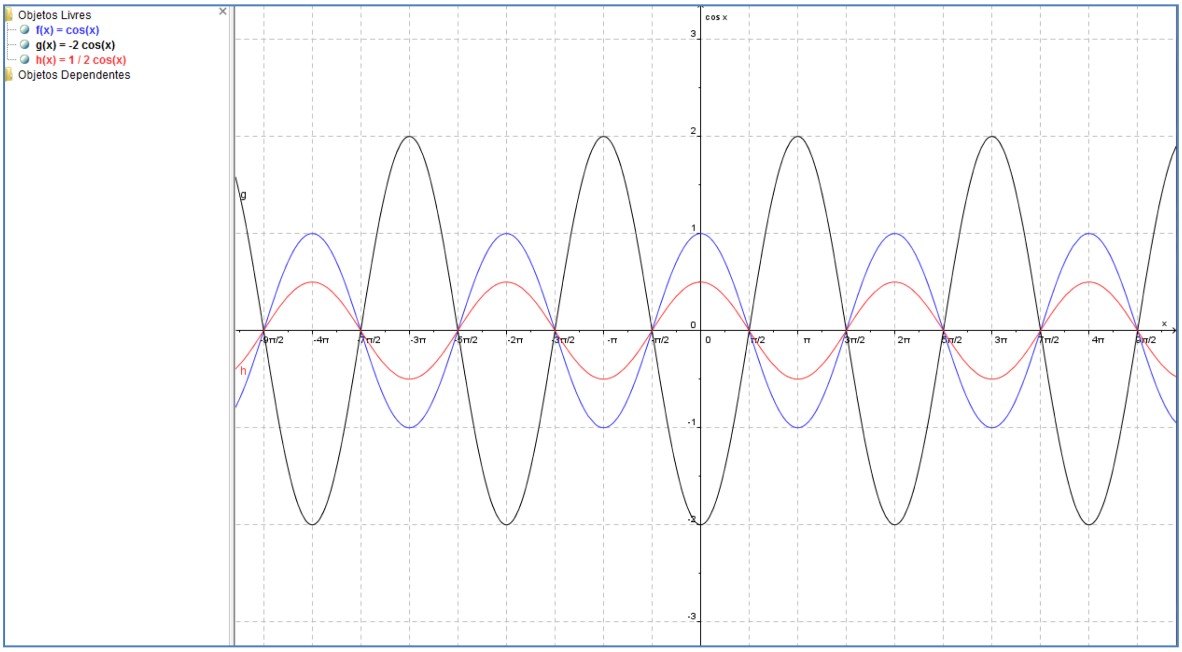
Observação: As figuras 3 e 4 são idênticas à Figura 2, para esta análise julgamos ser desnecessária tal reprodução.

2. Traçar os gráficos das funções no plano cartesiano dado na figura 3 e completar a tabela (use cores diferentes para cada cossenóide).

Função	**Domínio**	**Período**	**Imagem**	**x = 0**	**x = $\frac{\pi}{2}$**	**X = π**	**x = $\frac{3\pi}{2}$**	**x = 2π**
f(x) = cos x	$\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$	1	0	-1	0	1
g(x) = -2cos x	$\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -2 \leq y \leq 2\}$	-2	0	2	0	-2
h(x) = 1/2cos x	$\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -0{,}5 \leq y \leq 0{,}5\}$	0,5	0	-0,5	0	0,5

O que você observa comparando os gráficos com o gráfico da função cosseno x?

Quando a função de referência f(x) = cos (x) é multiplicada por uma constante k (k. f(x)), o domínio e o período da associada são os mesmos de f. O gráfico da associada tem comportamento variado dependendo do valor e do sinal da constante. A cada limite (superior e inferior) do conjunto imagem da associada é o da função referência multiplicado pela constante k.



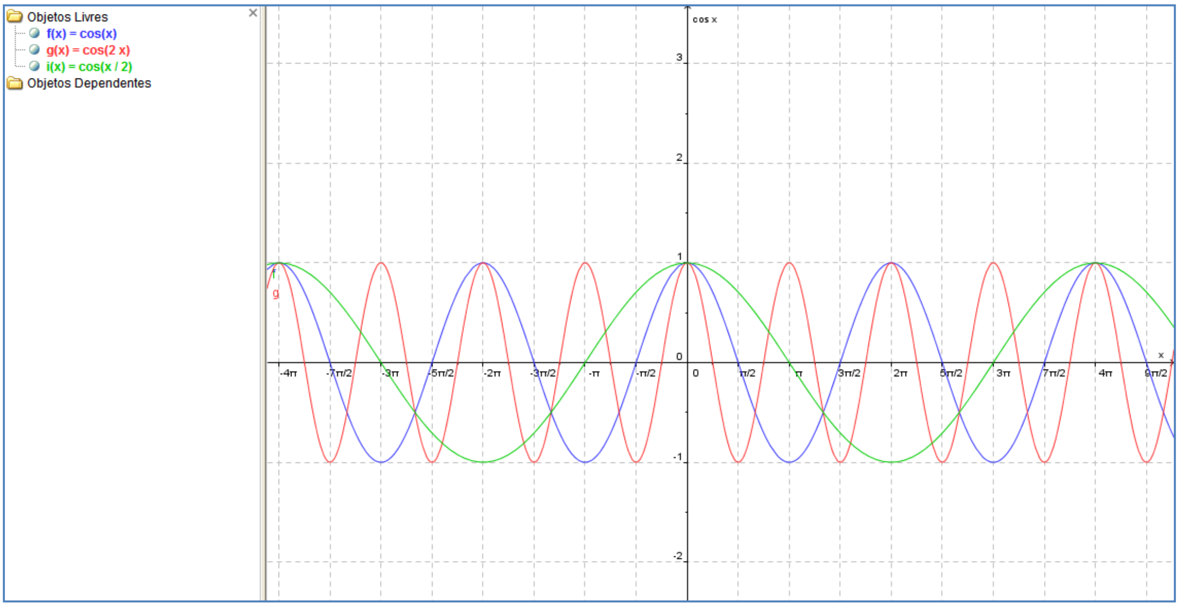
Gráficos exibidos no Geogebra item 2

3. Traçar os gráficos das funções no plano cartesiano dado na figura 4 e completar a tabela (use cores diferentes para cada cossenóide).:

Função	Domínio	Período	Imagem	x =	$x = \frac{\pi}{2}$	x=π	$x = \frac{3\pi}{2}$	X=2π	$x = \frac{5\pi}{2}$	$x = 3\pi$	$x = \frac{7\pi}{2}$	$x=4\pi$
f(x) = cos x	$\mathbb{R}$	2π	$[-1;1]$	1	**0**	**-1**	**0**	**1**	0	-1	0	1
g(x) = cos2x	$\mathbb{R}$	π	$[-1;1]$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
$h(x) = \cos\frac{x}{2}$	$\mathbb{R}$	4π	$[-1;1]$	1	0,7	0	-0,7	-1	-0,7	0	0,7	1

O que você observa comparando os gráficos com o gráfico da função cosseno x?

Quando a variável da função de referência f(x) = cos (x) é multiplicada por uma constante k f(k.x)), o domínio, a amplitude e o conjunto imagem da associada é o mesmo de f. O período da função associada será o período a função f multiplicada pelo inverso da constante. Assim, por exemplo, na função f(x) = cos x, o período é 2π, já a associada g(x) = cos 2x, o período é o período de f multiplicado por $\frac{1}{2}$, ou seja, será π.



Gráficos exibidos no Geogebra item 3

4. Responda:

Ao adicionarmos à função cosseno x uma constante o que se altera é o conjunto imagem.

Ao multiplicarmos a função cosseno x por uma constante o que se altera é o conjunto imagem.

Ao multiplicarmos a variável x da função cosseno x por uma constante o que se altera é o período.

5. Relacione a função à sua representação gráfica:

A = cos 2x

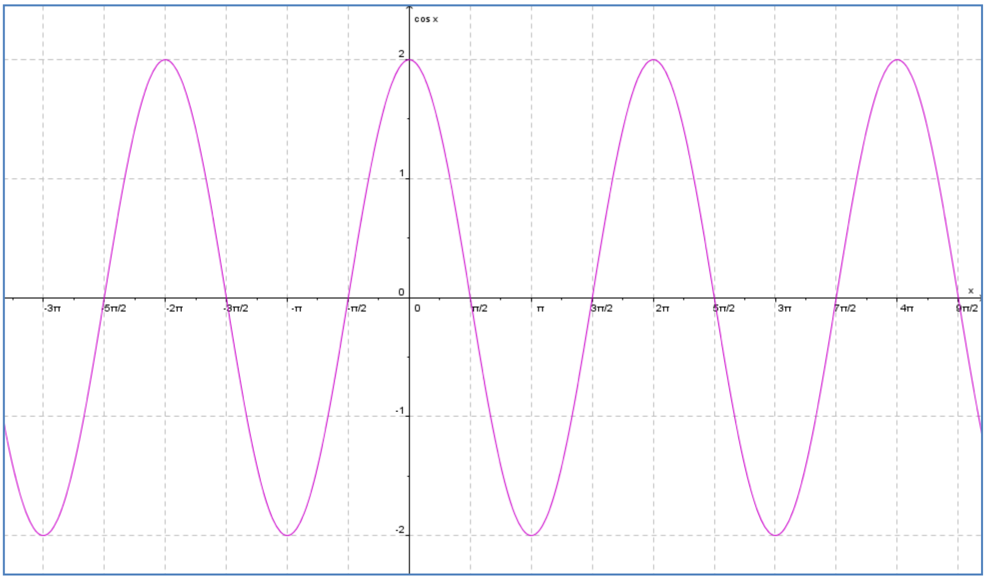
B = 2cos x

C = -1+ cos x

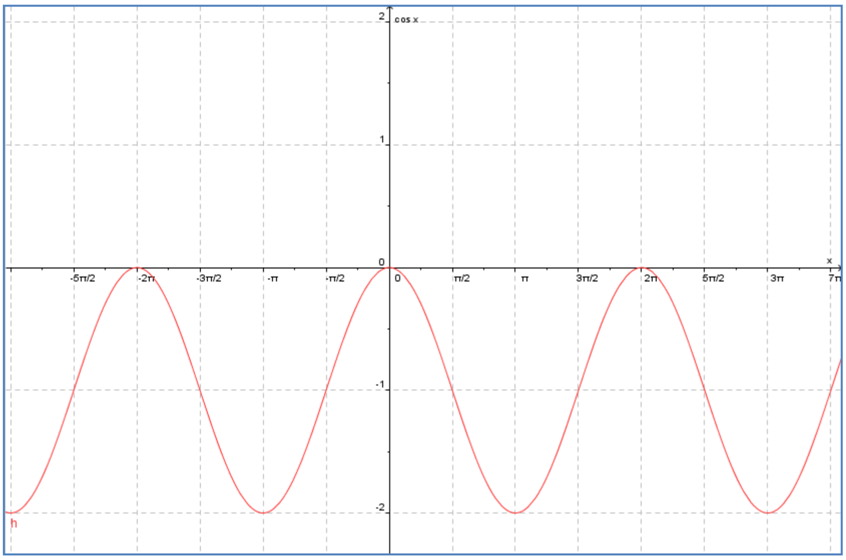
D = 2 + cos 2x

E = cos $\frac{\pi}{2}$

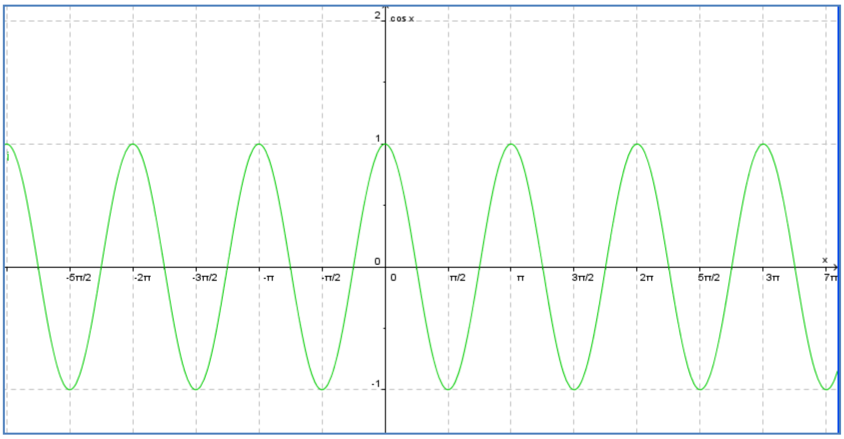
F = 2 + cos x



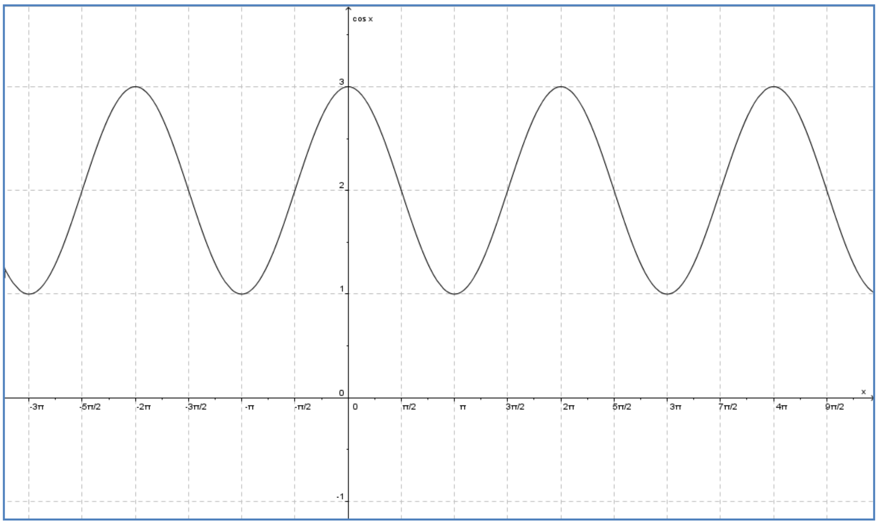
B = 2cos x



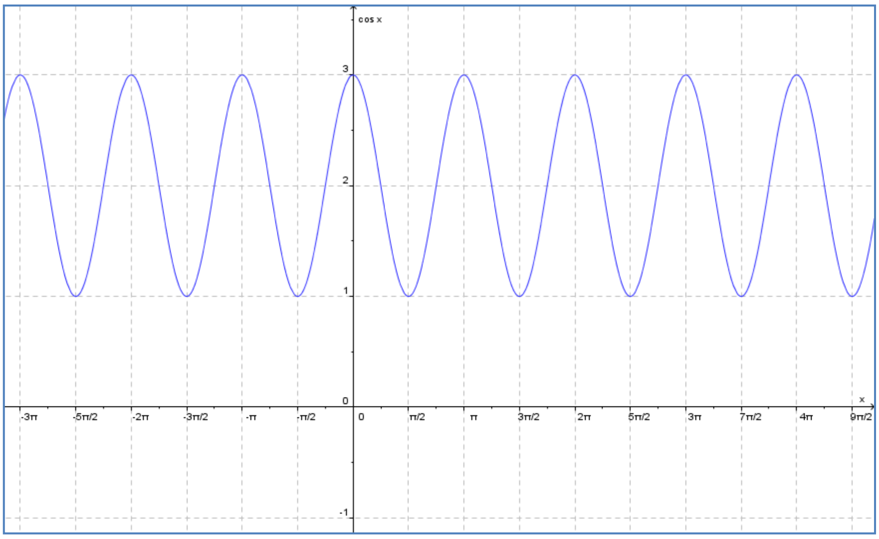
C= -1 + cos x



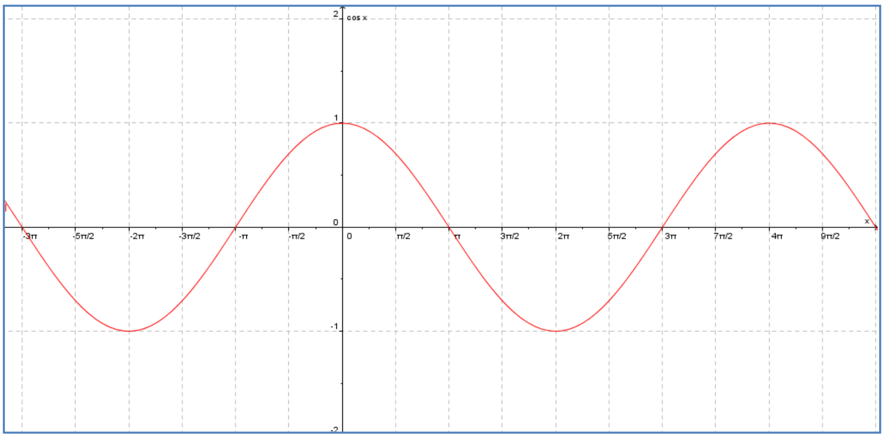
A= cos2 x



F= 2 +cos x



D= 2 +cos 2x



E = cos $\frac{x}{2}$

Atividade VII - Estudo da função tangente

Tarefa I

Objetivo específico: Compreender que a função tangente não é limitada e que não se define nos arcos $\alpha = k.\frac{\pi}{2}, k \in Z$.

1. Traçar os gráficos das funções no plano cartesiano dado na Figura 1 e completar a tabela.

Observação: no software Geogebra você deve usar a relação $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$ e digitar **f(x) =sin(x) / cos(x):**

Função	Domínio	Período	Imagem	x = 0	x = $\frac{\pi}{2}$	X = π	x = $\frac{3\pi}{2}$	x = 2π
f(x) = tg x	$D = \{x \in \Re / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	π	$Im = \Re$	1	$\nexists$	0	$\nexists$	0
g(x) = 1 + tg x	$D = \{x \in \Re / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	π	$Im = \Re$	1	$\nexists$	0	$\nexists$	0
h(x) = - tg x	$D = \{x \in \Re / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	π	$Im = \Re$	1	$\nexists$	0	$\nexists$	0
i(x) = 1/2 tg x	$D = \{x \in \Re / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	π	$Im = \Re$	1	$\nexists$	0	$\nexists$	0

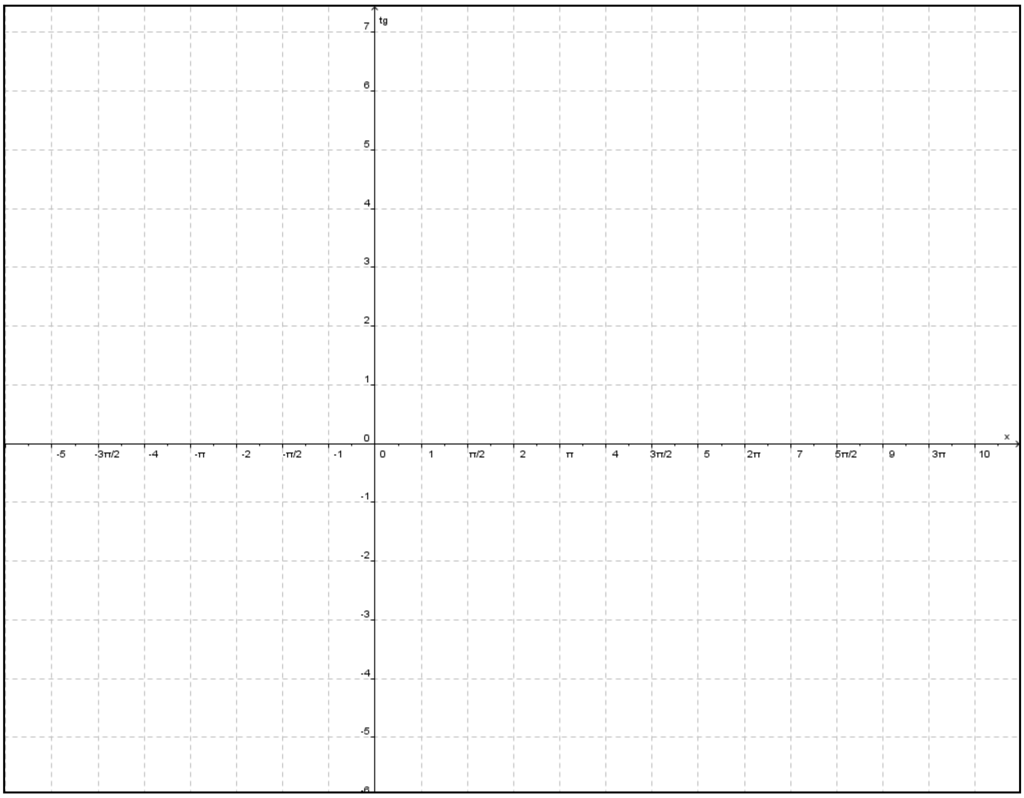


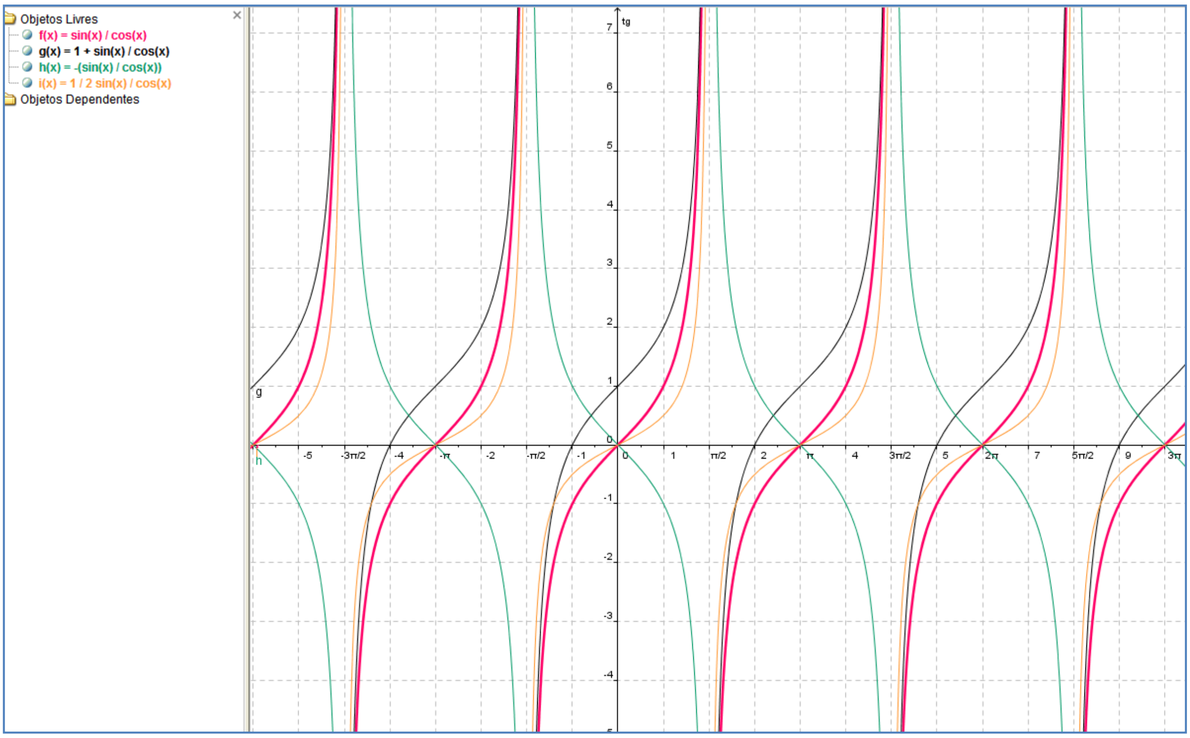
Figura 1

O que você observa comparando os gráficos da função referência f(x) =tg x com os gráficos das associadas?

O gráfico da função g(x) é o gráfico da função f(x) transladado 1 unidade verticalmente para cima.

O gráfico da função h(x) é uma reflexão do gráfico da função f(x) em relação ao eixo y.

O Domínio, a amplitude e o período das associadas são os mesmos da função f(x).



Gráficos exibidos no Geogebra item 1

2. Utilize os gráficos da função tangente da figura 1 para responder

   a) Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o sinal da tg x é sempre + e à medida que x aumenta a tg x aumenta.

   b) Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, o sinal da tg x é sempre - e à medida que x aumenta a tg x aumenta.

   c) Se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, o sinal da tg x é sempre + e à medida que x aumenta a tg x aumenta.

d) Se $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, o sinal da tg x é sempre - e à medida que x aumenta a tg x aumenta.

e) Qual o valor máximo da função tangente? E qual o valor mínimo da função tangente?

Não é possível definir.

f) Podemos afirmar que a função tangente é uma função limitada? Justifique.

A função tangente não é limitada, pois quando o ângulo se aproxima de $\frac{\pi}{2} + k\pi$,($k \in \mathbb{Z}$) a função cresce (ou decresce) infinitamente.

g) Podemos afirmar que a função tangente é uma função periódica? Justifique.

A função é periódica e seu período é π .

Atividade VIII - Estudo das equações e inequações trigonométricas

Tarefa I **Objetivo Específico:** resolver situações problema com o emprego das funções trigonométricas.

Uma equação é denominada de equação trigonométrica quando há uma igualdade contendo uma incógnita submetida a uma função trigonométrica. Veja os exemplos:

a) Quais os valores de x que satisfazem a expressão $\mathrm{sen}^2\mathrm{x} = 1$?

$sen^2\mathrm{x} = 1 \Rightarrow \mathrm{sen\ x} = \pm 1$ $\qquad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\cos\alpha = 1$?

$cos\alpha = 1$ então $\alpha = 2k\pi$ $\qquad S = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

c) Lembrando-se de racionalização de denominadores:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

d) Usando a tabela dos ângulos notáveis que foi construída no estudo das razões trigonométricas:

$\boldsymbol{\alpha}$	**30º**	**45º**	**60º**
$\boldsymbol{sen\ \alpha}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\boldsymbol{cos\ \alpha}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\boldsymbol{tg\ \alpha}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

1. Quais os valores de α que satisfazem as expressões?

a) $cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\ e\ cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\ e\ cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ou\ \alpha = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $\text{tg}\alpha = -1$?

$tg\alpha = -1 \ e \ tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}$ ou

$tg\alpha = -1 \ e \ tg\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$

$S = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ ou \ \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $sen\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$?

$sen\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ e \ sen - \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}$ ou

$sen\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} e \ sen\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4}$

$S = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ ou \ \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$cos\alpha = -\frac{1}{2} \ e \ cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$ ou

$cos\alpha = -\frac{1}{2} \ e \ cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3}$

$S = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ ou \ \alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $tg\alpha = \sqrt{3}$?

$tg\alpha = \sqrt{3} \ e \ tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ ou

$tg\alpha = \sqrt{3} \ e \ tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3}$

$S = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi \ ou \ \alpha = \frac{4\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $sen\alpha = \frac{1}{2}$?

$sen\alpha = \frac{1}{2} e \ sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

$sen\alpha = \frac{1}{2} \ e \ sen\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6}$

$S = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ou \ \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$

g) $cos\alpha = 0$?

$cos\alpha = 0 \ e \ \ cos\frac{\pi}{2} = 0 \ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

$S = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}\right\}$

h) $tg\alpha = 0$?

$tg\alpha = 0 \ e \ tg\pi = 0 \ \ \Rightarrow \alpha = \pi$

$S = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

i) $sen\alpha = -1$?

$sen\alpha = -1 \ \ e \ \ sen\frac{3\pi}{2} = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}$

$S = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. Resolva o valor da expressão

   a) y =$cos\pi . cos0 + 2sen\frac{\pi}{2}$?

   y= -1 . 1 + 2.1 $\Rightarrow y = -1 + 2 \ \Rightarrow y = 1$

   b) $y = 3cos\pi : sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4cos\frac{\pi}{3}$?

   y= 3 .(-1):(-1) +4.0,5 $\Rightarrow y = 3 + 2 \ \Rightarrow y = 5$

   c) $y = 3\text{tg}\frac{\pi}{3} + 2\text{tg}\frac{\pi}{4}$?

   y= $3.\sqrt{3} + 2.1 \ \ \Rightarrow y = 3\sqrt{3} + 2$

3. A afirmação sen2x = 2 sen x é verdadeira ou falsa? Justifique.

   A afirmação sen2 x = 2sen x é verdadeira apenas quando $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   Se k=0, temos que sen2x=sen $2.0.\pi$ =0 e 2senx=2sen $0.\pi$ =0, portanto sen2x = 2 sen x é verdadeira.

   Se k=1, temos que sen2x=sen$2.1.\pi$ =0 e 2senx=2sen $1.\pi$ =0, portanto sen2x = 2 sen x é verdadeira.

   Para $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. a afirmação é falsa.

Exemplo: se x=$45°$ ⇒ sen2x=sen $2.45°$ =1 e 2senx=2sen$45°$ =$2.\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 1{,}41$, portanto sen2x = 2 sen x é falsa.

4. Resolva usando as relações fundamentais: $\mathrm{sen}^2\mathrm{x} + \cos^2\mathrm{x} = 1$, $\mathrm{tgx} = \frac{\mathrm{sen\,x}}{\cos \mathrm{x}}$,

   $\mathrm{sen}\alpha = \cos\,(180° - \alpha)$

   Seja $senx = \frac{1}{3}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, calcule o $cosx$ e tgx

   Substituindo $senx = \frac{1}{3}$, na relação $sen^2x + \ cos^2x = 1$ vem:

   $sen^2x + \ cos^2x = 1$

   $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ cos^2x = 1 \ \Rightarrow cos^2x = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \ cos^2x = \frac{8}{9} \ \Rightarrow cosx = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Sendo x do 1º quadrante, $cosx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

   Substituindo $senx = \frac{1}{3}\ e\ cosx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ na relação $tgx = \frac{sen\,x}{\cos x}$, vem:

   $tgx = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \Rightarrow tgx = \frac{1}{3} : \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow tgx = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

   Resposta: $cosx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e $tgx = \frac{\sqrt{2}}{4}$

5. Seja $\mathrm{y} = 3\cos\alpha + 1$, qual o valor máximo de y? E qual o valor mínimo?

   O maior valor do $cos\alpha = 1$, logo $y = 3cos\alpha + 1 \Rightarrow y = 3.1 + 1 \Rightarrow y = 4$ maior valor de y. O menor valor do $cos\alpha = -1$ logo $y = 3cos\alpha + 1 \Rightarrow y = 3.(-1) + 1 \Rightarrow y = -2$ menor valor de y.

6. Um corpo oscila, executando um M.H.S., cujo deslocamento em função do tempo é dado por: $y = 6\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$. Passados 2 segundos quanto será o deslocamento do corpo em metros?[4]

   Substituindo t =2s na expressão $y = 6\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ vem:

   $$y = 6\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow y = 6\cos\left(3\pi.2 + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y = 6\cos\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

   Como 6π corresponde a três voltas no ciclo trigonométrico; portanto $6\pi + \frac{\pi}{3}$ é côngruo a $\frac{\pi}{3}$ e ambos têm o mesmo cosseno.

[4]Adaptado Nielce Meneguelo Lobo Costa (1997)

Logo $cos6\pi + \frac{\pi}{3} = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ Substituindo vem: $y = 6.\frac{1}{3} = 3$

Portanto, passados 2 segundos o deslocamento do corpo será 3 metros.

7. A pressão sanguínea pode ser calculada pela expressão P(t) = 100 – 20 cos$\left(\frac{8\pi t}{3}\right)$. Qual é a pressão sanguínea no instante 4 segundos?[5]

Substituindo t =4s na expressão $P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right)$ vem:

$$P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right) \Longrightarrow P(4) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi.4}{3}\right) \Longrightarrow P(4)$$
$$= 100 - 20\cos\left(\frac{32\pi}{3}\right)$$

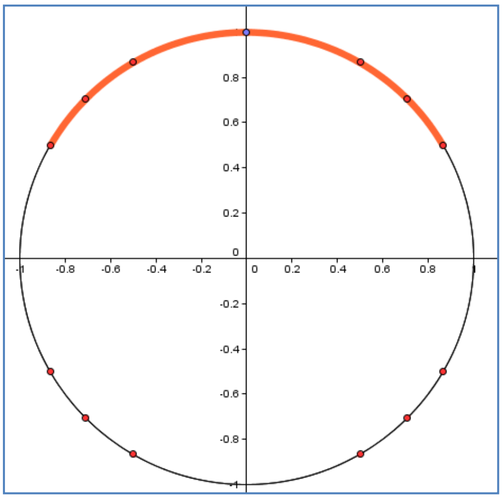
Como $\frac{32\pi}{3} = \frac{30\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 10\pi + \frac{2\pi}{3}$ corresponde a 5 voltas no ciclo trigonométrico acrescidas de $\frac{2\pi}{3}$; portanto $\frac{32\pi}{3}$ é côngruo a $\frac{2\pi}{3}$ e ambos têm o mesmo cosseno.

Logo $cos\frac{32\pi}{3} = cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ Substituindo vem: $P(4) = 100 - 20\,.\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ $P(4) = 100 + 10 = 110.$

Portanto, passados 4 segundos a pressão sanguínea será 110 mmHg..

Tarefa II Objetivo Específico: Inequações com funções trigonométricas

Para resolver a inequação $sen\alpha \geq \frac{1}{2}$, para, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, em $\mathbb{R}$ é conveniente utilizar a circunferência trigonométrica para marcar os arcos da circunferência que têm $sen\alpha \geq \frac{1}{2}$. Veja como:



$S = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{6}\right\}$

5 Adaptado Caderno do Aluno 2 EM SEE(2009).

a) Resolva a inequação $cos\alpha < \frac{1}{2}$, para, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

$S = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{3}\right\}$

b) Resolva a inequação $sen\alpha \geq -\frac{1}{2}$, para, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

$$S = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \alpha \leq \frac{7\pi}{6} \ ou \ \frac{11\pi}{6} \leq \alpha \leq 2\pi\right\}$$

c) Resolva a inequação $cos\alpha \geq 0$, para, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

$S = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \ ou \ \frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi\right\}$

d) Resolva a inequação $sen\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$, para, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

$S = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \ ou \ \frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi\right\}$

CAPÍTULO 3 - THA – ANÁLISE DO DESENVOLVIMENTO EM SALA DE AULA

Introdução

Na segunda quinzena do mês de fevereiro foi realizada a primeira reunião com os professores parceiros para apresentação do projeto de pesquisa. Após entrevista inicial com os dois professores, apresentei a THA em dois encontros. No mês de março os professores seguiram recomendação da pesquisadora e utilizaram a THA sugerida de razões trigonométricas nos ângulos agudos em razão de não terem terminado a parte do currículo escolar que antecede o ensino de Funções Trigonométricas no ano anterior. Em abril iniciamos as observações durante o desenvolvimento da THA de funções trigonométricas, que se estenderam por dois meses. A seguir apresentamos as observações e análises acerca do desenvolvimento das atividades pelos professores. As observações foram realizadas por meio de registro escrito e gravações de áudio.

Para cada atividade, a fim de evitar detalhes desnecessários no corpo do trabalho, relatamos aqui apenas os dados que julgamos relevantes para a análise da THA. Faz parte da análise trechos que relatam características comuns dos professores e alunos, erros cometidos pelos alunos, estratégias inadequadas do desenvolvimento e intervenções dos professores que enriqueceram as atividades.

Para contextualizar o leitor, nesta primeira atividade os professores iniciaram o desenvolvimento de modo semelhante, leram a atividade para todos de maneira breve e orientaram os alunos organizados em duplas.

3.1. Atividade I - Transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico

A atividade foi desenvolvida em duplas nas duas turmas. Os alunos já haviam desenvolvido a THA inicial e, algumas dificuldades: como uso de instrumentos de medição e construção (régua, esquadro, compasso e transferidor), podem ter sido superadas em período anterior ao acompanhado pela pesquisadora.

A professora iniciou a atividade com uma breve revisão das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de ângulos agudos. Em seguida, leu a tarefa I para os alunos e pediu que realizassem a tarefa.

O professor não fez a revisão, percebemos que os alunos não mobilizaram as razões trigonométricas e o professor teve que repetir as razões para a maioria das duplas.

Os alunos tiveram dificuldade para identificar o que era o raio solicitado na Tarefa I. Como estavam acostumados com a figura típica (raio sempre dado na horizontal) colocavam o segmento $\overline{OA}$ como o raio da circunferência, e não o segmento $\overline{OB}$.

É possível perceber, nas duas turmas, que não ficou claro quantas casas decimais são necessárias para as razões trigonométricas. Nenhum dos professores comentou inicialmente que o algarismo significativo deveria ser 0,01.

Professor - *Quanto deu o seno do AOB?*

Alunos - *0,8.*

Professor - *Quanto deu o seno do próximo?*

Alunos - *0,82.*

Aluno F - *Mas num tem problema? Nós arredondamos.*

Destacamos no trecho a seguir um comportamento detectado por parte dos alunos das duas turmas: a dependência da calculadora:

Aluno 1 - *Agora cateto adjacente: é 0,6 dividido por 1. É igual a 0,6.*

Aluno 2 - *É lógico que dá 0,6. (O aluno 1 insiste com a calculadora e digita 0,6 :1,00.)*

Porém, no relato seguinte, observamos que alguns alunos não necessitaram da calculadora. A aluna I conseguiu entender o objetivo da atividade que era utilizar o raio unitário para facilitar os cálculos:

Aluna I - *Vamos por parte. Seno é cateto oposto 6,4 dividido por 10*

Aluna G - *0,64*

Aluna I - *Agora cosseno. Cateto adjacente 7,8, não 7,7, dividido por 10. Vai dar 0,77 (fez mentalmente).*

Alguns alunos não compreenderam o uso da escala 10:1. Faziam a conversão apenas dos catetos do triângulo. Veja o diálogo a seguir:

Aluna P - *Quais as coordenadas do ponto A? Qual ponto A? Este da figura 3? A, na figura 4... Coordenadas: 0,77 e 0,64 Quais são os valores do seno e cosseno do ângulo O? Mas ai não tem o triângulo...*

Aluna P - *Aqui vai ficar 0,77 e 0,64? (mostra a figura 3)*

Aluno E – *Num é 7,7?*

Aluna P – *Mas a professora falou que é daqui.*

Aluna P - *O seno é 0,64 dividido por 10,1.*

Aluna E – *0,06.*

Podemos perceber que alguns alunos compreenderam as razões seno e cosseno de um ângulo como projeções no eixo cartesiano pelo diálogo a seguir:

Professora – *Se retirarmos a circunferência. Tem a figura 4, o ponto A. até com as respostas. Já estava lá. Quais as coordenadas?*

Aluno R – *O x = 0,77 e y = 0,64.*

Professora – *Quais são os valores de cos e sen de $\hat{O}$?*

Aluno R – *O cosseno é 0,77 e o seno 0,64.*

Professora – *Olha que coincidência...*

Aluna N – *É coincidência?*

Professora – *Há uma relação...*

Aluna I – *O seno é paralelo ao eixo y, o cosseno, que é o cateto adjacente é a "própria reta do x". A hipotenusa é o raio da circunferência.*

Para a versão final da THA colocamos em uma única figura a circunferência da figura 3 e o sistema cartesiano ortogonal da figura 4, para melhorar a relação entre as razões seno e cosseno e as coordenadas do ponto.

Os dois professores foram atenciosos com os alunos e prestaram atendimento individual quando solicitados. Nas primeiras aulas podemos inferir que tal comportamento pode ter sido influenciado pela presença da pesquisadora que era estranha ao ambiente.

Porém percebemos que a turma do professor, solicitava atendimento individual para repetir a orientação inicial. Os alunos eram extremamente dependentes, não se respeitavam e a troca de ofensas era comum. A crença reduzida na capacidade de resolver fazia com que muitos nem tentassem fazer as atividades.

Não vamos aprofundar neste capítulo a nossa análise, porém percebemos que a adaptação ao método construtivista demanda tempo e uma série de fatores que vão desde condições físicas a características pessoais de professores e alunos.

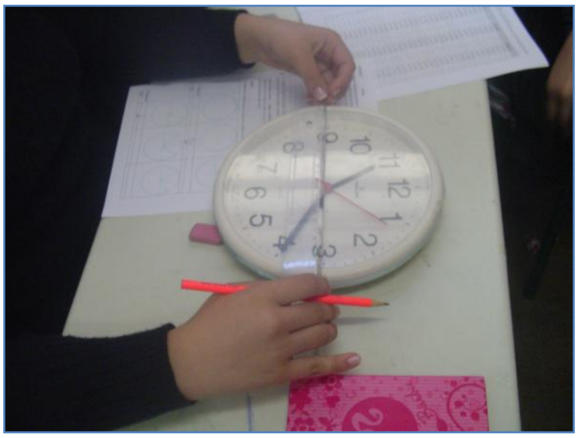
3.2. Atividade II - Identificação do radiano como medida para o círculo trigonométrico.

A partir da Tarefa II a atividade foi desenvolvida de forma individual nas duas turmas, esta recomendação foi feita pela pesquisadora aos dois professores para verificar se os alunos conseguiam sistematizar sozinhos os conhecimentos e continuarem a trocar opinião com os demais colegas. Como o previsto, o interesse aumentou e os alunos continuaram a discutir os resultados.

Após orientação da pesquisadora, a professora explicou a Tarefa I para os alunos, em seguida atendeu apenas as equipes que solicitavam auxílio. Isto evitou que os alunos se dispersassem e, como notado durante a observação, contribuiu para melhorar a disciplina dos alunos, que aparentemente estava incomodando a professora. A professora esclareceu que os alunos deveriam medir o comprimento do objeto (CD, relógio de parede, lata de refrigerante e tampa plástica) que recebeu junto com um pedaço de fitilho.

Para iniciar a Tarefa I o professor explicou o que é raio e diâmetro. Em seguida deu poucas orientações para os alunos medirem a circunferência e saiu da sala por alguns minutos. A observadora entregou os materiais (CD, fitilho, tampas) e começou a orientar os alunos na execução da tarefa.

A professora I e a observadora desenvolveram as tarefas como indicado pelo método construtivista: os alunos fizeram a tarefa e responderam os questionamentos que foram essenciais na mediação das dúvidas e, conjecturas e propiciou a participação de todos na aula.



Aluna medindo diâmetro do relógio.

Objeto	Medida do Raio	Medida do Diâmetro	Comprimento da circunferência em raios	Comprimento da circunferência em cm	$\frac{\text{Comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}} = \pi$
CD	6,0	12,0	6,4	38,5	38,5 : 12 = 3,20
NESCAU	5,2	10,4	6,3	32,8	32,8 : 10,4 = 3,15
Relógio	11,1 cm	22,2 cm	6,53	72,5	72,5 : 22,2 = 3,26
Lata	2,8 cm	5,6	6,6	18,5	18,5 : 5,6 = 3,30

Ao transferir a medida do raio para a circunferência obtemos um arco de circunferência cujo comprimento é igual à medida do raio. Este arco recebe o nome de **radiano**.

Protocolo de aluno Tarefa I

A seguir apresentamos um trecho da professora I orientando à aluna N:

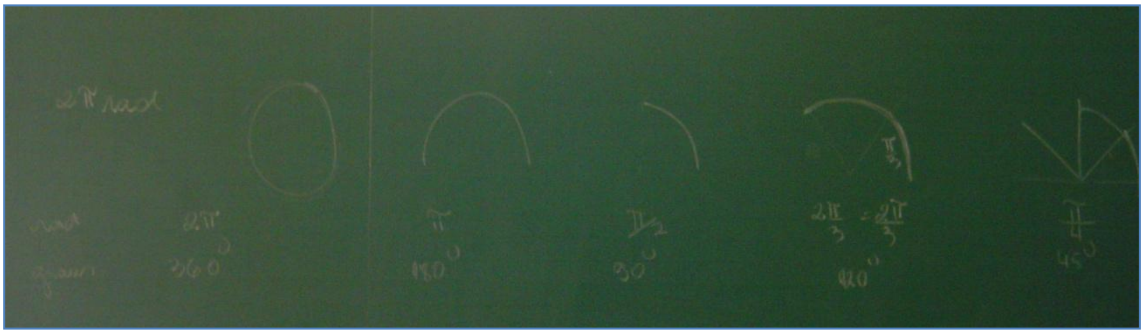
Professora: - *Vou fazer só o primeiro, que já está como exemplo. Esse pedaço vale* $\frac{\pi}{3}$*, então dois pedaços são* $\frac{2\pi}{3}$*. Que é: 2 vezes 60, 120 graus.*

Aluna N- *O próximo é* $\frac{2\pi}{4}$*, posso fazer 2 vezes 180 e dividir por 4?*

Professora - *Não precisa. Você já tem o* $\frac{\pi}{4}$*. Facilita o cálculo.*

Aluna N- *Tá errado?*

Professora – *Não.*



Reprodução do quadro com os esboços feitos pela professora para a Tarefa II.

A seguir trecho da Tarefa II desenvolvida pelo professor II:

Professor - *Não fica três metades do* π*. Para calcular: 3 vezes 180 dividido por 2.*

Aluna C questiona a observadora o mesmo item:

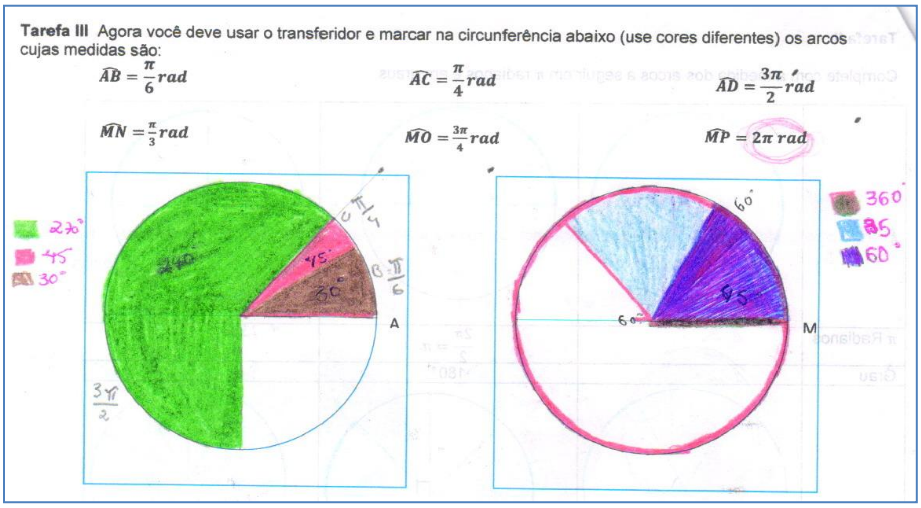
Observadora - *Como são* $\frac{3\pi}{2}$*. Você faz 3 vezes* $90°$*, porque* $\frac{\pi}{2}$ *é* $90°$*.*

Aluna C *– O professor falou 3 meios de* π*. Eu calculo 3.180 e divido por 2? Ou 3 x90?*

Observadora – *Ou você faz 3 x 180 : 2 ou você já faz 3 x 90.*

Aluna C - *270. Vou riscar até 270. Ainda bem que eu entendi.*

Detectamos um erro provocado pela professora no desenvolvimento da Tarefa III. Quando uma aluna questionou se poderia colorir apenas o arco e não o setor circular (na resposta esperada, entregue para a professora, estava indicado apenas o arco), a professora respondeu que era errado, que seria melhor “pintar só dentro”. Isso gerou uma série de erros que podemos observar na figura seguinte:



Protocolo de aluno com erros na indicação dos arcos tarefa III

A professora percebeu o equívoco no seguinte comentário do aluno que havia colocado o arco $\frac{\pi}{4}$ apenas como o arco entre o $30°$ e $45°$ e fez a orientação correta da Tarefa.

Professora - *O* $45°$ *é tudo (mostra na circunferência que construiu na lousa que não é só o arco de* $15°$*). É do ponto A até o C. O arco AC que é* $\frac{\pi}{4}$*.*

Na orientação da tarefa IV a professora fez uma importante revisão da tarefa I. Pegou um CD, com um gesto mostrou o tamanho da circunferência e questionou aos alunos quantos raios têm o comprimento da circunferência. Os alunos responderam rapidamente “6 e pouco”. Fazemos uma ressalva apenas à finalização da explicação que impediu os alunos de conjecturarem:

Professora - *Quantas aberturas dessas de 2 cm vão ter na circunferência? Vou colocar a abertura do raio e colocar 6 vezes na reta. Pego no zero... Vocês fizeram em cima do fitilho. É a mesma coisa, mas vamos fazer em cima da reta.*

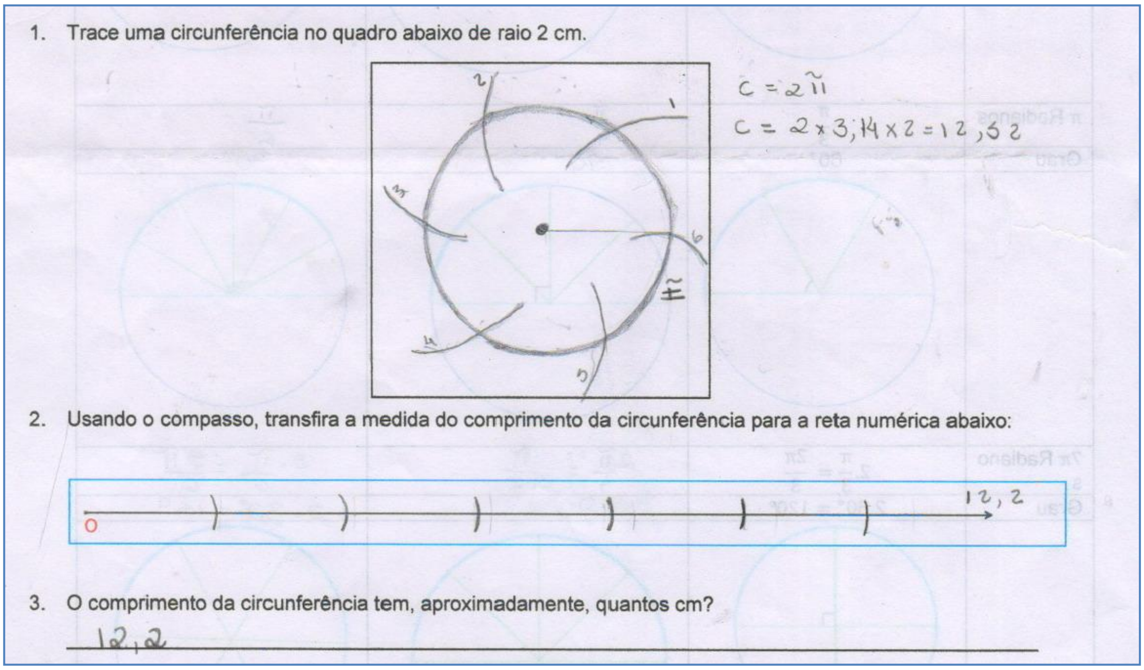
O professor perguntou à observadora se ela poderia substituí-lo na próxima aula, pois teria que ausentar-se. A observadora ajudou os alunos com dificuldade e percebeu que eles precisavam ter confiança no desempenho para serem mais autônomos. Fez a correção dos primeiros exercícios na lousa para socializar os resultados e esclarecer dúvidas. Como os alunos já estavam utilizando instrumentos como compasso e régua, a observadora fez uma antecipação de alguns itens da Tarefa III e orientou os alunos na construção da circunferência. Após iniciou a Tarefa II usando as representações e associação com frações e π.

Observadora – *Vamos para a tarefa IV com o compasso. Dá uma olhada na folha como eu traço uma circunferência de raio 2? Você deve pegar a ponta seca do compasso abre até 2 cm na régua.*

Aluno - *Que raiva eu não consigo, ajuda à gente, o troço não vai.*

Observadora - *Dá prá colocar quantas vezes o raio? 2, 3, 4, 5 e 6 Quando você está traçando passa um pouquinho. Quem conseguiu pode ter chegado a aproximadamente 6,2.*

Alunos - *É isso mesmo professora.*



1. Trace uma circunferência no quadro abaixo de raio 2 cm.

$C = 2\pi$

$C = 2 \times 3{,}14 \times 2 = 12{,}32$

2. Usando o compasso, transfira a medida do comprimento da circunferência para a reta numérica abaixo:

0 12,2

3. O comprimento da circunferência tem, aproximadamente, quantos cm?

12,2

Protocolo de aluno Tarefa IV

O desenvolvimento da atividade foi diferenciado entre os professores parceiros. Enquanto a professora explorou as representações dos arcos e fez a associação com o conhecimento de frações, o professor insistiu em fazer as conversões em graus, mesmo em tarefas que não era necessária tal conversão.

No desenvolvimento da Tarefa V Item 2, o professor II não percebeu que os círculos fornecidos no exercício foram colocados para explorar a leitura visual e insistiu em usar o transferidor e marcar os arcos em qualquer um dos círculos. No trecho a seguir é possível perceber o professor orientando de maneira equivocada a aluna K.

Professor– *Aluna K, qual o ponto C?*

Aluna K - $\frac{3\pi}{4}$ ou $135°$.

Professor - *Qual vai usar?*

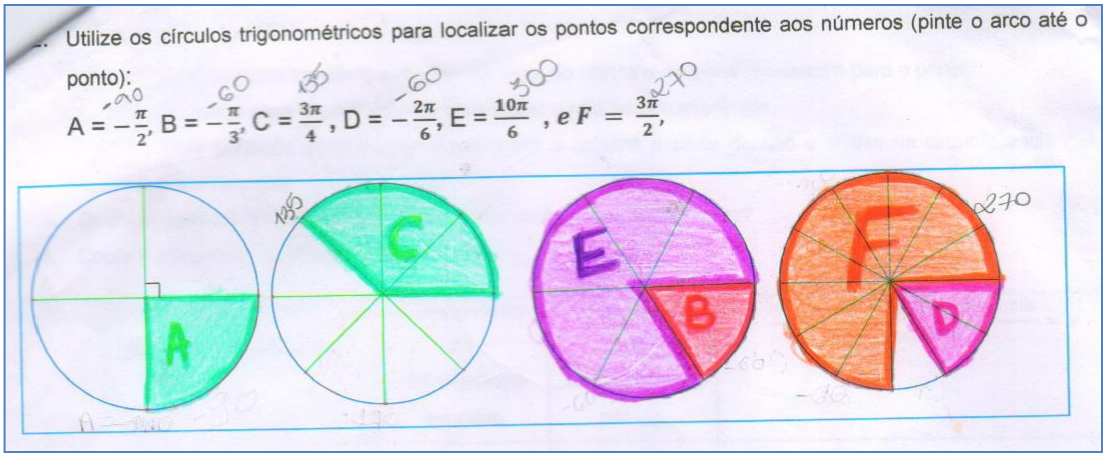
Aluna K - *Tanto faz...*

Professor - *Eu acho que a última facilita. Quanto mede cada arco?*

Aluna K - *30.*

O professor solicitou que a aluna C a traçar com o transferidor o arco $\frac{3\pi}{4}$, no círculo dividido em arcos de $\frac{\pi}{6}$ (o quarto círculo). Porém, a aluna K questionou a solução feita na lousa. Infelizmente o professor não deu atenção ao comentário da aluna K.

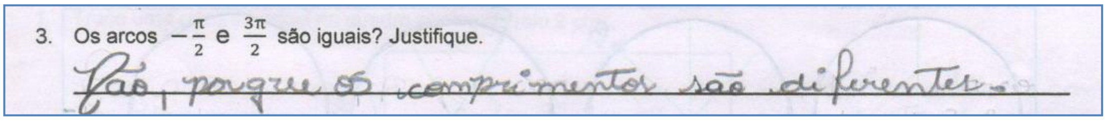
Aluna K – *Eu fiz o* $\frac{3\pi}{4}$ *na segunda circunferência. Acho que na lousa ta errado.*



Protocolo da aluna K Tarefa V.

Quando o professor questionou os alunos se os arcos $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{3\pi}{2}$ são iguais, pudemos perceber uma falha na orientação do professor. Os alunos responderam sim, são iguais. É possível inferir que os alunos e o professor não leram a orientação do item anterior que solicitava que o arco fosse pintado até o ponto. Assim, os alunos compreenderam que como estavam sobre o mesmo ponto os arcos eram iguais. Depois de perceber o engano, o professor solicitou que a aluna C marcasse os arcos na lousa.

O protocolo da Aluna A demonstra que a aluna compreendeu a diferença entre os arcos:


3. Os arcos $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ são iguais? Justifique.

Não, porque os comprimentos são diferentes.

Protocolo da Aluna A Tarefa V.

Apenas a professora desenvolveu o item 5 referente às expressões de arcos côngruos. O encaminhamento do segundo exercício de arcos côngruos foi adequado. A professora percebeu que o texto da atividade fazia referência à figura anterior e fez uso da correção do exercício para explicar as expressões de arcos côngruos.

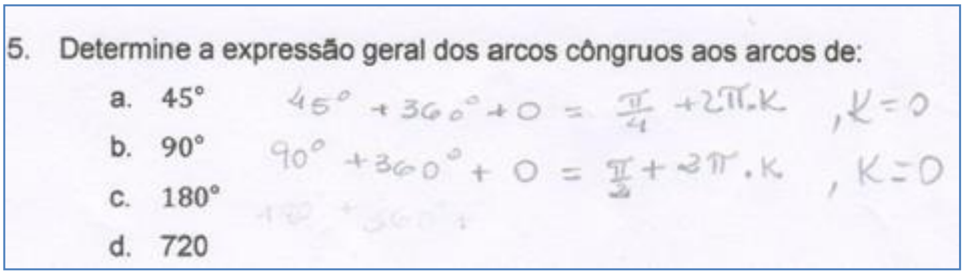
Professora - *Para marcar o arco de 720 deu alguma volta?*

Alunos – *Duas.*

Professora - *O de 420 dei quantas voltas? Uma completa e 60. Se fosse 780 qual seria o valor de K (número de voltas completas)?*

Alunos – *2.*

Ao explicar o exercício à professora estava no final da aula, no outro dia não prosseguiu com a atividade. Mesmo assim foi possível obter a resposta a seguir:



5. Determine a expressão geral dos arcos côngruos aos arcos de:

a. 45° $45^\circ + 360^\circ + 0 = \frac{\pi}{4} + 2\pi.K$, $K=0$

b. 90° $90^\circ + 360^\circ + 0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi.K$, $K=0$

c. 180° $180 + 360 +$

d. 720

Protocolo aluno Tarefa V.

É notável como alguns alunos da professora já começam a desenvolver a autonomia. Observamos isso em diversos momentos, com algumas duplas que já estavam lendo as próximas tarefas antes da professora orientar.

3.3. Atividade III - Calcular seno, cosseno, tangente, de um ângulo no círculo trigonométrico.

O desenvolvimento da atividade foi individual, cada aluno recebeu os protocolos para fazer as tarefas.

A professora deu poucas instruções para a resolução da Tarefa I. A orientação foi adequada, pois os alunos haviam feito projeções na Atividade I. Nessa aula a professora resgatou o construtivismo e os alunos fizeram sem muitas orientações, mesmo com alguma dificuldade.

Uma estratégia utilizada pela professora, que não foi adequadamente aplicada pelo professor, é a sistematização das tarefas. Depois que a professora acompanhava os alunos na resolução das atividades, sempre se dirigia à lousa para fazer a correção coletiva. Assim, propiciou que os alunos participassem da aula, socializando as dúvidas e conjecturas levantadas durante a resolução.

O professor manteve o atendimento individual, poucas vezes fez a orientação coletiva e quando fazia sempre pedia para um grupo de alunos que fossem à lousa fazer a correção. A participação dos alunos na correção é uma excelente estratégia desde que não comprometa a sistematização dos conteúdos estudados, momento que cabe apenas ao professor.

No desenvolvimento da tarefa I houve um encaminhamento diferenciado pelos professores. A professora inicialmente já se referia à circunferência e à projeção dos ângulos, como vemos no trecho a seguir:

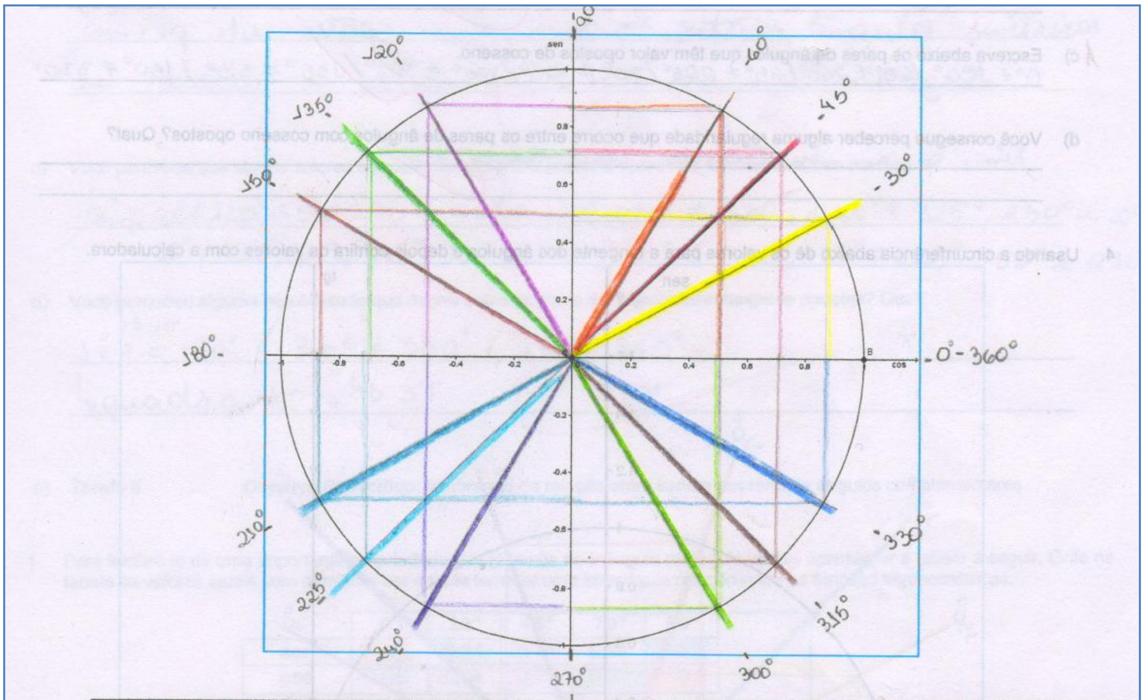
Professora - *Faz seno 0, depois 30... Marca com o transferidor na circunferência. É só passar os ângulos para a circunferência.*

Aluna N – *Tem que ver qual reta corresponde ao cosseno e o seno.*

Professora - *O deitado é o cosseno. Eu analiso o eixo do sistema cartesiano, em pé é o seno.*

Os alunos da professora interagem bastante. Podemos perceber com a explicação da aluna N para outros alunos:

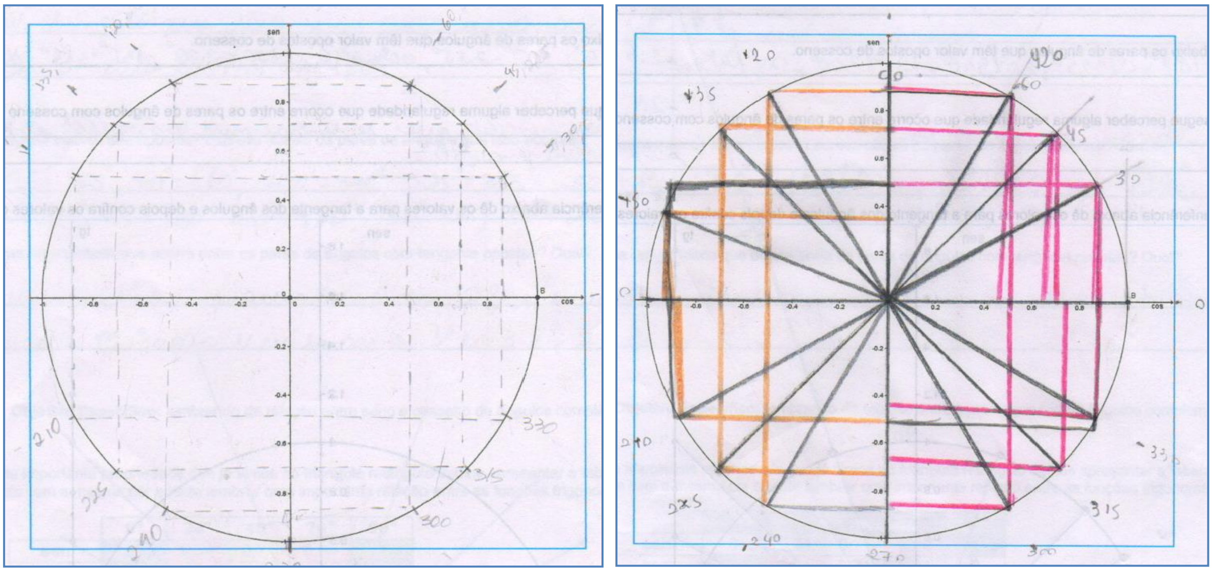
Aluna N – *Essa aqui é o seno, e esse é o cosseno. O que encostar aqui é o cosseno do ângulo de 30. O cosseno deu 0,9. O seno vai dar no 0,5 aproximadamente.*



	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,9	-1	-0,9	-0,7	-0,5	0
cos	1	0,9	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,9	-1	-0,9	-0,7	-0,5	0	+0,5	+0,7	+0,9	1

Protocolo de aluno com resolução da Tarefa I

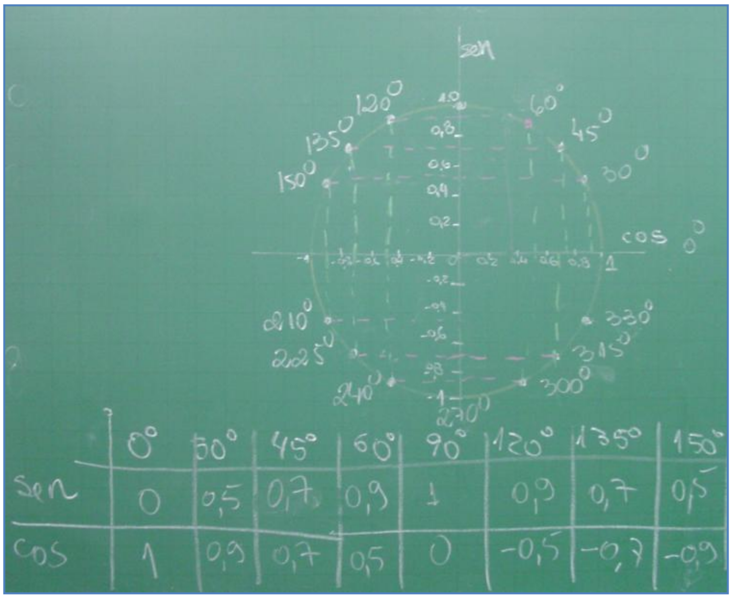
Durante o desenvolvimento da tarefa I pela professora, a observadora notou as diversas resoluções dos alunos: alguns alunos utilizaram várias cores outros apenas o lápis preto. Assim também enquanto alguns destacaram as projeções, outros alunos deram ênfase ao ângulo. A observadora questionou um grupo de alunas que havia utilizado estratégias diferentes. As alunas que usaram apenas o lápis preto e pontilhado justificaram que, o uso de muitas cores, poderia causar confusão. A aluna B esclareceu que as cores foram usadas para chamar a atenção.



Protocolos de alunos com diferentes resoluções da Tarefa I

Aluna C – *Acho que assim confunde. Muitas cores. Cada um tem sua lógica. O ser humano é assim: quando você fala para fazer desse jeito, ele acha que é tudo complicado. Mas quando faz do seu jeito é mais fácil.*

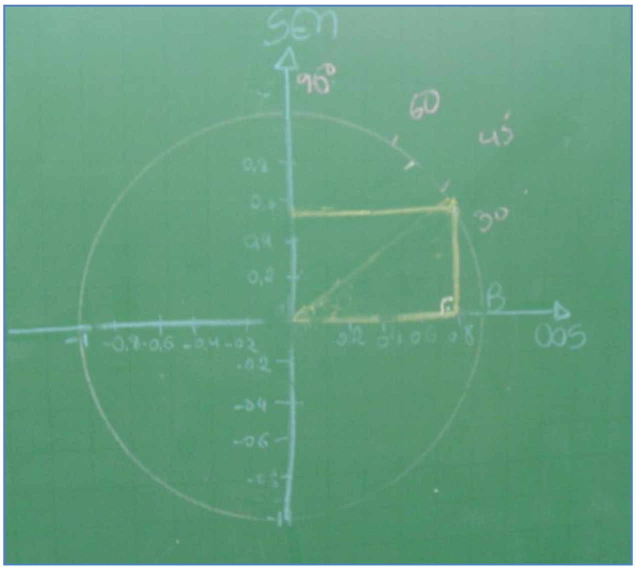
Percebemos que deixar os lápis de cor à disposição dos alunos e deixá-los à vontade para fazer as projeções permitiu que cada um fizesse como julgasse mais adequado ao seu entendimento.



Correção da Tarefa I

O encaminhamento dado à correção da tarefa II foi adequado. A professora fez os questionamentos e mediações e os alunos foram participando da aula se sentindo confortáveis para expor suas conjecturas.

A orientação que o professor fez da Tarefa I foi incorreta. O docente solicitou que os alunos deveriam construir triângulos no círculo trigonométrico.



Correção da Tarefa I com triângulos

O professor utilizou a calculadora para verificar se o seno e cosseno do arco de 30° estão corretos. Infelizmente, muitos alunos abandonaram o exercício e completaram a tabela usando a calculadora. A observadora recolheu as calculadoras disponíveis na sala para que os alunos desenvolvessem a atividade como o previsto.

Quando os alunos estavam começando a fazer as projeções nos eixos o professor faz um comentário que gerou uma incredulidade dos alunos no uso do círculo e reforçou o uso da calculadora. Após verificar que a aluna C, no círculo obteve o $\text{sen}30° \cong 0{,}8$, o professor comentou:

Professor - *Quem disse que $sen30$ é, exatamente, 0,8? Façam na calculadora...*

Professor - *Vai cair exatamente no 0,8?*

Alunos – *Não*

Como a aluna C fez os triângulos como fora orientada pelo professor, não percebeu que só fez a projeção do cosseno dos ângulos.

Observadora - *Aluno L, você só fez o cosseno não fez o seno.*

Aluno L – *Quanto é o seno de 30?*

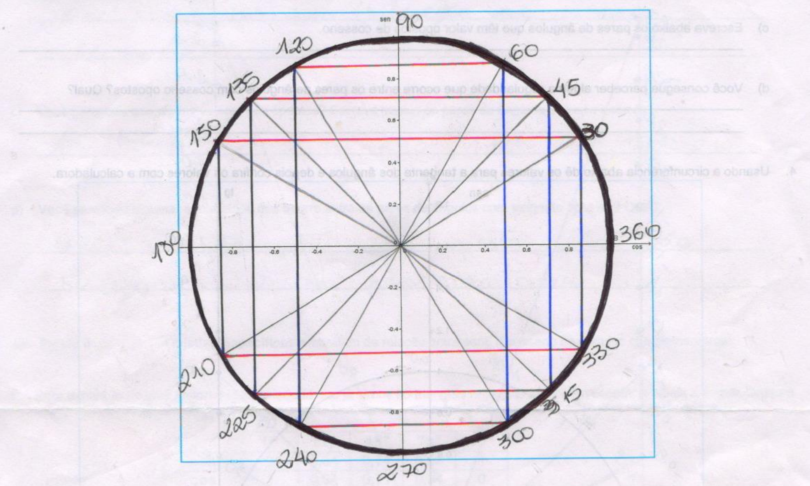
A aluna K responde usando a calculadora, não a figura. Em seguida o professor perguntou ao aluno L o $sen0°$ e o $cos0°$. O aluno L responde que ambos são 0. Em seguida a aluna C fala corretamente que $sen0° = 0$ e $cos0° = 1$. A aluna K gritou que estava errado, os dois valores eram zero.

Foi perceptível que o professor não compreendeu que o raio unitário no circulo trigonométrico possibilita obter o seno e o cosseno de um ângulo qualquer utilizando projeções. O professor continuou no fundo da sala pedindo para os alunos L e C fazerem os triângulos. Os alunos não conseguiam fazer as projeções no seno. Os alunos ficaram confusos e inquietos, não sabiam o que fazer. A observadora pediu licença ao professor e foi em auxílio a dupla que estava na lousa. Solicitou que o aluno L colocasse a régua, em posição perpendicular à lousa sobre o ponto correspondente ao ângulo de $30°$ para demonstrar as projeções.

Professor - *Muito obrigada...*

Observadora - *Pensa que tem um bastão. Vou trazer uma lanterna. Imagine uma luz aqui, a sombra da régua vai coincidir aonde no seno? Dá exatamente no meio, 0,5. Mas o mesmo bastão, quando coloco a lanterna na direção do cosseno, a projeção dele no eixo dos cossenos é 0,9.*

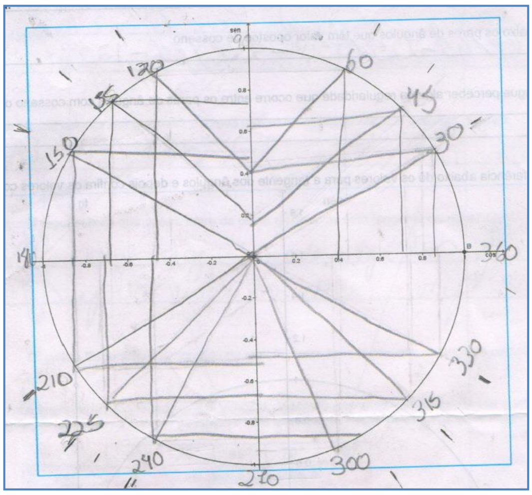
Observando o protocolo da aluna K, podemos inferir que após a orientação da observadora a aluna compreendeu o seno e cosseno a partir das projeções nos respectivos eixos.



	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen	0	0,5	0,7	0,9	1	0,8	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,8	-1	-0,9	-0,7	-0,5	0
cos	1	0,8	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,8	-1	-0,8	-0,7	-0,5	0	0,5	0,7	0,8	1

Protocolo da Aluna K - projeções no círculo trigonométrico.

Percebemos que parte dos alunos representou o vértice dos ângulos na origem do plano cartesiano. Porém, detectamos erros em alguns protocolos: o aluno H não identificou corretamente o vértice do ângulo, nos permite inferir a compreensão de ângulos simétricos e origem do ângulo não foram obtidas pelos alunos.

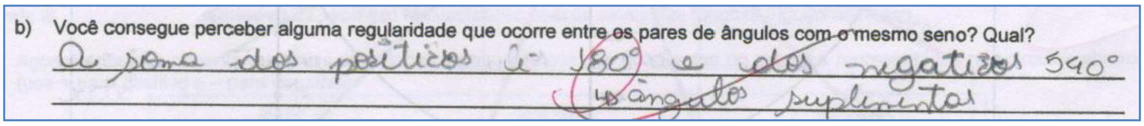


Protocolo do Aluno H Erro no traçado

Os dois professores conduziram bem as questões seguintes, sistematizando as conclusões após a participação dos alunos. Percebemos que os alunos da professora conjecturaram sem maiores intervenções da professora. Enquanto que os alunos do professor só conseguiam ver as regularidades após o professor dar alguns exemplos.

Professora - *Qual a regularidade do seno?*

Aluna - *Os ângulos que estão "há mesma altura" têm o mesmo seno.*


b) Você consegue perceber alguma regularidade que ocorre entre os pares de ângulos com o mesmo seno? Qual?
A soma dos positivos é 180° e dos negativos 540°
(os ângulos suplementos)

Protocolo com resoluções da Tarefa I

A aluna I conseguiu conjecturar sobre a propriedade com a seguinte expressão: "estão na mesma linha - 180°". A aluna possivelmente não utilizou o termo "simétricos em relação a origem" por não possuir tal vocabulário matemático.

No trecho a seguir acompanhamos a mediação do professor enquanto os alunos conjecturavam sobre as regularidades das funções trigonométricas:

Professor - *Alguém percebeu uma coisa na tabela?*

Aluna A - Tá indo ao contrário: 0, 7, 0, 8; 0,9 e1. E o outro 0, 9; 0,8; 0,7.

Professor - *Vamos tentar responder estas perguntinhas? Quais são os ângulos de mesmo seno.*

***Alunos** - 0, 180 e 360, 30 e 150*...

***Observadora -** Dá para perceber a regularidade? Tem que aparecer uma regra, se eu falar vai perder a graça da piada.*

Enquanto os alunos da professora fizeram as projeções para obter a tangente e apenas apresentaram dúvidas em alguns ângulos, os alunos do professor, não compreenderam a orientação do professor. Acompanhamos a seguir a discussão sobre a tangente de 70°. Esta dúvida foi prevista na atividade desenvolvida pela pesquisadora.

***Aluna N -** Quero saber por que não cruzou o 70?*

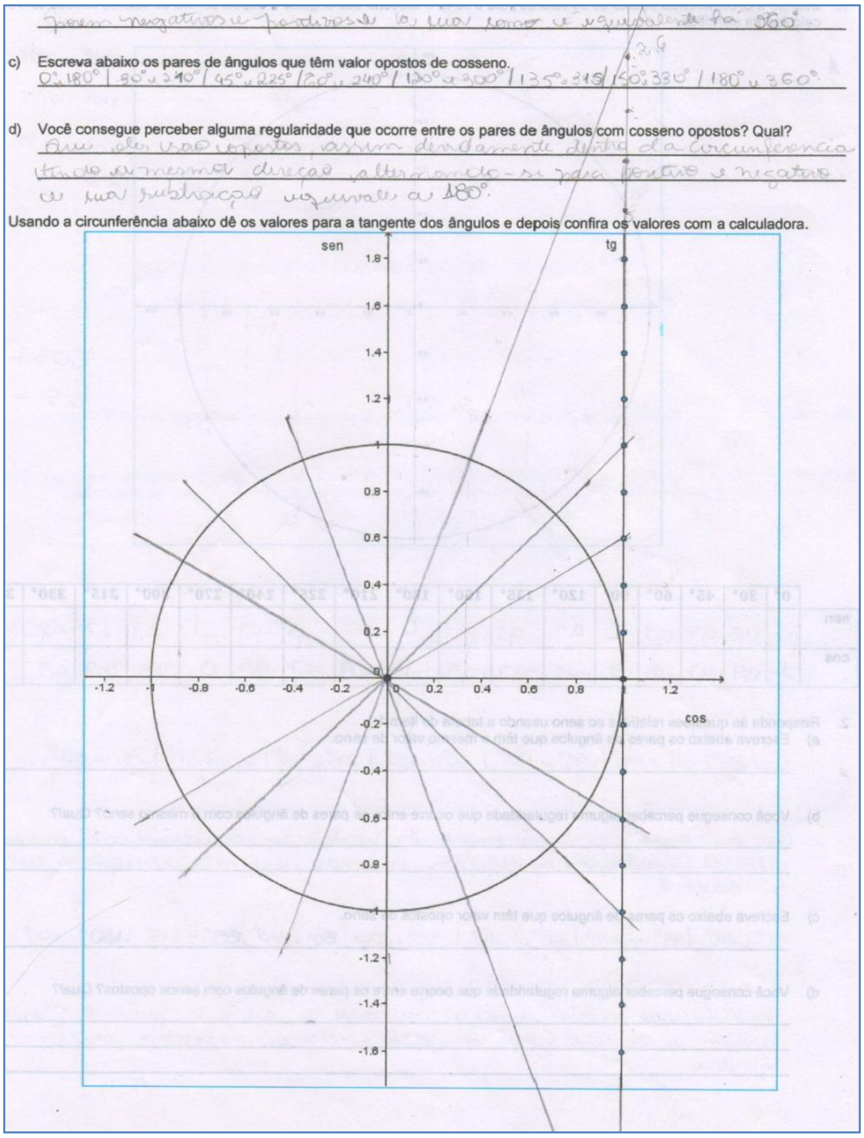
***Professora –** O meu aqui (na lousa) não vou conseguir cruzar. Mas vocês sabem que tem um valor que vai chegar numa altura.*

***Aluna N -** Mas se passar... Posso fazer projeção do ângulo 70, o seno e cosseno. E o 180?*

***Professora –** Qual vai ser o valor da tangente de 180? Se prolongar será 0.*

***Aluna N -** Mas se dividir 0 por 1 também dá 0.*

A observadora perguntou como obter a tangente de 70° usando a figura. A aluna N prolongou o eixo da tangente como apresentado na figura seguinte:



Protocolo da Aluna N - Tangente de 70°.

A observadora questiona a aluna N, se esta percebeu a regularidade da tangente. Em seguida a aluna explicou como obter a tangente de 210°:

Aluna N - *Se for daqui para cá vai ser o mesmo da tg de 70°, mas negativo.*

No relato a seguir acompanhamos a mesma discussão com os alunos do professor.

Aluna C - *Vamos ver se aqui continua 70 ia ser até aqui... Fazer as bolinhas um cm de bolinha...*

Observadora - *Você se libertou.*

Aluna C - *1,6 ... 1,8...2,0...*

Aluna A- *Aqui é limitado, mas tangente não.*

Observadora - *Em algum lugar ta falando que você não pode riscar a folha?*

Aluna C – *O de 70 é 2,8.*

Aluna A *- Esse pode subir. O de 70 pode subir?*

Aluna C - *Tudo pode subir. 45 deu 1.0*

Aluna C - *Lu e o de 90? Aluna K, você fez o de 90?*

Aluna C- *Mas o professor falou que não é projeção.*

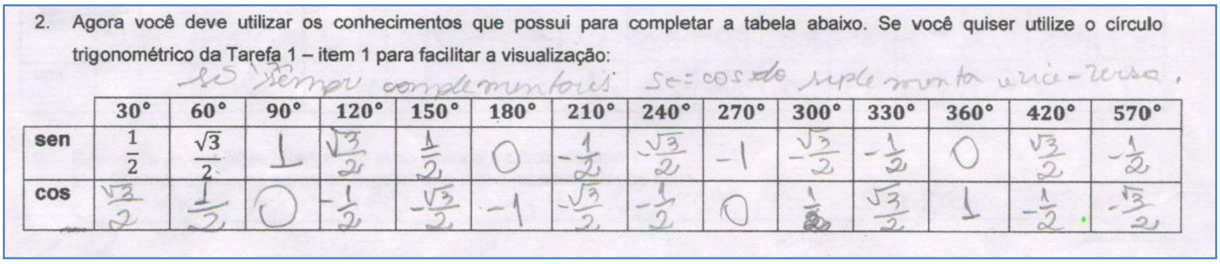
Um erro grave cometido pelo professor, ao ser questionado pelas alunas C e A sobre a tangente de 270 e 90 o professor mostrou na figura o -1 e 1. Na verdade ele mostrou o eixo dos senos

Na resolução da Tarefa II, Podemos inferir que a aluna C compreendeu o objetivo da tarefa, porém como não havia estudado a demonstração das razões trigonométricas com os números irracionais, apenas verificou na calculadora o valor dos ângulos na tabela e olhava na tabela da Tarefa I os valores que correspondiam às razões. A estratégia é eficiente, porém o exercício poderia ser melhor explorado se o professor explicasse porque as razões estavam indicadas com números irracionais e se estimulasse que os alunos fizessem o esboço do círculo trigonométrico em vez de olhar nas tabelas anteriores.

Aluna A- *Como faz?*

Aluna C - *É tudo igual, só muda o sinal. Primeiro você vê que raiz que* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *é 0,86. Tudo que tem 0,86 você coloca* $\frac{\sqrt{3}}{2}$*. Só vê o sinal. O* $seno 240° \text{ é } -0{,}86$*, então é* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$*. Você vai colocar só em fração, o resultado é o mesmo.*

Aluna C - *O* $sen\, 150 \text{ é } 0{,}5$*, que é a mesma coisa de* $\frac{1}{2}$*. Só vai dar estes resultados* $\frac{1}{2}$*, positivo ou negativo, ou* $\frac{\sqrt{3}}{2}$*, positivo ou negativo.*



2. Agora você deve utilizar os conhecimentos que possui para completar a tabela abaixo. Se você quiser utilize o círculo trigonométrico da Tarefa 1 – item 1 para facilitar a visualização:

são sempre complementares se = cos do suplementar vice-versa.

	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°	420°	570°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Aluna C anotou complementares e suplementares. Provável distração no $cos 420°$.

3.4. Atividade IV - Uso da calculadora científica para o cálculo das funções trigonométricas

Esta atividade foi desenvolvida apenas pela professora. Em comum acordo, pesquisadora e professora resolveram desenvolver a atividade deixando os alunos sozinhos na sala de aula enquanto acompanhavam os demais alunos na consecução da atividade V, no laboratório de informática. Os alunos foram divididos em Turma A e Turma B, que em quatro aulas se revezaram entre o laboratório e a sala de aula.

Inicialmente a professora entregou a calculadora científica e as folhas para as duplas com as orientações de uso de cada modelo de calculadora disponível. Em seguida a observadora fez alguns exemplos na lousa para que os alunos conseguissem utilizar tal instrumento. Como imaginado, os alunos nunca haviam usado este tipo de calculadora.

Esta atividade teve um resultado surpreendente. Em todas as aulas houve um momento de indisciplina e um pouco de ruído, não podemos esquecer que os alunos estavam sozinhos. Mas contribuiu para o desenvolvimento da autonomia dos mesmos que conjecturaram e validaram as respostas entre as duplas.

A seguir apresentamos trechos que foram relevantes para compreender a atividade.

Aluno – *Ah já sei! Você vai colocar o* ***2ndf.*** *Need for speed. Não, não dá, Depois você vai coloca o* $\boldsymbol{\pi}$. *Eu acho. Depois vai colocar* ***x 2.*** *Que é o* 2π. *Depois, não acabou nada, ai você coloca* ***igual*** *e vai da zero. Agora esse aqui você vai fazer* *a mesma coisa por esse, por esse,* ***2ndf.*** *Depois você vai colocar o* ***π.*** *Depois você vai fazer ele* ***x 5*** *e depois* **dividido** *po**r 2*** *e vai achar o 1.*

Neste trecho é possível perceber que os alunos estavam fazendo a tabela com os ângulos na unidade graus. A dupla não lembrou que deveriam alterar o modo de exibição da calculadora de ***π*** radianos para graus. Assim quando digitaram 45, calcularam 45 radianos, cuja tangente é, aproximadamente, 1,62. Outro detalhe importante, os alunos usaram as funções da calculadora do celular para "conferir" as respostas, e quando os resultados eram diferentes consideravam válido o obtido na calculadora científica.

Alunos - *A, a tangente de 45 é 1,7; 1,71;. 1,62.*

Aluno 1 - *O, na calculadora a tangente de 30 deu - 6,6. Eu fiz no celular e deu - 6. Porque essa diferença?*

Aluno 2 - *A sei lá, porque a calculadora é cientifica. Ai, vai dar -6.6, vai nela.*

A professora indica corretamente o uso da tecla ±:

Professora - *Esse sinal ± vocês vão usar quando é negativo, e apareça o sinal de menos.*

Aluna 1 - *Só que o cosseno deu o mesmo valor, por quê?*

Professora - *Para cá é meio* ***π*** *sobre dois e pra cá é menos o* ***π*** *meio. O menos meio é o de 270, o de 270 qual é? De 90 vezes 3 que é o mesmo que 3 vezes o* ***π*** *sobre 2.*

Aluna 1 - *Ela falou que esse fica positivo, quando for positivo você não usa ±, só quando for negativo, tá?* Orientação da aluna com o parceiro.

Podemos conjecturar sobre o desenvolvimento da autonomia e as vantagens de resolver a atividade em dupla para provocar a troca de opiniões em trechos como o seguinte:

Aluna C- 2ndf *, o* ***π****, ±* ***vezes 3 dividido*** *por* ***2 = cos.*** *Dá 0. Nós não estávamos apertando o igual.*

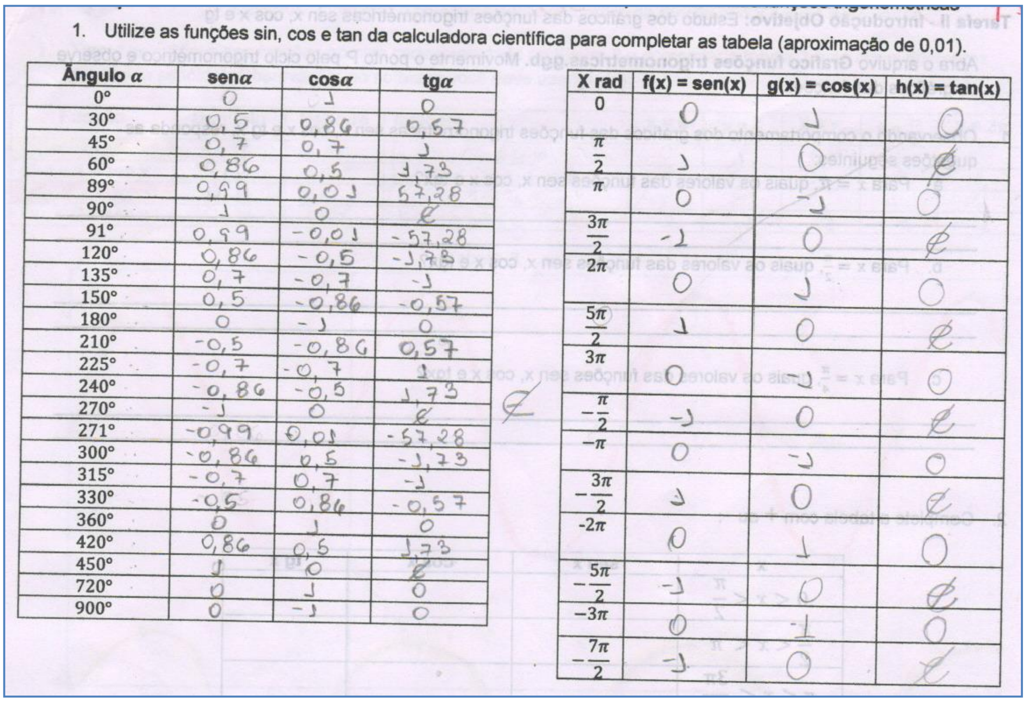
Alguns alunos apresentaram erros de critério de arredondamento. Outros não respeitaram a orientação da atividade que estabelecia aproximação de 0,01. É possível encontrar este equívoco no seguinte relato:

Aluna C - *Deixa eu ver com a aluna J.* ***Aluna C -*** *O* $cos\, 89°$*? Eu fiz a aproximação 0,02 para 0.*

Aluna - *O* $tg\ 150°$*? Eu fiz a aproximação 0,58 para 0,5.*

No cálculo da tangente a maioria dos alunos não compreendeu o resultado da calculadora e atribuíram o valor 0 para tangente de $90°$. Encontramos também diversos protocolos onde todas as funções trigonométricas do ângulo de $0°$ tiveram atribuído o valor 0. Não podemos inferir qual o motivo para tal comportamento, à única conjectura que foi possível é que os alunos generalizaram para a função $cos\ 0°$ com os mesmos valores nulos das funções $sen0°$ e $tg0°$ e assim concluíram que o $cos\ 0° = 0$.

Apenas uma dupla não cometeu erro na tangente, porém utilizou o símbolo errado (o correto é ∄), o que consideramos um erro insignificante no contexto de estarem sozinhos. Há também um erro no $sen -\frac{7\pi}{2}$, mas não conseguimos inferir a causa do erro.


1. Utilize as funções sin, cos e tan da calculadora científica para completar as tabela (aproximação de 0,01).

Ângulo α	senα	cosα	tgα
0°	0	1	0
30°	0,5	0,86	0,57
45°	0,7	0,7	1
60°	0,86	0,5	1,73
89°	0,99	0,01	57,28
90°	1	0	∉
91°	0,99	-0,01	-57,28
120°	0,86	-0,5	-1,73
135°	0,7	-0,7	-1
150°	0,5	-0,86	-0,57
180°	0	-1	0
210°	-0,5	-0,86	0,57
225°	-0,7	-0,7	1
240°	-0,86	-0,5	1,73
270°	-1	0	∉
271°	-0,99	0,01	-57,28
300°	-0,86	0,5	-1,73
315°	-0,7	0,7	-1
330°	-0,5	0,86	-0,57
360°	0	1	0
420°	0,86	0,5	1,73
450°	1	0	∉
720°	0	1	0
900°	0	-1	0

X rad	f(x) = sen(x)	g(x) = cos(x)	h(x) = tan(x)
0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∉
π	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∉
2π	0	1	0
$\frac{5\pi}{2}$	1	0	∉
3π	0	-1	0
$-\frac{\pi}{2}$	-1	0	∉
$-\pi$	0	-1	0
$-\frac{3\pi}{2}$	1	0	∉
-2π	0	1	0
$-\frac{5\pi}{2}$	-1	0	∉
-3π	0	-1	0
$-\frac{7\pi}{2}$	-1	0	∉

Protocolo com valores da tangente corretos

Notamos que na tabela com os arcos em radianos a atividade estava incompleta, percebemos que deveríamos solicitar o cálculo de ângulos como $\frac{\pi}{4}$ para evitar o equívoco de conjecturarem que a tangente sempre tem valor 0. Para a versão final da THA fizemos alterações nas atividades IV e VII - tangente para superar a falha da atividade.

3.5. Atividade V - Estudo da função seno

O desenvolvimento da atividade pela professora foi satisfatório. A postura adotada foi construtivista, dialogando com os alunos, mediando às dúvidas e participações para que conjecturassem sobre as tarefas.

O professor teve dificuldades e a abordagem das tarefas foi mais superficial. A observadora precisou assumir o controle da aula em diversos momentos, inclusive nas aulas com o *software* Geogebra.

A professora notou que tarefa I estava em radianos, mas sempre fazia a conversão para a unidade de medida grau. Alguns alunos fizeram como orientado pela professora. Não consideramos um erro, apenas é conveniente que os alunos consigam, também, mobilizar o arco sem fazer a conversão de unidade de medida.

Aluna I - *O $\frac{3\pi}{2}$ é 270. Vai dar -1. Ponto $D\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$. Olha 1; 0; -1; 0, 1, 0, - 1. Depois a gente confirma.* (a aluna consegue generalizar o comportamento da função nos arcos fundamentais)

No comentário da aluna N, a seguir, vemos que ela visualizou os arcos em radianos no círculo trigonométrico. Porém, quando comentou com a professora, esta não incentivou o uso para os demais alunos.

Aluna N - *Para ficar mais fácil eu andei na circunferência $\frac{5\pi}{2}$. Não fiz contas.*

A orientação do círculo trigonométrico foi motivo de confusão para alguns alunos. Observamos no diálogo abaixo, entre três alunos, que este equívoco foi facilmente sanado apenas com uma simples explicação.

Aluna K – *A Lu (se referindo à observadora) falou que o seno de* $-\frac{3\pi}{2}$ *ta errado. Tem que dar positivo. Aluno F, como você fez?*

Aluno F – *Quando tem o menos na frente é para baixo. Não é para cima. Vai dar - 90, - 180. - 270...*

No segundo item da Tarefa I os alunos deveriam representar no plano cartesiano dado os pontos obtidos. A explicação inicial da professora foi adequada, mas deveria permitir que os alunos conjecturassem as soluções.

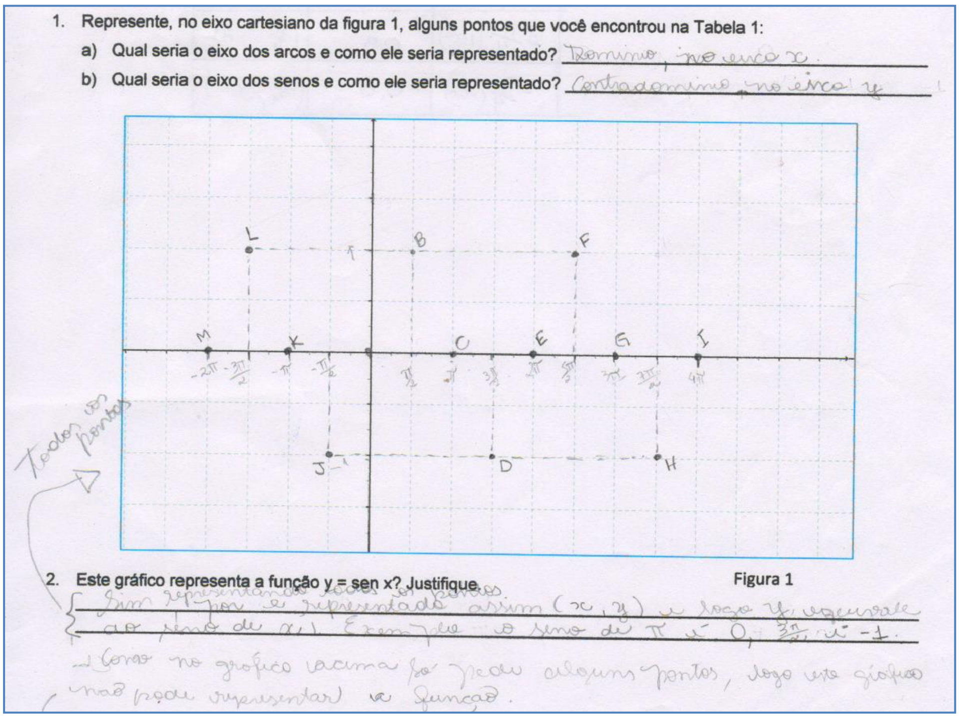
Professora - *Tem umas informações importantes que vocês aprenderam em funções no ano passado e vocês esqueceram. Relembrando o diagrama de setas. A gente chamava o conjunto de Domínio e o outro Contradomínio. Aos pontos que a gente fazia a ligação do Domínio com o Contradomínio, chamávamos imagem. Nesse exercício quais são os valores do Domínio? Quantas relações que formavam funções, não eram formadas em pares? Vocês não lembram? Domínio é sempre o primeiro conjunto, está dominando o resultado da função.*

Professora – *O domínio são os radianos: 0, o* $\frac{\pi}{2}$ *. Quem é o contradomínio? São os reais. Mas quem é a imagem? Quem são os valores que obtemos com os radianos? Qual seria o eixo dos arcos?O eixo y ou o eixo x? O domínio sempre vai no eixo x. Sempre vou colocar no eixo x os radianos. O contradomínio são todos os reais, mas a imagem são os resultados. Se o domínio esta no eixo x, a imagem é qual eixo?*

Alunos - *Y.*

Professora – *Representado pelo 1 0 e -1 Vamos fazer o gráfico?*

A professora cometeu um engano ao expressar que iria fazer o gráfico, seria melhor que ela indicasse aos alunos que representassem os pontos no figura, não podemos citar plano cartesiano, pois não indicamos os eixos x e y.



F

Representação dos pontos Tarefa I

O professor iniciou a Atividade V, novamente solicitando que a aluna C se dirigisse à lousa para fazer a tabela da tarefa I. Enquanto isso, o docente construiu a circunferência na lousa e pediu que a aluna localizasse os arcos de 0 graus, $\frac{\pi}{2}$rad e π. A aula foi desenvolvida sem usar a abordagem construtivista, os alunos apenas responderam os questionamentos do professor, sem terem tempo de conjecturar. Notamos também que o professor insistia em fazer a conversão em graus em vez de utilizar os arcos em radianos.

Professor - *Quais as coordenadas do ponto da função seno? P(0,0). A primeira esta feita e a segunda?*

Alunos - $P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

A atuação do professor incomodou alguns alunos como a aluna A que fez o seguinte comentário sobre o professor "fazer" a tarefa:

Aluna A - *Ele ta fazendo. Não deixa a gente fazer.*

Aluna C - *Não é tão difícil, é questão de prestar atenção.*

A observadora sugere ao professor que deveriam usar a reserva no laboratório de informática para levar os alunos, mesmo sem concluir a Tarefa I. Em todas as vezes que a observadora e o professor conversaram, o docente insistiu em levar todos os alunos ao laboratório. Não podemos inferir qual a razão para tal escolha.

Enquanto o professor pergunta aos alunos o seno nos arcos solicitados, a aluna C comenta com outra aluna que, em casa, estava fazendo os gráficos no *software* Geogebra.

Aluna C - *É da hora, fazer no computador. To aprendendo em casa, sozinha, a parte do computador.*

Aluna - *Como é?*

Aluna C - *Faz seno e cosseno no computador.*

Há duas semanas de levar os alunos ao laboratório, quando estava preparando os protocolos para impressão, a pesquisadora criou a atividade do Círculo e Gráfico das Funções Trigonométricas com o objetivo de familiarização com o *software* Geogebra e propiciar que os alunos visualizassem o ponto no círculo trigonométrico e a respectiva localização nos gráficos. A atividade foi enviada por e-mail e apresentada aos professores antes de ser desenvolvida com os alunos.

Gostaríamos também de destacar que fizemos um manual de orientação de instalação do software, contendo os sites onde o software gratuito poderia ser encontrado e com a imagem de todas as telas de instalação, caso um dos professores apresentasse dificuldade. A pesquisadora se colocou a disposição dos dois professores para demonstrar como utilizar o software, mas ambos afirmaram que iriam estudar o software em casa.

Uma aluna da tarde, semanas antes de começarmos a utilizar o software, encontrou a apostila que a pesquisadora havia preparado para os professores e pediu para instalar na sua máquina. Alguns dias depois enviou para o e-mail da pesquisadora um arquivo com as imagens das funções mesmo sem ter iniciado o estudo em sala de aula. Outras alunas da manhã comentaram que apenas com o nome do Software fizeram o *download* na internet e também estavam fazendo os gráficos. Algumas alunas questionaram a pesquisadora como mudar a unidade para radianos em sala de aula.

Para as duas turmas a observadora iniciou o desenvolvimento da Tarefa II no *software* Geogebra. Mas depois que os professores ficaram à vontade passou o controle da aula para os mesmos. Infelizmente, como o professor não deu continuidade, teve que assumir, novamente, a direção da atividade.

Professora - *Enquanto a Lu (se referindo à observadora) vai buscando o círculo é para vocês terem a noção que, de acordo com o ângulo da circunferência que a gente fazia, como começam as funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente. De acordo com que movimenta o ponto e vai modificando os ângulos ele vai abrindo a função para você, ao mesmo tempo ele abre as três funções: uma do cosseno, uma do seno e outra da tangente.*

Professora - *Mexe devagar em cima da circunferência. Escolham um ponto no primeiro quadrante. Qualquer ponto. O seno é positivo ou negativo? E o cosseno? E a tangente?*

Alunos - *Positivos.*

Professora - *Agora coloquem no segundo e faz o ponto voltar para primeiro... o que acontece? Vai tendo uma mudança?*

Aluna C - *Principalmente na tangente.*

Aluna C - *Vamos lá. Olha a tangente e o seno batendo no mesmo ponto.*

Professora - *Quando estava próximo do zero o seno e o cós tava subindo. Agora os dois estão descendo a tangente esta meia curva. Passa o ponto para o segundo quadrante.*

Aluna C - *Continua descendo o seno e o cosseno e a tangente ta lá embaixo*

Observadora - *O que quer dizer "tá subindo" na função? Qual a palavra?*

Aluna C - *Crescente e decrescente.*

Em conversa entre professora e pesquisadora foi decidido que alguns exercícios não seriam desenvolvidos com os alunos, em razão do prazo para encerramento da THA estar esgotado. Para nossa satisfação, a aluna I fez os exercícios. A aluna respondeu que o $sen(\pi) = 0$, $o\, cos(\pi) = -1$ e a $tg(\pi) = 0$.

Podemos inferir que a aluna estava vendo o gráfico no Geogebra, pois cometeu um erro na casa dos décimos ao se referir $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5\ e\ \ cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5$. Porém os sinais das funções nos quadrantes foram representados corretamente.

A aula da turma B a professora que fez o desenvolvimento. A seguir um trecho mostra que ela fez questionamentos como a observadora orientou com a primeira turma.

Professora - *Vocês estão no terceiro quadrante? O que está acontecendo com a reta do seno? O que esta acontecendo com seno e cosseno?*

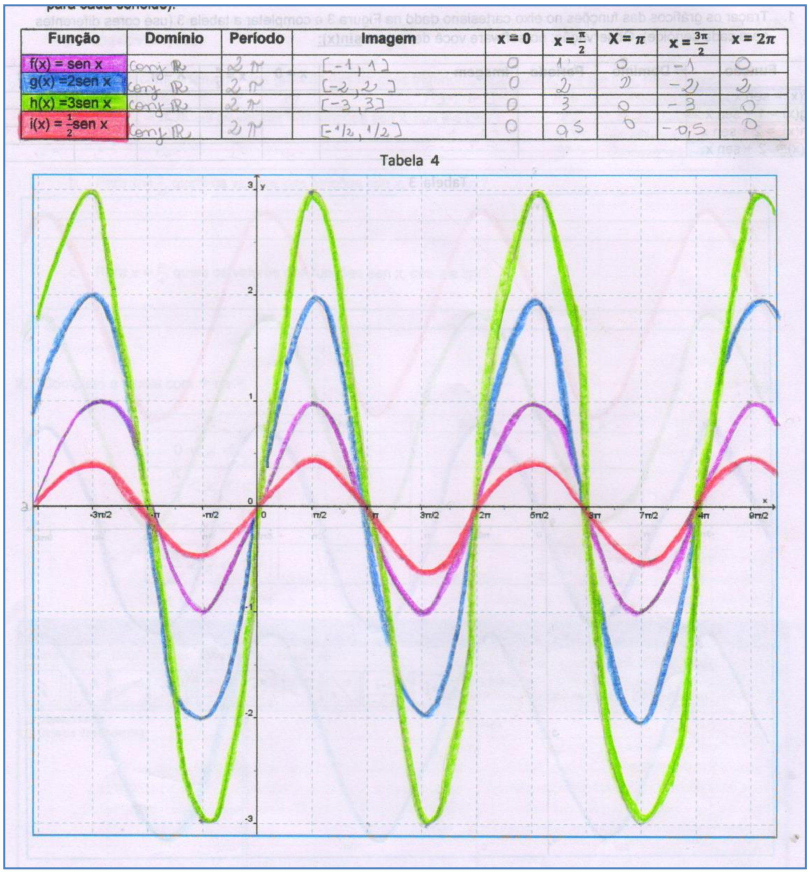
Alunos - *O seno está descendo e cosseno subindo.*

Professora - *Como eu falo em linguagem matemática?*

Aluna N – *Crescente e decrescente.*

Aluna C – *Por que a primeira foi f(x)=sen(x), a segunda foi f(x) = 2 + sen(x) e a terceira f(x) = 3sen(x)?*

Professora - *Para vocês verem a diferença de uma função para outra. Quando eu somo um valor ou multiplico outro.*

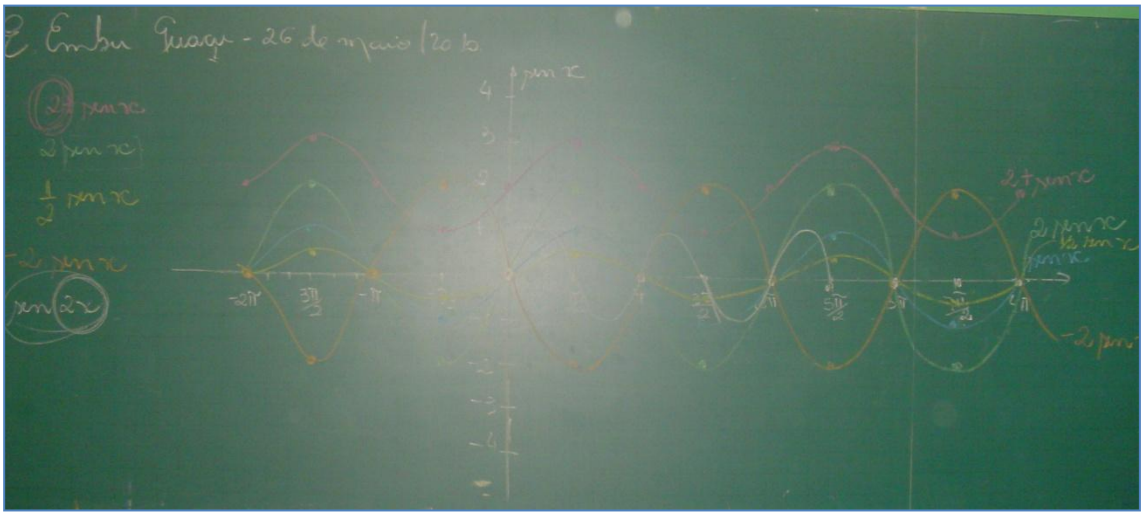


Função	Domínio	Período	Imagem	$x = 0$	$x = \frac{\pi}{2}$	$X = \pi$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$x = 2\pi$
f(x) = sen x	conj ℝ	2π	$[-1, 1]$	0	1	0	-1	0
g(x) =2sen x	conj ℝ	2π	$[-2, 2]$	0	2	0	-2	2
h(x) =3sen x	conj ℝ	2π	$[-3, 3]$	0	3	0	-3	0
i(x) = $\frac{1}{2}$sen x	conj ℝ	2π	$[-1/2, 1/2]$	0	0,5	0	-0,5	0

Tabela 4

Protocolo de aluno com reprodução dos gráficos construídos no Geogebra.

Depois que as duas turmas participaram, cada uma, de duas sessões no laboratório de informática, a professora fez a sistematização da função seno na sala com os alunos.



Correção dos gráficos da função sen(x)

***Aluna N -** Vou fazer sen(2x) eu vou fazer 2 vezes 0....*

Para fazer o gráfico da função sen(2x) a professora colocou uma tabela na lousa com as colunas x, 2x e f(x). Na tabela que acompanhava a atividade foram colocados os pontos $\frac{\pi}{4}$,$\frac{\pi}{2}$,$\frac{3\pi}{4}$ e outros.

Aluna N – *Por que todos dão zero?*

Professora - *Se em vez de sen2x fosse sen3x. No O rad seria sen3.0=sen0 = 0, mas no* $\frac{\pi}{2}$ *seria* $sen\frac{3\pi}{2}$*= -1.*

Observadora - *Alguém pensou em usar outro valor que não seja o* $\frac{\pi}{2}$*?*

Aluna N - *É impressão minha ou se for par é sempre 0?*

Observadora - *Em vez de* $\frac{\pi}{2}$*, coloca o* $\frac{\pi}{4}$*. Quando o arco não é suficiente, então pegamos outro.*

Professora – *Quando vocês fizeram os gráficos tinha o* $\frac{\pi}{2}$*e o de* π*. Todos os pontos batiam no zero, mas o gráfico não era uma reta. Ele faz ondinha. Ai meu Deus, esse vai ser o pior dos gráficos. Mas aqui no meio bate no 1. Entre o* de $\frac{\pi}{2}$ *e o* π *bate no 1. É por isso que a professora Lu ta fazendo essa colocação. Porque, às vezes não é suficiente só esses pontos que foram dados.*

Professora - *O que vocês acham que é o período da função?*

Aluna N - *Eu não sei o que é período, pode ser de um ponto para o outro. Do 0 à* π*.*

Aluno M - *Acho que é* 2π*, pois dá uma volta numa circunferência inteira.*

Professora – *Se vocês perceberem ele sobe e desce. Depois sobe e desce de novo, depois ele reproduz novamente.*

Aluna N - *É vai* 2π*, depois* 4π*,* 6π*.*

Professora - *Período é do 0 até tal valor, depois quando começa a sequência do gráfico novamente.*

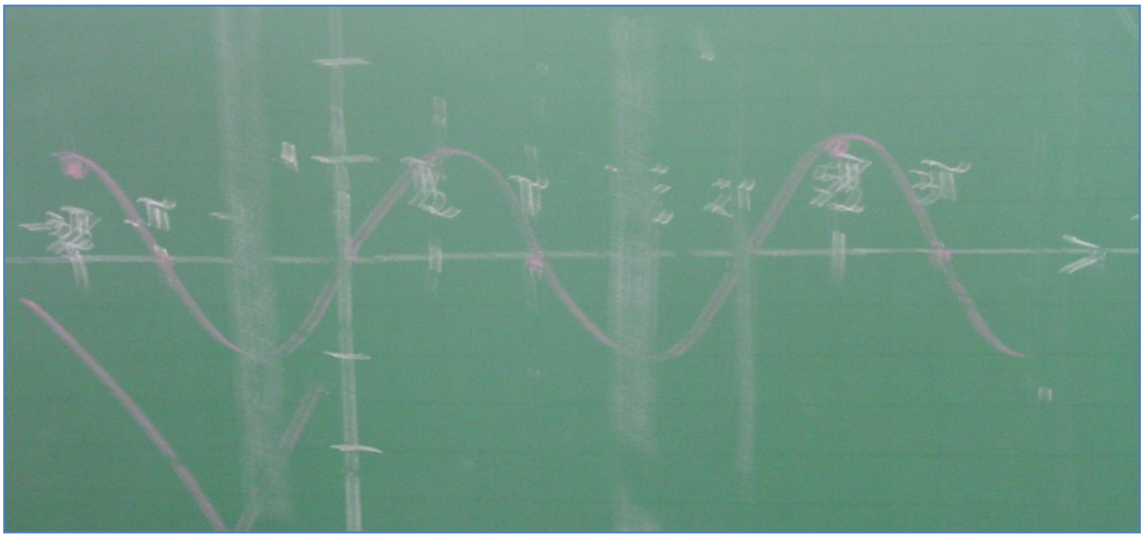
Aluna N - *Se fosse outro gráfico, com outros valores, o período seria onde parasse a sequência para continuar?*

Professora - *A maior parte deles é* 2π.

Aluna N - *Se não tiver uma sequência, não vai ter período. Se eu começar do* $\frac{3\pi}{2}$ *também vai dar...*

Aluna N - *Apaga a linha do* 2π, *coloca no* $\frac{3\pi}{2}$.

Professora - *Para pegar o mesmo trecho. Você pegou do* $-\frac{\pi}{2}$ *até* $\frac{3\pi}{2}$. *Mas fica mais fácil para ter o*2π.



Período da função sen(x)

Professora - *O que é imagem, eu já comentei. A imagem bate no eixo dos radianos, ou eixo y*

Aluna N - *De 1 a -1. O seno de x ta oscilando de 1 a -1. Esse é o conjunto imagem.*

No último exercício da atividade da função seno os alunos deveriam relacionar às expressões dadas, aos gráficos das respectivas funções. A professora indicou que o exercício deveria ser feito como tarefa de casa. Alguns dias depois ela faz a correção com o auxílio utilizando o software Geogebra e o projetor na sala de aula. Os alunos erram apenas o gráfico da função $f(x) = sen2x$.

Após a observadora comentar com o professor que ele deveria conduzir a aula no laboratório, ele diz que não sabia que iriam ao laboratório. Justificou que não havia disponibilizado tempo para estudar o programa.

Em conversa entre a professora, a pesquisadora e o professor, minutos antes do início da aula no laboratório com a turma do professor, a professora comenta com o mesmo que teve que conduzir a aula no laboratório. O docente se referindo á pesquisadora fez o seguinte comentário:

Professor - *Pois é, ela vai me deixar na mão.*

Os alunos não demonstram interesse em ir ao laboratório. Alguns sequer levam cadeiras para sentarem e demonstram que não têm motivação para usar o software. Houve uma demora muito grande até que todos se acomodassem. O professor não administrou os ânimos dos alunos e demonstrou estar nervoso.

Observadora pede que o professor inicie a aula, mas ele sequer sabia qual eram os arquivos do programa. Os alunos começaram a acessar sites de relacionamento como Orkut. Neste momento, a observadora começa e aula e avisa que o professor dará continuidade.

Professor – *Graças à Deus. Não me abandona Lu.*

Observadora – *Movimentem o ponto P.Coloquem sobre o* $\frac{\pi}{2}$*. Onde está no gráfico do seno e do cosseno?*

Aluno E - *90. O cosseno é 0 e o seno 1.*

Observadora – *Coloquem o ponto P no 60 graus ou* $\frac{\pi}{3}$ *radianos. O cosseno ta acima do zero. Se você olhar a linha vertical tem 0, 1 e – 1. Esse é o eixo da imagem da função. O eixo do domínio está em* $\frac{\pi}{2}$*, a cada m*$\frac{\pi}{2}$ *radianos. No 60 graus o seno, o cosseno e a tangente são positivos.*

Observadora - *Agora coloca o ponto P em torno de 150 graus. A seno é positivo. Ele ta crescendo ou decrescendo?*

Alunos - *Baixando*

***Aluno E –** No terceiro o seno e cosseno são negativos e a tangente é positiva.*

***Observadora –** Agora 360 graus, é uma volta. É um arco côngruo ao 0.*

***Observadora –** Abram o outro arquivo. Como o software é em inglês, eles usam o sin, com a letra i, para o seno. Tem um lugar chamado entrada na parte de baixo da tela, dá um clique na entrada a barrinha do cursor fica piscando.*

***Observadora -** Digitar f(x) = sin(x) e dê enter. Se você fez corretamente vai aparecer o gráfico do seno, que é uma senóide. No ponto $\frac{\pi}{2}$ ele tem qual imagem?*

***Alunos -** No 1.*

***Observadora -** Depois do 2π, ele passa no $\frac{5\pi}{2}$ e começa tudo novamente.*

Na aula seguinte o professor fez o gráfico na lousa, colocou os pontos. Não explicou o que é função, o domínio e a imagem. Os alunos reproduzem o gráfico no protocolo.

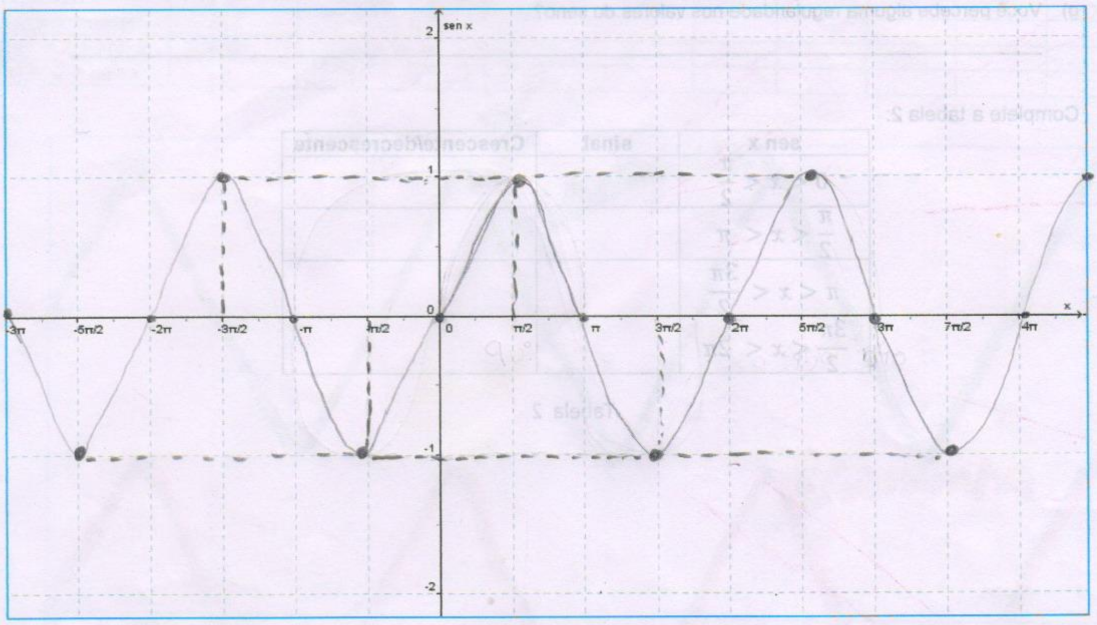


Figura 2

Protocolo de aluno gráfico da função sen(x)

O professor começa a corrigir as questões da função seno e faz um importante comentário usando o gráfico.

Professor - *Quanto é $\frac{\pi}{10}$? É o 180 dividido por 10? São 18 graus. É uma função contínua, existem vários pontos entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ Só fizemos esses para visualizar a função.*

Professor - *Qual é o domínio da função? Quais valores posso dar para o domínio?*

Alunos - *1 0 -1.*

Professor - *0, 30, - 30, 45, 180, 520, ...Qualquer número real. E a imagem? Qualquer real entre -1 e 1.*

Professor - *Por que é uma função limitada?*

Aluna A - *Porque ela fica entre 1 e -1.*

Na aula seguinte os alunos deveriam retornar ao laboratório, mas como comentaram que entenderam melhor na lousa, a pesquisadora e o professor resolveram usar o projetor na sala de aula para exibir os gráficos das funções.

Mas uma vez o professor não utiliza o *software* e a observadora assume a aula. A observadora digita as funções e espera os alunos copiarem nos protocolos.

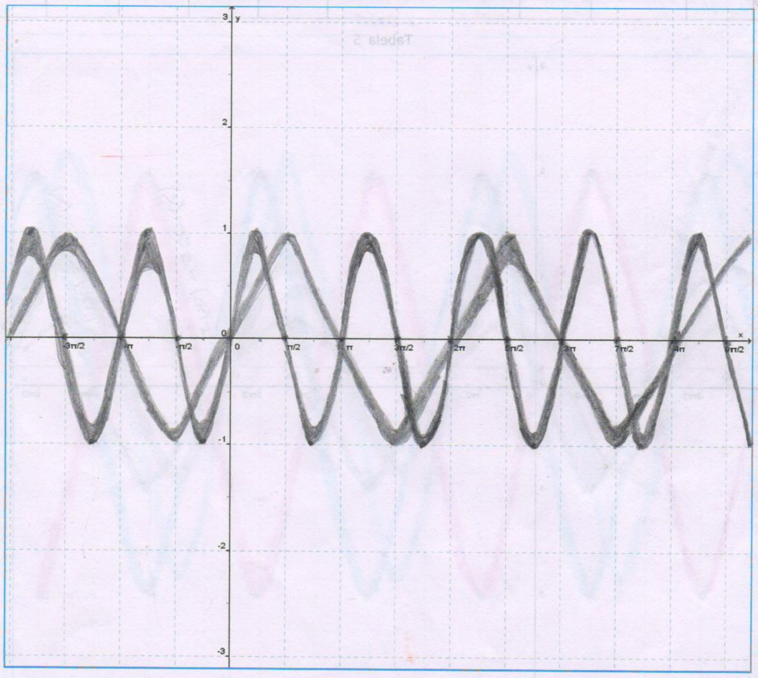
A observadora explicou as características das funções como amplitude, período, domínio, imagem, parâmetros, mas os alunos não participam da aula. Apenas se limitaram a copiar os gráficos e provocarem uns aos outros.

Professor - *Acho que eles estão mais acostumados com a lousa.*

No encerramento da aula a observadora levou os protocolos dos alunos e colocou recadinhos em cada para que o aluno continuasse a se esforçar.

Função	Domínio	Período	Imagem	$x = 0$	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{2}$	$X = \frac{3\pi}{4}$	$X = \pi$	$x = \frac{5\pi}{4}$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$x = 2\pi$
f(x) = sen x	$\mathbb{R}$	2π	$[-1, 1]$								
g(x) = sen2x	$\mathbb{R}$	2π	$[-1, 1]$								
h(x) =sen4x											

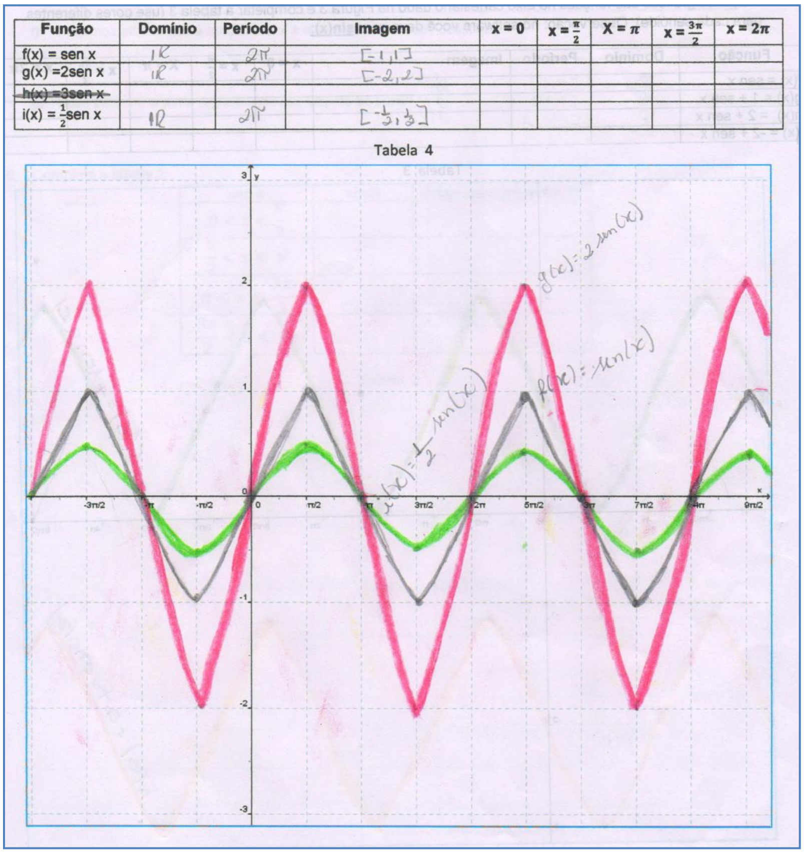
Tabela 6



Protocolos alunas Ang e J

Na última aula que a observadora acompanhou a turma, em 26 de maio, o professor pediu para que a observadora ficasse com a turma, pois tinha um compromisso urgente e não poderia ficar. O professor não avisou a Direção sobre sua saída e, voltou para a aula seguinte com outra turma.

Assim que dá o sinal de entrada, a observadora se dirigiu à sala de aula e explicou que o professor pediu que ela começasse as atividades do dia. Cinco alunos demoraram a entrar na sala, a observadora solicitou à professora eventual que os encaminhasse à Direção. Quando entram na sala causam tumulto e ficam conversando.



Protocolo aluna A e aluna J.

Observadora - *Eu notei que vocês tiveram dificuldade para identificar os arcos fundamentais. O professor explicou isso* $0, \frac{\pi}{2}\ \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi.$ *Em trigonometria você tem que enxergar esses* π *radianos tanto no sentido horário como anti-horário.*

A observadora começou a traçar o gráfico da função referência f(x) = sen(x) na lousa e solicitou que os alunos fiquem em silêncio. Alunos começaram a discutir para deixar o ventilador da sala ligado.

Observadora - *Pessoal eu oficialmente, vou encerrar o projeto.*

Alunos – *Professora, mas tem gente que quer aprender.*

Alunos - *Coloca para fora.*

Observadora - *Eu investi nessa turma, me falaram que essa turma era difícil. Mas eu sempre to explicando, tratando bem, mesmo os que me ignoram. Porque* *estou trabalhando para ajudar o professor e vocês. Eu só vou comunicar à Direção e venho buscar minhas coisas.*

Assim que bate o sinal o professor aparece na escola. A pesquisadora fala que se for continuar o projeto será apenas como observadora, não iria mais ministrar aula para a turma. Um dia após o professor chega atrasado para a aula da turma e comunica à Direção que não precisavam se preocupar, pois a observadora estava com a sala (o que o professor não sabia é que no momento da aula a pesquisadora estava em reunião com os gestores).

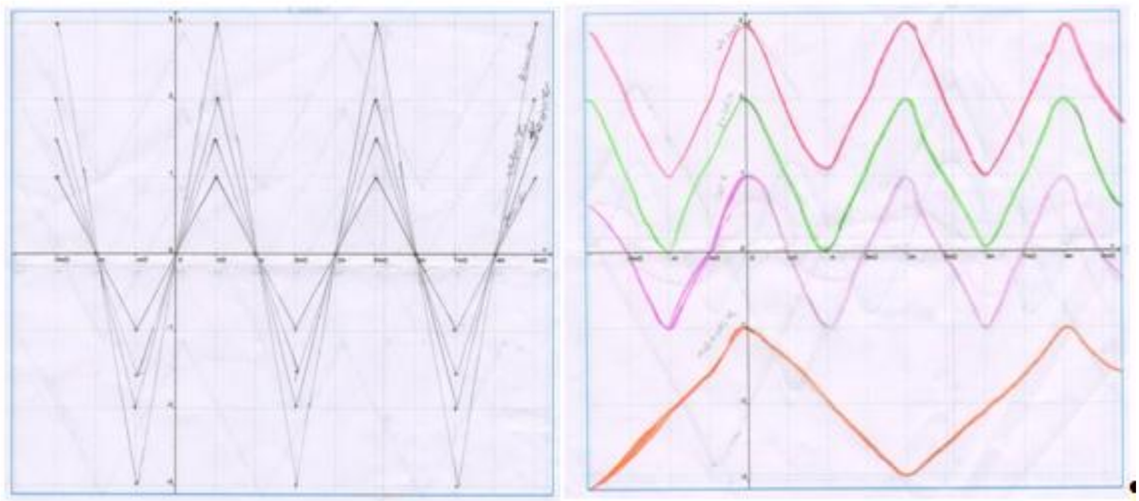
Os próximos dias o Diretor conversou com o professor que relatou que estava desanimado com a sala e com problemas pessoais. Por este motivo iria encerrar o projeto.

Durante a entrevista final com o professor ele estava bem a vontade. Pediu desculpas à pesquisadora por não continuar com o projeto.

3.6. Atividade VI - Estudo da função cosseno

A introdução da função cos(x) foi muito peculiar. A professora perguntou à pesquisadora se poderia enviar a atividade para ser iniciada em casa. Como a atividade havia sido preparada para ser realizada em duplas, alguns alunos receberam protocolos que haviam sobrado da função sen(x) e alteraram para a função cosseno. Após autorização da pesquisadora recebemos os protocolos. Como os alunos só haviam feitos os gráficos da função seno no *software* Geogebra e não estavam de posse dos protocolos, fizeram as atividades apenas mobilizando os conhecimentos de gráficos da função seno e as tarefas com a função cosseno no círculo trigonométrico. Assim, consideramos os protocolos desta atividade inicial satisfatórios.

Podemos observar alguns erros como: o traçado dos gráficos e construção do gráfico da função sen(x) e suas transformações como nas Figuras A e B:



Figuras A e B: Erros no traçado dos gráficos da função cosseno e suas transformações

Muitos apresentaram os gráficos corretamente como na Figura C. Foi possível inferir que esta atividade exploratória contribuiu para melhorar a estima de alguns alunos que perceberam que conseguiram realizar a atividade com sucesso

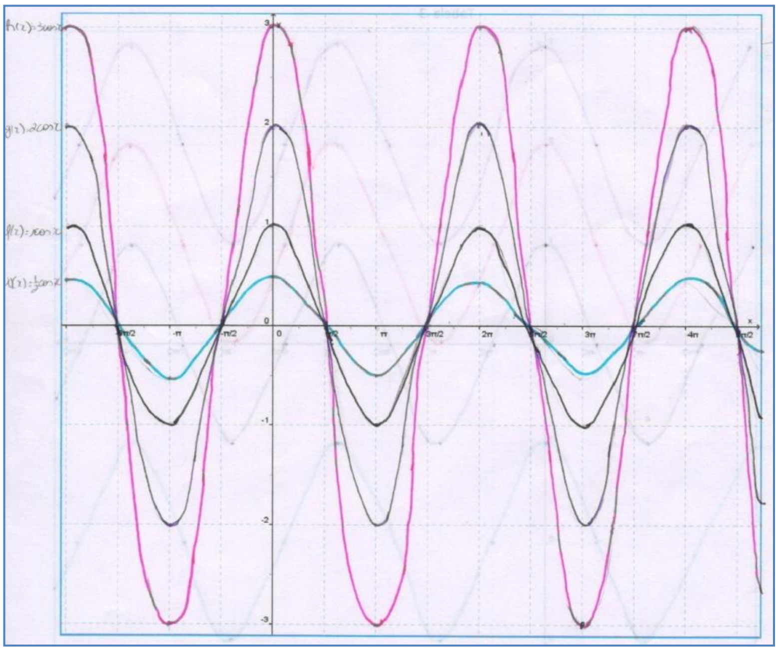


FIGURA C - Gráficos da função cosseno e transformações

Para o desenvolvimento dos gráficos das transformações da função cos(x), a observadora manipulou o *software* Geogebra e a professora ficou na lousa utilizando a projeção para o desenvolvimento da atividade. Ressaltamos que esta dinâmica não havia sido tratada previamente e ocorreu apenas por restarem poucos minutos da aula e seria importante aproveitar a oportunidade de estar com o projetor à nossa disposição. Os alunos foram orientados a fazerem os gráficos nos protocolos e, depois de alguns instantes o gráfico seria projetado para a correção. Essa aula foi bem dinâmica, os alunos ficaram interessados e fizeram todos gráficos.

Aluna N - *Faz o círculo. Aqui é* $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ *Aqui é 1, 1, -1 e-1.* (traça o círculo trigonométrico e identifica os eixos do seno e do cosseno*).*

Aluna N - *Aqui é o cosseno que você tem que analisar. Quando for 0 ta no 1. Quando for* $\frac{\pi}{2}$*, ta no 1. Mas tenho que descer até o cosseno, ele vai bater no zero. Quando tiver no* π*, vai bater na reta do cosseno, no -1. O* $\frac{3\pi}{2}$ *ta no -1, vai subir para o zero. Quando for menos, você faz o círculo ao inverso, coloca 0,* $-\frac{\pi}{2}$*,* $-\pi$*. Para poder fazer esse daqui para o outro lado (horário).*

A professora fez a correção das questões, a partir da construção do gráfico que representa a função f(x)= cos(x). O encaminhamento da correção das questões foi adequado à abordagem construtivista.

Professora - *Se eu fizer a projeção da imagem não passa só no 1, 0 e -1. Tem todos os números entre eles. Ou posso escrever Y pertence aos reais...*

Professora – *Por que a função cos(x) é limitada?*

Aluna - *Porque ela não passa de 1 e -1.*

Professora - *Qual o valor máximo? O que vocês entendem por valor máximo?*

Aluno A – *Limite.*

Observadora - *Quem já baixou o Geogebra em casa. A função tangente, você tem que digitar a relação que a professora Karina várias vezes mostrou: a tangente f(x)=sin(x)/cos(x) ele entende que a função f é a divisão do seno pelo cosseno.*

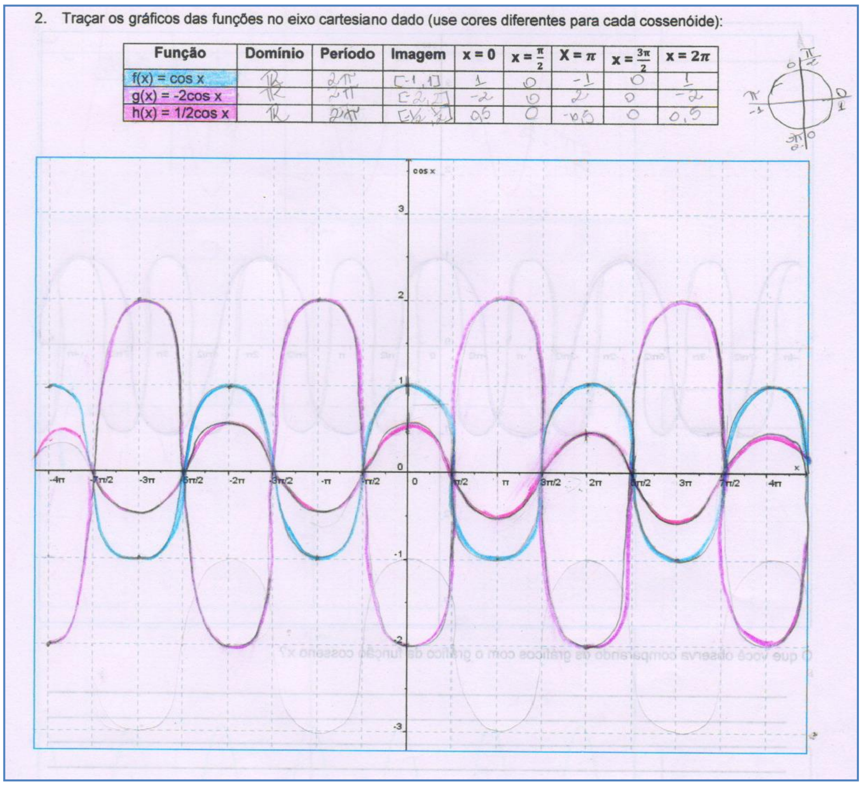
Observadora – *O que a associada, 1 + cós(x), tem em comum com a função referência?*

Aluna J - *O que é diferente são os valores.*

Aluno *- O comportamento é “paralelo”.*

Observadora - *A palavra paralelo “até” da para entender. Tem uma palavra especial para falar... Vai tem gente falando certo...*

Aluna I - *Variação da imagem.*



Gráficos da função cosseno e transformações

Professora – *Agora o gráfico da função g(x)=-2cosx.*

Aluna N - *Então 1 vezes -2, dá -2. Ta errado... O cos 0 = 1, vezes – 2 é -2. Depois. -1 vezes - 2 (menos com menos é mais), vai dar 2, lá em cima.* (A aluna olha os pontos do gráfico de referência cosx e explica para amiga).

Aluna N - *Aqui no domínio é conjunto dos reais. O período é* 2π *porque daqui até aqui deu uma. Depois começa tudo, deu* 2π*.*

3.7. Atividade VII - Estudo da função tangente

Para o desenvolvimento da atividade da função tangente, a pesquisadora e a professora, decidiram que os alunos deveriam apenas copiar a projeção da função feita no Geogebra. Na atividade de familiarização com *software* Geogebra (o círculo trigonométrico e os gráficos das funções) os alunos tiveram contato com o gráfico da função tangente. Para retomar o gráfico, fizemos apenas a projeção em sala de aula.

Aluna N – *Como chegaríamos a esse gráfico sem o Geogebra?*

Observadora - *Você iria colocar alguns pontos. Lembram que no* $\frac{\pi}{2}$ *a tangente não se define. A tangente é paralela ao eixo dos senos. (Professora mostra com régua na projeção do gráfico na lousa.)*

Professora - *Se vocês perceberem entre o 0 e o* $\frac{\pi}{2}$ *ele não encosta.*

Aluna N - *Em nenhuma?*

Professora - *Ele se aproxima mas não cruza.*

Observadora - *Tentem marcar uns pontos, por exemplo, a* $tg\frac{\pi}{4} = 1.$ *Coloque um ponto. No* $-\frac{\pi}{4}$*, marque outro ponto no -1. Agora você deve a fazer uma "reta", bem de leve, paralela ao* $\frac{\pi}{2}$*, porque não precisamos dela toda. Depois uma reta paralela ao* $-\frac{\pi}{2}$*. Daí você deve unir esses pontos.*

A observadora percebeu que alguns alunos estavam com dúvida, então começou a marcar os pontos em uma nova tela do Geogebra como orientou os alunos. Depois traça as paralelas e une os pontos.

Observadora - *Eu estou fazendo segmentos, mas deveria ser uma curva. A mesma coisa é lá embaixo. Ele não encosta faz as paralelas ao* $\frac{\pi}{2}, ao\ \frac{3\pi}{2}$*. Mas não pode encostar é a cada* π *paralela. Depois que você fizer as duas primeiras, as outras ficam fáceis.*

Aluna N - *Mas daí ela continua para o infinito.*

Na correção da tabela da tangente a professora retorna ao comportamento tradicional. Não dá o tempo necessário para que os alunos façam as conjecturas e respondam as questões.

Professora – *Vamos fazer a correção da tabela da tangente. O domínio é* $D = \{x \in \Re / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Aluna N - *Tem que por assim?*

Professora - *Porque não é definida a função da tangente em* $\frac{\pi}{2}$.

Professora - *O período é de quanto? Olhem o gráfico. É a cada* π*? Se a cada* π *ele começa a se repetir...*

Professora - *Comparando os gráficos o que acontece?*

Aluna N - *Na curvinha, aumenta uma unidade para cima.*

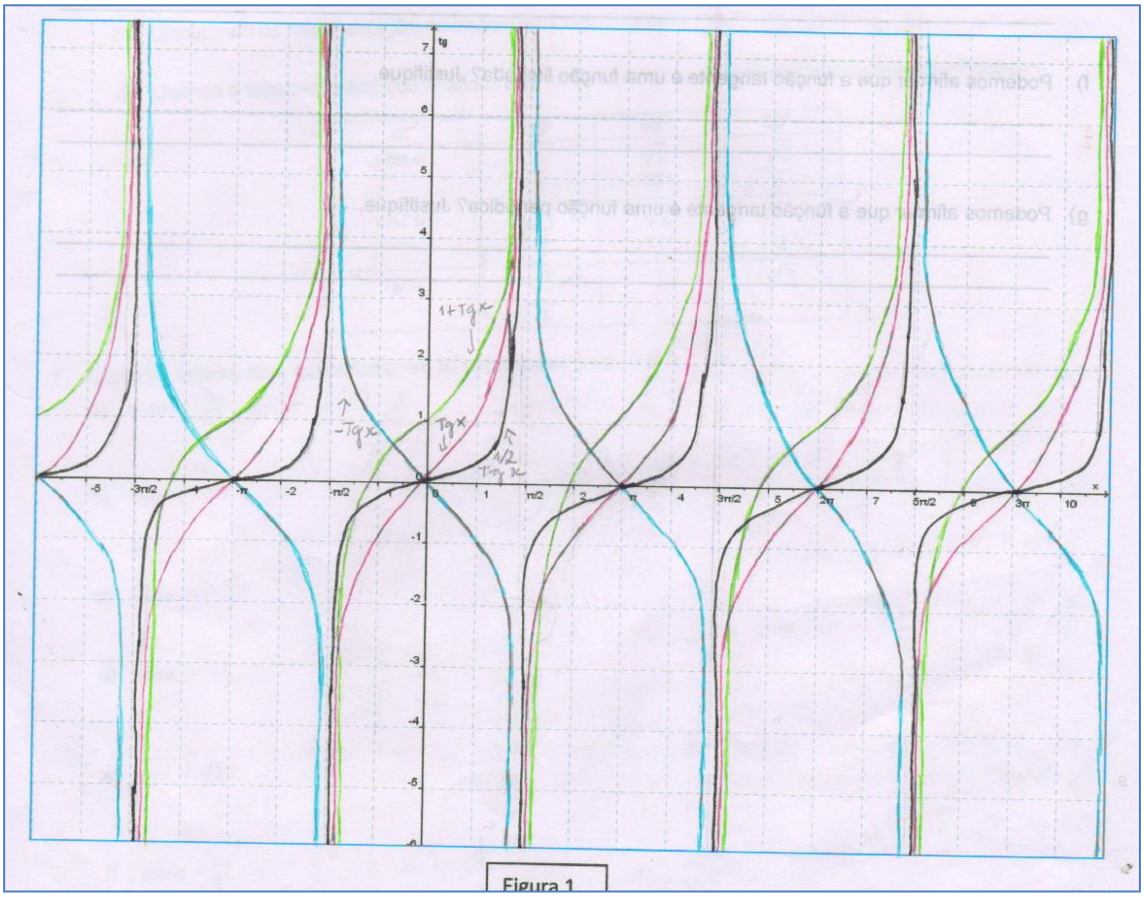
Professora - *Na verdade é a curvinha transladada, aumenta uma unidade para cima.*

Professora – *E comparando a tg(x) com – tg(x).*

Aluna N - *Ele inverteu.*

Professora - *Isso chama reflexão.*

Aluna N *-É uma simetria né? (aluna lembra a palavra)*



Protocolo com gráficos da função tangente e suas transformações

3.8. Atividade VIII - Estudo das equações e inequações trigonométricas

O desenvolvimento da atividade VIII não foi apropriado à metodologia construtivista. No início a professora fez a explicação dos exemplos, porém não disponibilizou tempo apropriado para que os alunos fizessem os exercícios.

Numa abordagem construtivista, a professora iniciaria a atividade propondo a expressão $\text{sen}^2\text{x} = 1$. Antes de entregar as folhas aos alunos, deveria perguntar quais os valores de x, tornavam a equação verdadeira. Em seguida deveria apresentar os arcos côngruos à $\frac{\pi}{2}$ e à $\frac{3\pi}{2}$ para tentar conduzir os alunos a generalizar a expressão $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

A seguir relatamos tal como foi desenvolvido pela professora com os alunos.

Professora - *Quais os valores de x que satisfazem a expressão* $sen^2x = 1$*?*

$$sen^2x = 1 \Rightarrow sen\ x = \pm 1 \qquad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Professora – *Não é mais 1 ou menos 1?*

Aluna N - *Não entendi...*

Professora – *Aplicamos a raiz quadrada nos dois lados. Raiz de 1 é* ± 1.

A professora lê o conjunto solução e escreve na lousa, mas não explica porque o x é um arco côngruo à $\frac{\pi}{2}$.

Professora – *Não é uma equação? Toda equação tem uma constante.*

Professora – *Esse final é o mais difícil, o mais complicado. Eu também tenho dificuldade.*

Professora – *Por que entrou o K? Porque tem uma, incógnita, variável.*

Aluna N *- Mas tem que ser esse k?*

Professora – *Na trigonometria é K. Como você achou que alfa vale 0. Para dar* $cos\alpha = 1$ *ou 0 ou* 2π*. Por que* $2k\pi$*? Pois se substituir por 0 vai dar 0.*

A aluna N faz uma importante sistematização, podemos inferir que neste momento ela compreendeu como resolver uma equação trigonométrica:

Aluna N *- Se fosse* $cos\alpha = -1$*. Seria* $\frac{3\pi}{2}$.

A tabela com as razões trigonométricas dos arcos notáveis $30°, 45°\ e\ 60°$ foi colocada na atividade para familiarizar o uso das razões com números irracionais uma vez que muitos exercícios utilizam este tipo de notação. Na THA inicial, apresentada aos professores parceiros como sugestão de aplicação, a última atividade tinha o objetivo de deduzir as razões dos arcos notáveis a partir de um quadrado e de um triângulo equilátero. Notamos que nenhum dos professores aplicou tal atividade. No desenvolvimento da Tarefa II da atividade III, seria um importante momento para apresentar aos alunos as razões nesta notação, porém mais uma vez não foi comentado. Foi explorada apenas a relação entre os ângulos complementares. Esperávamos que nesta terceira aplicação, os professores comentassem a notação, porém, mais uma vez, não obtivemos a atitude esperada.

Professora – *Para resolver a equação* $cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$*, vocês se complicaram, porque entrou o mais e o menos. Primeira coisa* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *é qual grau? Qual cosseno tem* $\frac{\sqrt{3}}{2}$*? Vocês falaram que era* $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}}$*. Se eu fizer a projeção, este ângulo ele também tem o mesmo valor do cosseno, o 330. Por isso na hora da solução fica* $\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$*.*

Professora – *Qual ângulo tem* $tg\alpha = -1$*? Eu pedi para vocês pesquisarem e transformarem em radianos.*

Aluna N - *135* e *315.*

Aluna I - *Usei a regra de três para chegar em* $\frac{\boldsymbol{7\pi}}{\boldsymbol{4}}$ (Figura D).

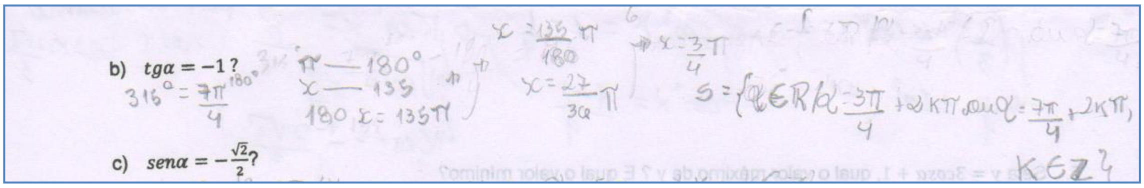


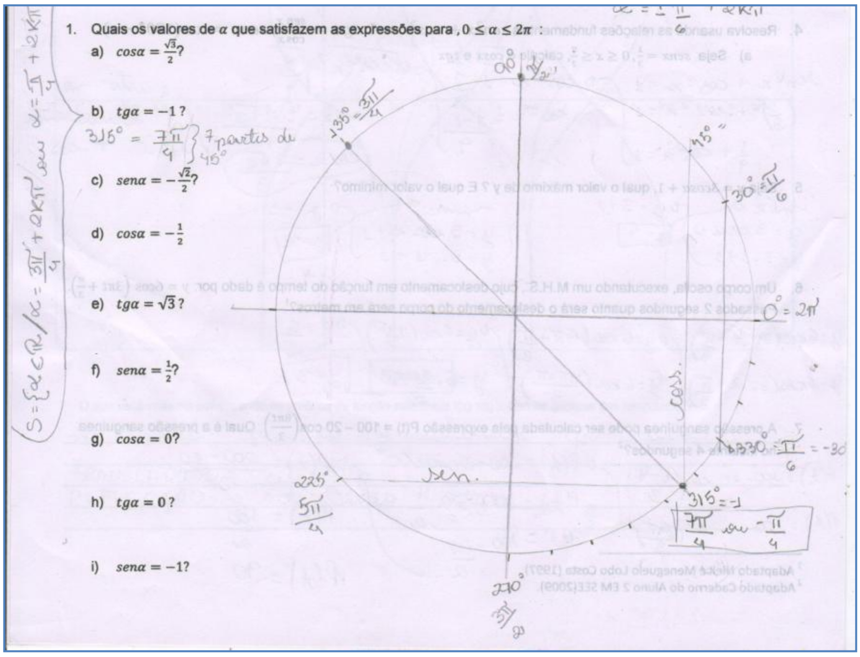
Figura D - Protocolo aluna I indica o uso da regra de três simples para obter o arco.

No próximo relato conseguimos inferir, mais uma vez, que alguns alunos conseguiram mobilizar os arcos sem fazerem a conversão para graus.

Aluna C - *Tem outro jeito... No caso do cosseno deu mais ou menos, porque o cosseno é o mesmo no* $\frac{\pi}{6}$ *ou no* $-\frac{\pi}{6}$*. Eu construí o círculo e dividi em* $45°$ *e para chegar no* $135°$*contei um, dois,* $\frac{3\pi}{4}$*. E depois 4,5,6 e* $\frac{7\pi}{4}$*.*

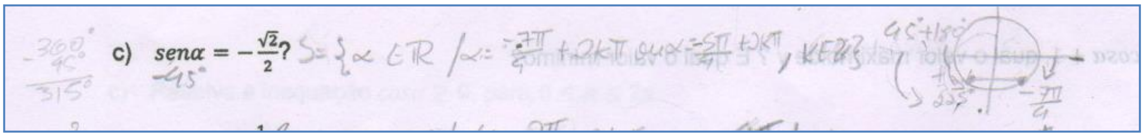
Aluna N - *Como ela teve essa percepção de dividir assim?*

Professora - *Porque ele é múltiplo de 45.*



A aluna S utiliza os instrumentos para indica a construção do círculo

Observamos no protocolo abaixo que o aluno possivelmente generalizou incorretamente que, se o seno é negativo, os arcos também têm orientação negativa (sentido horário):



Erro ao anotar os arcos do terceiro e quarto quadrante.

Para corrigir as expressões do item 2, a professora faz os dois primeiros itens como exemplo e, novamente, não conduz a atividade na abordagem construtivista. A docente ainda fez diversas conversões de medidas de radianos para grau, não podemos afirmar se configura um erro, porém muitos alunos estavam fazendo o uso dos arcos em radianos e deveriam ser incentivados a evitar as conversões.

Notamos que a correção da afirmação “sen2x = 2 sen x “ a professora fez um bom encaminhamento. Porém não explorou a condição que torna a expressão verdadeira: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Fez apenas um comentário superficial.

Professora – *É falsa por que? Tem alguma possibilidade para algum valor ser verdadeiro? A maioria falou: é falsa. Mas há algum valor verdadeiro? Vocês* *falaram que era falsa por causa dos gráficos, mas tem dois valores que esta igualdade é verdadeira: quando for 0 e quando for* π.

Professora - *Se você olhar nos gráficos verá que no 0 e no* π *eles estão no mesmo ponto.*

Professora - *Quando* $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. *k é constante. Se eu não der nenhuma volta k é 0. Mas quando dou uma volta vai ser* $1.\pi = \pi$ *Também da certo. Só é verdadeira se o x for igual* $k\pi$.

Para resolver a equação $\mathrm{senx} = \frac{1}{3}, 0 \leq \mathrm{x} \leq \frac{\pi}{2}$, calcule o $\cos\mathrm{x}$ e tgx o enunciado do exercício fornece as relações fundamentais: $\mathrm{sen}^2\mathrm{x} + \cos^2\mathrm{x} = 1$, $\mathrm{tgx} = \frac{\mathrm{sen\,x}}{\cos\mathrm{x}}$, e $\mathrm{sen}\alpha = \cos(180° - \alpha)$. A professora desenvolveu o exercício adequadamente.

Professora - *Ela deu as três relações, vou chamar relação 1, 2 e 3. Ela deu o seno de um ângulo qualquer,* $\frac{1}{3}$, *e fala que o ângulo está entre o 0 e o* $\frac{\pi}{2}$. *Qual quadrante ele está? Esse ângulo está no primeiro...*

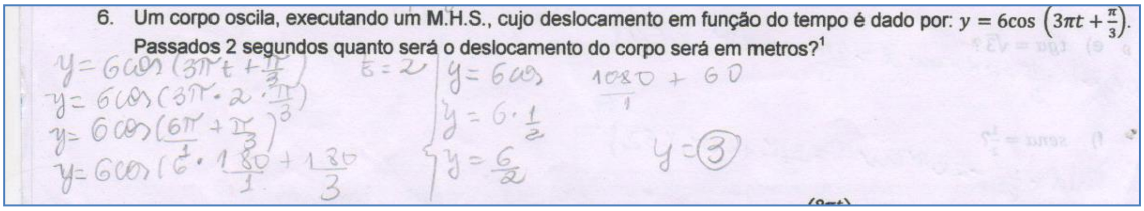
Professora - *Através do seno quer saber o cosseno e a tangente. Para descobrir a tangente eu preciso do cosseno também. Eu tenho que achar o cosseno. Qual é a relação que eu posso utilizar para achar o valor do cosseno?*

Alunos – *3.*

Professora - *Não é a 3, porque eu tenho que saber o ângulo alfa. Não posso usar a terceira.*

A professora utiliza a primeira relação e questiona os alunos se no primeiro quadrante o cosseno é positivo ou negativo. Assim obtém o $cosx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Depois utiliza o seno(x) e o cosseno(x) para obter a tangente de x.

Os dois últimos problemas desta atividade a professora orienta que os alunos façam sozinhos. Abaixo colocamos alguns protocolos que demonstram que os alunos utilizaram estratégias diferenciadas:


6. Um corpo oscila, executando um M.H.S., cujo deslocamento em função do tempo é dado por: $y = 6\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$. Passados 2 segundos quanto será o deslocamento do corpo será em metros?[1]

Aluna fez as conversões para grau e calculou o cosseno de (1080 + 60)

Na Figura O é possível verificar que o aluno reduziu ao mesmo denominador os arcos, em seguida fez a redução ao primeiro quadrante como observamos nas anotações do círculo trigonométrico:

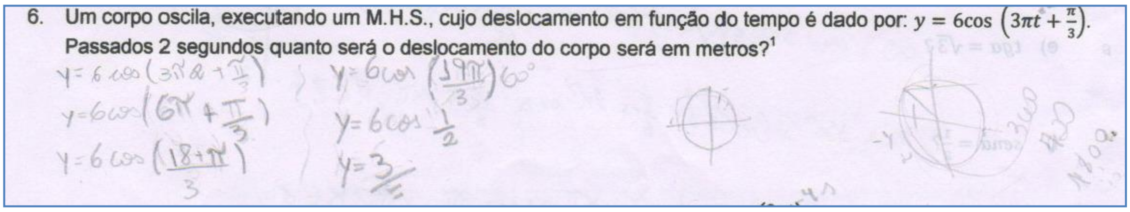
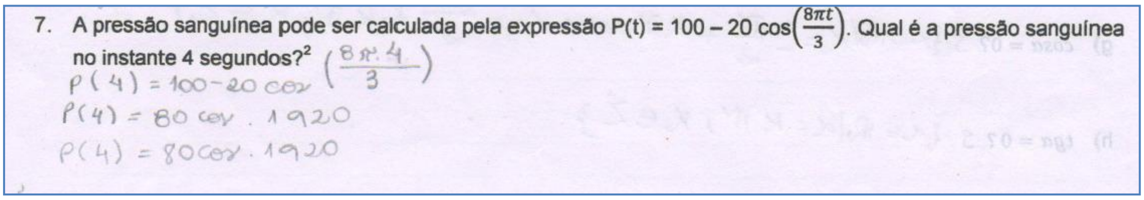
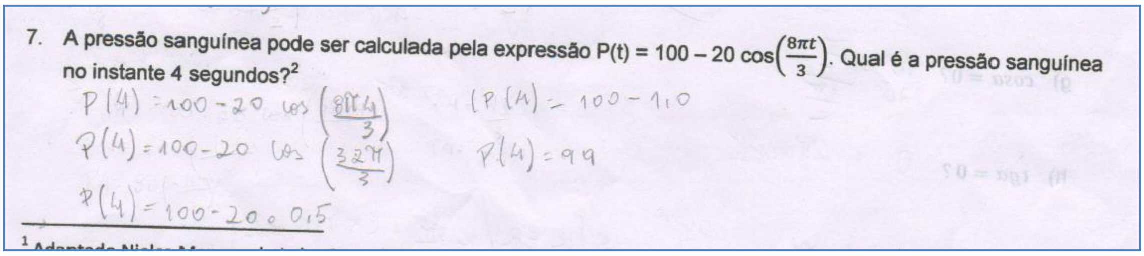

6. Um corpo oscila, executando um M.H.S., cujo deslocamento em função do tempo é dado por: $y = 6\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$. Passados 2 segundos quanto será o deslocamento do corpo será em metros?[1]

Figura O - Protocolo do Aluno J

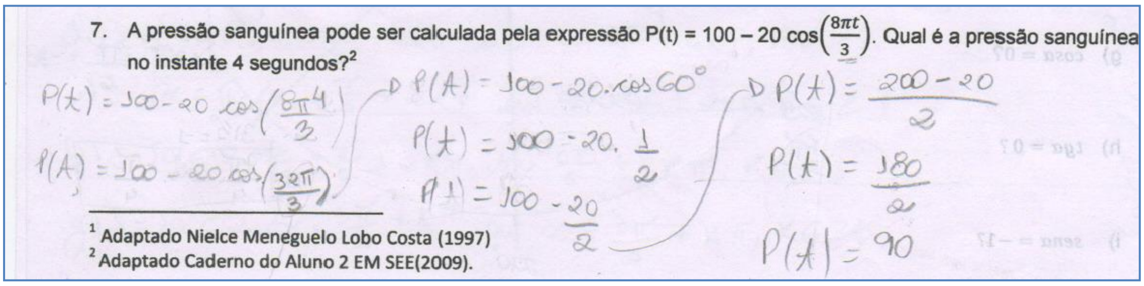
No último exercício de funções trigonométricas, alguns alunos resolveram com êxito, porém os protocolos a seguir indicam a variedade de erros que foram cometidos:


7. A pressão sanguínea pode ser calculada pela expressão $P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right)$. Qual é a pressão sanguínea no instante 4 segundos?[2]

Aluna cometeu erro algébrico ao subtrair 20cos de 100.


7. A pressão sanguínea pode ser calculada pela expressão $P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right)$. Qual é a pressão sanguínea no instante 4 segundos?[2]

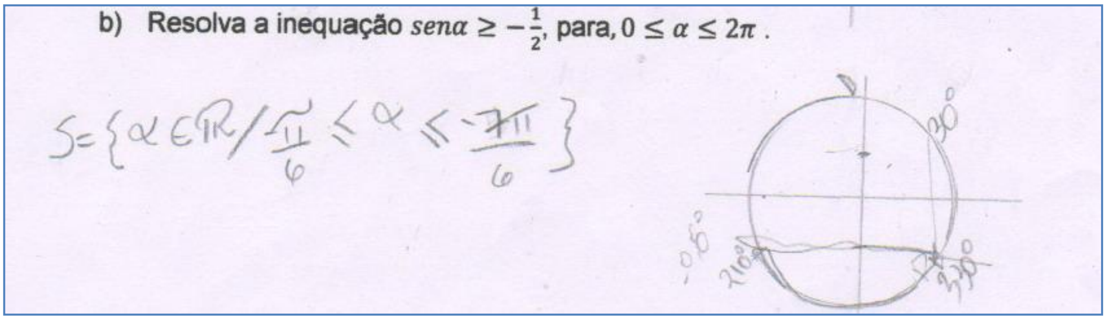
Erro na multiplicação de números decimais e no cosseno



Erro na subtração de números racionais e no cosseno.

Na sequência a seguir podemos acompanhar no encaminhamento que a professora fez da Tarefa II para inequações trigonométricas, que alguns alunos conjecturaram outros exemplos como o $cos\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Professora – *Para resolver* $sen\alpha \geq \frac{1}{2}$, *para,* $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, *é conveniente utilizar a circunferência trigonométrica para marcar os arcos da circunferência que têm* $sen\alpha \geq \frac{1}{2}$. *Tem que pegar os ângulos onde o seno é maior ou igual a meio a partir do 30 até 150.*



Erro na orientação do arco $\frac{7\pi}{6}$.

Aluna - *E se fosse o cosseno?*

Professora - *Você iria olhar no deitado. Você tem que olhar no círculo. Onde o cosseno é menor que ½.*

Professora - *Os pontinhos que a professora Lu colocou na circunferência são 30, 45, 60.*

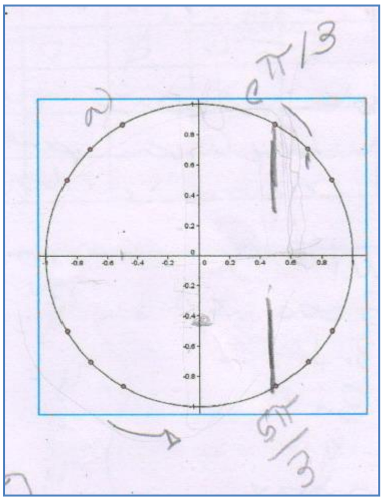
Professora - *Qual é o ângulo que bate no ½?*

Alunos – *60.*

Professora - *E o outro?*

***Alunos –** 330.*

***Professora** – Em radianos?*



Com exemplo da aluna para $cos\alpha \geq \frac{1}{2}$

No trecho a seguir, acompanhamos a resolução da inequação $sen\alpha \geq -\frac{1}{2}$. É possível perceber que a aluna I conseguiu resolver o exercício com desenvoltura e, apenas perguntou à professora se a resolução estava correta, para ter certeza da conjectura.

***Aluna I** – O* $sen\, de -\frac{1}{2}$ *é neste ponto no* $-\frac{\pi}{6}$. *Vem com dois pontos até* $-\frac{\pi}{6}$ *desde o* $\frac{7\pi}{6}$. *Conta esta volta até aqui né?*

***Professora -** Você vai pegar de* $-\frac{\pi}{6}$ *até o* $\frac{7\pi}{6}$. *Porque se eu pegar daqui para cá são os menores, não os maiores. Ta certo. Se eu começar daqui para lá ele vai ser dos menores, eu quero os maiores.*

CAPÍTULO 4 - A THA EM SALA DE AULA: ATUAÇÃO DOS PROFESSORES E DOS ALUNOS

Introdução

Neste capítulo apresentaremos a análise da atuação dos professores parceiros e dos alunos durante o desenvolvimento da THA. Elegemos algumas categorias para efetuar a análise. As informações estão baseadas nas observações das aulas, gravações em áudio, protocolos dos alunos e entrevistas realizadas com os professores parceiros e alunos.

As categorias que consideramos relevantes são:

- Clima de gestão da classe;
- Interesse dos alunos pelas atividades;
- Dificuldades observadas e possíveis causas;
- Interação professor x aluno;
- A opinião dos alunos sobre as atividades.

As categorias são analisadas com foco nas aulas de cada professor, separadamente. Em seguida apresentamos uma única análise do desenvolvimento da THA com alguns recortes de ocorrências.

4.1. O desenvolvimento da THA pela professora P1.

No início do desenvolvimento da THA a professora prestou atendimento individual para as duplas e evitava se colocar para a sala toda. À medida que o tempo passava, desenvolvia as atividades com mais tranquilidade e conseguia se adaptar à função de mediar às aprendizagens dos alunos.

Uma estratégia utilizada pela professora é a sistematização das tarefas. Depois que a professora acompanhava os alunos na resolução das atividades, sempre se dirigia à lousa para fazer a correção coletiva. Assim, propiciou que os alunos participassem da aula, socializando as dúvidas e conjecturas levantadas durante a resolução.

No início de todas as aulas, a professora I fazia um comentário da aula anterior. Este comportamento foi observado como um ponto positivo da professora, uma vez que possibilitava que os alunos prestassem atenção dirigida à atividade e sempre retomava conteúdos importantes vistos anteriormente para dar prosseguimento à tarefa ou dar explicação da tarefa a ser iniciada.

Com relação ao tempo previsto para as atividades, podemos dizer que foi adequado para a maioria das atividades desenvolvidas pela professora P1. Em algumas tarefas observamos que o tempo gasto foi excessivo, causando certa indisciplina entre os alunos que encerravam. Em outras, no entanto, o tempo foi insuficiente e podemos inferir que a professora acelerou as últimas atividades, pois o tempo utilizado pode ter sido maior do que havia previsto.

Percebemos que o agrupamento em duplas estava provocando episódios de indisciplina nos alunos e tal como recomendado por Marzano, Pickering e Pollock (2008) fizemos adaptações em algumas atividades para o uso individual. Os alunos conseguiam sistematizar sozinhos os conhecimentos e continuaram a trocar opinião com os demais colegas.

O desenvolvimento da atividade pela professora foi satisfatório. A postura adotada na maioria das atividades foi construtivista, dialogando com os alunos, mediando às dúvidas e participações para que conjecturassem sobre as tarefas. Porém em algumas tarefas a professora retornou ao comportamento tradicional. Não disponibilizou tempo apropriado para que os alunos fizessem os exercícios, levantassem conjecturas e respondessem as questões.

4.1.1. Clima de gestão da classe

A professora P1 manteve um clima amistoso com a sala. Em todas as aulas organizava os alunos individualmente ou em grupo para a realização das tarefas. Muito atenciosa com os alunos e sempre que questionada procura atender às solicitações na própria carteira do aluno ou para toda a sala. A professora controlou bem o comportamento dos alunos, algumas vezes precisou pedir silêncio a um grupo de indisciplinados. Mas nada que comprometesse as atividades. Durante o desenvolvimento das atividades propostas na THA a professora procurou incentivar os alunos a resolverem as atividades.

Percebemos que a participação dos alunos aumentou consideravelmente durante o desenvolvimento da THA. No início, apenas chamavam a professora até a carteira, depois começaram a participar da aula coletivamente, apresentando os questionamentos para todos o que permitiu que mais alunos acompanhassem as conjecturas e dúvidas detectadas.

Podemos afirmar que a professora P1 sempre manteve o controle da sala. A expressão gestão se aplica bem ao seu desempenho. A atitude dos alunos era diretamente relacionada à como a professora administrava a aula. Nos momentos que apenas entregava a atividade para os alunos e fazia poucos comentários, os alunos demonstravam muita dependência e esperavam maiores instruções. Percebemos esta atitude inicialmente, como já comentamos nesta análise, que foi superado após a melhor adaptação ao método construtivista. Nestes momentos iniciais notávamos que a indisciplina dos alunos era maior, uma vez que não compreendiam como fazer as atividades.

A professora manteve a atitude de gestora de aprendizagens na maioria das atividades. Administrava a aula, fazendo instruções iniciais para todos, intervindo apenas nas duplas que necessitavam de ajuda e provocando questionamentos e conjecturas com algumas mediações durante a atividade. Quando a professora adotava uma postura construtivista, os alunos apresentavam maior interesse e autonomia na realização das atividades.

Podemos conjecturar que nos assuntos que a professora melhor apresentava conhecimento de conteúdo matemático, mais autonomia tinha para desenvolvê-lo e mais autonomia possibilitava aos alunos. Em contrapartida, nos assuntos que apresentava maior fragilidade, resgatava a postura tradicional, talvez para evitar muitas intervenções dos alunos.

Em algumas aulas a professora retoma a postura tradicional de “transmite os conteúdos”. Começou a explicar as atividades antes mesmo que os alunos tentassem ler e não aguardava o tempo necessário para fazer as intervenções.

Podemos conjecturar que a mudança para a abordagem construtivista é um processo demorado, tal como a abordagem, porém eficaz e duradouro.

4.1.2. Interesse dos alunos pelas atividades

Os alunos da professora P1 inicialmente resolviam as atividades individualmente, e antes de solicitar a intervenção da professora, validavam ou refutavam os resultados com os colegas. Nas primeiras observações os alunos estavam organizados em duplas e alguns demonstravam um desinteresse. Depois que a observadora adaptou as atividades para serem resolvidas individualmente houve um interesse visível na execução das atividades e os alunos se sentiram mais confiantes na busca de soluções das tarefas.

No início do desenvolvimento da THA, notamos certo cansaço dos alunos com o tema trigonometria (estavam a um mês revisando os ângulos agudos). À medida que as atividades eram diversificadas, os alunos foram aumentando o interesse.

A interação entre os alunos da professora P1 é consequência de dois fatores: o respeito que eles apresentam uns com os outros e a gestão da sala pela professora. Quando algum aluno apresentava um comentário importante, socializava com a sala. Quando a atividade era indicada para ser desenvolvida individualmente, os alunos faziam cada um no seu protocolo, mas se preocupavam em verificar com os colegas os resultados.

4.1.3. Dificuldades observadas e possíveis causas

Dificuldades do professor

A professora P1 não apresentou maiores dificuldades no conteúdo matemático. Apenas quando desenvolveu o conteúdo de equações e inequações trigonométricas declarou para os alunos que este tópico também era difícil para ela. Podemos inferir que não mobilizava algumas características facilmente como a regularidade das funções trigonométricas em relação aos eixos e o como os parâmetros transformavam os gráficos das funções. Porém percebemos que costumava preparar suas aulas e mantinha concentração na aplicação das atividades.

As maiores dificuldades eram esperadas pela pesquisadora: o uso de tecnologias. Tanto para a calculadora científica que declarou não estar acostumada, como ao software para construção de gráficos que não conhecia. Percebemos que o desenvolvimento da THA permitiu romper barreiras ao uso e tornou a experiência significativa para a professora.

Alunos da professora P1

Os alunos da professora P1 apresentaram maior desembaraço no uso de instrumentos de medição e construção. Como esta dificuldade havia sido identificada em pesquisas relatadas na revisão bibliográfica, elaboramos várias atividades que proporcionassem do desenvolvimento de tais habilidades. Observamos que no decorrer das semanas estas dificuldades foram superadas pela maioria dos alunos participantes do projeto. Alguns alunos citaram que nunca haviam usado compasso e calculadora científica, porém conseguiram ter êxito.

Algumas dificuldades não foram previstas como critérios de arredondamento e números na notação decimal. Possivelmente tais alunos não estavam habituados com a representação dos números racionais na escrita decimal.

Nas primeiras atividades os alunos eram muito dependentes da professora, à medida que as semanas iam passando, foi nítida a diferença e que a autonomia, os questionamentos e o interesse dos alunos apresentaram notável aumento.

Uma dificuldade observada foi em relação ao método. Foi detectada nos professores e alunos em diferentes níveis. A professora P1 demonstrou estar mais receptiva a utilizar a abordagem construtivista. Podemos inferir que além de motivações e características pessoais que são quase impossíveis de serem elencados, dois fatores foram essenciais: a sua experiência com o tema Funções Trigonométricas e sua perspectiva de aprender com o projeto.

Os alunos da professora P1 demonstraram boa adaptação ao método. Nas atividades de levantar hipóteses, experimentar e discussão coletiva, o mesmo grupo de alunos participava das aulas. No entanto, notamos pelas gravações em áudio e pelos protocolos, que mesmo os alunos que não participavam da aula conjecturaram sobre as respostas.

4.1.4. Interação professor x aluno

Durante as aulas da professora, percebemos que a mesma sempre atendia todos os alunos, porém nas primeiras atividades trabalhava mais com aqueles que a buscavam, havendo pouco incentivo por parte dela com os alunos que não tentavam realizar as atividades. No decorrer das semanas percebemos que os alunos que inicialmente eram desinteressados e indisciplinados começaram a fazer as atividades.

4.1.5. A opinião dos alunos sobre as atividades

Ao final do desenvolvimento da THA, coletamos a opinião dos alunos para saber suas opiniões a respeito das atividades da THA e da atuação com o professor. A seguir, apresentamos o relato de alguns alunos coletados por questionário e entrevista.

Interesse em aprender

Percebemos que os alunos da professora P1 demonstraram interesse em participar das atividades. No início alguns não estavam fazendo as tarefas, como comentamos anteriormente, porém depois percebemos o empenho dos alunos na execução das atividades.

A seguir trechos que relatam a opinião dos alunos coletadas nas entrevistas e nos questionários:

Aluna J - *O pessoal descobriu como a matemática é mais interessante. Todos gostaram de ter uma nova experiência, mudar um pouco a foram de aprender matemática. O conteúdo foi o mesmo, mas as formas foram diferentes.*

Aluna N - *Nas outras aulas eles continuam conversando, mas na aula de matemática já teve uma diferença. Não atrapalharam a aula. Hoje foram duas aulas, mas num deu para perceber. Antes a gente pensava essa aula não acaba nunca. A gente sempre via que não havia interesse. Fazia quem queria, quem gostava de matemática. Hoje não a maioria, não vou falar que todos, porque sempre há* *exceção. Mas a maioria faz porque tá entendendo, porque ta aprendendo. Porque num ta tendo vergonha.*

Aluno J – *O método da aula era muito legal, às vezes se tornava divertida.*

Aluna K - *Muitos desenvolveram as atividades muito bem. Isso foi perceptível. Tinha muitos alunos que eu achava que não iam se interessar. Não ia correr atrás, ia jogar e falar: não vou fazer. Ponto final. Só que mudou totalmente a minha ideia. Porque é uma coisa nova, diferente e bacana. Enriqueceu a sala, todo mundo gostou. Tipo assim se isso acontecesse em todos os bimestres, com todos os professores, muito mais alunos ficariam interessados.*

Aluna N - *Antes os alunos não tinham curiosidade, não tinham abertura de falar: A professora explicava é assim. Se você não aprendia, vou tentar ver em casa. Era assim que alguns alunos pensavam. Eu nunca pensei assim.*

No depoimento da aluna, podemos notar que os alunos se sentiram valorizados em participar do projeto:

Aluna N - *Não ser mais um ensino médio com um simples projeto, mas sim o segundo que se destaca em um interessante e diferente projeto, que com certeza irá, mudar todo o sentido de aprendizagem do segundo ano. Nós víamos esse entusiasmo e sua preocupação em trazer, ser organizada, as folhinhas, as réguas e a gente pensava: Nossa ela vem, deixou de dar aula para os alunos dela para fazer estágio. Além de estar fazendo isso por ela é por nós também. Então a gente via a sua organização, tudo bonitinho A sua caixinha. Isso era legal porque a gente precisava de você. Deu força para a gente.*

Uso de instrumentos

É possível inferir que os alunos já tiveram contato com alguns instrumentos, porém não estavam habituados a fazer atividades com material manipulativo. Pelos depoimentos, percebemos que a experiência foi significativa. Porém ainda há uma resistência ao uso da calculadora.

***Aluna K -** Transferidor a gente já usou, o compasso várias vezes. A gente descobre bastante coisa como negócio da circunferência que era 6 para todas elas, se não me engano, ou sobrava alguma coisa de todas elas.*

***Aluna C -** O uso de instrumentos facilitou o aprendizado, porém alguns alunos criticam o uso. Em cursos pré-vestibulares, não são permitidos.*

***Aluna N -** Até o uso da calculadora. Foi um desafio para todo mundo. Até para mim que não sabia mexer. Eu ia lá lendo o manual e ia fazendo. Eu não entendia uma coisa que a aluna I ia entendendo, daí ela me passava eu passava para ela. Nós interagíamos e descobríamos juntos entre os alunos. Para poder achar radianos na calculadora, foi mais complicado. Em vez de todo mundo ficar sentado fomos fazendo juntos.*

***Aluno F –** Interessante, porque nunca havia usado uma calculadora científica e nem um transferidor.*

***Aluna N -** Uma atividade que achei bem legal e diferenciada, para ter a percepção, foi a do CD. Para a gente medir. Porque todo mundo de interessou. O interessante foi o resultado: as mesmas medidas. Um estava com uma latinha, CD ou relógio. Foram coisas diferentes. Mas todos conseguiram perceber. Se não fosse aquilo eu não conseguiria perceber.*

***Aluna N -** Compasso a gente mexia. A régua e transferidor achei interessante. A disponibilidade de material também foi muito interessante. Ás vezes a professora pede para trazer o material, ninguém traz e a gente acaba deixando a atividade para trás. Mas não foi o que aconteceu, pois como a gente tinha o material, a gente tinha que fazer, tinha que aprender. Isso que foi legal.*

Uso de software

O uso do software despertou o interesse dos alunos. Percebemos que iniciar o uso no laboratório e depois dar continuidade com o projetor em sala de aula foi muito proveitoso e atendeu à necessidade de sistematizar os conhecimentos. Alguns alunos instalaram o software em casa como relatado nos dois comentários a seguir:

Aluna J - *O software foi muito bom. Nós conseguimos ver direitinho. Em casa fiz as funções seno, cosseno e tangente. Foi importante levar para o laboratório, pois nós conseguimos mexer no Geogebra. E na sala porque todos estavam na sala e tinham melhor compreensão.*

Aluna K - *No laboratório é uma coisa difícil para distinguir o que chamou mais atenção, porque tudo chamou a atenção. É uma coisa diferente e tudo que é diferente chama a atenção de qualquer pessoa. Sendo uma pessoa interessada ou não. Mas não adianta rodar o mouse, os pontinhos subindo e descendo.*

Aluna N - *Gostei achei interessante para visualizar e perceber. Mas acho interessante saber montar o gráfico. Numa folha de papel.*

Aluna I *– A visualização economizou tempo, dando mais espaço para aprender mais coisas.*

Construtivismo

Pelos depoimentos dos alunos podemos perceber que a professora mudou a atuação em sala de aula. Alguns relatos demonstram que a professora começou a adotar o construtivismo, questionando mais os alunos e iniciando os temas de modo diferenciado.

Aluna J - *Antes era o exemplo e exercício. Esse modo melhorou, gostei. Aprendemos um pouco mais. A forma como foram dadas as atividades, os materiais, conseguimos compreender melhor.*

Aluna N - *Com a professora não era assim. Era muito chegou a isso ponto final. Abriu um espaço melhor para o aluno interagir na aula. Eu vi muito aluno participando, ta quietinho, não fala, mas ta absorvendo. Coisas que muitas vezes o professor não percebe.*

Atuação após a THA

As alunas relatam que mesmo após o desenvolvimento da THA, quando a professora iniciou outro tema, com os recursos comuns à aula, a professora fez uma abordagem construtivista:

Aluna K - *A professora começou com o caderno dois. Ela começou de uma maneira diferente. Não vou dizer que nunca aconteceu. Só que ela perguntou para gente como a gente achava que ia ficar a conta.*

Aluna N - *Foi diferente. Ela foi passando atividade por atividade, como nós fazíamos. Não explicando e façam! Mas lendo o enunciado e falando: Gente, o que vocês acham? O que quer dizer isso? O que quer dizer aquilo? Essa interação foi feita hoje Agora ouvimos pessoal, o que eu vocês acham disso? Ouve um debate, pois cada um achava uma coisa. Outro achava outra. Então vamos desenhar para ver qual era o certo.*

A interação entre professor e alunos

Um indício de contribuição da THA: podemos inferir nos depoimentos abaixo que demonstram a mudança no relacionamento entre professor e alunos:

Aluna K - *A professora se abriu mais a perguntas. Tinha muita gente que tinha vergonha de perguntar. Chamava na carteira. Agora o povo ta se soltando pra saber. Ta perguntando, ta procurando saber. Pesquisando para ver se é isso mesmo. Chegando à professora e tirando dúvida. A professora aprendeu mais com os alunos do mesmo jeito que os alunos aprenderam com a professora. A gente conheceu para que "serve" um professor. Para que ele está lá na frente, para que ele serve.*

Aluna N - *Mas a gente aprendeu a respeitar mais o professor, saber a hora de falar, saber a hora de interagir. E dar espaço tanto para o professor, quanto para os colegas.*

A interação entre os alunos – trabalho em equipe.

Podemos perceber que os objetivos que almejávamos com o trabalho em equipe foram alcançados. Os alunos discutiram, validavam os resultados e desenvolviam a autonomia.

Aluna J - *Eu gostei porque se eu tenho uma dúvida à gente discute sobre aquilo e consegue ver como o colega conseguiu desenvolver a atividade. Outro jeito de fazer a atividade e consegue entender melhor. Não tinha trabalhado assim em matemática. Se eu tivesse alguma dúvida eu perguntava para o colega, ia trocando informações. Formas de resolver determinada questão. Não era cola. Formas que o meu colega desenvolvia e eu desenvolvi de outro. Mas olhando aquela forma poderia ser melhor para mim.*

Aluna K - *Já havia trabalhado em dupla e fez diferença porque nós fomos descobrindo o modo que a outra pessoa pensava com relação a determinados assuntos. Como fazer uma conta como chega a uma determinada resolução para poder fazer um gráfico, para colocar numa tabela.*

Aluna N - *Você tem que estar com alguém com que no mínimo tenha um pouco de afinidade. Porque não adianta estar com uma pessoa que não tem afinidade. Trabalhar em equipe, mas até certo ponto, como nós trabalhamos. Daí para frente cada um começar a tentar. Mas isso não impediu que ninguém ajudasse ninguém. Porque mesmo individual era um: Puxa num entendi isso! Mesmo que o professor estava ocupado um ajudava o outro, a equipe estava ali. Não era poucas vezes trabalho em dupla. Achei legal porque às vezes você se prende no que você sabe. Não procura outros meios, outras opiniões. Eu acho isso. Você ouvindo o que o outro pensa, outra maneira de fazer aquilo fica interessante. É outro ponto de vista, outro direcionamento.*

Outra importante característica do construtivismo, a troca de opiniões e o respeito são observados nos depoimentos abaixo:

Aluna N - *Foi um avanço, um aprendizado. A gente não aprendeu só que é tangente, o que é cosseno. A gente aprendeu a respeitar, a ouvir e a falar. Pelo* *menos eu e os meus colegas. Às vezes não querem assumir, mas aprenderam. Bagunça, fazem, mas entendem.*

Aluna K - *A sala ganhou conhecimento com o projeto. Aprendeu a respeitar. Aprendeu a respeitar o professor, a respeitar a matéria, respeitar o conteúdo.*

A autoconfiança

A autoconfiança é citada como uma característica que foi desenvolvida com a THA:

Aluna N – *autoconfiança. Até mesmo eu. Eu achar que eu posso, é uma coisa. Eu confiar que eu posso realizar algo é outra.*

Relação pesquisador x professor e pesquisador x alunos

A relação entre o pesquisador com os alunos e com o professor é citada nos depoimentos abaixo:

Aluna N - *Muita gente fala: vou ter saudade da Lu. Porque você chegou do nada. A gente falou nossa vai ser uma coisa tão chata... mas não foi chato. Ao mesmo tempo que você chegava como uma pesquisadora, você estava observando, você era amiga. Você brincava, você entrava no jogo dos alunos. Isso que é interessante. Não era interessante você ver uma pessoa bem, vestida lá na frente e que chato... É legal uma pessoa amiga para nos ajudar. Não ta entendendo? Vamos ver de outro jeito.*

Aluna K - *Tinha muita gente que começaram a confiar mais em você do que na professora. Então as dúvidas que chegavam em você chegavam para ela também. Ela chegava lá na frente e explicava e a pessoa pensava: nossa ela descobriu a minha dúvida... Mas não era, você é que passou para ela ou foi uma coisa que ela ouviu. Então o projeto ajudou os alunos a se soltarem mais. Porque se ela falava e os alunos começavam a questionar e começavam a debater.*

Aluna N - *Acho que isso você despertou nela (professora) porque estava faltando. Ela tinha isso. Ela me dá aula desde a quinta série. Já tinha sentido uma* *paixão por ensinar, mas tinha ficado mais quieto. Isso foi despertado. Eu consegui ver que não foi bom só para nós alunos. Foi bom para ela. Você não vê mais ela gritando, porque a sala ta bagunçando. Você não ouve mais: Eu não aguento mais essa sala...*

Aluna K – *Gostamos muito do modo de ensino e de interação das professoras Luciane e P2.*

4.2. O desenvolvimento da THA pelo professor P2.

O professor II normalmente utiliza o atendimento individual, continuou com o mesmo procedimento. Poucas vezes fez optou pela orientação coletiva e, quando o fazia, sempre solicitava a um grupo de alunos que fossem à lousa fazer a correção. No início a pesquisadora apreciou a participação dos alunos, porém o excesso de vezes que os alunos iam à lousa, inclusive para a explicação inicial das tarefas prejudicou o desenvolvimento das atividades. A participação dos alunos na correção é uma excelente estratégia desde que não comprometa a sistematização dos conteúdos estudados, momento que cabe apenas ao professor.

O professor deixava os alunos resolvendo as atividades por um tempo excessivo, e como não explicava para todos da sala, percebemos que ele repetia a mesma instrução várias vezes. A sala era indisciplinada e extremamente dependente do professor, e tal atitude do docente causava mais desinteresse e os alunos na maioria das vezes só aguardavam que o professor apresentasse a resposta.

Percebemos que o professor apresentava dificuldade de cunho matemático e também que não lia as atividades previamente, como consequência não desenvolvia as aulas como o previsto e muitas vezes apenas discutia os temas superficialmente.

Em diversos momentos o professor relatou que não conseguia ter uma postura construtivista, se declarava “tradicional”. Afirmou não conseguir mediar os questionamentos, normalmente dava as respostas mesmo sem ser solicitado.

A observadora precisou assumir o controle da aula em diversos momentos, inclusive nas aulas com o *software* Geogebra.

O professor P2, não demonstrou a mesma dedicação que a professora P1. Tal comportamento é difícil analisar, seria necessário um estudo mais minucioso para identificar as variáveis que influenciam essa postura do professor: a dupla jornada de trabalho implica em pouco tempo para preparo das aulas, o tempo de magistério talvez influencie em não perceber a necessidade de modificar sua atuação; características pessoais como espírito investigativo em querer descobrir novas maneiras de ensinar ou talvez dificuldades no conteúdo matemático que dificultam uma maior apropriação da proposta.

4.2.1. Clima de gestão da classe

O professor P2 também tem um clima amistoso com a sala. Porém esta turma apresenta sérios problemas de indisciplina e alguns alunos fazem uso de palavrões em sala de aula. Os alunos não se respeitam e poucos conseguem vencer a intimidação de um grupo da sala e fazer questionamentos para o professor. Podemos responsabilizá-lo também porque poucas vezes promoveu o debate e não resolvia os conflitos quando um determinado grupo faltava com o respeito com outro. Os alunos sempre eram muito dependentes do professor, poucos começavam as atividades antes das diversas orientações. Na maioria das vezes o professor orientava individualmente, em detrimento de uma explicação coletiva as atividades da THA.

A participação dos alunos era pequena e sempre de um grupo reduzido de alunos. Muitos alunos sequer demonstravam respeito pelo professor e era recorrente o desrespeito entre eles próprios.

Desde as primeiras observações o professor perguntava para a pesquisadora o que deveria ser feito naquele dia. Olhava constantemente para a mesma como se precisasse se certificar de que está agindo adequadamente e perguntava na frente dos alunos se havia feito certo. Este comportamento provocou uma conduta inesperada dos alunos: estes conversam com a pesquisadora para ver se fizeram a atividade corretamente. Por inúmeras vezes a pesquisadora solicitou que os alunos indagassem o professor, mas nem sempre ele conseguia esclarecer as dúvidas.

4.2.2. Interesse dos alunos pelas atividades

Durante o desenvolvimento das atividades os alunos do professor P2 não apresentaram o mesmo empenho. Há uma diversidade de grupos na sala: um quarteto de indisciplinados que constantemente atrapalham a aula, mas que realizam as tarefas com sucesso e diversas vezes são convidados à lousa para apresentarem suas soluções. Outro quarteto que se localiza nas primeiras carteiras dificilmente faz as atividades, não participam das aulas e são, normalmente, ignorados pelo professor. Após a pesquisadora conversar com os alunos, este grupo começou a fazer as atividades. Há outro grupo que se destaca e se reúne para fazer as tarefas, mas há uma relação antagônica entre este grupo e o quarteto indisciplinado o que ocasiona provocações mútuas.

Constantemente os alunos se distraem e param a atividade. Como o professor não provoca o interesse em realizar as atividades, apenas aguardam a correção.

A maioria dos alunos se interessou pelas atividades no início da trajetória. Porém como eram extremamente dependentes do professor e não eram bem orientados, chamavam o professor, que às vezes esclarecia as dúvidas resolvendo a atividade, infelizmente.

Os alunos do professor P2 apresentaram graves problemas de relacionamento. A interação não ocorreu como o esperado e percebemos que foi um dos fatos responsáveis pelo professor não terminar o desenvolvimento de toda THA.

4.2.3. Dificuldades observadas e possíveis causas

Dificuldades do professor

O professor P2 apresentou maiores dificuldades no conteúdo matemático. Por esta razão, diversas vezes foi necessário que a pesquisadora fizesse intervenções e concluísse a sistematização nos momentos em que os alunos apresentavam dúvidas que o professor não sabia responder. Podemos citar alguns momentos como as projeções do ponto nos eixos dos senos e cossenos, a localização dos arcos em radianos, a construção dos gráficos e o uso do *software* Geogebra.

Algumas dificuldades quanto ao uso da calculadora e o software foram previstas, porém não imaginávamos que seriam necessárias tantas interferências; e a pesquisadora assumir o controle da aula em diversas ocasiões.

Precisamos fazer um comentário para que o professor P2 não seja depreciado nesta análise. Na entrevista inicial o docente declarou não estar habituado a lecionar este conteúdo e, por diversas vezes, comentou que não iria mais lecionar para Ensino Médio. Podemos inferir que as dificuldades do professor sejam pontuais, isto é, apenas neste conteúdo e a dificuldade no tratamento com esta faixa etária.

Temos uma hipótese para a atitude passiva de um grande número de alunos que esperavam a resolução na lousa: como estudam há vários anos com o professor foram "acostumados" e assim não desenvolveram autonomia. Como já estão no segundo ano do ensino Médio, terminando a Educação Básica, não percebem a sua dependência e inferimos que o professor também não lança esforços para mudar este comportamento.

A partir da observação das aulas, pudemos perceber que o professor 2 apresentou grande dificuldade na adaptação ao método. Não estava acostumado a administrar a aprendizagem dos alunos. Fazia poucos questionamentos e não fazia uso das intervenções e conjecturas dos alunos para enriquecer a discussão coletiva. Nas questões que exigiam experimentação ou testar hipóteses, os alunos ficavam apenas em discussões superficiais, aguardando o professor "dar a resposta".

Alunos do professor

Os alunos do professor apresentaram dificuldades no uso de instrumentos de medição e construção. No decorrer das semanas, alguns alunos superaram estas dificuldades, que não foram previstas como critérios de arredondamento, números na notação decimal e frações.

Os alunos do professor não se adaptaram muito bem ao método. Nas atividades de levantar hipóteses e experimentação, as discussões eram superficiais e dificilmente os alunos tentavam conjecturar sobre as respostas. Podemos inferir que uma das causas foi à falta de adaptação do professor da turma à abordagem. Como afirmamos este declarara não ser construtivista, tal postura possivelmente influenciou a adequação dos alunos. Outra hipótese é que a sala não conseguiu desenvolver a interação e o diálogo nem entre alunos e professor e muito menos entre os alunos em virtude da indisciplina.

4.2.4. Interação professor x aluno

Os alunos do professor fizeram algumas conjecturas apenas após muitas intervenções do professor ou da pesquisadora. Por serem extremamente dependentes do professor, aguardavam a resposta e não compreendiam que teriam melhores resultados se tentassem alcançá-la sozinhos.

O professor fazia questionamentos superficiais, as perguntas apenas induziam os alunos e não conseguia mediar às aprendizagens. Os alunos relataram que o professor “dava a resposta”.

Não percebemos mudanças na interação entre professor e alunos.

4.2.5. A opinião dos alunos sobre as atividades

Ao final do desenvolvimento da THA, coletamos a opinião dos alunos para saber suas opiniões a respeito das atividades da THA e da atuação com o professor. A seguir, apresentamos o relato de alguns alunos coletados por questionário e entrevista.

Interesse em aprender

A aluna C que mudou para o período da manhã por causa da indisciplina na sala, relatou que acredita que os alunos tiveram interesse:

Aluna C - *Esses dois meses mudaram alguns alunos em matemática, com interesse em aprender. Conseguiram aprender.*

Aluna Az – *Tinha alunos que já estavam cansados desse trabalho, mas outros já estavam começando a gostar das atividades e muito mais.*

Aluna T – *Só alguns alunos que realmente querem aprender demonstraram interesse.*

Uso de instrumentos

Os depoimentos abaixo comprovam o que percebemos durante as observações: os alunos foram aprendendo a utilizar os instrumentos durante o desenvolvimento da THA.

Aluna A – *Muito prático e ágil para a atividade.*

Aluna Az – *A minha opinião é que tinha instrumentos que a gente não sabia mexer e aprendeu, porque tinha os colegas e os professores.*

Aluna T – *É legal, bem diferente. Foi bom também porque os alunos que não levavam instrumentos para fazer a atividade, a Luciane levava* (se refere à observadora*). Então isso é bem legal e o que dá para perceber é que ela quis ajudar os alunos.*

Aluno F – *Nunca tinha visto transferidor. Aprendi agora.*

Uso de software

Percebemos opiniões diferentes quanto ao uso do software. Enquanto uns gostaram, outros preferiam o uso da lousa provavelmente por serem muito dependentes da explicação do professor.

Aluno F - *O software é legal para poder ver de outro jeito que não tem só na lousa para sentir o que era melhor. Na lousa era melhor. A gente só foi uma vez no laboratório.*

Aluna A - *É interessante. Ninguém tinha feito isso até hoje.*

Aluna T – *É legal, ajudou na atividade.*

Aluna An – *Foi muito bom o auxílio na hora de construir os gráficos.*

A aluna C instalou o software Geogebra em casa e construiu alguns gráficos. Relata que foi orientada pela pesquisadora a usar o software:

Aluna C - *Quando você passou para o Geogebra, eu baixei em casa. Eu não conseguia, não sabia e ficava nervosa. Porque era quinta. Tinha que passar a sexta, sábado e domingo... Até segunda, na próxima aula. Imagine aquilo na minha cabeça batendo. E eu com medo de desmanchar o gráfico que você tinha feito. Mas ela falou... Eu tinha medo. Era só isso. Pode ser usado em casa também. Auxiliando o aluno a explorar o programa e tirar suas próprias dúvidas ou conhecer coisas novas que não foram propostas pelo projeto. Lembrando que todos têm o contato com a Luciane e podem tirar qualquer duvida diretamente com ela.*

Aluna C - *Quando você falava* $2sen\pi$*... Eu ficava pensando. Por que não assisti à aula no laboratório? Eu não sabia que ele pulava dois degraus, eu achava que ele puxava, quando você mostrou no projetor eu entendi que se no computador ele pula, na folha também. Ajudou bastante.*

Construtivismo

Os relatos a seguir demonstram que os alunos perceberam que o professor não se adaptou ao método construtivista e que apresentava dificuldades em conteúdo matemático:

Aluna AP - *No projeto ele estava tão aluado, tadinho. A gente perguntava, ele falava e ia para outro lado. E ele nem sabia o que a gente tava perguntando.*

Aluna C – *O professor mesmo não tem dom de falar e você entender na hora. Eu não sei se ele não interagiu com a atividade ou a atividade não interagiu com ele... Não sei então, ele não sabia muito dizer. A gente ia mais pelo enunciado. Ele só concordava.*

Um grupo de alunos cita a diferença entre a abordagem utilizada pela pesquisadora, quando ministrava as aulas, e o método empregado pelo professor:

Aluna A – *Porque você vinha explicava direitinho.*

Aluna AP - *No meio do projeto nós perguntávamos, ele olhava para você e ia para outro lado. Daí eu preferia chamar você (se referindo à pesquisadora).*

Aluno E - *A senhora entende do projeto. Tem uma facilidade para explicar melhor.*

Aluno F - *Entende a pergunta Mas esse é o modo de trabalhar da senhora. O certo era para ser assim. Porque a senhora pensa assim. Quando eu tô começando a entender ele fala a resposta. Não culpo ele, porque tem bastante alunos.*

A aluna T demonstra que teve dificuldades, porém podemos deduzir que estava se adaptando ao método.

Aluna T – *Os exercícios são difíceis para quem não sabe fazer. Mas depois que a gente aprende fica bem fácil. Tudo bem que eu não sou experiente nisso, mas deu para aprender um pouco.*

Atuação após a THA

Os relatos dos alunos são que o professor retomou ao hábito de passar exemplos e exercícios. Não podemos inferir os motivos que o professor restabeleceu a estratégia tradicional.

A interação entre professor e alunos

A aluna C foi, várias vezes, à lousa, quando solicitada pelo professor. Percebeu que o professor apresentava falhas no conhecimento matemático:

Aluna C – *Eu ia bastante para a lousa porque o professor não sabia usar os instrumentos. Ele não tinha noção básica. Ele tinha noção básica da trigonometria. E não sabia se aprofundar muito. Notei desde o primeiro momento.*

Aluna A – *A relação foi boa nas duas partes todos colaboraram com todos.*

Aluna T – *Tudo bem que alguns não se comportaram, mas "teve" alunos interessados na atividade.*

A interação entre os alunos – trabalho em equipe.

Podemos perceber que os objetivos que almejávamos com o trabalho em equipe não foram alcançados com esta turma. Em raras oportunidades observamos que os alunos discutiram, validavam os resultados e desenvolviam a autonomia. Poucos depoimentos foram favoráveis ao trabalho em dupla. Comentamos anteriormente que os alunos apresentam sérios problemas de relacionamento, podemos inferir que esta seja uma das causas para esta estratégia não ter sido adequada.

Aluna Az – *O trabalho em equipe era melhor a gente se divertia mais e era mais fácil para aprender porque um ajudava o outro.*

Aluna T – *É bem legal, eu gostei e aprendi um pouco. A gente aprendeu coisas interessantes.*

Aluna C - *Os alunos carregam outros alunos nas costas. Eu estava com uma dupla, vi que estava fazendo tudo sozinha e mudei a dupla. Com a aluna A foi mais ou menos. Ela é uma pessoa inteligente. Eu não curti muito à tarde...*

Aluno F - *É mais fácil estudar quando não tem intriga com ninguém.*

Aluno F - *Eu falto bastante. Estourei em matemática e português por causa da sala. Eu vou para escola e ficar naquela sala?*

Aluna AP - *Eu falei para os meus pais que não quero ir para a escola. Desde os conflitos... Eu já cheguei a chorar. A gente tem um propósito, a pessoa vem querer te atrapalhar, a gente desanima.*

A autoconfiança:

Foi possível observar que muitos alunos não acreditavam na capacidade de aprender, se sentiam desprezados e alguns não acreditavam que conseguiam aprender.

Aluna C - *Tem sala que é popular porque tem bons alunos. Tudo eles jogavam nas nossas costas (2B). Quando a gente queria fazer alguma coisa: Ah não, o 2A já vai fazer. Quando a gente teve alguma ideia e queria apresentar aos professores: nesse dia o 2A vai fazer... Que dia vai ter prova? Ah num vou poder vir porque vai ter num sei o que com o 2A. Ai, mudavam o dia da prova. Tudo era o 2A, a gente ficava revoltado.*

Aluno F - *Ele é uma pessoa muito boa, mas o modo de explicar, eu não aprendo. Porque, se eu fosse perguntar, seria muita pergunta. Muita dúvida em matemática e não tem com quem eu tirar. Se eu fosse perguntar tudo que eu tenho dúvida... seria a aula toda. Eu sei que eu iria aprender. Eu não conseguiria aprender lendo. Só conseguiria aprender com alguém me explicando. Porque lendo eu tenho dificuldade de aprender.*

4.2.6. Relação pesquisador x professor e pesquisador x alunos

A relação estabelecida entre a pesquisadora e o professor é diferente da anteriormente relatada com a professora. O professor não dispunha de muito tempo para conversar, não questionava as atividades e frequentemente perguntava à pesquisadora se havia desenvolvido certo. O papel da pesquisadora alternava-se entre observação e explicação do conteúdo aos alunos e orientação ao professor. A relação foi boa, entretanto, deduzimos que o professor talvez não tenha compreendido os objetivos do projeto.

Já a relação entre os alunos e a pesquisadora foi muito diferenciada. Enquanto uns estabeleceram um vínculo de amizade, respeito e colaboração inclusive auxiliando a pesquisadora a distribuir os materiais, outros demonstravam estar incomodados com a presença da pesquisadora. Pelos comentários dos alunos, um dos motivos atribuídos ao desinteresse pela THA é a quantidade de atividades. Possivelmente não estavam acostumados a fazerem tantos exercícios.

CAPÍTULO 5 - NOVOS CONHECIMENTOS CONSTRUÍDOS APÓS A THA

Introdução

Neste capítulo apresentamos os novos conhecimentos dos professores parceiros e da professora pesquisadora após o desenvolvimento da THA. Segundo Simon (1995) o Ciclo de Ensino de Matemática tem início e término no conhecimento do professor, representa as relações cíclicas entre seus conhecimentos, pensamentos e reflexões e tomada de atitudes. Pretendemos demonstrar que os professores desenvolveram novos saberes sobre o ensino de Funções Trigonométricas a partir das observações dos alunos durante as atividades.

Apresentamos as propostas de modificação da THA, incluindo a nova versão das atividades que foram modificadas com o objetivo de corrigir algumas falhas observadas durante o desenvolvimento da mesma.

5.1. Novos conhecimentos dos professores parceiros

Após o desenvolvimento da THA, entrevistamos os professores para obter suas impressões sobre o desenvolvimento das atividades. A entrevista foi semiestruturada, e o questionário utilizado faz parte do anexo. A seguir apresentamos a análise das entrevistas e trechos que servem para justificarem nossas reflexões.

5.1.1. Professora

A professora demonstra que fez uma reflexão sobre a sua atuação, relata que dominava o conteúdo, porém teve alterações na didática. Para ela, houve mudanças na metodologia em outras séries que leciona. Considera que a abordagem construtivista contribuiu na melhora da participação e da aprendizagem dos alunos.

“Me ajudou muito a pensar sobre a minha didática em sala de aula sobre como transmitir conhecimento. Porque na verdade a gente não tem que transmitir o

conhecimento a gente tem que pegar o conhecimento do aluno e amadurecer, transformá-lo. Então aprendi bastante. Entendi bem mais o construtivismo.”

“Eu gostei da participação deles. Facilitou bastante à aprendizagem deles. “

“Alunos construindo conhecimento, fez com que melhorasse a aprendizagem. De acordo com o passar dos exercícios, das atividades comparando a aprendizagem com anos anteriores do mesmo tema. A construção dos gráficos. A diferença entre um e outro.”

No tocante ao uso da calculadora e do software, após nossa revisão bibliográfica, prevíamos a dificuldade no uso do software, e da calculadora científica. Nas primeiras aulas da THA a professora fez um comentário que demonstrava sua impressão negativa quanto ao uso da calculadora. Segundo ela, nem todo mundo teria acesso e em concursos e vestibulares onde não é permitido sua utilização. Percebemos que a professora mudou sua concepção sobre tal instrumento. O uso do software Geogebra foi muito importante para a professora para visualizarem os gráficos.

“E a calculadora, eles ficarem sozinhos? Eu achei interessante. Eles gostaram e aproveitaram bastante essa aula. Eu pensei que eles iam ficar largados, mas eles foram a fundo. Achei que aproveitaram bastante.”

“Eu nunca tinha usado o software, adorei. Facilitou bastante na construção dos gráficos para os alunos verem. Participarem da construção. Deu para entender os parâmetros. A atividade do círculo trigonométrico foi muito importante para eles visualizarem os gráficos. Para eles verem de acordo com o ângulo que vai andando e aumentando para eles verem como vai ficando a construção do gráfico.”

Uma das questões deste presente estudo tem a intenção de responder como as pesquisas na área de Educação Matemática podem contribuir para a organização do ensino de Funções Trigonométricas. Notamos, não apenas pelos resultados obtidos com os professores, mas também pelo relato a seguir, que conseguimos diminuir a distância entre às produções acadêmicas e os professores:

“Se eu for pensar como as pesquisas de matemática, nunca chega nada a mim. Nunca chega nada na escola. Então como eu posso dizer se contribui comigo ou não, se não chega na escola. E agora ajudou bastante e fiquei até curiosa para pesquisar. Só que tem que ir até lá (na PUC) para folhear? “

A pesquisadora orientou a docente como acessar bancos de teses e dissertações. Quando questionada como o professor poderia elaborar sua própria THA, obtivemos a seguinte resposta:

”É possível. Tem que ter força de vontade, tempo e ter que querer. Através de pesquisas. Para poder trabalhar com esse modo construtivista com o aluno.”

Nosso quadro teórico recomenda que, a abordagem construtivista pressupõe que o professor deve mediar às aprendizagens. Notamos que com o decorrer das atividades a professora se adaptou ao método e mudou consideravelmente a qualidade das intervenções. A própria relata que mudou os questionamentos na aula de Matemática, percebeu que antes suas perguntas eram superficiais:

“Me ajudou bastante a crescer. Crescer no modo de poder avaliar, de questionar os alunos. Eu passei a questionar mais. Porque geralmente eu faço questionamento, mas não com tanta freqüência. Para poder ver o conhecimento que ele já tem. Normalmente as perguntas eram coisas pequenas: Isso aqui vocês lembram? Como eu faço para chegar nisso?”

Quando questionada se estava de acordo com a metodologia utilizada pelo pesquisador, a professora respondeu que pretende adotar a THA e o trabalho em duplas. Em seu relato percebemos que mudou suas concepções:

“Adorei. Já está feito todo o meu trabalho de trigonometria para o ano que vem. “

“Eu sempre usei mais individual. Eu achei bom esta mistura (individual e dupla). Pretendo reproduzir isso em outras salas também. O começo foi importante em dupla, na utilização de materiais desde o transferidor, o compasso, a calculadora e o software. A partir do momento que começavam a trocar conhecimento entre eles. Essa troca serve para todos os assuntos e todas as turmas.”

O papel mediador do professor que administra a aprendizagem dos alunos é um dos comentários da educadora. No seguinte trecho percebemos também que a docente cita que ouve os alunos para entender como eles conseguiram chegar à solução. Tece uma crítica que o professor não deve seguir um método só por estar acostumado.

“Os alunos são bastante questionadores. Então eu vou perguntando o que vocês acham, como será? Eles acabam ajudando bastante à gente. Às vezes a

gente acaba indo por um caminho e tem outros caminhos. Na matemática tem outros caminhos para resolver. Não é só aquele. É porque a gente ta acostumado daquele jeito. Vou por este método porque tô acostumada. Mas fazendo questionamentos, perguntando, como vamos chegar?"

"A intervenção do professor. Tem que ter olhar do professor. O aluno fica perdido e começa a ficar desanimado."

A professora declara que se surpreendeu com o desempenho dos alunos em algumas tarefas. Tal como nosso quadro teórico (Solé, 2009) o olhar do professor é responsável pelo desempenho dos estudantes:

"Algumas atividades me surpreenderam, porque algumas os alunos conseguiram. Normalmente, você não deixa ele pensar: ia acabar dando dicas."

Segundo os autores Coll e Solé (2009), duas características são importantes para o aluno no método construtivista: a autonomia e a autoestima. A professora cita estas duas características na entrevista quando questionada se a THA contribui com o desenvolvimento da autonomia:

"Sim. A THA contribuiu bastante para desenvolver a autonomia. A THA os deixou bem confortáveis pra poder resolver e fazer os exercícios. Como toda aula eu fazia uma retomada com eles e eles viam que eles estavam sabendo o assunto isso facilitava para eles fazerem a resolução, ficavam mais confortáveis pra poder resolver. Contribuiu com a autoconfiança dele."

Acreditamos que o projeto contribuiu para o desenvolvimento profissional da professora. A professora teve a mesma impressão, apresenta no seguinte comentário sua opinião: "*Claro que eu fiz. Eu participei dela. Essa formação foi maravilhosa. Nunca foi tão fácil."*

5.1.2. Professor P2

O desenvolvimento da THA trouxe para o professor uma nova visão a respeito do Construtivismo. Para ele, o método torna mais fácil que o aluno "trabalhe a própria construção do conhecimento." O docente relatou que gostou do construtivismo, porém não sabe usar esta estratégia:

"A gente tem o construtivismo meio que deixa fazer, mas num é deixa fazer. É mostrar um caminho."

“Eu gostei de trabalhar. Você percebeu que eu não sei trabalhar desse jeito do projeto.”

“O lance deles perceberem as coisas, aos poucos. Acho que fixa mais neles do que você falar a função seno oscila de tanto a tanto.”

Na seguinte declaração do professor é possível perceber que a participação no projeto trouxe contribuições não apenas para a turma participante, mas também em outras turmas que leciona:

“Uma coisa mais concreta, assimila melhor. Fixa melhor. Talvez esse trabalho tenha contribuído para eu melhorar lá na sexta-série.”

A organização dos alunos em duplas, é relatada pelo professor como “uma bagunça para o bem, não tem muita importância.”

Uma reflexão importante que o professor fez acerca do método construtivista, é o fato de propor que “o professor deve instigar os alunos.” E o professor sempre queria dar a resposta, o que infelizmente, os alunos corroboram em seus comentários.

“A gente que é da geração tradicional, como professor peca muito nesse sentido de querer dar respostas. Nesse sentido cresci um pouquinho.”

Observamos que ambos os professores apresentaram falta de conhecimento no uso de tecnologias no ensino de Matemática, mas enquanto a professora se esforçou para explorar o software, o professor não tentou ministrar a aula com este recurso.

“Eu achei excelente. Você fez divinamente na lousa, maravilhoso. Foi muito claro, conciso. É outra coisa. Tanto você como eu nos surpreendemos por eles não terem... preferirem à lousa. É estranho. Mas acho que numa turma “normal” vai preferir no software. Eu acho que a vantagem é que deixou de ser uma coisa abstrata. Foi mais concreto. Deu para visualizar, perceber o que acontece com o gráfico da função.”

O professor afirmou que tem dificuldade no uso do software, quando questionado por que não explorou mais o programa respondeu:

“Falta de tempo, por interesse ou realmente por uma certa resistência. As três coisas..”.

Não concordamos com o professor, no tocante à autonomia dos alunos. O docente afirmou que a THA contribuiu para que os alunos desenvolvessem a autonomia, porém não notamos tal comportamento.

“Foram obrigados a ser mais autônomos. Por que no dia-a-dia você tem que...“

Percebemos que o professor tinha uma visão negativa da sala, e justificava dar as respostas por não acreditar nos alunos. Porém o próprio afirma que mudou sua concepção graças à abordagem construtivista. No seguinte trecho apresentamos o relato que fundamenta esta análise:

“O aluno é capaz. Muitas vezes a gente acha que não é. Nesse ímpeto a gente dá a resposta, não tem paciência. No tradicional eu não percebia isso.”

Para o docente, o desenvolvimento da THA e a participação do projeto como professor parceiro proporcionaram uma formação diferenciada.

“Foi mais prática. Vamos ver no corpo a corpo. Vamos matar dois tigres hoje.”

Mesmo sem encerrar o projeto o professor acredita que os alunos aprenderam muita coisa. Porém, se declarou decepcionado com os alunos e com ele mesmo.

“Valeu. eu sei que eles aprenderam muita coisa. Muito mais do que eles iriam aprender se eu tivesse trabalhado normalmente.”

“Com eles, comigo.. Com eles no momento que eles não levavam a sério, se recusavam. Comigo quando não me preparei como deveria. Em casa, dado uma olhada melhor nas atividades, ter me envolvido mais com o Geogebra. Eu pequei...”

Ao fazer a comparação entre o material indicado pela Secretaria de Educação e a THA desenvolvida, o professor não consegue identificar a abordagem construtivista no caderno:

“O caderninho pressupõe, não sei se é do construtivismo. Por exemplo, eu entrei em matrizes. Mas não entrei com o caderninho porque ele chega já falando de matriz coluna, isso precisa ser colocado antes. Esses termos. A THA vai colocando, vai preparando, conduzindo você. A THA é melhor.”

5.1.3. Novos conhecimentos da professora pesquisadora

Ao final do nosso trabalho percebemos que os conhecimentos adquiridos pela pesquisadora reforçaram o ímpeto em querer continuar pesquisando sobre formação de professores.

Para nós, depois de quase três anos de Mestrado, é possível nos perceber antes e depois do curso que estamos terminando. No início, como os professores parceiros, desconhecíamos os resultados de pesquisa e as teorias da Didática da Matemática. Elaborávamos as nossas “THAs” há dezessete anos, no primeiro ano de magistério. Assim, não sentimos a dificuldade que os demais pesquisadores do projeto, e dos professores parceiros, em elaborar uma sequência de ensino. Porém, a qualidade das sequências elaboradas na época, em comparação com a THA desenvolvida no projeto, é inquestionável.

Três foram os principais pilares que contribuíram para o desenvolvimento profissional:

- ✓ **O construtivismo**: ao saborear o referencial teórico do Construtivismo e estudar o que esta abordagem recomenda e, principalmente, ao ver o Ciclo de Ensino da Matemática de Simon (1995), conseguimos ter uma concepção de ensino da Matemática diferenciada. Não apenas no que tange a atual THA de funções trigonométricas, mas em outros assuntos;
- ✓ **O conteúdo matemático**: na maior parte do tempo da nossa trajetória profissional ministramos aula para o Ensino Fundamental. Por esta razão, tal qual o professor, não possuíamos muito conhecimento acerca do tema Funções trigonométricas. Na elaboração da THA, durante seu desenvolvimento e principalmente analisando os resultados obtidos pudemos perceber que conseguimos expandir o saber matemático;
- ✓ **A revisão bibliográfica sobre Funções Trigonométricas**: o estudo das pesquisas contribuiu para verificar o que já havia sido identificado nas investigações anteriores e como utilizar estes resultados na elaboração da THA; pudemos elencar as principais

dificuldades dos alunos e professores e como procurar recursos para superá-las.

O papel do pesquisador durante o desenvolvimento da THA teve duas características: de observador e de formador.

O papel de observador - Percebemos o quanto foi importante acompanhar a aula de outros professores: observar seus alunos, ver a prática de outro professor e a partir desta observação, compreender como é a dinâmica em sala de aula com outro docente e; como pequenos fatores contribuem ou não com o aprendizado e principalmente, e, sobretudo refletir sobre a própria prática.

O papel de formador – Desde o início da apresentação da THA aos professores, durante o desenvolvimento e o encerramento do projeto, nossa postura foi de nos colocar como professor pesquisador. Isto nos aproximou dos professores parceiros e também dos alunos dos respectivos professores. Percebemos que esta postura foi confirmada, ou sancionada por docentes e alunos participantes do projeto.

5.2. THA –VERSÃO FINAL

Apresentamos a terceira versão THA. Descrevemos apenas os itens que fizemos alterações com alguns comentários justificando os motivos que levaram a decisão de modificar a atividade. Os professores parceiros efetuaram poucas alterações na THA, colocamos alguns comentários que julgamos pertinentes para compreender a participação dos mesmos.

Os textos que justificam as alterações estão no estilo itálico, para não confundir com o texto das atividades. As figuras estão apresentadas em escala 1:2 e optamos por apresentar apenas os itens que foram alterados, os demais itens que permaneceram na configuração original podem ser consultados no capítulo 2 THA desenvolvida na sala de aula.

5.2.1. Atividade I - Transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para o círculo trigonométrico.

Tarefa I Objetivo Específico: Convenção uso do raio unitário no círculo trigonométrico.

1. Observe os triângulos nas circunferências da Figura 1 para responder as questões.

$\hat{O} = 55°$	$\Delta A\hat{O}B$	$\Delta A_1\hat{O}B_1$	$\Delta A_2\hat{O}B_2$	$\Delta A_3\hat{O}B_3$
Raio	1	5	8	10
$sen\,\hat{O}$	$\frac{0,8}{1} \cong 0,8$	$\frac{4,1}{5} \cong 0,82$	$\frac{6,6}{8} \cong 0,85$	$\frac{8,3}{10} \cong 0,83$
$cos\,\hat{O}$	$\frac{0,6}{1} \cong 0,6$	$\frac{2,9}{5} \cong 0,58$	$\frac{4,6}{8} \cong 0,575$	$\frac{5,8}{10} \cong 0,58$
$tg\,\hat{O}$	$\frac{0,8}{0,6} \cong 1,3$	$\frac{4,1}{2,9} \cong 1,41$	$\frac{6,6}{4,6} \cong 1,43$	$\frac{8,3}{5,8} \cong 1,43$

a) O tamanho da hipotenusa do triângulo, que nesta atividade também é o raio da circunferência, pode interferir na realização dos cálculos das razões trigonométricas? Qual medida para a hipotenusa tornou o cálculo mais fácil?

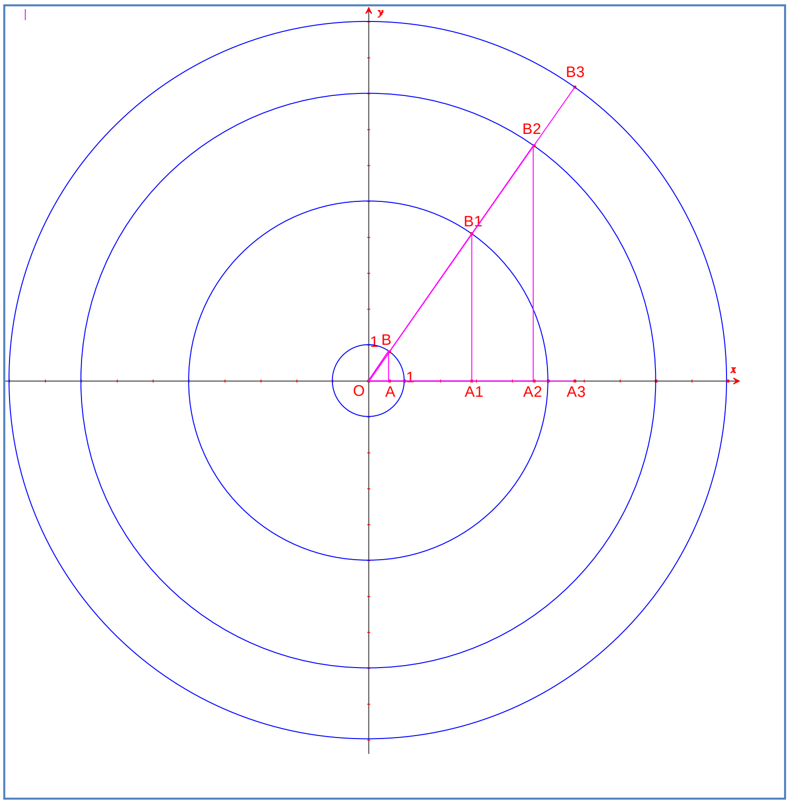


Figura 1

Nesta tarefa os professores parceiros apresentaram opiniões diferentes quanto ao uso da calculadora. Julgamos apropriado retirar a coluna por duas razões: evitar que o aluno utilize apenas a calculadora em detrimento de mobilizar as razões; a atividade IV foi concebida para que o aluno use a calculadora, logo podemos indicar o uso a partir desse momento.

Recomendamos que, caso os alunos tenham iniciativa, o uso de tal instrumento não deve ser cerceado. Apenas estamos prorrogando o uso para não tirar o foco da atividade.

O exercício apresentava duas questões, o item a) foi retirado e o item b) alterado, para melhorar a interpretação do enunciado.

2. A partir da circunferência de raio unitário abaixo (Figura 2), construa os triângulos para obter os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis.

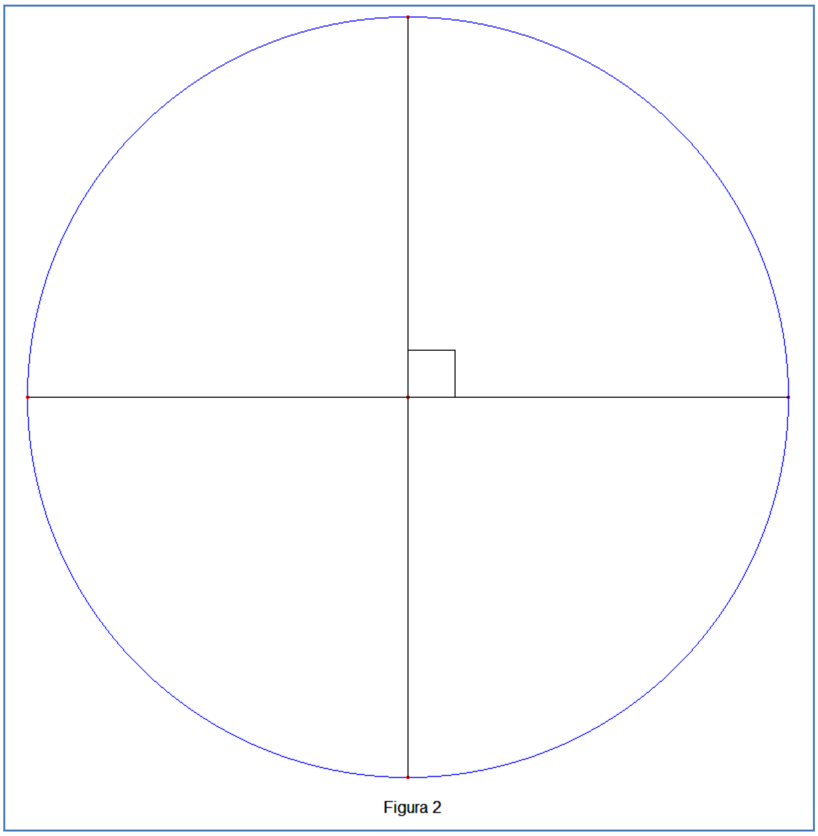


Figura 2

A sugestão apresentada pela professora I, de retirar os pontos da figura 2, foi acatada pelo professor II e também pela pesquisadora. Nesta configuração, os alunos devem construir os ângulos utilizando o transferidor.

Tarefa II

Objetivo específico: Associar a projeção do ponto nos eixos às razões trigonométricas

1. Dê as razões trigonométricas: $\operatorname{sen} \widehat{O}$, $\cos \widehat{O}$ e $\operatorname{tg} \widehat{O}$ do ângulo Ô inscrito na circunferência da Figura 3.

$$\text{sen}\hat{O} = \frac{6}{10}$$

$$\text{sen}\hat{O} = 0{,}6$$

$$\cos\hat{O} = \frac{8}{10}$$

$$\cos\hat{O} = 0{,}8$$

$$\text{tg}\hat{o}^{\circ} = \frac{0{,}6}{0{,}8}$$

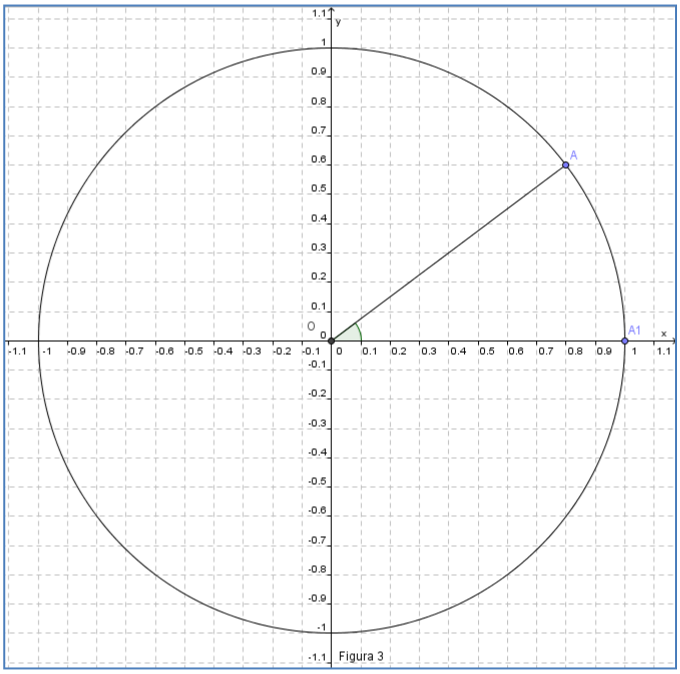
$$\text{tg}\hat{O} = 0{,}75$$

a) Usando o sistema cartesiano ortogonal vamos localizar o ponto A. Quais são as coordenadas do ponto A?

A(0, 8 ;0,6).

b) Há alguma relação entre as coordenadas do ponto A e as razões $\cos\widehat{O}$ e $\text{sen}\,\widehat{O}$? Justifique.

Sim, quando o raio é unitário o cosseno e o seno do ângulo são as respectivas coordenadas.



Projeção ponto A

A sugestão apresentada pela pesquisadora de utilizar uma única figura foi aceita pelos professores. Os enunciados das questões também foram modificados.

2. Localize os ângulos na circunferência de raio unitário da Figura 3 e use as coordenadas dos pontos para obter as razões trigonométricas:

	$10°$	$20°$	$70°$	$80°$	$90°$
seno	0,17	0,34	0,94	0,98	1
cosseno	0,98	0,94	0,34	0,17	0

a) Grife na tabela os valores iguais com a mesma cor e tente lembrar uma importante relação entre as razões trigonométricas.

Relação entre seno e cosseno de ângulos complementares.

Como a tarefa tem como objetivo promover o uso do raio unitário e as projeções dos pontos nos eixos trigonométricos, a razão tangente foi retirada da tabela. Acrescentamos uma questão para revisar a relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares.

5.2.2. Atividade II - Identificação do radiano como medida para o círculo trigonométrico

Tarefa I

Objetivo Específico: **-** Identificar um radiano como a medida do arco correspondente à medida do raio, estabelecer o π.

1. Utilize os instrumentos fornecidos e complete a tabela:

.

Objeto	Medida do Raio	Medida do Diâmetro	Comprimento da circunferência em cm	Comprimento da circunferência em raios	$\frac{\textbf{Comprimento da circunferência}}{\textbf{diâmetro}}$
CD	6 cm	12 cm	37,8	6 e poucos	$\frac{37,8}{12} = 3,15$
Relógio	11,2 cm	22,4 cm	70,5	6 e poucos	$\frac{70,5}{22,4} = 3,15$
Lata	2,8 cm	5,6 cm	18	6 e poucos	$\frac{18}{5,6} = 3,21$

Ao transferir a medida do raio para a circunferência obtemos um arco de circunferência cujo comprimento é igual à medida do raio. Este arco recebe o nome de radiano.

Você conseguiu colocar 6,2 vezes o radiano. Você mediu o perímetro do círculo ou comprimento da circunferência que utilizamos com a fórmula 2 πr, onde r é o raio. Como o radiano é um arco de mesma medida do raio podemos falar que a circunferência mede 2 πrad.

Durante o desenvolvimento da tarefa I fizemos alterações, aqui excluímos as orientações iniciais e fizemos uma alteração na ordem da coluna para melhorar a compreensão dos alunos.

Tarefa II

Objetivo Específico: Associar cada ponto do círculo trigonométrico a um número da reta real.

1) Trace uma circunferência de 1 cm de raio. Logo, o arco de 1 radiano medirá, respectivamente, 1 cm.

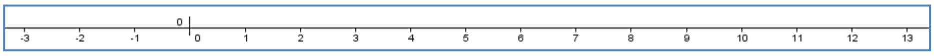
   a) Um arco de 1 radiano tem aproximadamente quantos graus?

   57°.

b) Considere 1 radiano a imagem do número 1 e marque na circunferência que você construiu as imagens dos números: 1, 2, 3, 5, 6,7.

2) O número π corresponde a quantos radianos? Localize o número π na reta numérica abaixo:

3,14 radianos;



Fizemos a alteração na ordem das tarefas IV e II. O assunto da tarefa II era pertinente à continuidade da Tarefa I. Retiramos dois itens da tarefa II que não comprometeram o conteúdo proposto.

Tarefa III

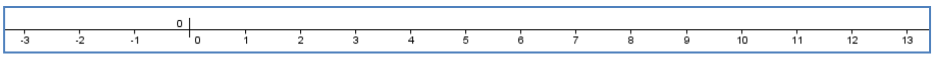
Objetivo Específico: Conversão grau em radiano.

A tarefa não foi alterada.

Tarefa IV

Objetivo Específico: Associar cada ponto do círculo trigonométrico a um número da reta real.

1) Localize agora os números $\frac{\pi}{6}\,\text{rad}$, $\frac{\pi}{4}\,\text{rad}$, $\frac{\pi}{3}\,\text{rad}$, $\frac{3\pi}{2}\,\text{rad}$, $2\pi\,\text{rad}$, $\frac{3\pi}{4}\,\text{rad}$, na reta numérica abaixo. Use $\pi = 3\ \text{cm}$



2) Podemos associar cada ponto da reta numérica a um ponto na circunferência?

Sim, pois podemos ter n voltas na circunferência.

3) Imagine a reta numérica “enrolando” a circunferência. Você sabe que a reta numérica é infinita, utilize os círculos trigonométricos (figura 8) para localizar os pontos correspondentes aos números:

A = $\frac{3\pi}{2}$, B = $\frac{9\pi}{4}$, C = $\frac{8\pi}{3}$ D = 5π

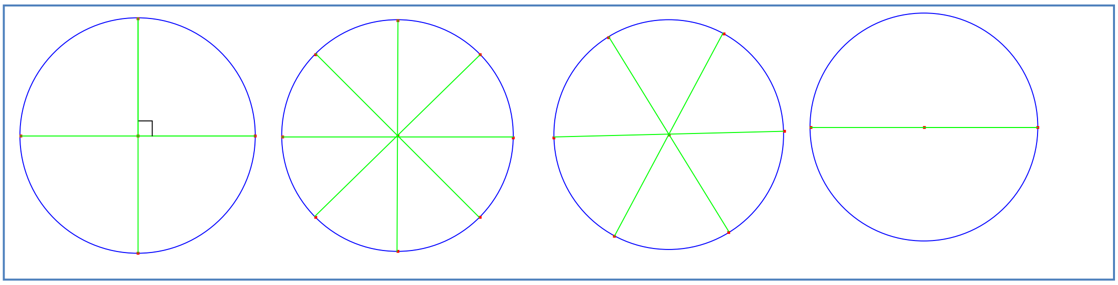


Figura 8

Alguns itens desta tarefa foram retirados e colocados na tarefa II.

5.2.3. Atividade III - Calcular seno, cosseno, tangente, de um ângulo no círculo trigonométrico.

Tarefa I

Objetivo Específico: Relação entre seno e cosseno de ângulos complementares

1) Usando a o círculo trigonométrico da Figura 1, complete a tabela:

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$sen\alpha$	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0
$cos\alpha$	1	0,9	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,9	-1
$tg\alpha$	0	0,6	1	1,7	∄	-1,7	-1	-0,6	0

α	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$	$390°$
Rad	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{\pi}{6}$
$sen\alpha$	-0,5	-0,7	-0,9	-1	-0,9	-0,7	-0,5	0	0,5
$cos\alpha$	-0,9	-0,7	-0,5	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9
$tg\alpha$	0,6	1	1,7	∄	-1,7	-1	-0,6	0	0,6

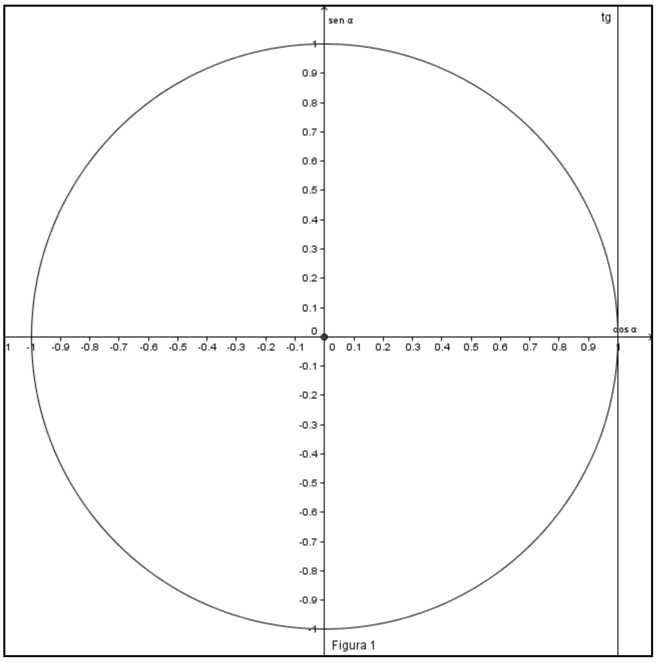


Figura 1

As alterações nesta tarefa foram feitas a partir de sugestão da professora I, observação de comentários de alunos indicavam que uma única figura seria suficiente e a análises da pesquisadora. A professora I sugeriu que os eixos não apresentassem medidas. Ao finalizar a THA não verificamos que esta informação compromete a atividade e decidimos colocar a partir de 0,1. A figura continua com o desafio da projeção do eixo da tangente (agora para o ângulo de $60°$*).*

Inicialmente, a professora I comentou que a tabela não seria necessária para responder as questões. A pesquisadora argumentou que a tabela organiza a informações e convenceu a professora quanto ao uso da tabela. Finalmente a professora I sugeriu que fosse acrescentada uma linha para conversão para a medida radiano.

Tarefa II

Objetivo Específico: Relações entre: o seno e o cosseno de ângulos complementares e as razões trigonométricas dos ângulos simétricos

1. A partir da relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares e sabendo que $sen30° = \frac{1}{2}$ e $cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, complete a tabela:

α	**30°**	**60°**	**90°**	**120°**	**150°**	**180°**	**210°**	**240°**	**270°**	**300°**	**330°**	**360°**	**420°**
$\boldsymbol{sen\alpha}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\boldsymbol{cos\alpha}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

Após sugestão do professor II, a tabela com ângulos complementares foi retirada. Acrescentamos na tarefa II da Atividade II o item em que os alunos devem destacar os ângulos complementares e, deste modo, promover a revisão da relação.

Tarefa III

A tarefa não foi alterada.

5.2.4. Atividade IV - Uso da calculadora científica para cálculo das funções trigonométricas

Tarefa I

Objetivo específico: Cálculo das razões trigonométricas em grau e em radianos usando a calculadora científica.

1) Utilize as funções sin e cos da calculadora científica para completar as tabelas (aproximação de 0,01).

Ângulo α	**senα**	**cosα**
$0°$	0	1
$30°$	0,5	0,87
$45°$	0,71	0,71
$60°$	0,87	0,5
$90°$	1	0
$120°$	0,87	-0,50
$135°$	0,71	-0,71
$150°$	0,5	-0,87
$180°$	0	-1
$210°$	-0,5	-0,87
$225°$	-0,71	-0,71
$240°$	-0,87	-0,5
$270°$	-1	0
$300°$	-0,87	0,5
$315°$	-0,71	0,71
$330°$	-0,5	0,87
$360°$	0	1
$420°$	0,87	0,5
$450°$	1	0

Marca Classe/ Kenko Fraction – grau Inicialmente você deve alterar o tipo de número para radianos apertando a tecla **DRG** até aparecer **DEG** no visor Para calcular o $sen\ 90$ Você deve primeiro digitar **90** seguida da tecla **sin.** O visor deve apresentar o valor **1.**   **Marca Classe/ Kenko Fraction - radianos** Inicialmente você deve alterar o tipo de número para radianos apertando a tecla **DRG** até aparecer **RAD** no visor Para calcular o $sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ você deve digitar **2ndf** (teclas superiores) em seguida $\boldsymbol{\pi}$**.** O visor deve apresentar o valor **3.141592654...** Depois digite a tecla **+/-** (para indicar o sentido horário), seguida das teclas ÷ , da tecla **2** e da tecla **=**. O visor deve apresentar o valor **-1.570796327..** Finalmente selecionar **sin**. O visor deve apresentar o valor **-1**

A professora I não fez nenhuma alteração na atividade, o professor II não aplicou esta atividade e também não apresentou sugestões. No entanto, após o desenvolvimento da atividade retiramos a coluna da função tangente. No estudo de função tangente é restabelecido o uso da calculadora para facilitar a construção do gráfico da tangente; algumas conjecturas ocorrem apenas na função tangente ($D = \{x \in \Re / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$) e também evitar equívocos, como $tg\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Alguns itens foram retirados da tabela, apenas para diminuir a quantidade de operações, sem comprometer a atividade.

X rad	f(x) = sen(x)	g(x) = cos(x)
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
2π	0	1
$\frac{5\pi}{2}$	1	0
3π	0	-1
$-\frac{\pi}{2}$	-1	0
$-\pi$	0	-1
$-\frac{3\pi}{2}$	1	0
-2π	0	1
$-\frac{5\pi}{2}$	-1	0
-3π	0	-1

5.2.5. Atividade V - Estudo da função sen x

Tarefa I

Objetivo específico: introdução ao estudo da função seno

Como sen x é uma função podemos utilizar um gráfico cartesiano para representar seu comportamento.

Vamos lembrar que um gráfico é a representação do domínio e do contradomínio da função. As coordenadas dos pontos do gráfico representam os valores do domínio e sua respectiva imagem.

Você deve pensar nisso antes de fazer o gráfico. Os gráficos de funções trigonométricas normalmente representam o ângulo em radianos.

1) Complete a tabela 1:

X rad	**f(x) = sen(x)**	**P((x, f(x))**
0	0	**A(0,0)**
$\frac{\pi}{2}$	1	B$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
π	0	C(π,0)
$\frac{3\pi}{2}$	-1	D$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$
2π	0	E(2π,0)
$\frac{5\pi}{2}$	1	F$\left(\frac{5\pi}{2}, 1\right)$
3π	0	G(3π,0)
$\frac{7\pi}{2}$	-1	H$\left(\frac{7\pi}{2}, -1\right)$
4π	0	I(4π,0)
$-\frac{\pi}{2}$	-1	J$\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$
$-\pi$	0	K($-\pi$,0)
$-\frac{3\pi}{2}$	1	L$\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)$
-2π	0	M(-2π,0)
$-\frac{5\pi}{2}$	-1	N$\left(-\frac{5\pi}{2}, -1\right)$

Tabela 1

2) Represente no sistema cartesiano ortogonal da Figura 1, os pontos que você encontrou na atividade anterior.

a) Qual seria o eixo dos arcos e como ele seria representado?

O domínio, no eixo cartesiano é o eixo x.

b) Qual seria o eixo dos senos e como ele seria representado?

O conjunto imagem, no eixo cartesiano é o eixo y, que varia de -1 até 1.

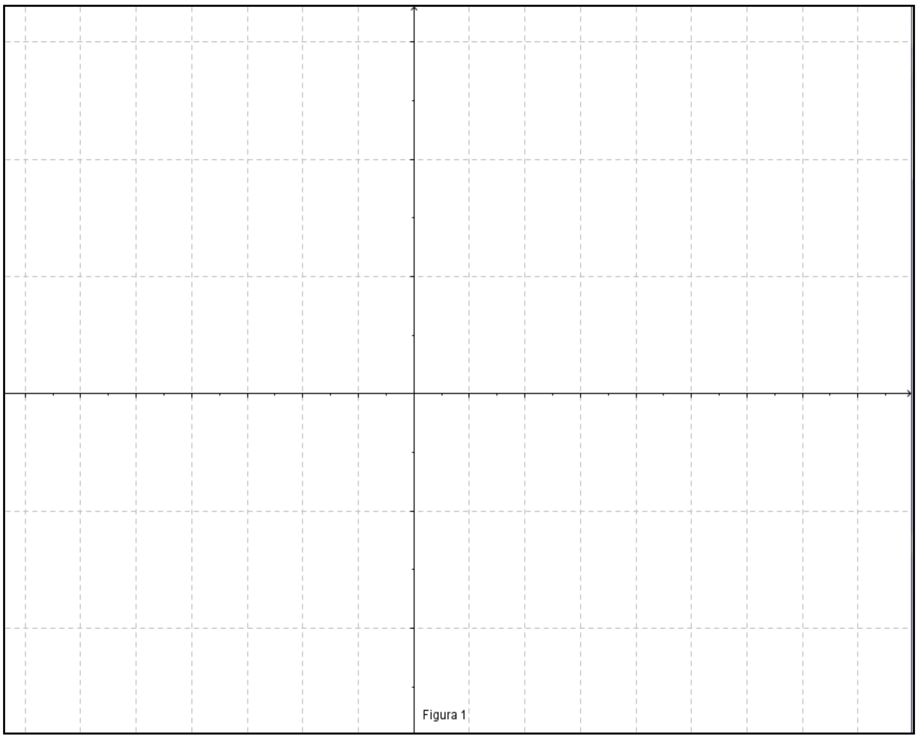


Figura 1

3) Os pontos representados na Figura 1 permitem ter uma ideia do comportamento da função y = sen x? Justifique.

A senóide não foi traçada, porém podemos ter uma noção do comportamento da função e perceber que ela é limitada e periódica.

4) Como vimos o seno é uma função trigonométrica. Assim, para todos os elementos do domínio temos um, e apenas um elemento do conjunto imagem. Neste caso a função seno é contínua, ou seja, encontramos elementos do domínio não apenas entre os arcos fundamentais como $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \mathrm{etc}$. Mas também para outros ângulos como $\frac{\pi}{10}$. Logo, você deve traçar o gráfico que representa a função y = sen x, sem descontinuidade, usando o eixo da figura 2.

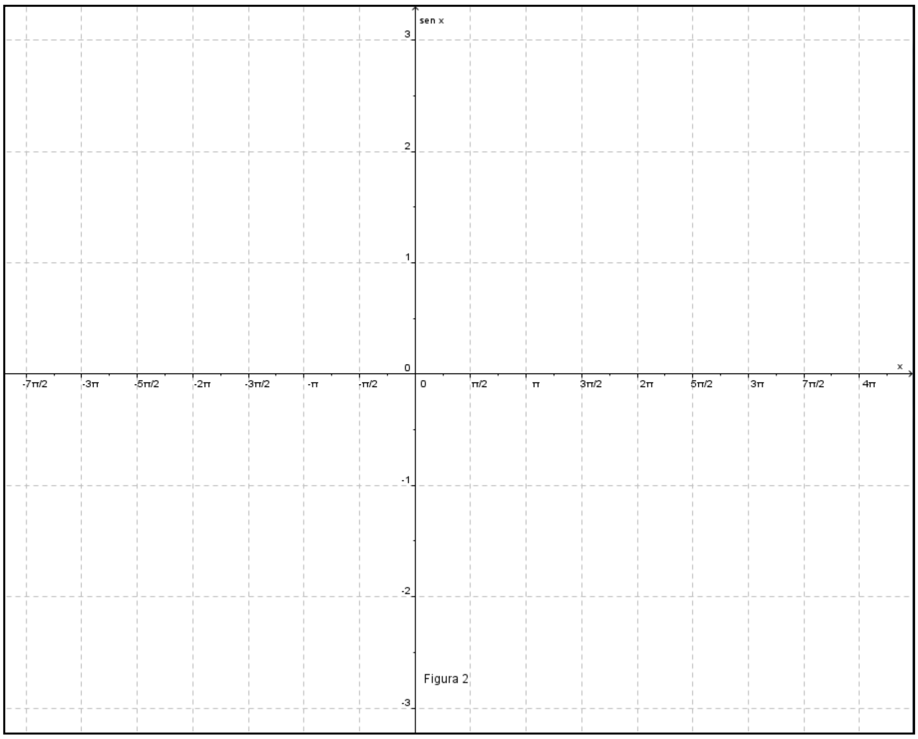


Figura 2

5) Responda as questões utilizando o gráfico da função y = sen x da figura 2 para responder.

a) Qual é o domínio da função sen x?

O Domínio de f(x) = sen x é o conjunto $\mathbb{R}$.

b) Qual é o conjunto imagem da função sen x?

$\mathrm{Im} = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$.

c) A função sen x é uma função limitada?

Sim, pois varia de -1 a 1.

d) Dizemos que a função sen x é uma função periódica. Explique por que ela recebe esta definição e dê um exemplo a partir do gráfico da função sen x.

Periódica, pois se repete a cada 2π.

O item 6 não foi alterado.

Nesta tarefa as alterações que foram realizadas têm como objetivo melhorar a interpretação dos enunciados. As sugestões foram feitas pela banca que participou do exame de qualificação, os professores parceiros não relataram sugestões.

Tarefa II

A tarefa não foi alterada.

Tarefa III

Objetivo específico: Observar o comportamento do gráfico da função sen x e suas associadas

1) Traçar os gráficos das funções no eixo cartesiano dado na Figura 3 e completar a tabela (use cores diferentes para cada senóide): Observação: no software você deve usar f(x)=sin(x):

Função	Domínio	Período	Imagem
f(x) = sen x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$
g(x) = 1 + sen x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / 0 \leq y \leq 2\}$
i(x) = -2 + sen x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -3 \leq y \leq -1\}$

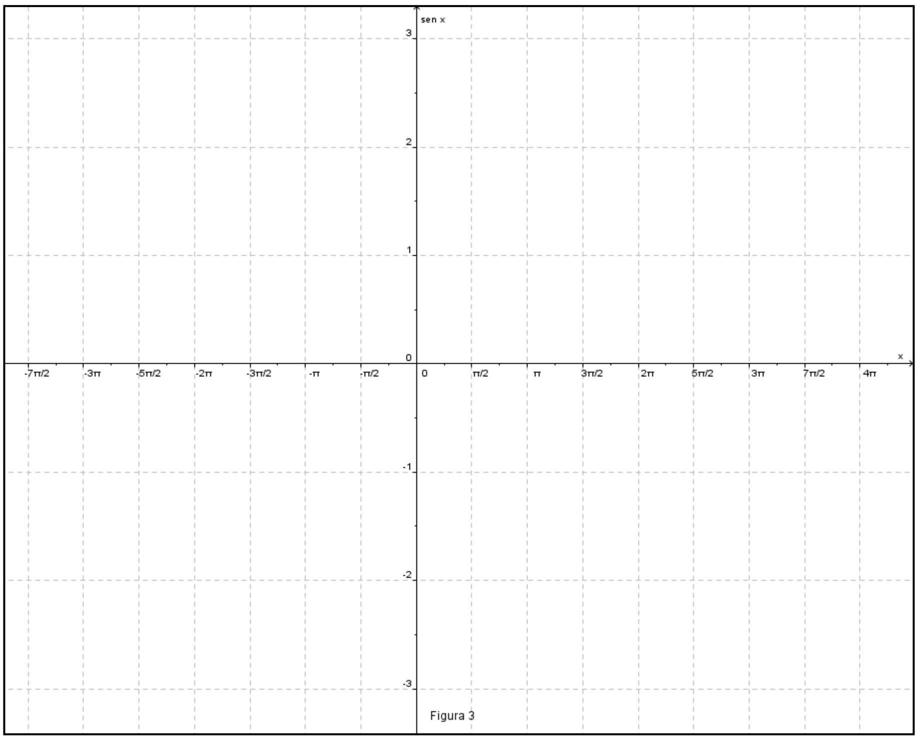


Figura 3

Observação: As figuras 4, 5 e 6, são idênticas à Figura 3, para esta análise julgamos ser desnecessária tal reprodução.

2) Traçar os gráficos das funções no eixo cartesiano dado na Figura 4 e completar a tabela (use cores diferentes para cada senóide):

Função	**Domínio**	**Período**	**Imagem**
f(x) = sen x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$
g(x) =2sen x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -2 \leq y \leq 2\}$
i(x) = $\frac{1}{2}$sen x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \left\{y \in \Re / -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$
i(x) = -2sen x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -2 \leq y \leq 2\}$

3) Traçar os gráficos das funções no eixo cartesiano dado na Figura 5 e completar a tabela (use cores diferentes para cada senóide):

Função	**Domínio**	**Período**	**Imagem**
f(x) = sen x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$
h(x) =2sen x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -2 \leq y \leq 2\}$
i(x) = -2sen x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -2 \leq y \leq 2\}$

4) Traçar os gráficos das funções no eixo cartesiano dado na Figura 6 e completar a tabela (use cores diferentes para cada senóide):

Função	**Domínio**	**Período**	**Imagem**
f(x) = sen x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$
g(x) = sen2x	conjunto $\mathbb{R}$	π	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$
h(x) = sen(-2x)	conjunto $\mathbb{R}$	π	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$
i(x) =sen4x	conjunto $\mathbb{R}$	$\frac{\pi}{2}$	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$

Nesta tarefa retiramos as últimas colunas da tabela e algumas funções. A intenção de reduzir a atividade, não comprometeu o conteúdo, e também tornou a atividade mais dinâmica.

Após a construção dos gráficos que representam as funções solicitadas optamos por manter a pergunta "O que você observa comparando os gráficos da função referência f(x) = sen x com os outros gráficos?". Fizemos uma pequena alteração no enunciado. Esta questão possibilita o aluno conjecturar sobre as transformações da função sen (x).

5.2.6. Atividade VI - Estudo da função cosseno

Tarefa I

A tarefa não foi alterada.

Tarefa II

Objetivo específico: Observar o comportamento do gráfico da função cosseno x com o de suas associadas

1) Traçar os gráficos das funções no eixo cartesiano dado na Figura 2 e completar a tabela (use cores diferentes para cada cossenóide): Observação: no software você deve usar f(x)=cos(x):

Função	Domínio	Período	Imagem
f(x) = cos x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$
g(x) = 1 +cos x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / 0 \leq y \leq 2\}$
h(x) = - 2 + cos x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -3 \leq y \leq -1\}$

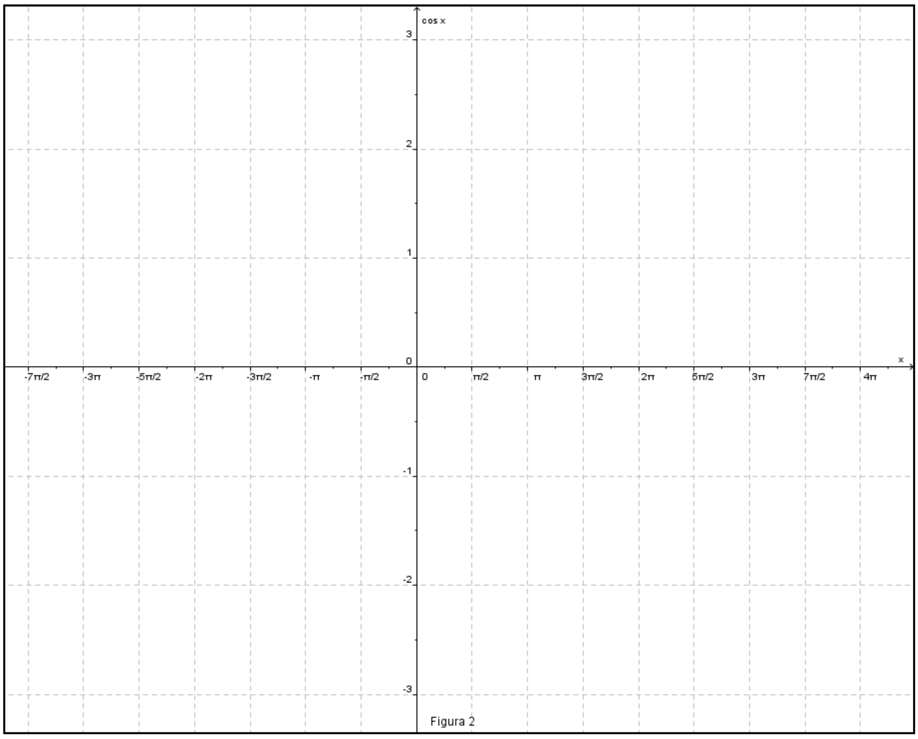


Figura 2

Observação: As figuras 3 e 4 são idênticas à Figura 2, para esta análise julgamos ser desnecessária tal reprodução.

2) Traçar os gráficos das funções no eixo cartesiano dado na figura 3 (use cores diferentes para cada cossenóide):

Função	Domínio	Período	Imagem
f(x) = cos x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$
g(x) = -2cos x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -2 \leq y \leq 2\}$
h(x) = $\frac{1}{2}\cos x$	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -0{,}5 \leq y \leq 0{,}5\}$

3) Traçar os gráficos das funções no eixo cartesiano dado na figura 4 (use cores diferentes para cada cossenóide):

Função	Domínio	Período	Imagem
f(x) = cos x	conjunto $\mathbb{R}$	2π	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$
g(x) = cos2x	conjunto $\mathbb{R}$	π	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$
h(x) = cos$\frac{x}{2}$	conjunto $\mathbb{R}$	4π	$Im = \{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$

Nesta tarefa retiramos as últimas colunas da tabela e algumas funções. A intenção de reduzir a atividade, não comprometeu o conteúdo, *e também tornou a atividade mais dinâmica.*

Após a construção dos gráficos que representam as funções solicitadas optamos por manter a pergunta *"O que você observa comparando os gráficos da função referência f(x) = cos x com os outros gráficos?".* Fizemos uma pequena alteração no enunciado. Esta questão possibilita o aluno conjecturar sobre as transformações da função *cos* (x).

Os itens 4 e 5 não foram alterados.

5.2.7. Atividade VII - Estudo da função tangente

Tarefa I

Objetivo específico: Cálculo da função tangente usando a calculadora científica e construção do gráfico que representa a função.

1) Utilize a função tg da calculadora científica para completar as tabelas (aproximação de 0,01)

x	-75°	-60°	-45°	-30°	-15°	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
tg x	-3,73	-1,73	-1	-0,58	-0,27	0	0,27	0,58	1	1,73	3,73	∄	-3,73	-1,73	-1	-0,58	-0,27

X	180°	195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°	360°	375°	390°	405°	420°
tg x	0	0,27	0,58	1	1,73	3,73	∄	-3,73	-1,73	-1	-0,58	-0,27	0	0,27	0,58	1	1,73

2) Traçar o gráfico da função f(x)=tg (x) na Figura 1, usando os valores da tangente obtidos no item 1 e completar a tabela.

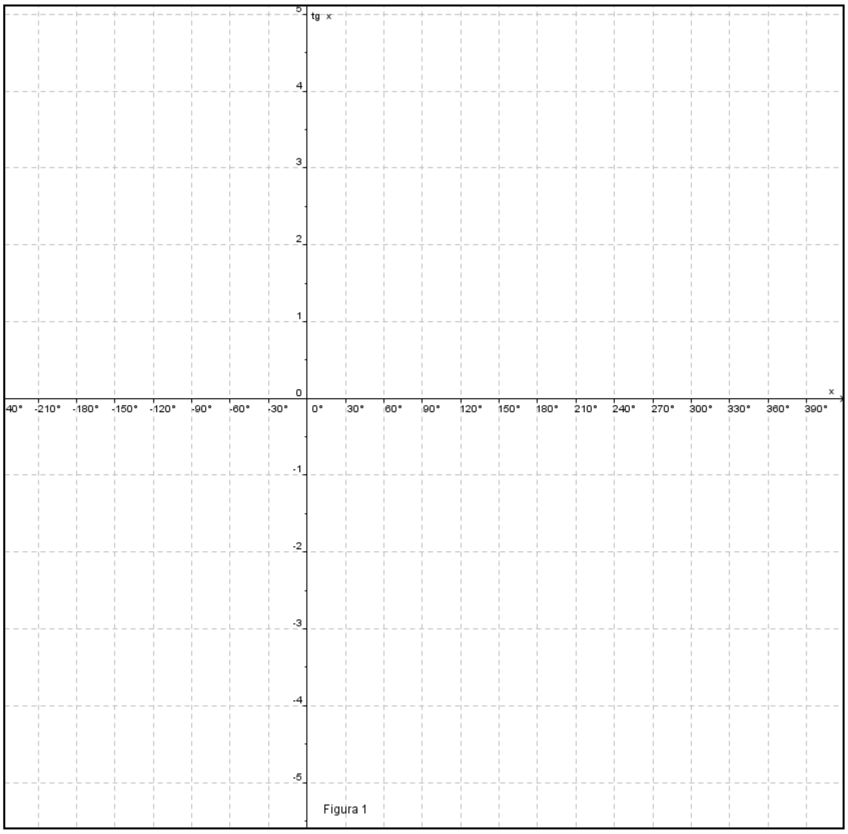


Figura 1

Função	Domínio	Período	Imagem
f(x) = tg x	$D = \{x \in \Re / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	π	$Im = \Re$

Acrescentamos esta tarefa com o objetivo de restabelecer o uso da calculadora para facilitar a construção do gráfico da tangente. Esta tarefa é anterior às construções dos gráficos no Geogebra, para estimular a construção de gráficos das funções trigonométricas.

Tarefa II

1) Traçar os gráficos das funções no eixo cartesiano dado na Figura 2 e completar a tabela.

   Observação: você deve usar a relação $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ e digitar f(x)= sin(x)/cos(x):

Função	**Domínio**	**Período**	**Imagem**
f(x) = tg x	$D = \{x \in \Re / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	π	$Im = \Re$
g(x) = 1 + tg x	$D = \{x \in \Re / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	π	$Im = \Re$
h(x) = - tg x	$D = \{x \in \Re / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	π	$Im = \Re$
i(x) = $\frac{1}{2} tgx$	$D = \{x \in \Re / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	π	$Im = \Re$

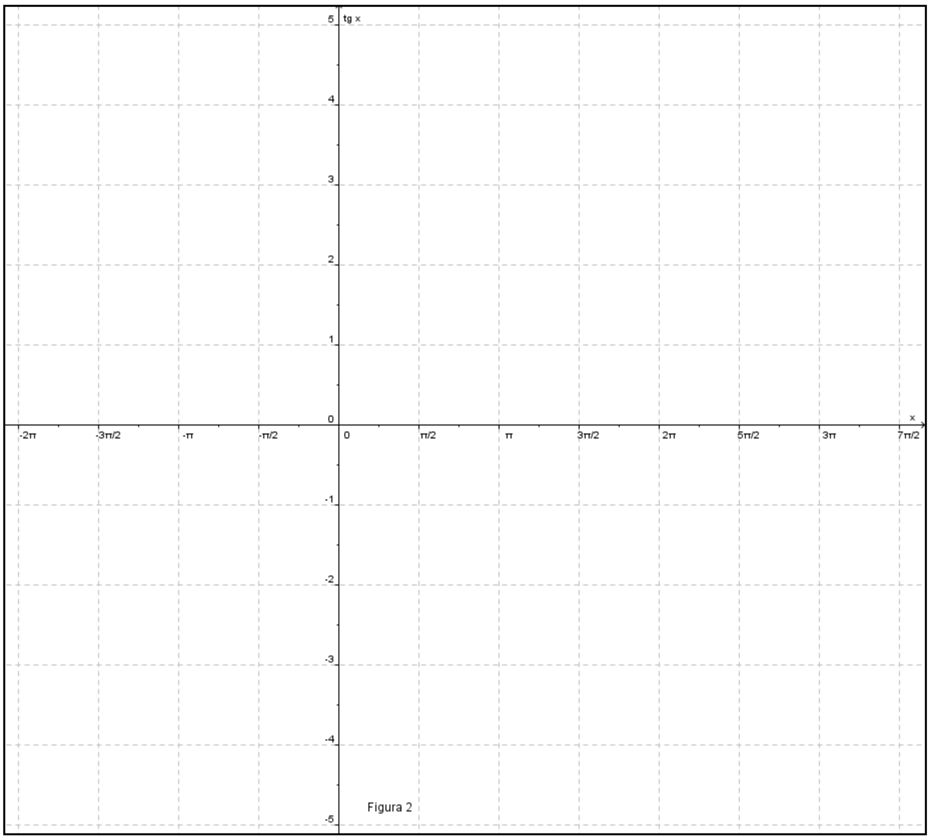


Figura 2

O que você observa comparando os gráficos da função referência f(x) =tg x com os outros gráficos?

Nesta tarefa retiramos as últimas colunas da tabela. A intenção de reduzir a atividade, não comprometeu o conteúdo.

Após a construção dos gráficos que representam as funções solicitadas optamos por manter a pergunta "O que você observa comparando os gráficos da função referência f(x) = tg x com os outros gráficos?". Fizemos uma pequena alteração no enunciado. Esta questão possibilita o aluno conjecturar sobre as transformações da função tg (x).

O item 2 do exercício não foi alterado.

5.2.8. Atividade VIII - Estudo das equações e funções trigonométricas

Tarefa I

Objetivo Específico: resolver situações problema com o emprego das funções trigonométricas.

Uma equação é denominada de equação trigonométrica quando há uma igualdade contendo uma incógnita submetida a uma função trigonométrica. Veja os exemplos:

e) Quais os valores de α que satisfazem a equação $\cos\alpha = 1$?

$$cos\alpha = 1 = cos0 \Rightarrow \alpha = 2k\pi$$

$$S = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

f) Quais os valores de x que satisfazem a equação $\text{sen}^2\text{x} = 1$?

$$sen^2\text{x} = 1 \Rightarrow \text{sen x} = \pm 1$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

g) Racionalização de denominadores:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

h) Usando a tabela dos arcos notáveis que foi construída no estudo das razões trigonométricas:

$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$
$\boldsymbol{sen\ \alpha}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\boldsymbol{cos\ \alpha}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\boldsymbol{tg\ \alpha}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Nesta tarefa apenas alteramos os exemplos iniciais. A principal mudança foi na tabela que apresenta os arcos em radianos para viabilizar a resolução do exercício 1 da tarefa.

Os exercícios das Tarefas I e II não foram alterados.

Algumas evidências nos permitem indicar caminhos para responder as seguintes questões de pesquisa:

a) *Como as pesquisas na área de Educação Matemática que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem podem contribuir para a organização do ensino de Funções Trigonométricas que potencialize boas situações de aprendizagem aos alunos?*

Os estudos de Zeichner (1998), Marzano, Pickering e Pollock (2008) e Passos (2006) nortearam nossa conjectura acerca da importância em amenizar a separação que atualmente existe entre o mundo dos pesquisadores e o mundo dos professores. Procuramos com o desenvolvimento do projeto na escola parceira, estimular mudanças nas práticas dos profissionais envolvidos a partir da reflexão sobre a mesma.

Zeichner (1998) pontua que os professores participantes de pesquisas educacionais sentem que os pesquisadores acadêmicos são insensíveis à realidade do âmbito escolar e frequentemente se julgam explorados por eles. Em relatos dos professores parceiros pudemos encontrar indícios de que conseguimos superar, parcialmente, o mal estar relatado por Zeichner (1998) comum aos professores participantes de pesquisas: normalmente se veem descritos negativamente.

Nesse momento do trabalho, faremos uma observação de uma característica da pesquisadora que foi relevante para o alcance dos resultados elencados: a pesquisadora era aluna de um curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática. Os objetivos do curso são: desenvolver uma formação apoiada na prática e no conhecimento de pesquisas em Educação Matemática, visando à transformação da prática docente e a produção de um trabalho de pesquisa que contribua para a compreensão do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Deste modo, a formação da pesquisadora atende às recomendações do nosso referencial teórico: o uso de pesquisas em Educação Matemática.

Este estudo de natureza qualitativa, não fez uma avaliação nos moldes tradicionais para verificar a aprendizagem. Tal como nos referimos ao discutir a metodologia adotada, as análises foram feitas a partir da coleta de dados nas observações das aulas, nos protocolos dos alunos e nas entrevistas realizadas. Assim, podemos inferir que mesmo sem uma avaliação como prova escrita os resultados obtidos no ensino de Funções Trigonométricas foram significativos. Conseguimos indícios que nos permitem concluir que houve: uma superação na dificuldade quanto ao uso de instrumentos, uma facilitação referente ao acesso às tecnologias, a compreensão das funções trigonométricas, assim como o entendimento em relação às mudanças no comportamento da função quando alteramos seus parâmetros.

Um importante resultado conquistado junto aos professores, com suas respectivas peculiaridades, foi o envolvimento em atividades que propiciaram integrar o conteúdo Funções Trigonométricas à tecnologia. A oportunidade de vivenciar a potencialidade pedagógica de recursos como software Geogebra e a calculadora científica demonstrou para o professor as contribuições que as tecnologias trazem aos processos de aprendizagem. As atividades apresentaram o uso das tecnologias como ferramenta que permite aos alunos, manipular, testar e conjecturar com o objetivo de conhecer os temas desenvolvidos.

Com nosso estudo, conseguimos atender à preocupação discutida por Gómez e Lupiáñez (2007) em utilizar a THA como um marco de referência e sequencias de atividades que lhes sirvam de exemplo. Mesmo com uma THA produzida por um pesquisador, conseguimos diminuir a resistência apontada por Zeichner (1998) na forma como a pesquisa educacional chega ao professor. Conseguimos minimizar os efeitos de um programa prescritivo e o caráter externo para provocar uma coautoria entre o pesquisador e o professor parceiro.

No presente estudo pudemos vislumbrar o Ciclo de Ensino de Matemática, proposto por Martim Simon (1995), em ação. As várias componentes do ciclo proporcionaram reflexões nos professores parceiros e na pesquisadora. Inferimos que todos ampliaram seus conhecimentos matemáticos sobre Funções Trigonométricas, que alguns itens específicos relacionados ao tema eram desconhecidos até pelos professores. A identificação dos objetivos de aprendizagem, propiciou considerações nos professores parceiros que compreenderam quais objetivos pretendiam alcançar com os alunos e levantar hipóteses sobre o processo de aprendizagem de Funções Trigonométricas.

Podemos supor que a participação no presente estudo permitiu o acesso dos professores parceiros às teorias do ensino da Matemática, em especial quanto ao uso de THA. Os docentes tomaram ciência, de como as teorias de ensino e aprendizagem podem contribuir em sala de aula. Não nos referimos apenas à compreensão do Construtivismo, mas também às discussões acerca das teorias da Didática da Matemática que permearam todos os meses de contato da pesquisadora com os docentes. Depoimentos dos professores indicam que pretendem fazer uso da THA nas próximas oportunidades de desenvolver o assunto Funções Trigonométricas.

O professor deve assumir uma postura reflexiva inerente à noção de THA para retroalimentar o Ciclo de Ensino da Matemática. Podemos inferir que, ao desenvolver a THA, os professores parceiros e a pesquisadora retroalimentaram, cada um a seu modo, o ciclo. Quando no desenvolvimento novamente desse tema, vão renovar as hipóteses de aprendizagem e modificar os outros componentes.

Há indícios que conseguimos avanços em como trazer os resultados de pesquisas para os professores em atuação nas escolas. Na elaboração da THA partimos das recomendações que os investigadores fizeram sobre as principais dificuldades dos alunos e professores e procuramos fazer uso dos avanços que foram feitos nas teorias de ensino e aprendizagem. Assim, demonstramos aos professores parceiros, como elaborar situações de ensino fazendo uso destes resultados. Porém, é preciso ressaltar que as pesquisas sobre o tema Funções trigonométricas ainda são escassas, boa parte se limita às razões trigonométricas de ângulos agudos. Notamos que este tema é pouco explorado, novos estudos poderiam responder questões como: as razões trigonométricas de ângulos agudos são pré-requisitos para o aprendizado de Funções Trigonométricas? Ou ainda, o desenvolvimento das Funções Trigonométricas, sem a introdução das razões trigonométricas de ângulos agudos, pode diminuir a tendência de professores e alunos em converter arcos em radianos para ângulos em graus? Como a defasagem no conceito de funções compromete o aprendizado das Funções Trigonométricas?

Contudo, partindo de uma situação hipotética, em que o número de pesquisas sobre o tema Funções trigonométricas fosse maior, com resultados que indicassem recomendações que implicariam em melhorias no processo de ensino e aprendizagem, como os professores acessariam tal conhecimento? Como potencializar o uso destes resultados de pesquisas? Uma resposta foi obtida neste presente estudo, cientes de que a experiência pode ser reproduzida, os outros estudos do projeto que fazemos parte ratificam que é possível levar os resultados de pesquisa ao professores, porém há uma limitação à propagação deste projeto em grande escala. Então como poderíamos sensibilizar os professores que não participaram de tal experiência a fazer uso dos resultados, não apenas da presente investigação, mas também de outras no campo do Ensino de Matemática?

Para responder tal impasse, apresentamos mais uma questão a ser respondida em futuras investigações: é possível estender o uso de THA com a organização de oficinas de formação para os professores? Nestas, pesquisadores experientes teriam o papel de formadores, com a responsabilidade pela coordenação de grupos de professores, que teriam a missão de elaborar pequenas sequências de ensino, ou THA reduzidas, a fim apresentar aos professores o mundo dos pesquisadores e como este pode trazer implicações para a sala de aula.

b) *Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino de Funções Trigonométricas?*

A partir do referencial teórico proposto do Construtivismo e as contribuições de Martim Simon (1995) e outros autores sobre a noção de THA, percebemos que é possível o planejamento do ensino de Funções Trigonométricas sob a perspectiva construtivista. Durante todo o processo de elaboração da THA, de apresentação aos professores parceiros e o desenvolvimento em sala se aula, procuramos seguir as orientações do nosso aporte teórico. Nos momentos em que percebíamos que os professores em ação desviavam da prática construtivista, procuramos fazer intervenções durante ou após a aula para resgate da postura.

Na elaboração das atividades de aprendizagem, procuramos atender aos pressupostos construtivistas ao preparar tarefas que propiciassem ao aluno construir o seu próprio conhecimento, sistematizar sozinho e entre os pares. Com as questões apresentadas nas atividades tínhamos dois objetivos: provocar questionamentos acerca dos conteúdos e, após o aluno fazer os exercícios, que o professor sistematizasse os temas por meio de discussões das atividades. As tarefas foram criadas com a intenção de atingir dois tipos de alunos: desde os que tinham um alto desempenho em matemática aos que apresentavam dificuldades de aprendizagem, contribuindo com a melhoria da autoestima e autoconceito a fim de promover reações proativas do educando em busca do sucesso no alcance da aprendizagem.

As duas primeiras questões são responsabilidade da pesquisadora. Uma vez que todo o processo de revisão bibliográfica de pesquisas e documentos que indicam os caminhos para o desenvolvimento de atividades de ensino de Funções Trigonométricas coube a esta. Mesmo que os professores contribuam com algumas alterações antes e depois do desenvolvimento da THA é indiscutível que a participação dos mesmos é pequena nestes assuntos. Talvez essa seja uma questão a ser discutida numa outra pesquisa: como o professor pode desenvolver sua própria THA sem a presença de um pesquisador?

Ao responder à terceira questão, buscamos recursos que permitissem encontrar indícios que permitam que o presente estudo contribua com a pesquisa em Ensino da matemática:

c) *Como a atuação do professor de Matemática se revela no que se refere às atividades de planejamento do ensino de Funções Trigonométricas, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem?*

Podemos usar o conceito de hipotético de Simon (1995) e estender para as hipóteses de atuação do professor. Ao elaborarmos a THA e apresentarmos aos professores, tínhamos uma suposição de como a THA seria desenvolvida. Porém é desconhecida para nós a atuação de cada professor e seus respectivos alunos. Deste modo, mesmo apresentando atividades planejadas e com resultados esperados, tivemos momentos em que fomos surpreendidos com contribuições valorosas e também decepções que poderiam ser evitadas com o uso adequado das atividades. Características inerentes à própria THA e ao Construtivismo que não apregoam manuais prontos, mas guias que auxiliam o professor na tomada de decisões.

Como recomendado por Coll e Solé (2009), percebemos que as intervenções dos professores foram responsáveis pelos resultados. Nos momentos em que a aula era conduzida de acordo com a abordagem construtivista, pudemos notar maior autonomia dos alunos. Contudo em momentos que a quantidade de auxílio era excessiva ou o professor não orientava adequadamente, os alunos não tinham autonomia ou aguardavam a resposta.

Um importante determinante no processo de ensino e aprendizagem, citado por Solé (2009), foi detectado nas observações e entrevistas. Os alunos da professora P1, à medida que sentiam aumentar a confiança na sua própria capacidade de aprender, mobilizavam mais esforços na busca das soluções. Os alunos do professor P2, como apresentavam uma autoestima negativa, não acreditavam que poderiam aprender e nem tentavam resolver as tarefas.

Concordamos com Simon (1995), apenas com o conhecimento matemático é possível interpretar a linguagem, as dúvidas, as conjecturas e as ações dos alunos. O professor deve conhecer os objetivos de aprendizagem que espera alcançar, para que possa modificar a THA quando perceber que os alunos se distanciaram de suas metas ou quando uma determinada atividade não for adequada aos seus alunos.

Para o bom desenvolvimento das atividades planejadas, os professores devem “comunicar-se” com as observações dos alunos, não apenas as dúvidas apresentadas, mas principalmente as conjecturas que fizeram. Um ambiente de aprendizagem, em que ocorre a interação entre o professor e alunos, propicia o empenho de todos na construção dos conhecimentos.

A principal característica do professor, como mediador da aprendizagem do aluno, é a mais difícil de ser colocada em prática. No artigo de Pires (2009), a autora destaca a interpretação errada do construtivismo de “deixar os alunos à vontade” e o papel do professor como transmissor de conhecimento. O professor que pretende adotar a postura construtivista em sala de aula e que muitas vezes consegue desenvolver as atividades com tal abordagem, acaba recorrendo ao método tradicional em algumas circunstâncias como: o tempo escasso, a falta de domínio do conteúdo matemático, a indisciplina dos alunos entre outros fatores.

Nos discursos do professores parceiros identificamos indícios das contribuições do presente estudo para o desenvolvimento profissional dos educadores. O envolvimento dos profissionais da escola no projeto provocou em ambos, uma reflexão sobre a prática. Há evidências que as tensões vivenciadas pelo professor P2 produziram a (re)significação de saberes e práticas e que as reflexões propiciadas pelo desenvolvimento da THA promoveram a tomada de consciência dos processos de aprendizagem; ampliando e enriquecendo seus conhecimentos.

Esperamos ter contribuído com as discussões acerca do desenvolvimento profissional dos professores que ensinam Matemática. Nossa pesquisa utilizou os estudos Simon (1995) para apresentar uma proposta de THA. É evidente que o desenvolvimento de uma THA requer diversos aspectos como o conhecimento de resultados de pesquisas, a preocupação em compreender como ocorre a aprendizagem, e a prática reflexiva que mantém o movimento do Ciclo de Ensino de Matemática proposto por Simon (1995). Porém, podemos inferir que a experiência com a THA desenvolvida serve de estímulo aos professores parceiros na busca por resultados de pesquisa como observamos nas entrevistas realizadas.

Para Simon (1995) a THA deve ser desenvolvida pelo próprio professor. Goméz e Lupianez defendem que e elaboração da THA seja mais adequada ao pesquisador. Nós lançamos as seguintes questões: será que a THA não é mais apropriada como proposta de formação continuada de professores ou como metodologia de pesquisa? Será que a postura do pesquisador não deverá ser diferenciada? Será que durante o desenvolvimento da THA, o pesquisador deve ser o orientador do professor na sua formação? O pesquisador deve fazer intervenções quando necessárias, ter uma postura mais comprometida com os resultados do que com a coleta de dados? Estas questões não puderam ser respondidas nesta pesquisa visto que demanda mais investigações.

Percebemos que, como comentário em nosso exame de qualificação pela professora Passos, à medida que o professor adquire autonomia, ele permite que o aluno seja autônomo. Durante o desenvolvimento da THA pudemos perceber duas condições para que professor desenvolva essa autonomia docente: o saber matemático e o saber didático. O saber matemático é condição *sine qua non* para que o conteúdo seja bem desenvolvido. É fato que se o professor não compreende o conteúdo, não consegue ensinar. O saber didático que permite que elabore atividades, que manipule o saber matemático, até chegar ao entendimento do aluno. Vamos nos ater apenas ao saber didático, pois, é constituído em três fases da vida docente: iniciando como aluno da Educação Básica e do Ensino Superior, foi exposto às inúmeras atuações de professores; a segunda etapa compreende a formação inicial em Didática, onde o futuro professor teve acesso às teorias que norteiam o processo de ensino e aprendizagem e, finalmente, a terceira fase abrange a sua própria experiência docente, desde os primeiros dias de magistério até o presente momento, responsável pela retroalimentação do Ciclo de Ensino da Matemática como premissa recomendado por Simon (1995)[6]. Porém, o Ciclo só

[6]Destacamos duas das premissas recomendadas por Simon (1995):

- O conhecimento do professor evolui simultaneamente com o crescimento do conhecimento dos alunos. Como os alunos estão aprendendo Matemática, o professor está aprendendo sobre Matemática, aprender, ensinar, sobre o pensamento matemático de seus alunos.

estará em ação, se o professor mantiver sua dinâmica, isto é, o olhar analítico e reflexivo sobre a sua atuação na sala de aula, sobre os alunos e também receber as contribuições das teorias de ensino.

Nas primeiras aulas era evidente minha ansiedade em fazer com que "tudo desse certo" no desenvolvimento da THA. Como havia criado a THA me sentia responsável pelo seu sucesso e me sentia "insultada" por não ver tais atividades sendo exploradas como deveriam. Desdobrava-me buscando meios de tentar fazer com que os professores seguissem as orientações. Muitas vezes me vi interferindo nas aulas. Demorou um pouco, mas aprendi que a minha trajetória neste projeto era acompanhar o desenvolvimento da THA e observar os diferentes momentos vividos pelos alunos e professores. Gostaria de me sentir mais à vontade para orientar o professor P2. Mas a minha preocupação em "comprometer" a coleta de dados me fez perder a oportunidade de intervir mais e, inclusive, colaborar com o professor.

Neste sentido, acreditamos que colaboramos com a melhora no processo de ensino e aprendizagem de Funções Trigonométricas. Os professores parceiros declararam ter compreendido a abordagem construtivista: se preocuparam em questionar os alunos e permitir que, a partir de experiências, construam seu conhecimento. Os alunos da professora PI destacaram mudanças nos colegas de turma quanto à participação e interesse nas aulas de Matemática.

Para finalizar, gostaria de tomar como objeto de análise o próprio processo do desenvolvimento profissional da pesquisadora. Muito aprendi com a participação neste projeto. Não apenas saberes referentes à pesquisa, mas principalmente, por ter a oportunidade de ampliar minha compreensão acerca da prática de outros professores onde observei suas dúvidas e procurei compreender suas necessidades para tentar ajudá-los. Em nenhum momento me coloquei num patamar superior aos professores, procurava sempre respeitar e valorizar suas ações e nos momentos que julgava necessário, efetuar alguns comentários acerca de algum ajuste. Em todo trabalho procurei apresentar aos professores parceiros, aos gestores da escola, e principalmente aos alunos participantes do estudo, uma postura genuína de desejo de contribuir com a aprendizagem dos alunos. Em alguns momentos, por estar na posição confortável de observar a aula do outro, pude perceber conflitos e dúvidas

---

- As transformações, sucessivas, no conhecimento do professor, criam mudanças contínuas na sua própria trajetória hipotética de aprendizagem.

entre os alunos, que imediatamente encaminhava ao professor na sala de aula. Em outros, ainda, quando percebia uma falha no encaminhamento da atividade procurava falar gentilmente e discretamente que existia outro enfoque a ser explorado. Assim procurava manter o respeito dos alunos quanto ao professor e, principalmente, mostrava minha consideração pelo trabalho dele.

Confesso que gostaria de afirmar que a THA desenvolvida neste trabalho consegue ser reproduzida, integralmente, em qualquer situação para o estudo de funções trigonométricas. No entanto, enquanto pesquisadora, entendo que a característica essencial da THA é não ser desenvolvida em qualquer contexto e, principalmente como professora, sei que não existem receitas prontas. Mesmo que fosse possível desenvolver uma “THA IDEAL” os nossos alunos não são homogêneos, o que nos obriga a um constante olhar reflexivo sobre a nossa prática e a desenvolver novos ciclos a cada conteúdo trabalhado, com cada turma especificamente.

Numa situação ideal, teríamos professores com condições de trabalho condizentes com o valor da sua profissão, isto é, um salário digno que não os obrigaria a ter dupla ou tripla jornada de trabalho; a oferta de cursos de formação continuada que permitissem o acesso aos novos conhecimentos produzidos e informações ou estudos que ampliassem o Ciclo de Ensino de Matemática; e garantisse condições materiais e tempo livre para que os professores participassem de modo efetivo da construção das suas próprias THA.

Enfim, depois desta experiência podemos afirmar que a nossa trajetória hipotética pessoal também teve sucesso. Principalmente na compreensão do olhar do outro. Isto é, para nós que normalmente ficamos isolados na sala de aula e não acompanhamos o trabalho de outros professores, e vez em quando, conseguimos alguém interessado em avaliar uma situação de aprendizagem, percebemos que o envolvimento no projeto contribuiu com o desenvolvimento profissional de três professores: os dois professores parceiros e a pesquisadora, que também é professora.

ANGIOLIN, A. G. Trajetórias hipotéticas de aprendizagem sobre funções exponenciais. Dissertação (mestrado em Educação Matemática), PUC/SP, 2009.

BARBOSA, A. A. Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem relacionadas às razões e às Funções Trigonométricas, visando uma perspectiva construtivista. Dissertação (mestrado em Ensino de Matemática), PUC/SP, 2009.

BOAVIDA, M.A & PONTE, J. P. Investigação colaborativa: potencialidades e problemas. (2002) Disponível em:
http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt%5C02-Boavida-Ponte(GTI).pdf
Acesso em: 31 mai 2009.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. Investigação qualitativa em educação: uma introdução as teoria e aos métodos. Tradução de Maria J. Álvares, Sara B. dos Santos e Telmo M. Batista. Porto: Porto Editora, 1994.

BORGES, C. F. Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico: uma sequência para ensino. Dissertação (mestrado em Ensino de Matemática), PUC/SP, 2009.

BRASIL Secretaria de Ensino Fundamental Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

________Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 1999.

________Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

________Secretaria de Educação Básica, Orientações Curriculares para o Ensino Médio, Brasília: MEC, 2006.

________Secretaria de Educação Básica, Ensino Médio Inovador, Brasília: MEC, 2009.

BRIGUENTI, M. J. L. Ensino e aprendizagem da trigonometria: novas perspectivas da educação matemática. Dissertação (mestrado em Educação Matemática), UNESP, Rio Claro, 1994.

_________________. Alterando o ensino da trigonometria em escolas públicas de nível médio, a representação de algumas professoras. Tese (Doutorado em Educação), UNESP, Marília, 1998.

BRITO, A. J.; MOREY, B. B. Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental Horizontes, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 65-70, jan./jun, 2004.

CABRAL JUNIOR, R. S. Abordagem das Noções Iniciais de Probabilidade em uma Perspectiva Construtivista. Dissertação (mestrado em Ensino de Matemática), PUC/SP, 2009.

CARVALHO, M. M. “São Paulo Faz Escola”: Muda a abordagem de progressões na sala de aula? Dissertação (mestrado em Educação Matemática), PUC/SP, 2010.

COLL, C [et al;] O construtivismo na sala de aula.Trad. Claudia Schilling São Paulo: Ática, 2009.

COLL, C.; SOLÉ, I. Os professores e a concepção construtivista in O construtivismo na sala de aula.Trad. Claudia Schilling São Paulo: Ática, 2009.

COSTA, N. M. L. Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do “mundo experimental” e do computador. Dissertação (mestrado em Educação Matemática), PUC/SP, 1997.

FREITAS, A. L. V. Ensinar e aprender transformações isométricas no ensino médio. Dissertação (mestrado em Ensino de Matemática), PUC/SP, 2010.

GÓMEZ, P. ; LUPIÁÑEZ, J. L. Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de professores de matemáticas de secundaria. PNA, 1(2), 79-98, 2007.

KLEIN, M. É. Z. O ensino da trigonometria subsidiado pelas teorias da aprendizagem significativa e dos campos conceituais. Dissertação (mestrado em Educação em Ciências e Matemática), PUC/RS, 2009.

LIMA, P. O. Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções logarítmicas. Dissertação (mestrado em Ensino de Matemática), PUC/SP, 2009.

LINDEGGER, L. R. M. Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo, uma proposta a partir da manipulação de modelos. Dissertação (mestrado em Educação Matemática), PUC/SP, 2000.

LUNA, M. F. A. Estudo das Trajetórias Hipotéticas da Aprendizagem de Geometria Espacial para o Ensino Médio na Perspectiva Construtivista. Dissertação (mestrado em Ensino de Matemática), PUC/SP, 2009.

MARTINS, V. L. O. F. Atribuindo significado ao Seno e Cosseno utilizando o *software* Cabri Gèométre. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) PUC/SP, 2003.

MARZANO, R. J.; PICKERING, D. J.; POLLOCK, J. E. Ensino que funciona: estratégias baseadas em evidências para melhorar o desempenho dos alunos. Trad. Magda Lopes . Porto Alegre.: Artmed, 2008.

MAURI, T. O que faz com que o aluno e a aluna aprendam os conteúdos escolares?, in O construtivismo na sala de aula.Trad. Claudia Schilling São Paulo: Ática, 2009.

MESQUITA, M. A. N. Ensinar e aprender funções polinomiais do 2.o grau, no ensino médio: construindo trajetórias. Dissertação (mestrado em Ensino de Matemática), PUC/SP, 2009.

MIRAS, M. Um ponto de partida para a aprendizagem de novos conteúdos: os conhecimentos prévios" in O construtivismo na sala de aula.Trad. Claudia Schilling São Paulo: Ática, 2009.

NASCIMENTO, A. Z. Uma sequencia de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica. Dissertação (mestrado em Ensino de Matemática), PUC/SP, 2005.

ODDI, V. S. Percepções de Professores de Matemática do Ensino Médio sobre o Projeto "São Paulo faz Escola": Um Estudo em duas Escolas de uma Cidade da Grande São Paulo. Dissertação (mestrado em Educação Matemática), PUC/SP, 2009.

ONRUBIA, J. Ensinar: criar zonas de desenvolvimento proximal e nelas intervir in O construtivismo na sala de aula.Trad. Claudia Schilling São Paulo: Ática, 2009.

PASSOS, C.L.B. et al. Desenvolvimento profissional do professor que ensina Matemática: Uma meta-análise de estudos brasileiros. Quadrante: Revista teórica e de investigação. Lisboa: APM, v. 15, n. 1-2, p.193-219, 2006.

PASSOS, L. F. A relação professor–pesquisador: conquistas, repercussões e embates da pesquisa colaborativa Horizontes, v. 25, n. 1, p. 55-62, jan./jun. 2007

PIRES, C. M. C. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. Educação Matemática Pesquisa, v. 11, p. 145-166, 2009.

SÂO PAULO (Estado) Secretaria da Educação Caderno do professor: matemática, Ensino Médio – 2a série, volume 1 São Paulo: SEE, 2009.

SILVA, B. A. [et al] Atividades para o estudo de Funções em Ambiente Computacional. São Paulo: Ed. Iglu. 2002.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114-145, 1995.

SOLÉ, I. Disponibilidade para a aprendizagem e sentido da aprendizagem in O construtivismo na sala de aula.Trad. Claudia Schilling São Paulo: Ática, 2009.

TONNETTI, A. C. Trajetórias hipotéticas de aprendizagem em estatística no ensino médio. Dissertação (mestrado em Ensino de Matemática), PUC/SP, 2010.

TRALDI JR, A. Formação de formadores de professores de matemática: identificação de possibilidades e limites da estratégia de organização de grupos colaborativos.,Tese (Doutorado em Educação Matemática) PUC/SP,São Paulo, 2006.

ZABALA, A. Os enfoques didáticos in O construtivismo na sala de aula.Trad. Claudia Schilling São Paulo: Ática, 2009.

ZEICHNER, K. M. Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico. En. GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D. & PEREIRA, E. M. A. Cartografia do trabalho docente: professor (a) pesquisador (a). Campinas: Mercado de Letras. p. 207-236, 1998.

ZEICHNER, K.; DINIZ-PEREIRA, J. Pesquisa dos educadores e formação docente voltada para a transformação social. Cadernos de Pesquisa, v. 35, n. 125, p. 63-80, 2005.

ANEXO A - THA Relações métricas no triângulo retângulo

Atividade I - Teorema de Pitágoras e Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Tarefa I

1) Utilize a régua para fazer as medidas solicitadas e complete a tabela abaixo:

TRIÂNGULO	$\overline{BC}$	$\overline{AB}$	$\overline{AC}$	$(\overline{BC})^2$	$(\overline{AB})^2$	$(\overline{AC})^2$	$(\overline{BC})^2 + (\overline{AB})^2$	$(\overline{BC})^2 + (\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2$
1								
2								
3								
4								
5								

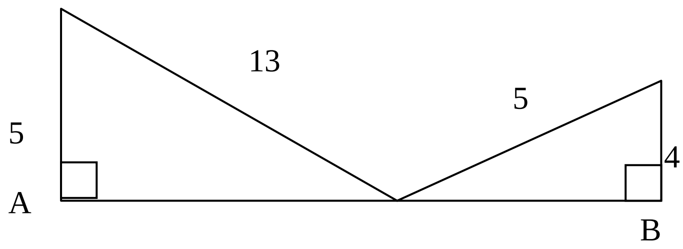
a) Há alguma regularidade que vocês perceberam?

b) Vocês conseguem agrupar os triângulos segundo uma característica que vocês identificaram?

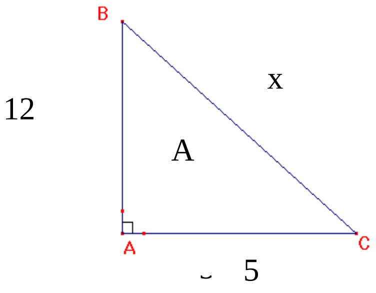
c) Há algum que vocês não conseguiram classificar?

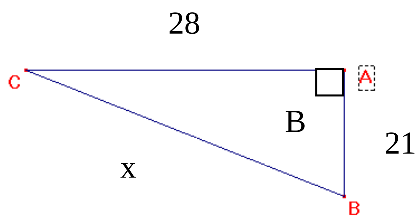
2) Os lados de um triângulo ABC medem 10 cm, 24 cm e 26 cm. Podemos afirmar que esse triângulo é retângulo?

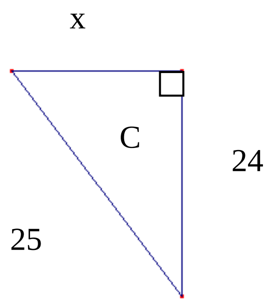
3) Na figura calcule a distância de A a B

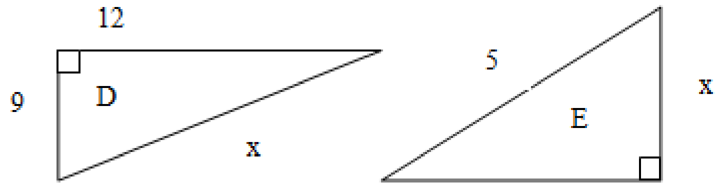


2) Calcule x, aplicando o teorema de Pitágoras:









Tarefa II

1) Faça as medidas que se pede com o transferidor e complete as tabelas

TRIÂNGULO	**med $\widehat{C}$**	$\overline{AB}$	$\overline{AC}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$
1				
2				
3				
4				
5				

TRIÂNGULO	**med $\widehat{A}$**	$\overline{BC}$	$\overline{AC}$	$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$
1				
2				
3				
4				

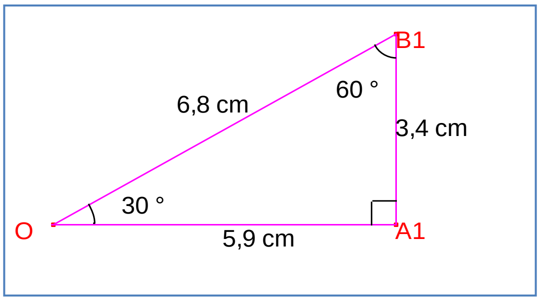
2) Comparando as medidas encontradas responda:

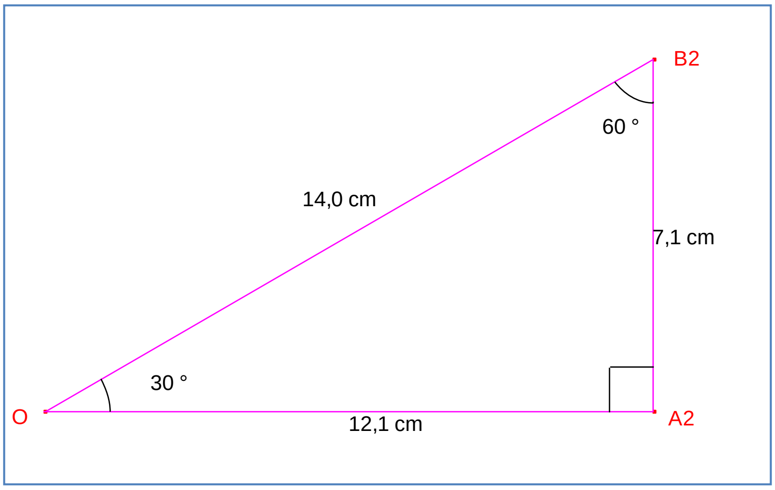
a) Há alguma regularidade que você percebeu?

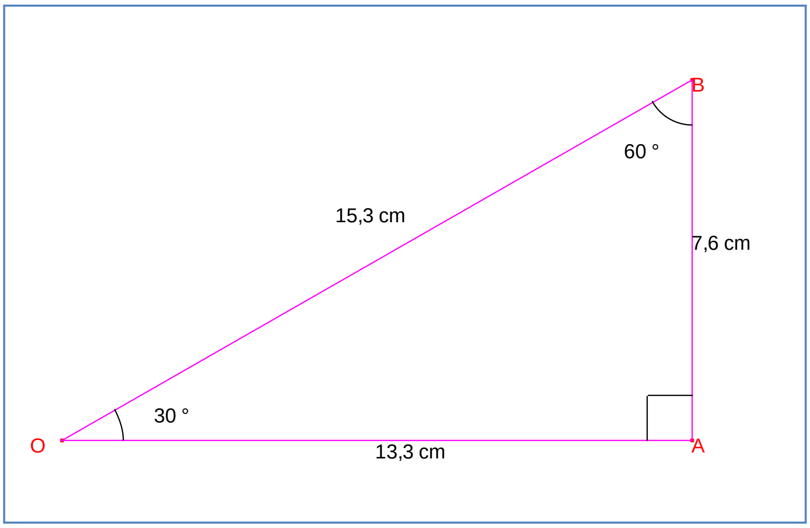
b) Observando as medidas dos segmentos, a razão entre eles e a medida do ângulo, qual a condição para que a razão entre $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusas}$ seja a mesma?

Tarefa III:

1) Faça as medidas que se pede com e complete as tabelas (use duas casas decimais)



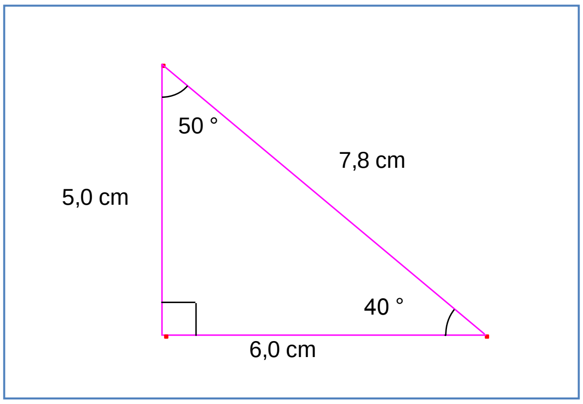


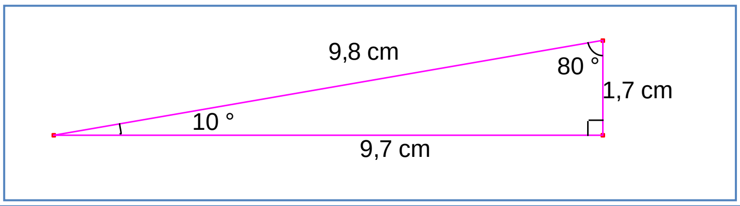


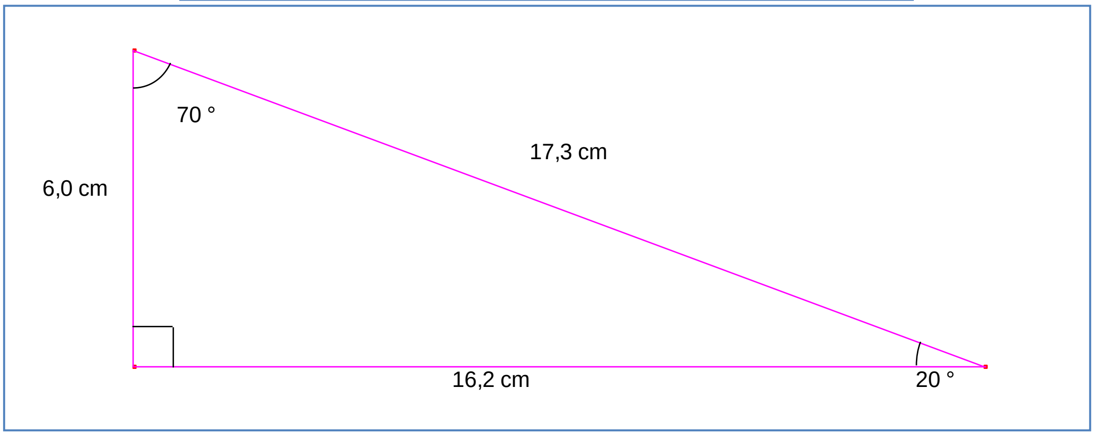
TRIÂNGULO	med $\hat{O}$	Cateto oposto $\hat{O}$	Hipotenusa	$seno\ \hat{O} = \frac{\text{Cateto oposto } \hat{O}}{Hipotenusa}$
$\boldsymbol{A\hat{O}B}$				
$\boldsymbol{A_1\hat{O}B_1}$				
$\boldsymbol{A_2\hat{O}B_2}$				

TRIÂNGULO	med $\hat{B}$	Cateto oposto $\hat{B}$	Hipotenusa	$\text{seno } \hat{B} = \frac{\text{Cateto oposto } \hat{B}}{\text{Hipotenusa}}$
$\boldsymbol{A\hat{O}B}$				
$\boldsymbol{A_1\hat{O}B_1}$				
$\boldsymbol{A_2\hat{O}B_2}$				

2) Faça as medidas que se pede com e complete as tabelas (use duas casas decimais)







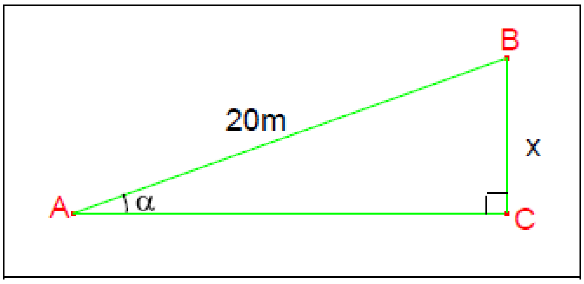
Ângulo α	**senoα**
10°	
20°	
30°	
40°	
50°	
60°	
70°	
80°	
90°	

Tarefa IV

1) Resolva os problemas

a) Observe a figura: Uma pessoa que se encontra no ponto A e se desloca até o ponto B formando um ângulo $\alpha = 20°$ com o plano horizontal. Quantos metros essa pessoa se eleva verticalmente? Use o valor do seno de 20º que você calculou nas atividades anteriores para resolver. Se você fosse calcular o $sen\ \alpha$ você faria como? Use a regra de três

.



b) Um avião levanta vôo fazendo um ângulo constante de 40º com o solo. Quando atingir uma altura de 200m, quanto terá percorrido?

c) Uma escada de pedreiro de 10 m está apoiada numa parede e forma com o solo de 60º. Qual a altura atingida pelo ponto mais alto da escada? E qual a distância do pé da escada à parede?

Atividade III

Tarefa I:

1) Faça as medidas que se pede com e complete as tabelas (use duas casas decimais)

TRIÂNGULO	**med** $\hat{C}$	$\overline{BC}$	$\overline{AC}$	$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$
1				
2				
3				
4				
5				

TRIÂNGULO	**med** $\hat{A}$	$\overline{AB}$	$\overline{AC}$	$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$
1				
2				
3				
4				

Você sabe o que são ângulos complementares? São ângulos que, somados, resultam num ângulo de 90°. Assim o complementar de um ângulo de 20°, por exemplo, é um ângulo de 70°.
Pensando nisso os matemáticos da Antiguidade desenvolveram uma razão que servia para calcular o seno do complemento do ângulo e a denominaram de **cosseno**. O modo de encontrá-la é parecido com o seno veja a seguir.

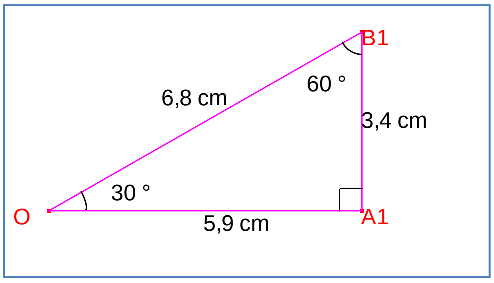
2) Comparando as medidas encontradas responda:

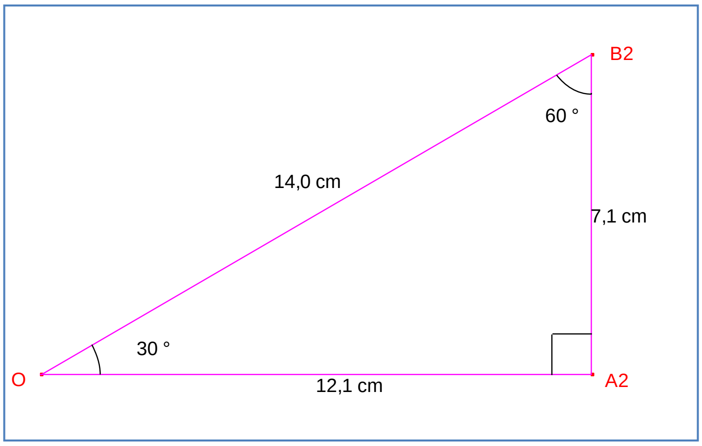
a) Há alguma regularidade que você percebeu?

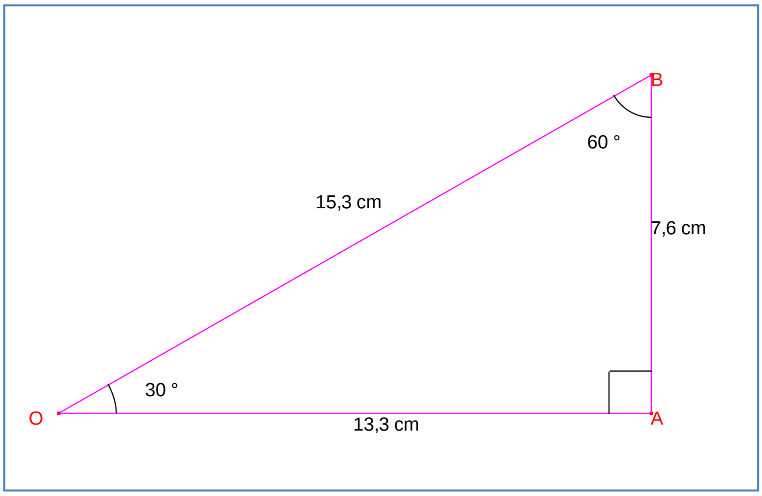
b) Observando as medidas dos segmentos, a razão entre eles e a medida do ângulo, qual a condição para que a razão entre $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusas}}$ seja a mesma?

Tarefa II

1) Faça as medidas que se pede com e complete as tabelas (use duas casas decimais)





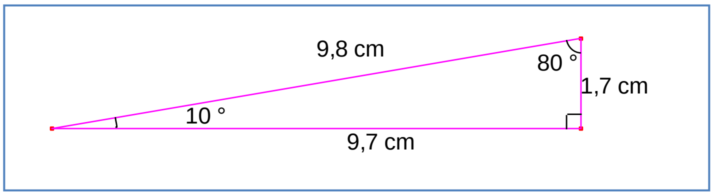


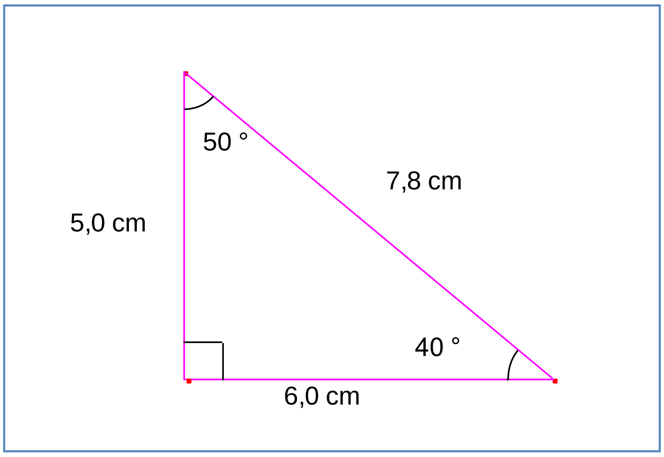
TRIÂNGULO	med $\hat{O}$	Cateto adjacente $\hat{O}$	Hipotenusa	$seno\ \hat{O} = \frac{\text{Cateto adjacente } \hat{O}}{Hipotenusa}$
$\boldsymbol{A\hat{O}B}$				
$\boldsymbol{A_1\hat{O}B_1}$				
$\boldsymbol{A_2\hat{O}B_2}$				

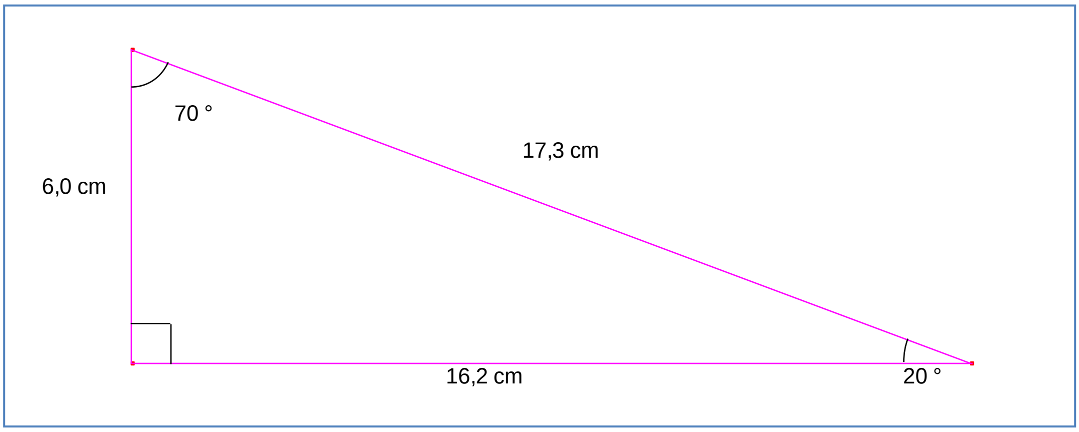
TRIÂNGULO	med $\widehat{B}$	Cateto adjacente $\widehat{B}$	Hipotenusa	$\text{seno } \widehat{B} = \dfrac{\text{Cateto adjacente } \widehat{B}}{\text{Hipotenusa}}$
$\boldsymbol{A\widehat{O}B}$				
$\boldsymbol{A_1\widehat{O}B_1}$				
$\boldsymbol{A_2\widehat{O}B_2}$				

Tarefa III

1) Complete a tabela com os valores que você calculou nas atividades anteriores e utilize as figuras abaixo para os ângulos que você ainda não fez as razões solicitadas







Ãngulo α	senα	cosα
10°		
20°		
25°		
30°		
35°		
40°		
55°		
50°		
60°		
65°		
70°		
80°		
90°		

Tarefa IV

1) Resolva os problemas:
   a) Um cabo deve ser colocado no pé de uma árvore que se localiza a 50 m da base de uma encosta formando um ângulo de 60º. Que comprimento deve ter esse cabo?

   b) Um avião levanta voo fazendo um ângulo constante de 20º com o solo. Quanto terá percorrido quando sobrevoar uma torre que está a 2 km do ponto de partida? E a que altura estará em relação ao solo?

   c) Uma escada de pedreiro de 10 m está apoiada numa parede e forma com o solo de 60º. Qual a altura atingida pelo ponto mais alto da escada? E qual a distância do pé da escada à parede?

   d) Ao terminar de percorrer os 20 metros da rampa do Palácio do Planalto, uma pessoa está a que altura do solo? A rampa forma um ângulo de 15º de inclinação em relação ao solo, e qual a distância está o início da rampa do prédio?

Atividade IV
Tarefa I

1) Grife na tabela abaixo os valores iguais com a mesma cor e tente descobrir uma importante relação entre as razões trigonométricas.

Angulo α	sem α	cos α
10°	0,17	0,98
20°	0,34	0,94
30°	0,50	0,87
40°	0,64	0,77
50°	0,77	0,64
60°	0,87	0,50
70°	0,94	0,34
80°	0,98	0,17
90°	????	????

2) Escreva o que você percebeu e dê um exemplo para justificar.

3) Responda as seguintes questões:

TRIÂNGULO	med $\widehat{A}$	$\overline{BC}$	$\overline{AB}$	$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$
1				
2				
3				
4				

a) Sabendo que o seno55º é 0,82 é possível descobrir o cosseno de qual ângulo?

b) Com o cos75º = 0,26 podemos descobrir o seno de qual ângulo?

c) Se o seno 45º é 0,71, quanto será o cosseno de 45º?

d) Para fixar uma torre de transmissão de telefone celular uma empresa precisa de vários cabos de aço. Sabendo que cada cabo forma um ângulo de inclinação entre o topo da torre e o solo de 65º e a torre tem 20 m de altura é possível calcular o comprimento de cada cabo? Você pode resolver o seguinte problema a partir do cos25º = 0,91?

Atividade V

Tarefa I

1) Complete a tabela abaixo (use a folha de triângulos)

TRIÂNGULO	med $\widehat{C}$	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$
1				
2				
3				
4				

2) Comparando as medidas encontradas responda:

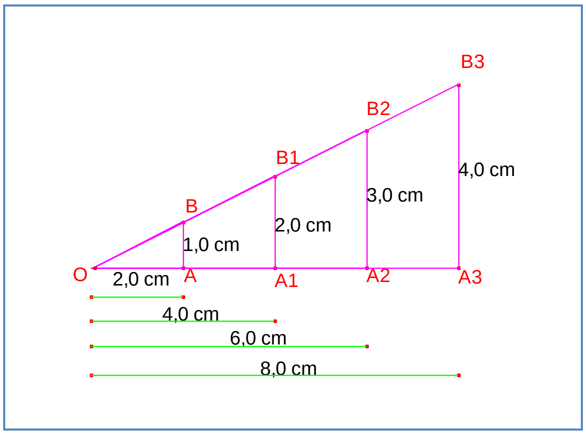
a) Há alguma regularidade que você percebeu?

b) Observando as medidas dos segmentos, a razão entre eles e a medida do ângulo, qual a condição para que a razão entre $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$ seja a mesma?

c) Você percebeu uma relação entre os ângulos complementares?

Tarefa II

1) Complete a tabela abaixo:



TRIÂNGULO	**med $\hat{O}$**	**Cateto oposto $\hat{O}$**	**Cateto adjacente $\hat{O}$**	$seno\ \hat{O} = \frac{\text{Cateto oposto } \hat{O}}{\text{Cateto adjacente } \hat{O}}$
$A\hat{O}B$				
$A_1\hat{O}B_1$				
$A_2\hat{O}B_2$				

a) O que acontece com o ângulo $\hat{O}$?

b) Comparando as diferentes medidas dos catetos opostos, dos catetos adjacentes, das razões entre $\frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}}$ e do ângulo α o que podemos concluir?

Tarefa III

1) Preencha a tabela abaixo

TRIÂNGULO	med $\hat{A}$	Cateto oposto Â	Cateto Adj Â	Seno Â	CosÂ	$\frac{seno\hat{A}}{cos\hat{A}}$	Tg Â
1							
2							
3							

a) Você vê uma relação entre a razão $\frac{\text{seno } \hat{A}}{\cos \hat{A}}$ e a tg Â?

b) Agora utilize a tabela da Atividade III e Tarefa III tente preencher os valores restantes da tabela usando essa importante relação: tgα $= \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

ângulo	Seno α	Cos α	Tg α
10°			
20°			
25°			
30°			
35°			
40°			
55°			
50°			
60°			
65°			
70°			
80°			
90°			

2) Preencha a tabela abaixo

a) O topo de um prédio é visto por um observador que tem 1,80m de altura e está a 100m da base desse prédio sob um ângulo de 70º. Qual a altura desse prédio?

Atividade VI – Dado a tabela responda às questões

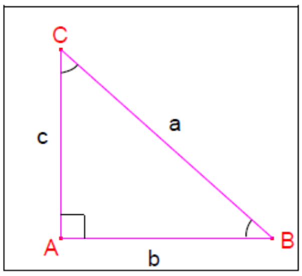
TRIÂNGULO	$sen\ \alpha$	$cos\ \alpha$
$\alpha = 35°$	$\frac{3}{5} = 0{,}6$	$\frac{4}{5} = 0{,}8$
$\alpha = 60°$	$0{,}87$	$0{,}50$

1) Utilize os valores da tabela para responder as questões

a) Qual é o valor da expressão $(seno\ 35°)^2 + (cos\ 35°)^2$?
$(0{,}6)^2 + (0{,}8)^2$ = 0,36 + 0,64 = 1.

b) Use os valores da tabela e resolva a expressão $(seno\ 60°)^2 + (cos\ 60°)^2$
$(0{,}87)^2 + (0{,}5)^2$ = 0,76 + 0,25 ≅ 1.

Demonstração da relação usando o Teorema de Pitágoras



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC da figura temos:
$b^2 + c^2 = a^2$
Dividindo, membro a membro, a expressão por a^2 obtemos:[7]

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(seno\ \hat{C}\right)^2 + \left(cos\ \hat{C}\right)^2 = 1$$

Assim chegamos à relação fundamental: $seno\alpha^2 + cos\alpha^2 = 1$

2) Utilize os valores da tabela para responder as questões

a) Sabendo que o cos70º = 0,34, use a relação $seno\alpha^2 + cos\alpha^2 = 1$ e descubra o valor do sen 70º.

b) Dado o sen 62º = 0,88, calcule cos 62º, tg 62º, sen 28º, cos 28º e tg 28º.

c) Seja$tg\ \alpha = \frac{1}{2}$ e $0 < \alpha < 90°$, calcule $sen\ \alpha$, $cos\ \alpha$. Faça uma ilustração do triângulo para facilitar a resolução. Depois de fazer os cálculos consulte a tabela trigonométrica e dê o valor de α.8

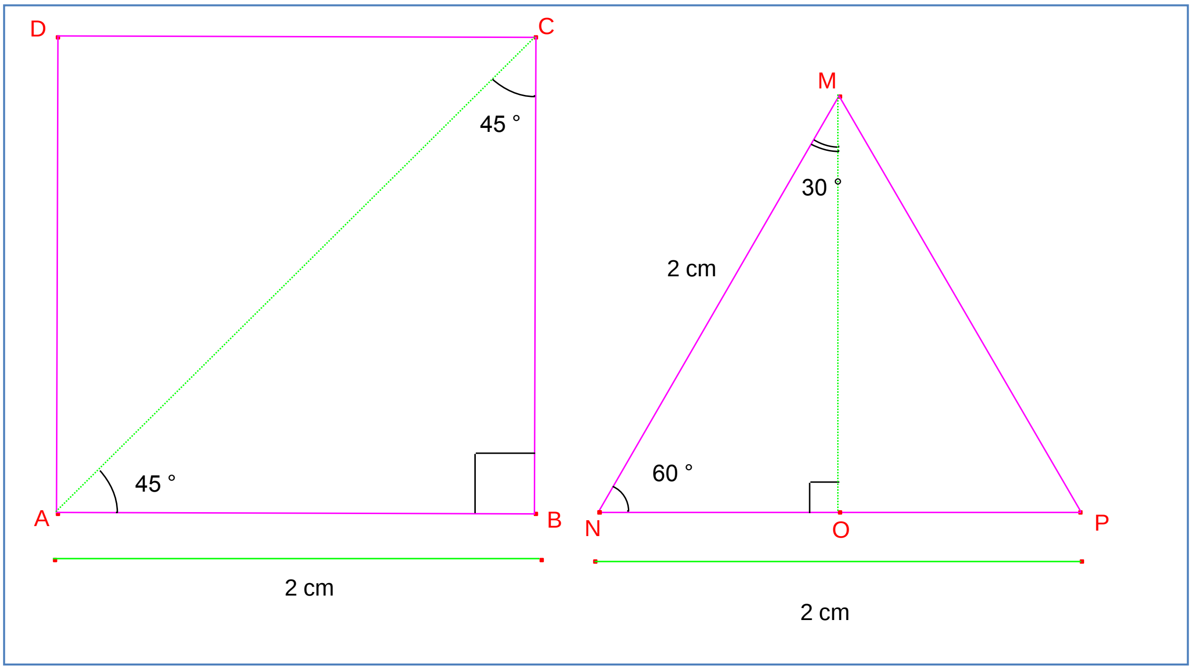
Atividade VII

Tarefa I

1) Considere as figuras abaixo e determine o que se pede usando números irracionais.[9]:

Lembrando que devemos racionalizar como o exemplo: $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

[7] Atividade adaptada: IEZZI, Gelson et al.. Matemática, volume único 8ªed. São Paulo, Saraiva, 2004:
[8] Atividade adaptada de: BRIGUENTI, Maria José Lourenção (1998). Alterando o ensino da Trigonometria em escolas públicas de nível médio: a representação de algumas professoras. Tese (Doutorado em Educação),UNESP, Marília.
[9] Atividade adaptada: SILVA, Claudio Xavier e Barreto, Benigno Filho (1992) Toda Matemática, volume único. São Paulo, Ática



a) Calcule $\overline{AC}$, a diagonal do quadrado ABCD e hipotenusa do triângulo ABC. Em seguida calcule: seno 45º, Cos 45º e Tg 45º

b) Agora use o triângulo equilátero MNP e determine: seno 30º, cos 30º e tg 30º.

c) Considere o triângulo MNP para calcular: seno 60º, cos 60º e tg 60º.

2) Se não fossem dadas as medidas dos lados do quadrado e do triângulo e apenas estivessem indicadas como *l* cm,seria possível encontrar as razões trigonométricas?

Agora preencha a tabela dos ângulos notáveis:

	30º	**45º**	**60º**
seno			
cosseno			
tangente			

ANEXO B – Roteiro da entrevista com professores

1. Quais as vantagens ou desvantagens você percebeu com o trabalho sob uma perspectiva construtivista?
2. Você considerou o desenvolvimento da THA um trabalho produtivo? Quais itens poderiam ser modificados para um trabalho mais produtivo?
3. Você acredita que esse trabalho possa ser desenvolvido com ajustes necessários em turmas diferentes.
4. Qual a sua impressão sobre a participação e reação dos alunos durante as atividades?
5. Quais conhecimentos você adquiriu com esta experiência e como eles poderiam contribuir para o seu desenvolvimento profissional?
6. Quais os principais pontos do trabalho (positivos ou negativos)?
7. Como o professor poderia elaborar a própria THA?
8. Qual a importância do planejamento e da escolha das atividades?
9. Quais suas impressões sobre o uso do software Geogebra no desenvolvimento de Funções Trigonométricas?
10. Qual sugestão você daria para adaptar esse trabalho a um número maior de professores?
11. Quais dificuldades você encontrou para desenvolver os conteúdos/atividades em sala de aula com os alunos?
12. Os alunos apresentaram dificuldades para realizas as atividades? Quais?
13. Como as pesquisas, na área da Educação Matemática, podem contribuir para a organização do ensino das Funções Trigonométricas?
14. Como deve ser a atuação do professor de Matemática quanto às atividades de planejamento do ensino das Funções Trigonométricas, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem?
15. Quais suas expectativas antes da aplicação da THA?
16. O trabalho sob uma perspectiva diferente fez você refletir sobre a sua prática? Você pretende utilizar esta metodologia?
17. Você percebeu alguma mudança tanto no ensino quanto na aprendizagem?
18. Você está de acordo com a metodologia que o pesquisador sugeriu?
19. Quais as possíveis modificações para a elaboração da 3ª versão da THA?
20. Qual a sua impressão pelo trabalho em equipe? Relacionamento dos alunos?

21. Relacionamento entre professor e alunos?
22. Utilização de material concreto/ calculadoras?
23. Tempo gasto?
24. Qual a sua opinião do retorno aos conceitos básicos nas atividades?
25. Importância do uso de instrumentos?
26. Você ficou satisfeito(a) com os resultados?
27. Como foi a dificuldade de trabalhar as atividades?
28. Você em algum momento ficou desanimado(a)/decepcionado(a)?
29. Você acredita que:
    - Os alunos receberam bem a proposta
    - Demonstraram curiosidade
    - Desinteresse
    - Os alunos ficaram desanimados/ desinteressados/ cansados
30. Você acredita que os alunos participaram ativamente do desenvolvimento das atividades?
31. Você acredita que os alunos levantaram hipóteses para solucionar as questões?
32. Você acredita que os alunos apresentaram um bom relacionamento com os colegas?
33. Os alunos se empenharam em aprender?

ANEXO C – Roteiro da entrevista com alunos

NOME____IDADE_____

1. Qual a sua opinião em relação à interação aluno x professor?
2. Qual a sua opinião sobre os textos ou enunciados das atividades?
3. Qual a sua opinião sobre o uso de instrumentos?
4. Qual a sua opinião sobre o trabalho em equipe?
5. Qual a sua opinião sobre o auxílio do software para a construção dos gráficos?
6. Responda com sim ou não e justifique a resposta
   a) Os alunos receberam bem a proposta?
   b) Os alunos demonstraram curiosidade?
   c) Os alunos demonstraram interesse?
   d) Os alunos participaram ativamente do desenvolvimento das atividades?
   e) Os alunos se empenharam em aprender?