

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Érika Andersen

**As ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo
mobilizadas por alunos de Licenciatura em Matemática**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2011

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Érika Andersen

**As ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo
mobilizadas por alunos de Licenciatura em Matemática**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora
da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
como exigência parcial para obtenção do título de
MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a
orientação do **Prof. Dr. Benedito Antonio da
Silva**.*

São Paulo

2011

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

Ao meu amado esposo Robson, pelo constante incentivo, apoio e amor, sem os quais não teria completado esta jornada.

Aos meus queridos filhos, Felipe e Julia, que mesmo sem entenderem minha ausência, sempre foram carinhosos.

Aos meus pais, Rosa Maria e Herbert, que sempre me amaram e incentivaram meus estudos.

Aos meus sogros, Dirce e Arlindo, por cuidarem tão bem dos meus filhos sempre que me ausentei.

AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares pelo amor, incentivo e compreensão, em especial aos meus pais, Rosa Maria e Herbert, ao meu esposo, Robson, aos meus filhos, Felipe e Júlia, à minha irmã, Tatiana e, aos meus sogros, Dirce e Arlindo.

Aos amigos pelo carinho e apoio, em especial aos que conheci na PUC-SP, e à antiga amiga, Shirley, que sempre esteve ao meu lado.

Aos principais atores deste trabalho, os alunos que gentilmente aceitaram participar desta pesquisa, assumindo o compromisso de estarem presentes em todos os encontros.

Ao professor Dr. Benedito Antonio da Silva, por orientar-me com sabedoria, competência e paciência, incentivando sempre a realização deste trabalho.

Às professoras Dra. Silvia Dias Alcântara Machado e Dra. Cristina Cerri, pelas contribuições que deram no exame de qualificação e por terem aceitado participar desta banca.

Aos professores do Programa de Estudo Pós Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, pelos ensinamentos que me foram úteis para esta pesquisa. Em especial, à Dra. Silvia Dias Alcântara Machado, que, em suas aulas, me indicou o caminho deste trabalho, ao discutir e analisar um dos textos de Dreyfus.

RESUMO

O presente estudo relata os resultados de uma pesquisa qualitativa cujo objetivo era investigar quais processos mentais podem intervir e ser combinados por alunos no

desenvolvimento de atividades envolvendo a expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Além disso,

verificar se esse tipo de atividade favorece a compreensão das ideias centrais envolvidas no Teorema Fundamental do Cálculo. A pesquisa fundamentou-se no estudo de Tommy Dreyfus intitulado *Processos do Pensamento Matemático Avançado*. O instrumento de pesquisa foi elaborado, aplicado e analisado, utilizando algumas fases da Engenharia Didática. Os catorze participantes deste estudo eram alunos do curso Licenciatura em Matemática de uma universidade particular da cidade de São Paulo. A análise dos protocolos dos estudantes indica que os processos do PMA mobilizados foram: visualização, representação e mudança entre diferentes representações, intuição, definição, descoberta, validação, generalização, síntese e abstração. O que possibilitou que muitos dos participantes conjecturassem que a derivação e integração são operações inversas uma da outra. Os resultados da pesquisa explicitaram que um trabalho desta natureza muito contribui para que os alunos se apropriem de inter-relações entre conceitos envolvidos no Teorema Fundamental do Cálculo.

Palavras-Chave: Teorema Fundamental do Cálculo; Processos do Pensamento Matemático Avançado; Inter-relação entre Derivada e Integral; Ensino e Aprendizagem do Cálculo.

ABSTRACT

The present study relates the results of a qualitative research that aimed to investigate which mental processes may intervene and be combined by students in

the development of activities involving the expression $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. The research

was based on the study titled *Advanced Mathematical Thinking Processes* of Tommy Dreyfus. The survey instrument was developed, implemented and analyzed using some phases of Didactic Engineering. The fourteen participants in this study were students of private university's math course in São Paulo city. The analysis of the student's protocols indicates that the following processes were mobilized: visualization, representation and switching representations, intuition, definition, discovery, validation, generalization, abstraction and synthesis. This allowed many students to conjecture that the derivation and integration are inverse operations of each other. The results of the survey explained that a work of this nature contributes greatly to students to take ownership of interrelationships between concepts involved in the Fundamental Theorem of Calculus.

Keywords: Fundamental Theorem of Calculus, Advanced Mathematical Thinking Processes, Interrelationship between Derivative and Integral, Teaching and Learning of Calculus.

SUMÁRIO

Apresentação.....	12
1. Introdução	14
2. Fundamentação matemática e teórica.....	19
2.1. Somas de Riemann.....	19
2.2. Integral definida.....	21
2.3. Teorema fundamental do Cálculo	23
2.4. Fundamentação teórico-didática	28
3. Considerações metodológicas.....	34
3.1. Sujeitos da pesquisa	35
3.2. Elaboração do instrumento da pesquisa	36
4. Experimentação	54
4.1. 1ª Sessão.....	55
4.2. 2ª sessão	68
4.3. 3ª sessão	84
4.4. 4ª sessão	97
Considerações finais	107
Referências.....	111
Anexo - Questionário	113

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 -	Resposta da dupla D_6 para a atividade 1 (a).....	57
Figura 2 -	Resposta da dupla D_4 para a atividade 1 (a).....	58
Figura 3 -	Resposta da dupla D_7 para a atividade 1 (c).....	60
Figura 4 -	Resposta da dupla D_1 para a atividade 2 (c)	65
Figura 5 -	Resposta da dupla D_2 para a atividade 2 (c).....	66
Figura 6 -	Gráfico obtido no <i>Winplot</i> na atividade 3 – parte I – item (a).....	69
Figura 7 -	Gráfico obtido no <i>Winplot</i> na atividade 3 – parte I – item (b).....	70
Figura 8 -	Gráfico obtido no <i>Winplot</i> na atividade 3 – parte I – item (c).....	71
Figura 9 -	Gráfico obtido no <i>Winplot</i> na atividade 3 – parte I – item (d).....	73
Figura 10 -	Gráfico obtido no <i>Winplot</i> na atividade 3 – parte I – item (e) ..	76
Figura 11 -	Gráfico obtido no <i>Winplot</i> na atividade 3 – parte I – item (f) ..	77
Figura 12 -	Gráfico obtido no <i>Winplot</i> na atividade 3 – parte I – item (g) ..	77
Figura 13 -	Gráfico obtido no <i>Winplot</i> na atividade 3 – parte I – item (h) ..	78
Figura 14 -	Gráfico obtido no <i>Winplot</i> na atividade 3 – parte I – item (i) ..	78
Figura 15 -	Gráfico obtido no <i>Winplot</i> na atividade 3 – parte II – item (a) ..	81
Figura 16 -	Resposta da dupla D_3 para a atividade 4.....	90
Figura 17 -	Resposta da dupla D_3 para a atividade 8.....	99
Figura 18 -	Resposta da dupla D_5 para a atividade 8.....	100
Figura 19 -	Resposta da dupla D_4 para a atividade 9.....	102
Figura 20 -	Resposta da dupla D_5 para a atividade 9.....	103
Figura 21 -	Resposta da dupla D_2 para a atividade 10 (a)	104
Figura 22 -	Resposta da dupla D_1 para a atividade 10 (a)	105
Figura 23 -	Resposta da dupla D_3 para a atividade 10 (b)	105

LISTA DE TABELAS

Quadro 1 -	Resultados da atividade 1 (a).....	57
Quadro 2 -	Resultados da atividade 1 (b).....	59
Quadro 3 -	Resultados da atividade 1 (b).....	61
Quadro 4 -	Resultados da atividade 2 (a).....	62
Quadro 5 -	Resultados da atividade 2 (b).....	63
Quadro 6 -	Resultados da atividade 2 (c).....	64
Quadro 7 -	Resultados da atividade 2 (d).....	67
Quadro 8 -	Resultados da atividade 3 – parte I – item (b).....	70
Quadro 9 -	Resultados da atividade 3 – parte I – item (c).....	72
Quadro 10 -	Resultados da atividade 3 – parte I – item (d).....	75
Quadro 11 -	Resultados da atividade 3 - parte II - item (e).....	83
Quadro 12 -	Resultados da atividade 4 – item (a).....	87
Quadro 13 -	Resultados da atividade 4 – itens (b) e (c).....	88
Quadro 14 -	Resultados da atividade 4 – item (e).....	89
Quadro 15 -	Resultados da atividade 5 – item (e).....	92
Quadro 16 -	Resultados da atividade 6 – item (e).....	94
Quadro 17 -	Resultados da atividade 7 – itens (e) e (f).....	96
Quadro 18 -	Resultados da atividade 8 - item (a).....	98
Quadro 19 -	Resultados da atividade 9 - item (a).....	102

APRESENTAÇÃO

Este trabalho partiu da preocupação em minha prática docente com a dificuldade encontrada pelos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) cujos principais conceitos abordados são: derivada e integral. Enquanto a primeira está relacionada à determinação de retas tangentes, a segunda, com o cálculo de áreas.

Na tentativa de resolver estes dois problemas, aparentemente não relacionados, Newton e Leibniz, estabeleceram, em estudos distintos, que a derivação e a integração eram operações inversas uma da outra. Este resultado é conhecido hoje como o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

Sendo assim, o TFC foi escolhido como tema deste trabalho por relacionar os principais conceitos do Cálculo. Esta pesquisa busca investigar quais processos mentais intervêm e são combinados na resolução de atividades que buscam ressaltar as ideias centrais deste teorema.

Para tanto, este trabalho está dividido em quatro capítulos descritos a seguir.

No primeiro capítulo, é apresentada a problemática relativa à importância da disciplina CDI e à dificuldade dos alunos, resultando em elevados índices de reprovação; também é apresentada a questão de pesquisa.

No segundo capítulo, subdividido em quatro partes, são exibidas as fundamentações matemáticas e teóricas utilizadas nesta pesquisa. Na primeira, é feita uma introdução às somas de Riemann; na segunda, é mostrada a definição de integral definida; na terceira, o TFC é enunciado e provado; e na quarta, é apresentada a fundamentação teórica baseada nos Processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) de Tommy Dreyfus.

No terceiro capítulo, são registrados os procedimentos metodológicos, os sujeitos de pesquisa, a elaboração e análise *a priori* do instrumento de coleta, bem como a descrição da realização dos experimentos.

No quarto capítulo, os dados obtidos neste estudo são descritos e analisados, identificando quais processos do PMA foram utilizados pelos participantes na resolução das atividades propostas.

Finalmente são apresentadas as considerações finais da pesquisa e as referências bibliográficas, além do anexo contendo o questionário entregue aos alunos.

1. INTRODUÇÃO

No ensino superior, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) faz parte da grade curricular dos cursos de Ciências Exatas e de alguns cursos de outras áreas. É ministrada nos semestres iniciais de cada curso e os principais conceitos abordados, derivada e integral, possuem aplicações nas mais variadas áreas do saber.

A derivada permite estudar a taxa de variação de uma função e está relacionada com a inclinação da reta tangente ao gráfico. A ideia fundamental é que, localmente, uma função pode ser aproximada por uma reta, o que permite fazer aproximações locais.

A integral refere-se à soma de infinitésimos e permite o cálculo de áreas, volumes, comprimento de arco, trabalho, massa etc. Tais conceitos são utilizados em diversas disciplinas.

Dessa forma, o CDI aparece como uma disciplina básica, integradora e fundamental para diversos cursos. Entretanto, o desempenho dos alunos em CDI tem se mostrado insatisfatório, o que revela uma situação, no mínimo, problemática.

Sendo assim, o ensino e aprendizagem desta disciplina é objeto de estudo de inúmeras pesquisas em Educação Matemática, uma vez que “o ensino do Cálculo tem sido responsabilizado por um grande número de reprovações e de evasões de estudantes universitários” (SOUZA, 2000, pg. 19).

Reis (2001) relata em sua pesquisa que o índice de reprovação em CDI, em diversas universidades públicas brasileiras, gira em torno de 30% a 50%, chegando a 60% em alguns casos. Dessa forma, afirma que “o ensino de Cálculo realmente deve se transformar num sério objeto de investigação por parte dos pesquisadores

em Educação Matemática, que terão pela frente um enorme desafio no âmbito do ensino superior” (REIS, 2001, p. 20).

Barbosa & Neto (1995) apontam que a forma de se construir um conhecimento considerando o conteúdo como pronto e acabado interfere de modo negativo no desempenho dos alunos, uma vez que o aluno é treinado a utilizar fórmulas e regras, não sendo levado a pensar e raciocinar. Valoriza-se, com isso, o aprendizado de técnicas desligado da maneira como este conhecimento foi construído.

Este pensamento é reforçado por Villarreal (1999) que considera que a prática metodológica baseada no modelo exposição teórica – exemplos – exercícios somente contribui para a algoritmização do ensino do Cálculo, fazendo com que sua aprendizagem seja reduzida a memorização de regras e técnicas.

Dreyfus (1991) afirma em seu estudo que

[...] o que mais os alunos aprendem em seus cursos de matemática é realizar um grande número de procedimentos padronizados, expressos em formalismos definidos precisamente para obter respostas para as classes de exercícios claramente delimitadas. Eles, assim, adquirem a capacidade de realizar, embora muito mais lentamente, o tipo de operação que um computador pode executar por meio de um programa adequado, tal como o *Mathematica*. Eles terminam o curso com uma quantidade considerável de conhecimento matemático, mas sem a metodologia de trabalho do matemático, isto é, falta-lhes o *know-how* que lhes permite utilizar seus conhecimentos de uma forma flexível para resolver problemas desconhecidos para eles. (tradução de DREYFUS, 1991, p.28) ¹

Um dos grupos de pesquisa do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo intitulado “O Elementar e o Superior em Matemática”, coordenado pelos professores Dr. Benedito Antonio da Silva e Dra. Sonia Barbosa Camargo Iglioni, apresenta entre outros projetos, um denominado “As diversas componentes envolvidas no processo de Ensino e Aprendizagem do Cálculo: saber, aluno e professor”, sob supervisão de

¹ Texto original: “what most students learn in their mathematics courses is, to carry out a large number of standardized procedures, cast in precisely defined formalisms, for obtaining answers to clearly delimited classes of exercise questions. They thus acquire the capability to perform, albeit much slower, the kind of operation which a computer can perform by means of a suitable program such as *Mathematica*. They end up with a considerable amount of mathematical knowledge but without the working methodology of the mathematician, that is they lack the know-how that allows them to use their knowledge in a flexible manner to solve problems of a type unknown to them.”

Silva. Este projeto visa estudar as quatro principais vertentes envolvendo o ensino e a aprendizagem do Cálculo – o aluno ingressante nos cursos de exatas, o professor da universidade, o professor da educação básica e as dificuldades dos próprios conteúdos tratados na disciplina.

Em particular, algumas pesquisas deste grupo, tais como, as de Picone (2007), Anacleto (2007) e Campos (2007) têm se dedicado ao estudo do ensino e aprendizagem do TFC, uma vez que este “abrange as principais noções da disciplina: a Derivada e a Integral” (PICONE, 2007, p.15). Nesses trabalhos, cada um desses pesquisadores aborda uma vertente que se relaciona diretamente com o processo de ensino e aprendizagem do TFC, a saber: professor, aluno e livro didático, respectivamente.

Picone (2007) constata que os professores, ao ensinarem o TFC, enfatizam que o mesmo pode ser usado como ferramenta para o cálculo de áreas e que estabelece uma relação entre derivada e integral. No entanto, tal relação geralmente não é abordada graficamente.

Por outro lado, Anacleto (2007) conclui, em sua pesquisa, que mesmo que alguns alunos utilizem o teorema para resolver uma questão, não demonstram conhecimento sobre a relação entre derivada e integral. Observa ainda que a maioria dos estudantes apresenta dificuldades para resolver questões em que a simples visualização de um gráfico resolveria o problema, sem que necessitassem desenvolver longos algoritmos.

Já Campos (2007) analisa alguns livros didáticos que exploram a coordenação de registros de representação na apresentação do TFC e conclui que uns o fazem de maneira mais evidente que outros. Um dos livros analisados pelo autor é o primeiro volume do livro de James Stewart intitulado “Cálculo”, sobre o qual afirma que os registros algébricos, gráficos e em língua natural aparecem na mesma proporção, o que propicia a “coordenação dos registros de representação em várias passagens” (CAMPOS, 2007, p. 197)

Segadas (1998) em sua investigação sobre o entendimento dos alunos do TFC identifica que esses estudantes apresentam dificuldades para interpretar

geometricamente o teorema, uma vez que as imagens gráficas, em geral, são pouco utilizadas como facilitadores na resolução de alguns problemas ou como auxiliares efetivos na compreensão de uma definição ou teorema.

Algumas pesquisas já foram desenvolvidas por teóricos para identificar as razões das dificuldades dos estudantes na aprendizagem do TFC, as quais têm sido atribuídas principalmente a uma compreensão inapropriada de gráfico de função (Carlson, 1998; Thompson, 1994) e de taxa de variação (Thompson, 1994).

No entanto, foram poucas as pesquisas encontradas cujo foco seja o processo de ensino e aprendizagem do TFC. Este trabalho diferencia-se das demais pesquisas apresentadas uma vez que se propõe a analisar uma sequência de atividades para o ensino do TFC. Com isto, queremos responder a seguinte questão:

Quais processos mentais intervêm e são combinados quando se insere atividades que se apóiam em figuras construídas pelo aluno tanto em folha de papel

quanto pelo *software Winplot*² ao se tratar da expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$?

Esse tipo de atividade favorece a compreensão das ideias centrais que envolvem o TFC? No bojo desta pergunta está implícita a relação entre e a derivada e a integral.

O uso de um *software* foi motivado pelo fato de, segundo Dreyfus (1991), uma ferramenta computacional, quando utilizada corretamente, pode ajudar os alunos a reconhecer novas relações de um fenômeno. Por outro lado, de acordo com Borges e Santana (2000), alguns estudantes podem melhorar o resultado de seu aprendizado por meio de atividades realizadas em ambientes computacionais adaptados para este fim. Os autores afirmam ainda que a dinâmica da utilização de um programa de computador pode motivar o estudante a experimentar, a procurar estratégias para a resolução de problemas de matemática.

² Programa de domínio público, criado por Richard Paris, da Philips Exeter Academy, traduzido para o português pelo Prof. Adelmo Ribeiro de Jesus. Pode ser obtido no site <http://math.exeter.edu/rparris>. A palavra *Winplot* indica que o software é utilizado para construir gráficos de funções do ambiente *Windows*.

Entre os *softwares* existentes, o *Winplot* foi selecionado, por ser gratuito e apresentar uma interface simples e de fácil utilização pelo usuário. Seus recursos permitem construir gráficos de funções de duas ou três variáveis, exibir expressões de polinômios que passam por determinados pontos, definir campos de vetores a partir de equações diferenciais, bem como visualizar a derivada e integral de função.

A escolha do TFC foi originada por uma motivação ligada a minha prática docente, uma vez que este teorema relaciona derivada e integral, os dois temas centrais do Cálculo, disciplina que leciono desde 2006 em uma universidade particular na cidade de São Paulo.

Além disso, a escolha foi fortemente influenciada pela disciplina de Didática II, ministrada pela professora Dra. Silvia Dias Alcântara Machado, no segundo semestre de 2009, no curso de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Nesta disciplina, os alunos foram convidados a relacionar um tema de interesse com o texto “Advanced Mathematical Thinking Processes” de Tommy Dreyfus (1991), que foi traduzido e discutido por todos os alunos.

Tanto na prática docente como nas pesquisas levantadas, os alunos manifestam dificuldades em visualizar, representar e alternar entre diferentes representações (algébrica, tabular e gráfica), intuir, definir, validar, generalizar e abstrair. Assim sendo, esta pesquisa fundamenta-se nos processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) de Tommy Dreyfus que analisa quais processos mentais podem intervir e devem ser combinados para que haja a compreensão de conceitos matemáticos avançados.

2. FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA E TEÓRICA

Neste capítulo são apresentadas as fundamentações didática e matemática utilizadas neste estudo. Inicialmente, são feitas considerações sobre o TFC e, em seguida, elementos sobre o seu ensino e aprendizagem sob a ótica do chamado Pensamento Matemático Avançado.

O desenvolvimento do Cálculo foi um processo evolutivo que culminou na descoberta da relação fundamental entre dois problemas aparentemente distintos: calcular áreas e determinar retas tangentes. A descoberta deste resultado foi feita independentemente pelo inglês Sir Isaac Newton (1642-1727) e pelo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e deu origem ao Teorema Fundamental do Cálculo (TFC).

Antes de enunciá-lo e prová-lo, será feita uma introdução ao conceito de integral definida a partir das somas de Riemann, bem como à notação tradicionalmente utilizada.

2.1. SOMAS DE RIEMANN

Segundo Thomas (2008), o matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866) deu precisão à teoria dos limites das aproximações finitas, usando um conceito que recebeu o nome de *soma de Riemann* e está descrito a seguir.

Seja f uma função limitada arbitrária definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Pode-se fazer uma subdivisão deste intervalo, não necessariamente do

mesmo comprimento. Para tanto, escolhem-se $n - 1$ pontos $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}\}$, entre a e b , sujeitos à condição de que $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$. A estes, acrescentamos $a = x_0$ e $b = x_n$, de modo que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

O conjunto $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ é chamado de partição de $[a, b]$ e o divide em n subintervalos fechados: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$. O primeiro desses subintervalos é $[x_0, x_1]$, o segundo é $[x_1, x_2]$, e o k -ésimo subintervalo de P é $[x_{k-1}, x_k]$, sendo k um número inteiro entre 1 e n .

O comprimento do primeiro subintervalo $[x_0, x_1]$ é denotado por Δx_1 , o comprimento do segundo, $[x_1, x_2]$, por Δx_2 , e o comprimento do k -ésimo subintervalo é $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Se todos os n subintervalos tiverem a mesma largura, então o comprimento comum Δx será igual a: $(b - a)/n$.

Em cada subintervalo pode-se escolher arbitrariamente um ponto, de modo que o ponto escolhido no k -ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ seja c_k . Utilizando este ponto, pode-se construir um retângulo cuja base é $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ e cuja altura é dada por $f(c_k)$. A existência de $f(c_k)$ é garantida pelo fato de f ser uma função limitada.

Esses retângulos podem estar tanto acima como abaixo do eixo, dependendo de $f(c_k)$ ser positiva ou negativa, ou ainda sobre ele se $f(c_k) = 0$. Em cada subintervalo, formamos o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$. Este produto pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo do valor de $f(c_k)$.

Quando $f(c_k) > 0$, o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ é a área do retângulo com altura $f(c_k)$ e largura Δx_k . Quando $f(c_k) < 0$, o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ é um número negativo, oposto da área de um retângulo com altura $f(c_k)$ que começa no eixo x e estende-se para baixo, até o número negativo $f(c_k)$.

Por fim, somando todos estes produtos, obtém-se $S_p = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$ que é uma soma de Riemann para f no intervalo $[a, b]$. Existem infinitas somas desse tipo, dependendo das escolhas quanto à partição e aos números c_k nos subintervalos.

Quando uma partição possui todos os subintervalos com o mesmo comprimento, pode-se torná-los mais estreitos simplesmente aumentando o número n . Quando uma partição possui subintervalos de comprimentos variados, pode-se garantir que todos sejam estreitos controlando o comprimento do mais longo. A norma de uma partição P , denotada por $\|P\|$, é definida como o maior de todos os comprimentos dos subintervalos.

Qualquer soma de Riemann associada a uma partição de um intervalo fechado $[a, b]$ define retângulos que aproximam a área da região entre o gráfico de uma função contínua f e o eixo x .

2.2. INTEGRAL DEFINIDA

Thomas (2008) argumenta que o conceito de integral definida baseia-se na idéia de que, para certas funções, quando a norma das partições de $[a, b]$ tende a zero, os valores das somas de Riemann correspondentes tendem a um valor-limite I . Define integral definida da seguinte maneira:

“Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Dizemos que um número I é a **integral definida de f em $[a, b]$** e que I é o limite das somas de

Riemann $\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$ se a seguinte condição é satisfeita:

Dado qualquer número $\varepsilon > 0$, existe um número correspondente $\delta > 0$, tal que, para qualquer partição $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ de $[a, b]$ com $\|P\| < \delta$ e qualquer escolha de c_k em $[x_{k-1}, x_k]$, tem-se

$$\left| \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k - I \right| < \varepsilon$$

Segundo Thomas (2008), essa ideia de convergência significa que uma soma de Riemann ficará próxima do número I desde que a norma da partição seja pequena o suficiente. Afirma ainda que,

introduzimos o símbolo ε como um número positivo pequeno que especifica quão próxima de I a soma de Riemann deverá ficar, e o símbolo δ como um segundo número positivo pequeno que especifica quão pequena a norma de uma partição precisa ser para que isso aconteça. (THOMAS, 2008, pg. 374)

Leibniz introduziu uma notação para a integral definida que capta sua construção como um limite somas de Riemann. Ele visualizou as somas finitas

$\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$ tornando-se uma soma infinita dos valores da função $f(x)$ multiplicados

por larguras de subintervalos “infinitesimais” dx . O símbolo do somatório, \sum , é

substituído, no limite, pelo símbolo da integral, \int , cuja origem é a letra “S”. Os

valores $f(c_k)$ são substituídos por uma seleção contínua dos valores da função $f(x)$.

As larguras Δx_k dos subintervalos tornam-se a diferencial dx .

Como existem infinitas partições P com norma que tenda a zero, e infinitos pontos c_k para cada partição, afirma-se que a integral definida existe quando sempre se obtém o mesmo limite I , independentemente de quais escolhas tenham sido feitas. Quando o limite existe, escreve-se

$$I = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

Quando cada partição tem n subintervalos iguais, cada um com largura $\Delta x = (b - a)/n$, também escreve-se

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

O limite é sempre tomado quando a norma das partições tende a zero e o número de subintervalos tende ao infinito.

2.3. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Stewart (2009) enuncia o TFC da seguinte maneira:

Parte 1: Se f for contínua em $[a, b]$, então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

É contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Parte 2: Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f , isto é, uma função tal que $F' = f$.

A prova deste teorema utiliza outros resultados relacionados a integrais e derivadas. A seguir, são apresentados o enunciado destes resultados e, em seguida, a demonstração do TFC.

- Teorema 1 (do Confronto): Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

- Teorema 2: Se f for diferenciável em a , então f é contínua em a .
- Teorema 3 (do Valor Extremo): Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.
- Teorema 4: Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b) , então f é constante em (a, b) .
- Corolário 1 (do Teorema 4): Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo (a, b) , então $f - g$ é constante em (a, b) ; isto é, $f(x) = g(x) + c$, em que c é uma constante.

- Propriedade 1: $\int_a^a f(x) dx = 0$

- Propriedade 2: $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

- Propriedade 3:

Se $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$ então $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

Demonstração da parte 1 do TFC:

Se x e $x + h$ estão em (a, b) , então

$$g(x+h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$$

$$g(x+h) - g(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$$

$$g(x+h) - g(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Logo, para $h \neq 0$,

$$\boxed{\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt} \quad (1)$$

Por ora, vamos assumir que $h > 0$. Uma vez que f é contínua em $[x, x + h]$, O Teorema do Valor Extremo afirma que há números u e v em $[x, x + h]$ tal que $f(u) = m$ e $f(v) = M$, onde m e M são os valores mínimo e máximo absolutos de f em $[x, x + h]$. Pela propriedade 3 acima citada:

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq Mh, \text{ isto é, } f(u)h \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v)h$$

Uma vez que $h > 0$ pode-se dividir essa desigualdade por h :

$$f(u) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v).$$

Agora, usando a equação (1) para substituir a parte do meio dessa desigualdade:

$$\boxed{f(u) \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq f(v)} \quad (2)$$

A desigualdade (2) pode ser demonstrada de maneira similar para o caso $h < 0$.

Tomando $h \rightarrow 0$, obtém-se que $u \rightarrow x$ e $v \rightarrow x$, uma vez que u e v estão entre x e $x + h$. Consequentemente, como f é contínua em x ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow x} f(u) = f(x) \text{ e}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(v) = \lim_{v \rightarrow x} f(v) = f(x)$$

Da desigualdade (2) e do Teorema do Confronto, conclui-se que

$$\boxed{g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)} \quad (3)$$

Se $x = a$ ou b , então o limite da equação (3) pode ser interpretado como um limite lateral com $h \rightarrow 0^+$ e $h \rightarrow 0^-$, respectivamente. Então, o Teorema 2 acima citado mostra que g é contínua em $[a, b]$.

Demonstração da parte 2: Seja $g(x) = \int_a^x f(t) dt$. Sabemos da Parte 1 que

$g'(x) = f(x)$; isto é, g é uma primitiva de f . Se F for qualquer outra primitiva de f em $[a, b]$, então sabemos do Corolário 1 acima citado que F e g diferem por uma constante:

$$\boxed{F(x) = g(x) + C} \quad (4)$$

para $a < x < b$. Mas, tanto F quanto g são contínuas em $[a, b]$ e, portanto, tomando limites em ambos os lados da equação (4), quando $x \rightarrow a^+$ e $x \rightarrow b^-$, conclui-se que a igualdade também é válida quando $x = a$ ou $x = b$.

Utilizando a propriedade 1 e substituindo $x = a$ em $g(x) = \int_a^x f(t) dt$, obtém-se

$$g(a) = \int_a^a f(t) dt = 0. \text{ Portanto, usando a equação (4) com } x = b \text{ e } x = a, \text{ tem-se}$$

$$F(b) - F(a) = [g(b) + C] - [g(a) + C]$$

$$F(b) - F(a) = g(b) - g(a)$$

$$F(b) - F(a) = g(b) - 0$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

A parte 2 do TFC afirma que se conhecermos uma primitiva F de f , ou seja, $F' = f$, então poderemos calcular $\int_a^b f(t) dt$ simplesmente subtraindo os valores de F nas extremidades do intervalo $[a, b]$, sem precisar calcular limites de soma de Riemann, fornecendo assim um algoritmo para o cálculo de integrais definidas.

2.4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-DIDÁTICA

Nesta sessão, é apresentada a fundamentação teórica adotada neste estudo. Para tanto, convém lembrar as questões de pesquisa:

Quais processos mentais intervêm e são combinados quando se insere atividades que se apóiam em figuras construídas pelo aluno tanto em folha de papel

quanto pelo *software Winplot* ao se tratar da expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$?

Esse tipo de atividade favorece a compreensão das ideias centrais que envolvem o TFC? No bojo desta pergunta está implícita a relação entre e a derivada e a integral.

Para respondê-las, buscou-se uma fundamentação teórica que privilegia o ensino por descoberta, por tentativa e erro. Dessa forma, este trabalho fundamenta-se no estudo de Tommy Dreyfus, intitulado, processos do pensamento matemático avançado.

O texto “Advanced Mathematical Thinking Processes” escrito por Tommy Dreyfus em 1991 e publicado no livro “Advanced Mathematical Thinking” organizado por David Tall, fundamenta teoricamente esta pesquisa.

O referido texto discute e analisa quais processos intervêm e são combinados para que haja a compreensão de conceitos matemáticos avançados. Procura também apresentar algumas ações que um professor de matemática pode introduzir em suas aulas de modo a promover um melhor aproveitamento dos alunos.

Segundo Dreyfus (1991), o método de ensino baseado na sequência teorema – demonstração – aplicação pode permitir

[...] uma estrutura de curso bem planejada, bem como um progresso previsível por meio de conteúdos bem definidos, garantindo que maior parte do conteúdo do programa possa ser coberta. Infelizmente, ele também tem pelo menos uma séria desvantagem: é inflexível em termos de adaptabilidade aos alunos. (tradução de DREYFUS, 1991, p.27)³

Afirma também que tal método pode funcionar muito bem para alguns alunos, mas, segundo é mostrado pela presente crise no ensino do Cálculo, não funciona para a grande maioria.

Para o autor, o que mais os estudantes aprendem em seus cursos de matemática é realizar um grande número de procedimentos padronizados para obter as respostas das classes de exercícios claramente delimitadas. Dessa forma, terminam os cursos com uma quantidade considerável de algoritmos relacionados a conceitos matemáticos, mas falta-lhes conhecimento sobre o processo de desenvolvimento de tais conceitos. Esta situação pode contribuir para que os alunos não utilizem seus conhecimentos de forma flexível na resolução de problemas por eles desconhecidos.

A natureza do pensamento matemático, segundo Dreyfus, está interligada aos processos cognitivos que dão origem ao conhecimento matemático. Dessa forma, o autor justifica a discrepância entre a expectativa do professor e o desempenho do estudante pelo fato de que aquele, apesar de saber que a matemática não foi construída de forma polida e acabada, mas sim pelo método da tentativa e erro, não ensina desta maneira, impedindo que os alunos tirem suas próprias conclusões a partir das definições.

O pensamento matemático, para o autor, envolve diversos processos de pensamento tais como: representação, visualização, mudança entre diferentes representações, abstração, generalização, síntese, intuição, descoberta, definição e validação. Relata que muitos dos processos mentais da Matemática avançada já estão presentes no pensamento das crianças sobre conceitos elementares. Além disso, tais processos mentais não são exclusivos desta ciência. Por exemplo,

³ Texto original: “[..] allows for a well-planned structure of the course, as well as for predictable progress through the material, and thus for a fairly certain guarantee that most of the material in the syllabus can be covered. Unfortunately, it also has at least one very serious disadvantage: it is inflexible in terms of the adaptability to the students.”

abstrações são feitas em Física, representações são usadas em Psicologia, análises são utilizadas em Economia e, visualizações, em Arte. O que difere o pensamento avançado do elementar é a complexidade. Dessa forma, processos eficazes são aqueles capazes de gerir tal complexidade como a abstração e a representação.

Para Dreyfus, representar um conceito significa gerar uma imagem do mesmo, imagem esta que pode ser simbólica ou mental. A representação simbólica é escrita ou falada de modo a tornar a comunicação do conceito mais fácil. Por outro lado, a representação mental é uma estrutura interna que a pessoa usa para interagir com o mundo externo. Uma mesma pessoa pode gerar uma ou mais imagens mentais para um mesmo conceito matemático. Afirma que

Para ter sucesso na matemática, é desejável ter uma rica representação mental dos conceitos. Uma representação é rica se ela tem vários aspectos articulados do conceito. Uma representação é pobre se ela tem muito poucos elementos que permitem a flexibilidade na resolução de problemas. Observamos frequentemente em nossos estudantes tais inflexibilidades. A menor mudança na estrutura do problema, ou até mesmo em sua formulação, pode bloqueá-los completamente. (tradução de DREYFUS, 1991, p.32)⁴

Embora seja importante possuir várias representações de um mesmo conceito, segundo o autor, a existência delas por si só não é suficiente para permitir o uso flexível do conceito na resolução de problemas. É necessário que a pessoa seja capaz de alternar entre as diferentes representações, utilizando aquela que é mais eficiente para a etapa em questão. Dessa forma, sugere que o professor utilize frequentemente várias representações de um mesmo conceito no ensino, sempre enfatizando o processo de alternar entre uma representação e outra.

Além da representação, outros processos tomam uma importância maior quando os conteúdos matemáticos se tornam mais avançados. Dentre esses processos, o mais importante é a abstração que está inteiramente ligado a outros dois processos: generalização e síntese. Dreyfus argumenta que

⁴ Texto original: "To be successful in mathematics, it is desirable to have rich mental representations of concepts. A representation is rich if it contains many linked aspects of that concept. A representation is poor if it has too few elements to allow for flexibility in problem solving. Such inflexibility we often observe in our students: The slightest change in the structure of a problem, or even in its formulation, may completely block them".

Generalizar é tirar como consequência ou induzir do particular, identificar o que há de comum, expandir o domínio de validade. [...] Sintetizar significa combinar ou compor partes de tal forma que elas formem um todo, uma entidade. Esse todo então, frequentemente corresponde a mais que a soma das partes. [...] Mais tarde no processo de aprendizagem, todos esses fatos antes não relacionados felizmente emergem em uma única figura, na qual eles estão comprimidos e inter-relacionados. Esse processo de fusão em uma única figura é uma síntese (tradução de DREYFUS, 1991, p.34)⁵

A prática da sala de aula, segundo o autor, dá pouca ênfase ao processo de síntese, uma vez que enquanto os detalhes de um conceito são explicados pelo professor e exercitados pelos alunos, pouca ou nenhuma atividade é feita para levar o aluno a sintetizar os diversos aspectos de um mesmo conceito e, muito menos, de diferentes conceitos.

A abstração, para Dreyfus, contém o potencial tanto para a generalização como para a síntese. No entanto, o processo de abstração é muito diferente da generalização e da síntese, pois abstrair é antes de tudo um processo construtivo de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, de propriedades e relações entre objetos matemáticos. Este processo requer a capacidade de deslocar a atenção dos próprios objetos para a estrutura de suas propriedades e relações. Conclui que

Representação e abstração são, assim, processos complementares. Quando uma única representação de um conceito é utilizada, a atenção pode ser focalizada sobre esta em vez do objeto abstrato. Entretanto, quando várias representações são consideradas em paralelo, a relação com o conceito abstrato subjacente torna-se importante. (tradução de DREYFUS, 1991, p.38)⁶

Esta complementaridade entre abstração e representação, segundo Dreyfus, pode ser utilizada nos processos de aprendizagem que são vistos como composto por quatro fases: uso de uma representação única; uso de mais de uma

⁵ Texto original: "To generalize is to derive or induce from particulars, to identify commonalities, to expand domains of validity. [...]To synthesize means to combine or compose parts in such a way that they form a whole, an entity. This whole then often amounts to more than the sum of its parts. [...]Latter in the learning process, all these previously unrelated facts hopefully merge into a single picture, within which they are all comprised and interrelated. This process of merging into a single picture is a synthesis."

⁶ Texto original: "Representing and abstracting are thus complementary processes. When a single representation of a concept is used, attention may be focused on this instead of the abstract object. However, when a several representations are being considered in parallel, the relation to the underlying abstract concept becomes important."

representação em paralelo; estabelecimento de ligações entre as representações paralelas; e integração entre representações e mudança flexível entre elas.

Na primeira fase, os processos começam a partir de um caso concreto, uma única representação. Na segunda fase, surgem outras representações do mesmo conceito. O estabelecimento de ligações entre as diferentes representações constitui a terceira fase. As fortes ligações permitem aos alunos mudar de representações, o que os torna conscientes do conceito subjacente e, portanto, susceptíveis de influenciar positivamente a abstração. Na quarta fase, acontece um processo de integração entre as representações: os vínculos, as relações, as propriedades comuns continuam a constituir o conceito abstrato, enquanto que aspectos específicos da representação retratam um segundo plano.

Uma vez que este processo tenha sido concluído, formou-se uma noção abstrata de um conceito dado, de alguma forma uma “apropriação” desse conceito. Quando um aluno precisa então resolver um problema em que esse conceito está presente, ocorre que muitas vezes necessitará voltar a uma (ou várias) de suas representações. A beleza deste conceito abstrato é que o estudante é capaz de fazer exatamente isso, e fazê-lo de uma forma controlada, pois sabe quais representações quer usar.

Dreyfus afirma ainda que os processos de abstração e representação estão entre os mais importantes para o pensamento matemático avançado. No entanto, existem outros processos como descobrir, intuir e validar que são extremamente importantes na construção de um conceito.

Descobrir, segundo o autor, é muitas vezes considerado um dos caminhos mais eficientes para um aluno aprender matemática. Essa eficácia pode ser atribuída aos aspectos psicológicos do processo de descoberta: o envolvimento pessoal, a intensidade da atenção, o sentimento da conquista e do sucesso. A aprendizagem pela descoberta, no entanto, consome muito tempo, e essa é uma das razões que o professor, especialmente aquele de matemática mais avançada, tende a não usá-la.

Intuir é fazer afirmações pela cognição direta e imediata, sem evidência de um pensamento racional. Este processo tem um papel central em qualquer sequência de processos que se iniciam pela descoberta.

Validar significa empreender ações para convencer alguém que o resultado realmente responde a questão que foi feita, e que a responde corretamente. Frequentemente, a validação não é considerada pelos estudantes como parte essencial da atividade matemática. Embora possa lhes dar bastante segurança, a maioria dos estudantes parece não estar muito interessado nessa segurança. Isso pode e deve ser mudado transferindo mais responsabilidade aos alunos oferecendo-lhes atividades mais abertas ao invés de exercícios rápidos para memorização de regras.

Para finalizar, Dreyfus conclui que a descoberta, a intuição e a validação, no entanto, são somente o início de uma sequência de processos matemáticos. O objetivo permanece sendo compreender as relações abstratas. A atividade dos estudantes precisa, portanto, prosseguir para processos mais formais como definir e provar.

No presente estudo, as atividades elaboradas para o instrumento de pesquisa buscam proporcionar o desenvolvimento dos processos do PMA acima descritos, pretendo levar o aluno a conjecturar a relação entre derivada e integral.

3. CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Neste capítulo, são apresentados os procedimentos metodológicos adotados neste estudo.

Para responder as questões inicialmente propostas foi realizada uma pesquisa qualitativa, uma vez que, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), a obtenção dos dados neste tipo de pesquisa se dá a partir da inserção do observador no ambiente a ser pesquisado, os dados coletados são predominantemente descritivos e há um maior interesse pelo processo do que simplesmente pelo resultado obtido.

O instrumento utilizado para obtenção dos dados foi elaborado utilizando algumas ideias da metodologia de pesquisa denominada engenharia didática. Segundo Almouloud (2007)

A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base em “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. (ALMOULOU, 2007, p. 171)

Este esquema experimental é composto por quatro fases, a saber: 1ª) análises preliminares, 2ª) concepção e análise *a priori*, 3ª) experimentação e 4ª) análise *a posteriori* e validação.

As análises preliminares contemplam as considerações sobre o quadro teórico didático do assunto de interesse, bem como uma análise do ensino atual, das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos de aprendizagem.

A concepção e análise *a priori* da situação consistem na elaboração do esquema experimental para a ação em classe, bem como na análise matemática e didática das atividades a serem desenvolvidas.

A experimentação é a fase de realização das atividades em certa população de alunos. Já a análise *a posteriori* é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos.

Neste trabalho, foram realizadas as seguintes fases: análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*.

3.1. SUJEITOS DA PESQUISA

A coleta de dados foi realizada em uma universidade particular da cidade de São Paulo, universidade esta em que a pesquisadora leciona a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral desde 2006.

Nesta universidade, o CDI no curso de Licenciatura em Matemática é dividido em três semestres, iniciando-se no 2º com a disciplina de CDI I que aborda os conceitos de limite e derivada de funções de uma variável real. Já no 3º semestre, é ministrada a disciplina de CDI II que também abrange os conceitos de limite e derivada, mas para funções de várias variáveis reais. E por fim, no 4º semestre, é oferecida a disciplina de CDI III que aborda o conceito de integral tanto de funções de uma como de várias variáveis reais.

Assim sendo, para a realização da pesquisa optou-se por selecionar alunos do curso de Licenciatura em Matemática concluintes do 2º ou 3º semestres. A escolha por estes semestres deve-se à necessidade do uso da derivada em algumas atividades. Além disso, também era necessário que os estudantes não conhecessem integral, uma vez que as atividades pretendem introduzir este conceito e levantar

questões sobre a expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

A escolha por alunos da Licenciatura em Matemática foi motivada pelo tema do trabalho que é pertinente a este curso. Além disso, estes estudantes já possuem

conhecimento do *software Winplot* que é utilizado em disciplinas deste o primeiro semestre.

Outro fator motivador foi que a pesquisadora não leciona nenhuma disciplina no curso de Licenciatura em Matemática, havendo assim uma menor influência na elaboração e nos resultados das questões, por não conhecer os alunos.

O convite aos alunos para a participação na pesquisa foi feito pelo coordenador do curso que conversou com duas turmas: uma de 2º semestre com 29 alunos e outra, de 3º com 23. Os estudantes foram informados que seria realizada uma atividade de seis horas, divididas em quatro encontros, relacionada à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Os encontros aconteceriam no período das aulas, mas após o término período letivo, ou seja, depois que as disciplinas do semestre fossem encerradas. Solicitou que os interessados em participar, colocassem seu nome em uma lista.

Após receber esta lista, o coordenador entrou em contato com os interessados para informar dia e local nos quais aconteceriam os encontros.

3.2. ELABORAÇÃO DO INSTRUMENTO DA PESQUISA

Para a aplicação do instrumento de pesquisa foram previstas quatro sessões de noventa minutos cada. Seriam realizadas em dias consecutivos, uma vez que as atividades possuem um encadeamento lógico, exigindo algumas vezes a utilização de resultados obtidos em sessões anteriores. Dessa forma, foi previsto iniciar as sessões, exceto a primeira, recordando e discutindo com os alunos os resultados obtidos no dia anterior.

Além disso, a segunda sessão foi prevista para ser realizada no laboratório de informática, uma vez que seria necessário o uso do *software Winplot*. As demais, aconteceriam em sala de aula.

A seguir, são apresentadas cada uma das atividades propostas bem como seus objetivos e análise *a priori*.

De um modo geral, as atividades foram elaboradas com a intenção de levar o aluno a conjecturar as relações e as propriedades dos conceitos envolvidos na

expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. O presente instrumento foi dividido em quatro sessões,

devido à extensa gama de conceitos que deveriam ser desenvolvidos.

1ª Sessão

Atividade 1

- (a) Construa o gráfico da função $f(t) = 2t + 1$ e use as fórmulas da geometria para achar a área da região limitada pelo gráfico da função f , pelo eixo t e pelas retas verticais $t = 1$ e $t = 3$.
- (b) Escolha um número x_0 maior do que um e diferente de três, use alguma fórmula da geometria para achar a área da região limitada pelo gráfico da função f , pelo eixo t e pelas retas verticais $t = 1$ e $t = x_0$.
- (c) Se $x > 1$, seja $A(x)$ a área da região limitada pelo gráfico da função f , pelo eixo t e pelas retas verticais $t = 1$ e $t = x$. Ache uma expressão (em função de x) para $A(x)$.
- (d) O que representam as variáveis t e x ?

Atividade 2

- (a) Esboce o gráfico da função $f(t) = t^2 + 1$ e assinale a região do plano limitada pelo gráfico da função f , pelos eixos coordenados e pela reta vertical $t = 4$.
- (b) É possível usar fórmulas da geometria para calcular exatamente a área da região acima descrita? Justifique sua resposta.
- (c) Se não encontrou uma maneira de efetuar o cálculo exato da área da região descrita no item (a), ache uma aproximação para a mesma.
- (d) É possível melhorar a estimativa feita no item anterior? Justifique sua resposta.

Na 1ª sessão são apresentadas duas atividades com quatro itens cada uma. O objetivo principal desta sessão é definir a função área a partir de uma figura limitada pelo gráfico de uma função do 1º grau e pelo eixo x , bem como investigar quais procedimentos poderiam ser utilizados para determinar a área ao trocar a função do 1º grau por uma de 2º grau.

A primeira atividade é uma adaptação de um dos exercícios propostos no Projeto de Descoberta intitulado “Funções Área” de Stewart (2009) e apresenta ao aluno a descrição de uma região plana cuja área pode ser calculada pelas fórmulas da geometria, mais especificamente, a fórmula da área do trapézio. Tal região é limitada pelo gráfico num sistema cartesiano de uma função $f(t)$, pelo eixo t e por duas retas verticais, $t = 1$ e $t = x$. O aluno deve obter uma expressão que determine a área desta região em função de x e se posicionar ante o questionamento do significado das variáveis t e x .

Esta atividade pode propiciar o desenvolvimento dos seguintes processos do PMA: visualização, representação e mudança entre diferentes representações, definição, síntese, generalização e validação.

A representação e mudança entre diferentes representações podem ser desenvolvidas nos itens (a) e (b), já que será necessário fazer uma mudança da representação algébrica para a gráfica. Apesar de tal mudança ser induzida no enunciado, este exercício colabora para o desenvolvimento do processo de representar, uma vez que se

[...] os estudantes muitas vezes se limitam a trabalhar em uma única representação [...], uma abordagem possível é usar sistematicamente várias representações no ensino e enfatizar o processo de passar de uma representação para outra desde o começo. (tradução de DREYFUS, 1991, pg. 33)⁷

Por outro lado, o processo de síntese é desenvolvido no momento em que precisa combinar dois conceitos distintos: área e função, para calcular a área do trapézio.

No item (c), é preciso primeiramente visualizar a região que será obtida e, em seguida, generalizar o cálculo da área, já que a base maior do trapézio depende do valor de x . Além disso, uma vez que a função área esteja corretamente definida é possível validar a expressão obtida utilizando os números dos itens (a) e (b).

A segunda atividade, elaborada pela autora, apresenta uma região cuja área não pode ser calculada por fórmulas elementares da geometria. Assim, o aluno poderá buscar uma maneira de fazer um cálculo aproximado desta área manipulando conhecimentos da geometria, tais como, área de triângulo, quadrado, retângulo, trapézio etc. Além disso, será levado a verificar se existem outros métodos que melhorem a aproximação por ele obtida.

Esta atividade pode propiciar o desenvolvimento dos seguintes processos do PMA: visualização, representação e mudança entre diferentes representações, descoberta, análise, síntese, generalização e abstração.

A representação e mudança entre diferentes representações podem ser desenvolvidas na resolução do item (a), por ser necessário fazer uma mudança da representação algébrica para a gráfica.

⁷ [...] students very often limit themselves to working in single representation [...]. One possible approach is to systematically use several representations in teaching and to stress the process of switching representations from the beginning.

O processo de síntese pode ser desenvolvido nos itens posteriores no momento em que realiza a combinação de dois conceitos distintos: área e função, para calcular a área solicitada.

Os itens (b) e (c) exigem uma análise da região definida para descobrir uma maneira de fazer o cálculo aproximado da área. Já no item (d), outras maneiras para fazer tal cálculo podem ser visualizadas, de modo a permitir uma generalização e abstração de tais procedimentos, buscando uma melhor estimativa.

2ª Sessão

Atividade 3

Parte I

- (a) Utilize o programa *Winplot* para construir o gráfico da função $f(t) = t^2 + 1$.
- (b) Aperte a tecla F7. Na janela “lim inferior” digite 0. Na janela “lim superior” digite 4. Na janela “subintervalos” digite 2. Selecione apenas a opção “ponto à esq:” (as demais, devem estar desabilitadas) Selecione a opção “visualizar” e clique em “definida”. Preencha o quadro abaixo:

Retângulo	Medida da base	Abscissas dos vértices da base		Medida da altura	Área
1º	2	$t_0 = 0$	$t_1 = 2$	1	2
2º		$t_1 =$	$t_2 =$		
					Área total =

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

(c) Repita o procedimento do item (b), alterando o número de subintervalos para 4.

Retângulo	Medida da base	Abscissas dos vértices da base		Medida da altura	Área
1º		$t_0 =$	$t_1 =$		
2º		$t_1 =$	$t_2 =$		
3º		$t_2 =$	$t_3 =$		
4º		$t_3 =$	$t_4 =$		
Área total =					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \Delta t_4 = t_4 - t_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

(d) Altere o número de subintervalos para 8.

Retângulo	Medida da base	Abscissas dos vértices da base		Medida da altura	Área
1º		$t_0 =$	$t_1 =$		
2º		$t_1 =$	$t_2 =$		
3º		$t_2 =$	$t_3 =$		
4º		$t_3 =$	$t_4 =$		
5º		$t_4 =$	$t_5 =$		
6º		$t_5 =$	$t_6 =$		
7º		$t_6 =$	$t_7 =$		
8º		$t_7 =$	$t_8 =$		
Área total =					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \Delta t_2 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \Delta t_8 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(e) Altere o número de subintervalos para 16.

Retângulo	Medida da base	Abscissas dos vértices da base		Medida da altura	Área
1º		$t_0 =$	$t_1 =$		
2º		$t_1 =$	$t_2 =$		
3º		$t_2 =$	$t_3 =$		
11º		$t_{10} =$	$t_{11} =$		
16º		$t_{15} =$	$t_{16} =$		
i -ésimo		$t_{i-1} =$	$t_i =$		
Área total =					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \underline{\quad\quad}; \quad \Delta t_{16} = \underline{\quad\quad} = \underline{\quad\quad}; \quad \Delta t_i = \underline{\quad\quad} = \underline{\quad\quad}$$

- (f) Se alterarmos o número de subintervalos para 32, qual será a soma das áreas dos retângulos?
- (g) Se alterarmos o número de subintervalos para 64, qual será a soma das áreas dos retângulos?
- (h) Se alterarmos o número de subintervalos para 128, qual será a soma das áreas dos retângulos?
- (i) Se alterarmos o número de subintervalos para 256, qual será a soma das áreas dos retângulos?

De modo geral, a soma das áreas dos retângulos obtidos é dada por

$$A = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \Delta t_i, \text{ sendo } t_0 < t_1 < \dots < t_n = 4$$

Parte II

(a) Desmarque a opção “ponto à esq:” e selecione “aleatório”. Altere o número de subintervalos para 8 e clique em “definida”.

A soma das áreas dos retângulos é _____

Observe o 4º retângulo.

A medida da base é _____

A altura desse retângulo é $f(t_3)$? _____

É $f(t_4)$? _____

Existe um valor c , com $t_3 < c < t_4$, tal que a altura desse retângulo é $f(c)$?

(b) Sem fazer nenhuma alteração, clique em “definida” novamente.

A soma das áreas dos retângulos é _____

Observe o 4º retângulo.

A medida da base é _____

A altura desse retângulo é $f(t_3)$? _____

É $f(t_4)$? _____

Existe um valor c , com $t_3 < c < t_4$, tal que a altura desse retângulo é $f(c)$?

O valor de c deste item é o mesmo encontrado no item (a)? _____

(c) Sem fazer nenhuma alteração, clique em “definida” novamente.

A soma das áreas dos retângulos é _____

Observe o 4º retângulo.

A medida da base é _____

A altura desse retângulo é $f(t_3)$? _____

É $f(t_4)$? _____

Existe um valor c , com $t_3 < c < t_4$, tal que a altura desse retângulo é $f(c)$?

O valor de c deste item é o mesmo encontrado no item (a)? _____

É o mesmo do item (b)? _____

(d) De quantas maneiras você acha que possível escolher o valor de c , com

$$t_3 < c < t_4?$$

De modo geral, a soma das áreas dos retângulos obtidos, é dada por

$$A = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta t_i, \text{ sendo } c_i \text{ um ponto arbitrário do } i\text{-ésimo intervalo}$$

$$(t_{i-1} \leq c \leq t_i)$$

(e) Que diferenças você observa entre a aproximação das áreas calculadas utilizando a opção “ponto à esquerda” e a opção “aleatório”?

Nesta sessão, é apresentada uma única atividade dividida em duas partes. A primeira com nove itens e, a segunda, com cinco. Esta questão foi retirada do livro “Atividades para o estudo de Funções em ambiente computacional” (Silva, B. A. et al., 2002) e adaptada para a utilização do programa *Winplot*. O principal objetivo desta atividade é definir as somas amostrais de Riemann visando à construção do conceito de integral.

Na primeira parte da atividade, o cálculo da área é feito a partir de um número cada vez maior de retângulos cujas alturas são os valores da função no extremo inferior de cada intervalo da partição. O objetivo desta parte da atividade é fazer o aluno perceber que conforme se aumenta o número de retângulos utilizados para fazer o cálculo da área, melhor será a aproximação obtida para a área desejada. Além disso, proporciona uma familiarização com os termos $f(t)$ e Δt , relacionando-os com as medidas da altura e da base de cada retângulo, respectivamente.

Na segunda parte da atividade, o cálculo da área é feito a partir de um número fixo de retângulos cujas bases possuem a mesma medida⁸ e cujas alturas são os valores da função em um ponto arbitrário (escolhido pelo *software*) de cada intervalo da partição. O objetivo desta parte da atividade é evidenciar a arbitrariedade da escolha do ponto, no qual o valor da função é a altura do retângulo, solicitando ao aluno para calcular diversas vezes a mesma área com um número fixo de retângulos e comparar os resultados obtidos.

Estas atividades podem propiciar o desenvolvimento dos seguintes processos do PMA: visualização, representação e mudança entre diferentes representações, intuição, síntese, generalização e abstração. Apesar de exigirem o uso de ferramenta tecnológica, isto só contribui para o desenvolvimento dos processos do PMA, uma vez que

Os computadores podem servir como ferramentas heurísticas para os matemáticos e estudantes de matemática [...]: se a ferramenta está direcionada para fenômenos interessantes e focalizada corretamente, ela pode mostrar um quadro inesperado, muitas vezes visual, do fenômeno sob estudo, e isso leva a novas idéias, para o reconhecimento de relações antes desconhecidas. (tradução de DREYFUS, 1991, pg. 30)⁹

⁸ As somas amostrais de Riemann consideram também a arbitrariedade do tamanho da base de cada retângulo, ou seja, as bases não precisam ser iguais. No entanto, tal procedimento não é contemplado pelo programa Winplot adotado para a execução desta atividade.

⁹ Texto original: Computers can serve as heuristic tools for the mathematician and the mathematics student [...]: if the tool is directed onto interesting phenomena and correctly focused, it may show an unexpected picture, often a visual one, of the phenomena under study, and thus lead to new ideas, to the recognition of heretofore unknown relationships.

A primeira parte da atividade propicia o desenvolvimento dos processos de representação e de mudança entre diferentes representações, uma vez que será necessário utilizar duas representações distintas de função: algébrica e gráfica.

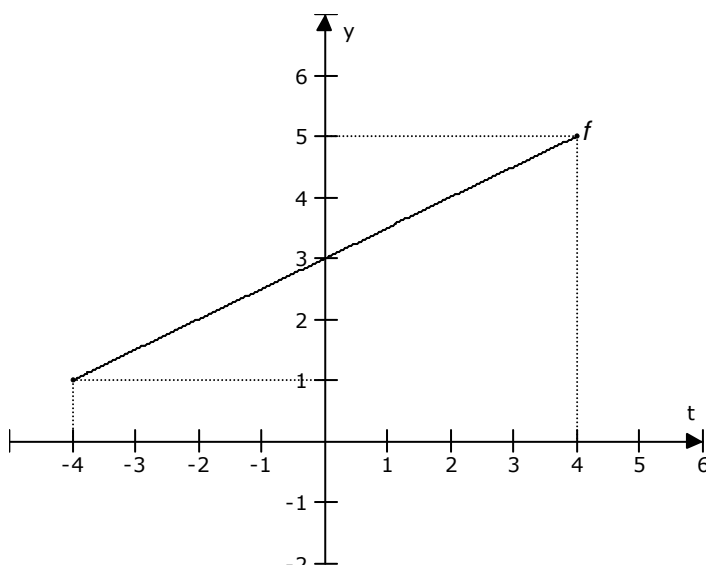
Já o processo de síntese pode ser desenvolvido ao utilizar dois conceitos distintos: área e função. Por outro lado, os processos de generalização e abstração podem ocorrer após o preenchimento dos quadros dos itens (a), (b) e (c), pois o aluno pode perceber que conforme o número de subintervalos é aumentado, a área aproximada fica mais próxima da real.

O item (d) da segunda parte permite o desenvolvimento da visualização e da abstração ao questionar quantas maneiras distintas são possíveis para escolher um ponto em determinado intervalo. Por outro lado, o último item desta sessão proporciona o desenvolvimento da intuição, da descoberta e da generalização, uma vez que é solicitado ao aluno identificar as diferenças entre os dois métodos utilizados.

3ª Sessão

Atividade 4

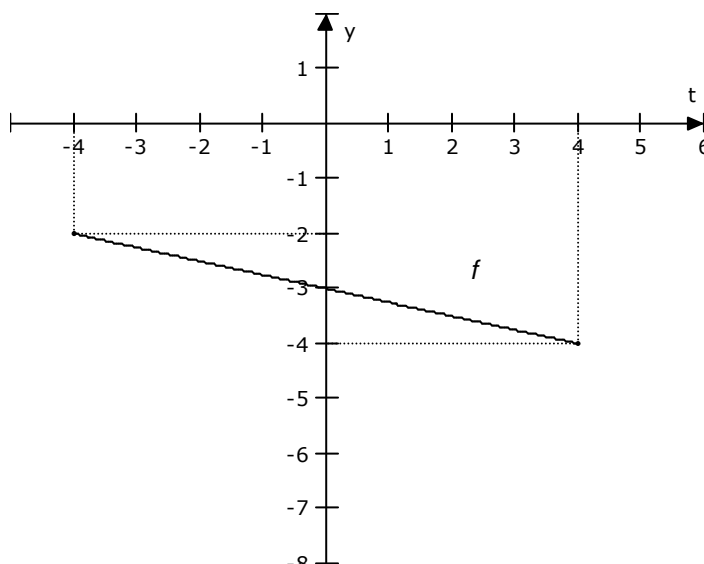
Seja $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está dado na figura abaixo:



- (a) O que representa a função $F(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$?
- (b) O que representam as variáveis t e x ?
- (c) O que representam os termos $f(t)$ e dt ?
- (d) O que podemos afirmar de $f(t)$ no intervalo $[-4, 4]$? É positivo, negativo ou nulo? Varia ou permanece constante? Aumenta ou diminui? Justifique sua resposta.
- (e) Como se comporta a função $F(x)$? É positiva, negativa ou nula? É crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.

Atividade 5

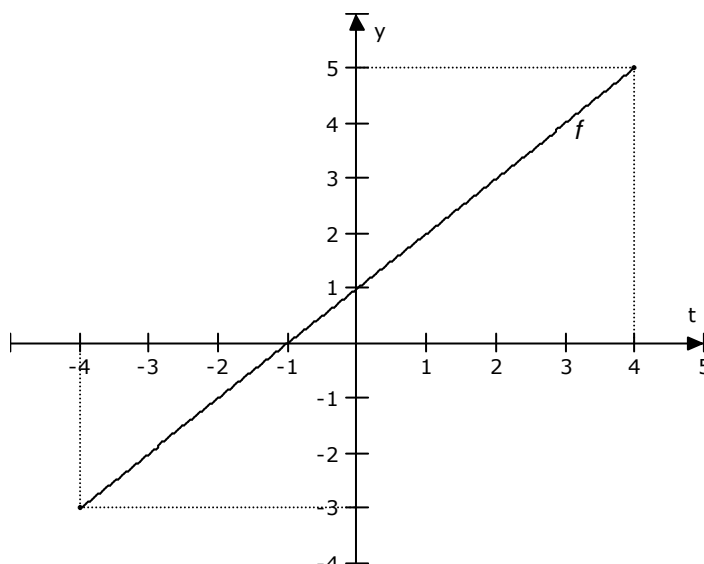
Seja $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está dado na figura abaixo:



- (a) O que representa a função $F(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$?
- (b) O que representam as variáveis t e x ?
- (c) O que representam os termos $f(t)$ e dt ?
- (d) O que podemos afirmar de $f(t)$ no intervalo $[-4, 4]$? É positivo, negativo ou nulo? Varia ou permanece constante? Aumenta ou diminui? Justifique sua resposta.
- (e) Como se comporta a função $F(x)$? É positiva, negativa ou nula? É crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.

Atividade 6

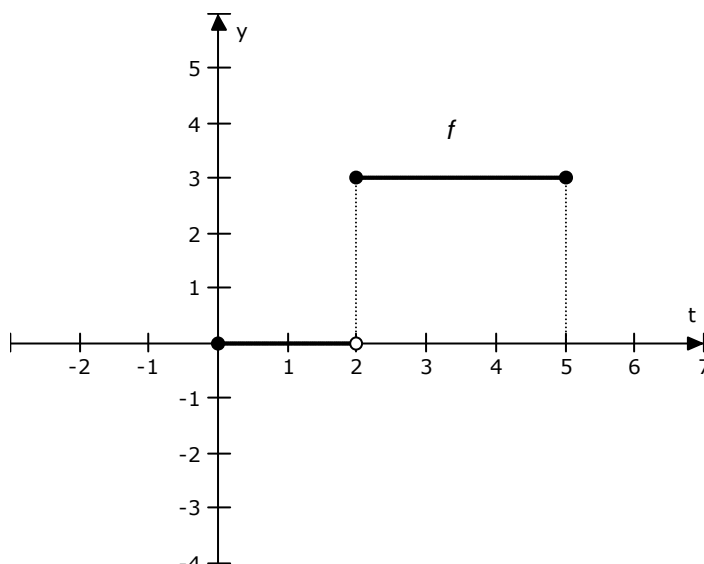
Seja $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está dado na figura abaixo:



- (a) O que representa a função $F(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$?
- (b) O que representam as variáveis t e x ?
- (c) O que representam os termos $f(t)$ e dt ?
- (d) O que podemos afirmar de $f(t)$ no intervalo $[-4, 4]$? É positivo, negativo ou nulo? Varia ou permanece constante? Aumenta ou diminui? Justifique sua resposta.
- (e) Como se comporta a função $F(x)$? É positiva, negativa ou nula? É crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.

Atividade 7

Seja $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está dado na figura abaixo:



- (a) O que representa a função $F(x) = \int_0^x f(t) dt$?
- (b) O que representam as variáveis t e x ?
- (c) O que representam os termos $f(t)$ e dt ?
- (d) O que podemos afirmar de $f(t)$ no intervalo $[-4, 4]$? É positivo, negativo ou nulo? Varia ou permanece constante? Aumenta ou diminui? Justifique sua resposta.
- (e) Como se comporta a função $F(x)$? É positiva, negativa ou nula? É crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.
- (f) A função $f(t)$ é contínua? E $F(x)$?

Nesta sessão, são apresentadas quatro atividades (elaboradas pela autora). As três primeiras com cinco itens cada uma e, a última, com seis. Objetivo destas atividades é explorar as propriedades da função $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ e as relações entre a função F e os componentes que a definem.

Para isso, são apresentadas funções f com propriedades distintas em cada atividade. Na primeira, a função é contínua e positiva; na segunda, é contínua e negativa; na terceira, é contínua e positiva em um intervalo e negativa em outro, na quarta, é descontínua.

Estas atividades permitem o desenvolvimento dos seguintes processos do PMA: visualização, síntese, abstração, análise, descoberta, generalização e validação.

O item (a) de todas as atividades permite o desenvolvimento da visualização e da síntese, pois são utilizados conceitos distintos, função, integral e área. Já os itens (b), (c), (d) e (e) propiciam o desenvolvimento da visualização, abstração e análise, uma vez que é solicitado ao aluno analisar a função F bem como os elementos que a compõem: t , x , $f(t)$ e dt .

O desenvolvimento dos processos de descoberta, generalização e validação também são favorecidos durante toda esta sessão, já que as atividades propostas são semelhantes quanto aos questionamentos feitos, porém distintas quanto à característica da função $f(t)$.

4ª Sessão**Atividade 8**

(a) Sejam $f(t) = t + 3$ e $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, tal que $x \geq 1$ e. Esboce o gráfico da função f e use a geometria para achar uma expressão para $F(x)$.

(b) Calcule $F'(x)$. O que você observa?

Atividade 9

(a) Sejam $f(t) = -2t - 2$ e $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, tal que $x \geq 1$ e. Esboce o gráfico da função f e use a geometria para achar uma expressão para $F(x)$.

(b) Calcule $F'(x)$. O que você observa?

Atividade 10

(a) Sejam $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 2 \\ 1 & \text{se } t > 2 \end{cases}$ e $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, tal que $x \geq 1$ e. Esboce o gráfico da função f e use a geometria para achar uma expressão para $F(x)$.

(b) Calcule $F'(x)$. O que você observa?

Atividade 11

Suponha que f seja uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e definimos uma nova função g pela equação $g(x) = \int_a^x f(t) dt$. Com base nos seus resultados dos problemas anteriores, conjecture uma expressão para $g'(x)$.

Nesta sessão são apresentadas quatro atividades (elaboradas pela autora). As três primeiras com dois itens e, a última, com apenas um. O objetivo destas atividades é levar o aluno a conjecturar a relação entre derivada e integral, ou seja, $g'(x) = f(x)$ que é a ideia central do Teorema Fundamental do Cálculo e verificar que $f(t)$ precisa ser contínua para que isto ocorra. Sendo assim, são apresentadas três funções: uma positiva, uma negativa e outra descontínua. É solicitado ao aluno calcular $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, usando as fórmulas da geometria, e obter $F'(x)$.

Estas atividades permitem o desenvolvimento dos seguintes processos do PMA: visualização, representação e mudança entre diferentes representações, descoberta, análise, síntese, generalização e abstração.

O item (a) das atividades 8, 9 e 10 propiciam o desenvolvimento da visualização, representação e mudança entre diferentes representações, por ser necessário alternar da representação algébrica para a gráfica para visualizar a área a ser calculada. Além disso, permitem o desenvolvimento da síntese ao relacionar área, integral e função. Já o item (b) favorece o desenvolvimento da análise e da síntese ao questionar sobre $F'(x)$.

Por outro lado, a atividade 11 permite o desenvolvimento da descoberta e da generalização, pois permite o aluno consolidar os resultados obtidos nas questões anteriores e conjecturar uma expressão para $g'(x)$.

4. EXPERIMENTAÇÃO

Neste capítulo é apresentada a parte empírica desta pesquisa, à qual descrevo sobre a realização do experimento, bem como a descrição e análise dos dados obtidos.

A coleta de dados foi realizada em quatro sessões de 90 minutos cada uma. A necessidade de quatro sessões fez-se presente devido à extensa gama de conceitos que deveriam ser trabalhados. Os participantes da pesquisa, em número de quatorze, são alunos do curso de Licenciatura em Matemática concluintes do 2º ou 3º semestres. A escolha por estes semestres deve-se à necessidade do uso da derivada em algumas atividades, conceito que é ministrado no 2º semestre. Além disso, também era necessário que o aluno não conhecesse integral que é ensinada no 4º semestre.

Visando a interação entre os alunos, optou-se por realizar as atividades em duplas. As sessões foram áudio-gravadas para facilitar o registro dos comentários entre os alunos. Além disso, uma observadora e a própria pesquisadora circularam entre as duplas fazendo anotações sobre as conversas e tentativas de resolução dos alunos. Em nenhum momento durante a realização das atividades houve interferência da pesquisadora ou da observadora.

As sessões ocorreram nos dias 28, 29 e 30 de junho e no dia 1º de julho de 2010 nas dependências da universidade escolhida. A primeira, terceira e quarta sessões aconteceram em uma sala de aula providas de carteiras e de todo material escolar que os participantes necessitariam: caneta, papel, lápis, borracha e régua. Já a segunda sessão aconteceu no laboratório de informática com um computador para cada participante. Os computadores possuíam o *software Winplot* e os sujeitos da pesquisa já sabiam utilizá-lo.

A escolha por sessões em dias consecutivos foi motivada pela intensa dependência entre as atividades. Um conceito trabalhado em uma sessão era utilizado na seguinte.

A seguir, estão descritas cada uma das sessões.

4.1. 1ª SESSÃO

Na primeira sessão, o coordenador do curso levou a pesquisadora até a sala de aula reservada para o experimento e apresentou-a aos alunos. A pesquisadora agradeceu a todos pela presença e explicou que em cada encontro um questionário seria entregue a cada dupla para ser preenchido. Salientou a importância de deixarem explícito todo o raciocínio utilizado na elaboração das respostas, uma vez que o processo de obtenção das mesmas seria até mais importante do que a resposta final propriamente dita.

A seguir, informou que havia quatro gravadores disponíveis e perguntou quem gostaria de deixar gravadas suas discussões. Três duplas manifestaram-se a favor e a quarta, foi escolhida aleatoriamente pela pesquisadora, o que foi aceito sem restrições pelos estudantes. Logo em seguida, foram entregues os questionários às duplas.

Em um primeiro momento, os alunos ficaram inseguros com o andamento das atividades. A cada novo exercício, eles chamavam a pesquisadora para saber se a resposta dada estava certa ou errada. Se o raciocínio empregado era o mais adequado ou se haveria um método mais fácil de resolver. Um aluno comentou: “Não sei se isso está certo. É mais fácil quando precisamos desenvolver um exercício parecido com o exemplo do professor.” Neste momento, a pesquisadora achou conveniente lembrá-los que não se preocupassem somente com a resposta final, mas com o processo para obtê-la.

No decorrer da primeira sessão, os alunos foram adquirindo maior segurança na resolução dos exercícios. Ao término desta sessão, a pesquisadora recolheu os questionários das duplas conforme finalizavam as atividades e informou que o próximo encontro seria realizado no laboratório de informática.

A seguir, é feita a descrição e análise dos dados obtidos nesta sessão. Para tanto, convém lembrar que o objetivo da mesma era construir a função área a partir de uma figura limitada pelo gráfico de uma função do 1º grau e pelo eixo x , bem

como investigar quais procedimentos poderiam ser utilizados para determinar a área ao trocar a função do 1º grau por uma de 2º grau.

Atividade 1 – Item (a)

Enunciado: Construa o gráfico da função $f(t) = 2t + 1$ e use as fórmulas da geometria para achar a área da região limitada pelo gráfico da função f , pelo eixo t e pelas retas verticais $t = 1$ e $t = 3$.

Para construir o gráfico solicitado foram utilizadas as estratégias que a pesquisadora categorizou em dois grupos:

- G1: Escolheram dois valores para t , calcularam o valor correspondente para $y = f(t)$, representaram estes dois pontos no plano cartesiano e traçaram a reta solicitada;
- G2: Escolheram mais de dois valores para t , calcularam o valor correspondente para $y = f(t)$, representaram todos estes pontos no plano cartesiano e traçaram a reta solicitada.

Para calcular a área da região solicitada foram usadas as seguintes estratégias:

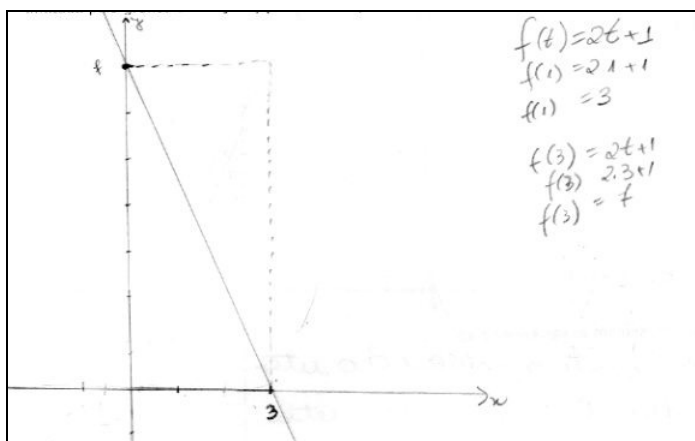
- A1: Utilizaram a fórmula da área do trapézio;
- A2: Subdividiram a região obtida em um retângulo e um triângulo, calcularam a área de cada uma destas figuras e somaram os dois valores obtidos;
- NF: Não fizeram.

A seguir, é apresentado um quadro contendo as estratégias utilizadas pelas duplas.

Quadro 1 - Resultados da atividade 1 (a)

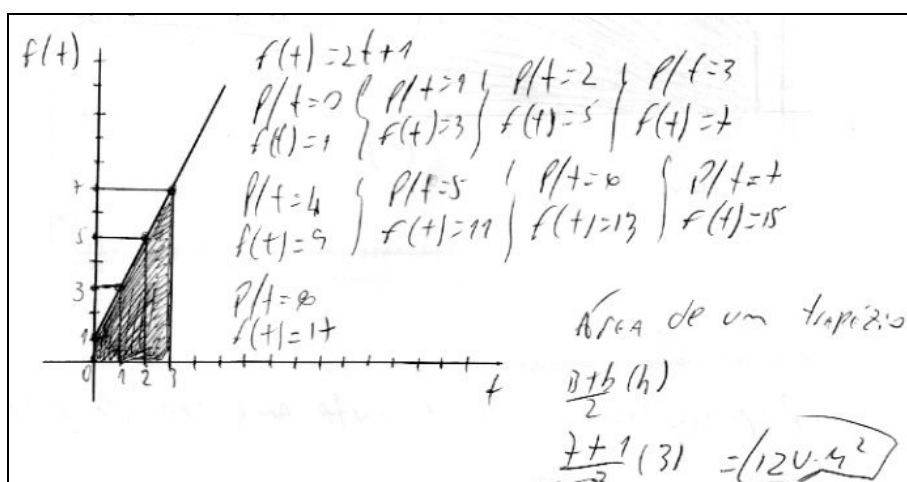
Dupla	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇
Gráfico	G1	G1	G2	G2	G1	G1 (erro)	G2
Área	A2	A1 e A2	A1	A1 (erro)	A2	NF	A1

De um modo geral, as duplas construíram uma tabela com dois ou mais pontos para obter o gráfico solicitado. Apenas a dupla D₆ cometeu um erro ao construir o gráfico, pois, apesar de terem obtido dois pontos que pertencem à reta solicitada, não souberam representar estes pontos no plano cartesiano, como se vê na figura a seguir:

Figura 1 - Resposta da dupla D₆ para a atividade 1 (a)

A dupla D₄ errou o cálculo da área da região solicitada, pois a representaram incorretamente, fizeram $t = 0$ ao invés de $t = 1$. Este erro está ilustrado na figura a seguir:

Figura 2 - Resposta da dupla D₄ para a atividade 1 (a)



Percebe-se que, conforme previsto na análise *a priori*, o processo do PMA de mudança entre diferentes representações foi utilizado pelas duplas, uma vez que partiram de uma representação algébrica para uma tabular e, em seguida, para a gráfica.

Atividade 1 – Item (b)

Enunciado: Escolha um número x_0 maior do que um e diferente de três, use alguma fórmula da geometria para achar a área da região limitada pelo gráfico da função f , pelo eixo t e pelas retas verticais $t=1$ e $t=x_0$.

Para construir novamente o gráfico, os sujeitos utilizaram as seguintes estratégias:

- G3: Utilizaram a informação do item anterior;
- G4: Atribuíram novos valores para t , encontraram outros pontos e traçaram a reta solicitada.

Já para o cálculo da área, as estratégias utilizadas foram as mesmas do item anterior.

O quadro abaixo mostra as respostas dadas pelos sujeitos.

Quadro 2 - Resultados da atividade 1 (b)

Dupla	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇
Gráfico	G4	G3	G3	G3	G4	G3 (erro)	G3
Área	A2	A1 e A2	A1	A1	A2	NF	A1

A dupla D₆ reproduziu o mesmo raciocínio utilizado anteriormente e, conseqüentemente, repetiu o erro. Já a dupla D₄, percebeu que a área solicitada iniciava em $t = 1$ e efetuou os cálculos corretamente.

Em relação aos processos do PMA, nota-se que, novamente, as duplas realizaram uma mudança entre diferentes representações.

Atividade 1 – Item (c)

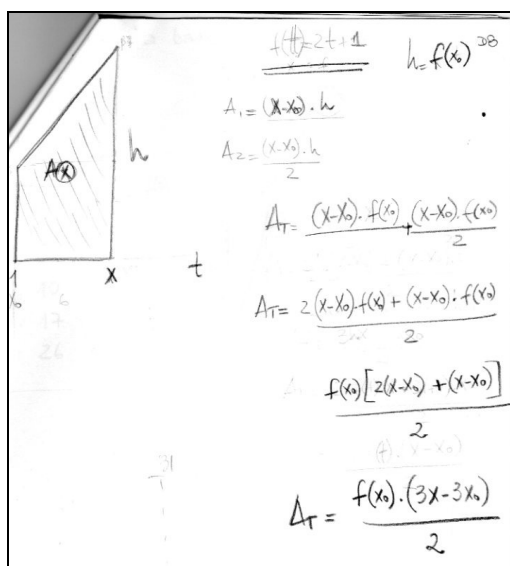
Enunciado: Se $x > 1$, seja $A(x)$ a área da região limitada pelo gráfico da função f , pelo eixo t e pelas retas verticais $t = 1$ e $t = x$. Ache uma expressão (em função de x) para $A(x)$.

Somente as duplas D₁ e D₂, conseguiram resolver este item corretamente. No entanto, as estratégias foram diferentes, uma vez que D₁ subdividiu a região em um retângulo e um triângulo, e D₂ trabalhou diretamente com a área do trapézio.

As duplas D₃, D₄ e D₅ fizeram uma representação gráfica da região, mas não conseguiram calcular a área, pois não souberam como obter a medida da base do trapézio que dependia de x . Um dos integrantes da dupla D₃ comentou: “Não tem como calcular essa altura. Não sei quem é x !”

Já a dupla D₇ além de representar graficamente a região indicada, iniciou os cálculos da área. No entanto, não chegaram à resposta final, pois não substituíram $f(x)$ por $(2x + 1)$, conforme mostra a figura abaixo:

Figura 3 - Resposta da dupla D₇ para a atividade 1 (c)



A produção destas duplas indica que os estudantes têm dificuldade em associar o significado de função com sua representação gráfica.

Em relação aos processos do PMA, percebe-se que para resolver este item, todas duplas conseguiram visualizar a área que deveria ser calculada. No entanto, a maioria

a não conseguiu definir a função, por não perceber que a área seria obtida em função da variável e x , sendo necessária a substituição de $f(x)$ por $(2x + 1)$. Dessa forma, o processo de generalização e síntese não esteve presente em todos os participantes.

Além disso, das duas duplas que conseguiram finalizar o exercício, apenas a dupla D₁ validou a expressão da função obtida, atribuindo a x o valor três, conforme havia realizado no item (a).

Atividade 1 – Item (d)

Enunciado: O que representam as variáveis t e x ?

As respostas dadas pelas duplas estão descritas no quadro a seguir:

Quadro 3 - Resultados da atividade 1 (b)

Dupla	Resposta
D ₁	“A variável t representa a coordenada do eixo das abscissas. A variável x é uma variável para t .”
D ₂	“Representam a mesma coisa, uma variável independente, podendo representar uma variável de um problema real.”
D ₃	“Representam a altura do trapézio.”
D ₄	“Delimitam o trapézio.”
D ₅	“Atribuindo valores para t e x encontra-se o valor de $f(t)$ e $\Delta(x)$. Onde $f(t)$ depende de t e $\Delta(x)$ depende de x .”
D ₆	“ t representa a altura e x a base.”
D ₇	“Representam a base da figura.”

A análise das respostas mostra que o processo de visualização não esteve presente em todas as duplas, uma vez que a maioria não conseguiu visualizar o significado das variáveis t e x , com exceção da dupla D₂.

De um modo geral, percebe-se que, nesta atividade, foram mobilizados os seguintes processos do PMA: visualização, representação e mudança entre diferentes representações, definição, síntese, generalização e validação.

Atividade 2 – Item (a)

Enunciado: Esboce o gráfico da função $f(t) = t^2 + 1$ e assinale a região do plano limitada pelo gráfico da função f , pelos eixos coordenados e pela reta vertical $t = 4$.

Para construir o gráfico solicitado, foram utilizadas as seguintes estratégias:

- G1: Escolheram alguns valores para t , calcularam o valor correspondente para $y = f(t)$, representaram estes pontos no plano cartesiano e traçaram o gráfico solicitado;
- G2: Calcularam as raízes da função $f(t)$.

O quadro abaixo contém as estratégias utilizadas pelas duplas.

Quadro 4 - Resultados da atividade 2 (a)

Dupla	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇
Gráfico	G1	G1	G1	G1	G2 e G1	G2 (erro)	G1

De um modo geral, as duplas construíram uma tabela com quatro ou mais pontos para obter o gráfico solicitado. As duplas D₅ e D₆ tentaram encontrar as raízes da função e concluíram que as mesmas não pertenciam ao conjunto dos números reais, mas não utilizaram esta informação para fazer o esboço do gráfico da função.

Diante disso, a dupla D₆ não soube como continuar. Já a dupla D₅ optou por mudar de estratégia durante a resolução, elaborando a tabela de pontos, conforme diálogo abaixo:

Aluno A: - E agora? Se o delta é negativo, então não tem raiz! Como vamos fazer o gráfico?

Aluno B: - Já falei! Esquece este negócio de raiz, monta logo a tabela que vai dar certo!

Quando aos processos do PMA mobilizados neste item, nota-se que seis, das sete duplas, realizaram a mudança entre diferentes representações, pois utilizaram a expressão algébrica para obter uma tabela de pontos e, por fim, fizeram a representação gráfica.

Atividade 2 – Item (b)

Enunciado: É possível usar fórmulas da geometria para calcular exatamente a área da região acima descrita? Justifique sua resposta.

O quadro a seguir mostra as respostas dadas pelas duplas:

Quadro 5 - Resultados da atividade 2 (b)

Dupla	Resposta
D ₁	“Acreditamos que através de fórmulas geométricas não é possível calcular exatamente a área, pois temos uma curva”
D ₂	“Desconheço tal fórmula, mas aprofundando o conhecimento de parábola juntamente com o cálculo, creio que é possível”
D ₃	“Para calcular exatamente a área não é possível [...], pois a função faz uma curva”
D ₄	“Não, pois as fórmulas de geometria só podem calcular áreas de figuras regulares”
D ₅	“Não sei, mas acho que não. Não tem nenhuma fórmula (pelo que me lembre) envolvendo curvas.”
D ₆	“Não, pois não é uma figura regular”
D ₇	“Não sei, pois apareceu uma curva”

É interessante notar que alguns alunos expressaram certa expectativa da existência de novos procedimentos que possibilitassem o cálculo da área em questão.

Quanto aos processos do PMA, pode-se perceber que o de síntese foi utilizado pelas duplas ao buscarem expressões da geometria para calcular a área limitada superiormente por uma parábola.

Atividade 2 – Item (c)

Enunciado: Se não encontrou uma maneira de efetuar o cálculo exato da área da região descrita no item (a), ache uma aproximação para a mesma.

Para responder esta pergunta, os sujeitos utilizaram as seguintes estratégias:

- E1: Dividiram a figura em diversos retângulos horizontais, indicando que bastaria somar a área dos mesmos;
- E2: Desenharam um triângulo sobre a figura, para fazer o cálculo da área solicitada;
- E3: Dividiram a figura em trapézios e somaram a área dos mesmos;
- NF: Não fizeram.

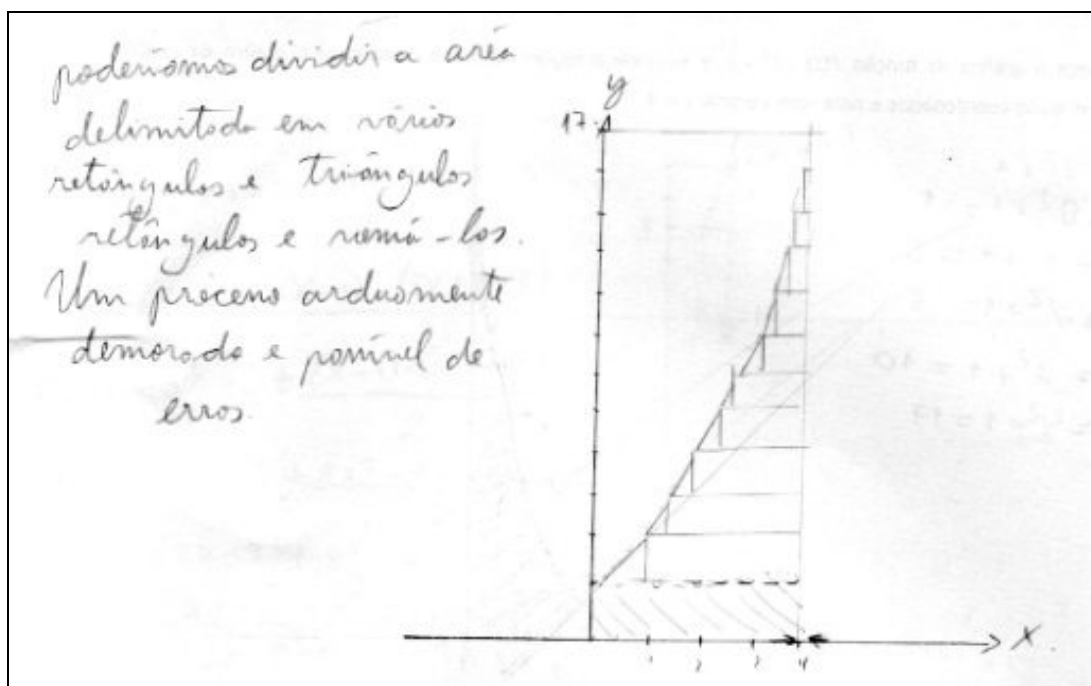
O quadro abaixo indica a estratégia utilizada pelas duplas:

Quadro 6 - Resultados da atividade 2 (c)

Dupla	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇
Estratégia	E1	E2	E3	NF	E1	NF	E2

Um dos alunos da dupla D₁ comentou ainda que “o processo (para calcular a área, subdividindo-a em retângulos) é árduo, demorado e passível de erros”. O procedimento utilizado, bem como o comentário feito por estes estudantes é mostrado na figura a seguir:

Figura 4 - Resposta da dupla D1 para a atividade 2 (c)



A dupla D₂ ficou indecisa no início da resolução, conforme mostra o seguinte diálogo:

Aluno A: - Será que podemos fazer um triângulo em cima da figura?

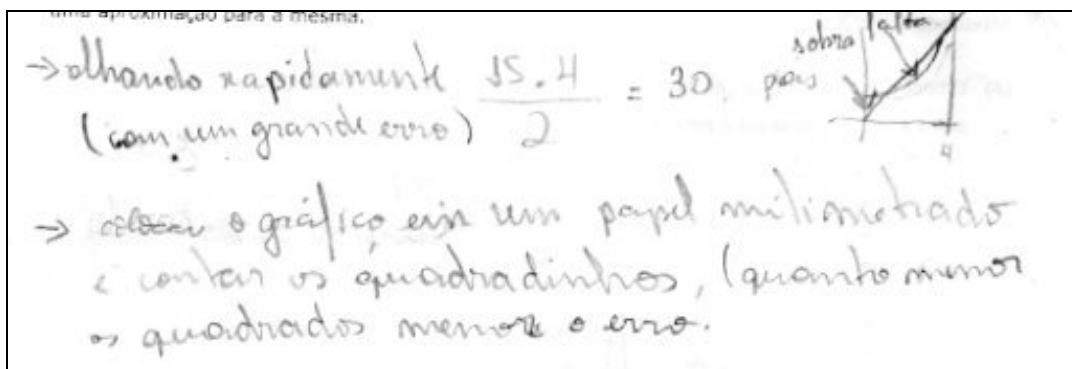
Aluno B: - Não sei não, porque desse jeito tem pedaço que vai sobrar e outro que faltar.

Aluno A: - Mas não é para fazer uma aproximação? Então um compensa o outro, né?

Aluno B: É verdade. Vamos tentar assim mesmo.

A figura a seguir ilustra o procedimento destes estudantes:

Figura 5 - Resposta da dupla D₂ para a atividade 2 (c).



Em relação aos processos do PMA, observa-se que a maioria das duplas utilizou os de análise e síntese, ao analisar a região dada e combinar os conceitos de função e área, exceto nas duplas D₄ e D₆ que não responderam a questão.

Atividade 2 – Item (d)

Enunciado: É possível melhorar a estimativa feita no item anterior? Justifique sua resposta.

As estratégias utilizadas pelos sujeitos podem ser agrupadas em três categorias:

- E1: Informaram que seria necessário diminuir os intervalos;
- E2: Dividiram a figura em quadrados e informaram que bastava diminuir o tamanho dos mesmos para melhorar o cálculo da área;
- E3: Citaram que o conceito de integral pode ser utilizado para calcular áreas, mas que ainda não o conheciam.

A seguir, é apresentado um quadro que exhibe a estratégia de cada dupla:

Quadro 7 - Resultados da atividade 2 (d)

Dupla	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇
Estratégia	E1	E2	E1	E3	E1	NF	E1

Percebe-se que as duplas que subdividiram a região em figuras geométricas (triângulo, retângulo ou trapézio) visualizaram que bastava aumentar o número de subdivisões para obter uma aproximação ainda melhor. Em particular, a dupla D₄ que não fez o cálculo aproximado no item (c), já sabia que a integral poderia ser utilizada para calcular áreas de figuras planas, mesmo que ainda não soubessem fazê-lo.

Por outro lado, a dupla D₁ citou que “para tomar os pontos cada vez mais próximos, aplicaríamos o conceito de limite, mas não lembramos da fórmula agora”.

Quanto aos processos do PMA, nota-se que o de generalização foi utilizado ao perceberem que seria necessário aumentar o número de subdivisões da figura para melhorar o cálculo aproximado. Por outro lado, a dupla D₁ utilizou o processo de síntese ao combinar o cálculo aproximado da área com o conceito de limite.

4.2. 2ª SESSÃO

Na segunda sessão, a pesquisadora iniciou retomando os principais resultados encontrados na sessão anterior, de modo a socializar as diferentes descobertas feitas pelas duplas. Os alunos ficaram animados com a troca de informações. Um deles comentou: “Puxa! Não tinha pensado nisso. Fica bem melhor assim”, referindo-se à ideia de uma das duplas de subdividir a região em diversos retângulos.

Em seguida, solicitou que abrissem o *Winplot* e fez uma breve apresentação dos recursos que seriam utilizados. Logo após, distribuiu os novos questionários e prosseguiu fazendo as observações dos comentários das duplas. Encerrou a sessão recolhendo-os e informando que o encontro seguinte seria novamente na sala de aula.

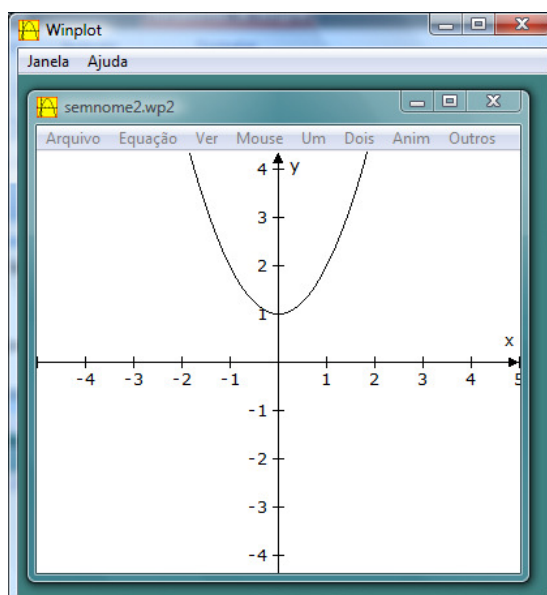
A seguir, são descritos e analisados os dados obtidos nesta sessão. Para tanto, convém lembrar que o principal objetivo desta seção era definir as somas amostrais de Riemann visando à construção do conceito de integral.

Atividade 3 – Parte I – Item (a)

Enunciado: Utilize o programa *Winplot* para construir o gráfico da função $f(t) = t^2 + 1$.

As duplas fizeram o que era solicitado no enunciado e obtiveram o seguinte gráfico:

Figura 6 - Gráfico obtido no Winplot na atividade 3 – parte I – item (a)



Como os alunos já conheciam o *software*, não houve nenhuma dúvida na realização deste item.

Atividade 3 – Parte I – Item (b)

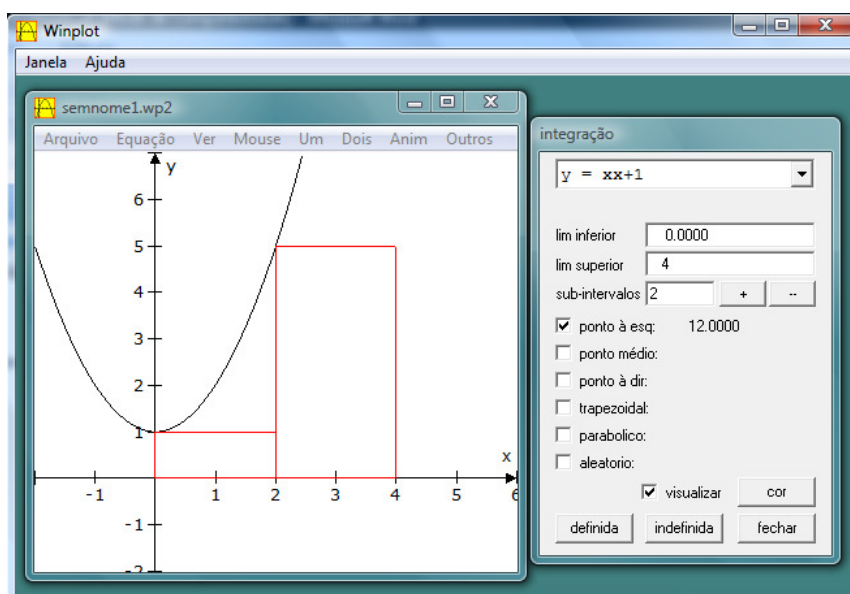
Enunciado: Aperte a tecla F7. Na janela “lim inferior” digite 0. Na janela “lim superior” digite 4. Na janela “subintervalos” digite 2. Selecione apenas a opção “ponto à esq:” (as demais, devem estar desabilitadas) Selecione a opção “visualizar” e clique em “definida”. Preencha o quadro abaixo:

Retângulo	Medida da base	Abscissas dos vértices da base		Medida da altura	Área
1º	2	$t_0 = 0$	$t_1 = 2$	1	2
2º		$t_1 =$	$t_2 =$		
Área total =					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Novamente as duplas fizeram o que era solicitado no enunciado e obtiveram o seguinte gráfico:

Figura 7 - Gráfico obtido no Winplot na atividade 3 – parte I – item (b)



Para preencher as colunas “medida da base”, “abscissas dos vértices da base” e “medida da altura” todas as duplas utilizaram as informações contidas no gráfico. Além disso, para preencher a coluna “área”, as duplas multiplicaram os valores das colunas “medida da base” pelos valores contidos em “medida da altura”.

Por outro lado, para preencher o campo “área total” algumas estratégias foram utilizadas:

- T1: Somaram todos os valores da coluna área;
- T2: Utilizaram a informação fornecida pelo *Winplot* ao lado do campo “ponto à esq.”;
- T3: Utilizaram as duas estratégias T1 e T2 para validar o resultado obtido.

O quadro a seguir apresenta as estratégias utilizadas pelas duplas:

Quadro 8 - Resultados da atividade 3 – parte I – item (b)

Dupla	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇
Estratégia	T1	T1	T3	T2	T1	T2	T1

Nota-se que a dupla D₃ utilizou o processo de validação ao confirmar o cálculo feito com a informação dada pelo *Winplot*.

Atividade 3 – Parte I – Item (c)

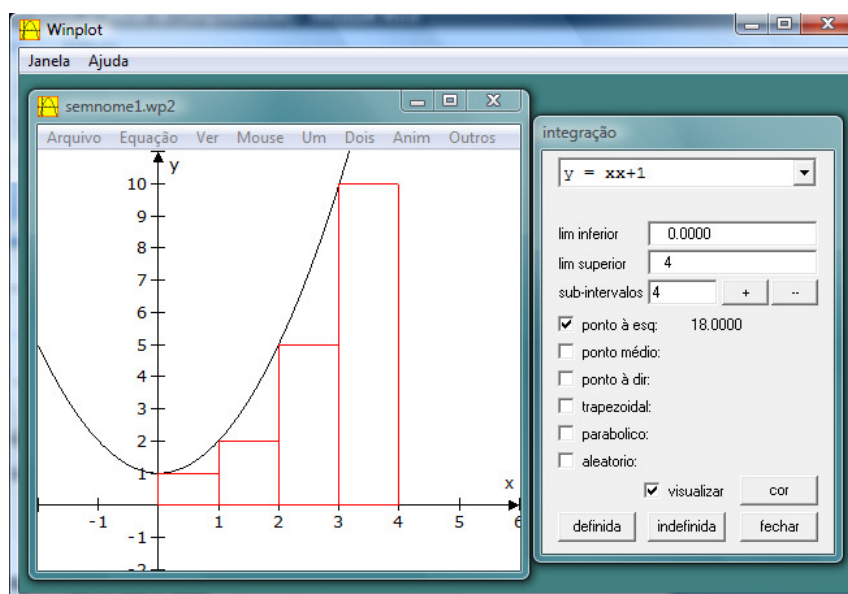
Enunciado: Repita o procedimento do item (b), alterando o número de subintervalos para 4.

Retângulo	Medida da base	Abscissas dos vértices da base		Medida da altura	Área
1º		$t_0 =$	$t_1 =$		
2º		$t_1 =$	$t_2 =$		
3º		$t_2 =$	$t_3 =$		
4º		$t_3 =$	$t_4 =$		
Área total =					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \Delta t_3 = t_3 - t_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

As duplas fizeram o que era solicitado no enunciado e obtiveram o seguinte gráfico:

Figura 8 - Gráfico obtido no *Winplot* na atividade 3 – parte I – item (c)



Novamente, para preencher as colunas “medida da base”, “abscissas dos vértices da base” e “medida da altura” todas as duplas utilizaram as informações contidas no gráfico. Além disso, o procedimento para preencher a coluna “área” também foi igual ao anterior, ou seja, multiplicaram os valores das colunas “medida da base” pelos valores contidos em “medida da altura”.

Da mesma forma, as estratégias para preencher o campo “área total” também foram iguais às utilizadas no item anterior, no entanto, outras duplas perceberam que poderiam validar o resultado obtido combinando duas estratégias. O quadro a seguir ilustra a estratégia utilizada pelos estudantes:

Quadro 9 - Resultados da atividade 3 – parte I – item (c)

Dupla	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇
Estratégia	T1	T3	T3	T2	T3	T3	T1

Percebe-se assim que, em relação aos processos do PMA, as duplas D₂, D₃, D₅ e D₆ utilizaram a validação.

Atividade 3 – Parte I – Item (d)

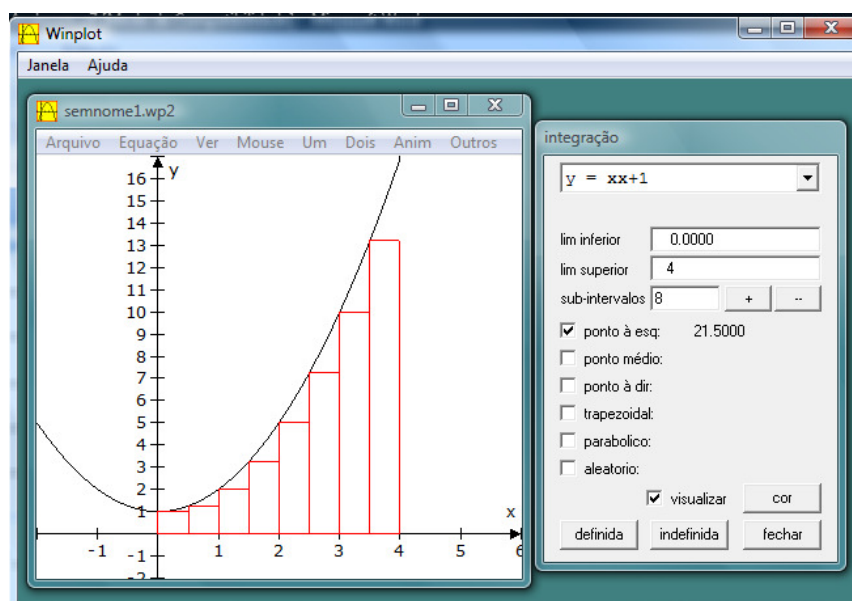
Enunciado: Altere o número de subintervalos para 8.

Retângulo	Medida da base	Abcissas dos vértices da base		Medida da altura	Área
1º		$t_0 =$	$t_1 =$		
2º		$t_1 =$	$t_2 =$		
3º		$t_2 =$	$t_3 =$		
4º		$t_3 =$	$t_4 =$		
5º		$t_4 =$	$t_5 =$		
6º		$t_5 =$	$t_6 =$		
7º		$t_6 =$	$t_7 =$		
8º		$t_7 =$	$t_8 =$		
Área total =					

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \underline{\hspace{2cm}}; \Delta t_2 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}; \Delta t_8 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

As duplas fizeram o que era solicitado no enunciado e obtiveram o seguinte gráfico:

Figura 9 - Gráfico obtido no Winplot na atividade 3 – parte I – item (d)



Para preencher a coluna “medida da base” duas estratégias foram utilizadas:

- B1: Efetuaram a divisão $4 \div 8$ e encontraram 0,5 para o tamanho da base.
- B2: Analisaram o gráfico e perceberam que cada intervalo $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ e $[3, 4]$ estavam divididos em duas partes iguais e, portanto, concluíram que o tamanho da base seria $1 \div 2 = 0,5$.

Para preencher a coluna “abscissas dos vértices da base” todas as duplas foram somando de 0,5 em 0,5 para obter os novos vértices.

Por outro lado, para preencher a coluna “medida da altura”, os integrantes das duplas perceberam que não era possível, para todos os retângulos, obter o número desejado utilizando somente a informação disponível no gráfico, conforme exibe o diálogo da dupla D₁ ao tentar determinar a altura do 2º retângulo:

Aluno A: - Agora o número não é exato. Olhando o gráfico, não dá para saber.

Aluno B: - Está um pouco acima do um, mas quanto?

Aluno A: - Não sei. 1,1 talvez? Como vamos achar esta altura? Não podemos chutar um número!

Depois de refletirem um pouco, perceberam que a altura era delimitada pela parábola e, assim, bastaria calcular o valor da função no extremo esquerdo de cada intervalo. As demais duplas utilizaram este mesmo procedimento. No entanto, o cálculo foi feito de maneiras distintas:

- H1: Fizeram o cálculo sem a ajuda de recursos tecnológicos;
- H2: Utilizaram a calculadora para efetuar os cálculos;
- H3: Utilizaram o Excel para efetuar os cálculos.

Para preencher a coluna “área”, os participantes multiplicaram os valores da coluna “medida da base” pelos contidos em “medida da altura”. As estratégias utilizadas foram:

- A1: Utilizaram a calculadora para efetuar os cálculos;
- A2: Utilizaram o Excel para efetuar os cálculos.

Além disso, para preencher o campo “área total” as duplas D₂, D₃, D₄, D₅ e D₆ utilizaram a informação fornecida pelo *Winplot*. Por outro lado, as duplas D₁ e D₇ somaram as áreas de todos os retângulos. Em seguida, perceberam que o número apresentado pelo *software* era igual ao número por eles obtido.

O quadro a seguir apresenta as estratégias utilizadas pelas duplas:

Quadro 10 - Resultados da atividade 3 – parte I – item (d)

Dupla	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇
Base	B1	B1	B1	B2	B1	B2	B2
Altura	H1	H2	H1	H2	H3	H2	H2
Área	A1	A1	A1	A1	A2	A1	A1

De um modo geral, as duplas observaram o gráfico para obter o valor da medida da base e utilizaram a expressão da função para determinar a medida da altura. Por outro lado, para determinar a área, utilizaram alguma ferramenta tecnológica para facilitar os cálculos.

Em relação aos processos do PMA, percebe-se as duplas utilizaram a visualização e mudança entre diferentes representações ao perceberem que o gráfico da função não continha a informação desejada, sendo necessário a utilização da expressão algébrica. Além disso, os alunos utilizaram o processo de validação ao compararem o resultado do *Winplot* com o por eles obtido.

Atividade 3 – Parte I – Item (e)

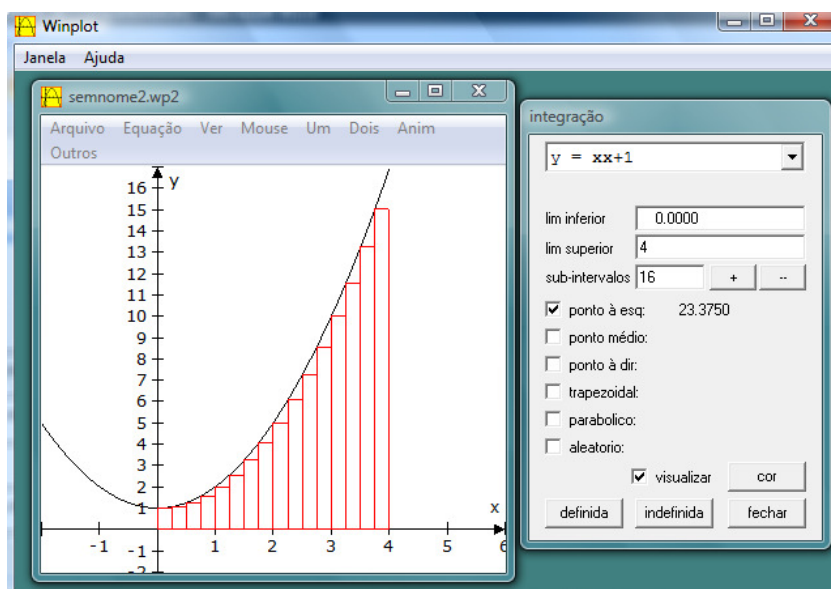
Enunciado: Altere o número de subintervalos para 16.

Retângulo	Medida da base	Abscissas dos vértices da base		Medida da altura	Área
1º		$t_0 =$	$t_1 =$		
2º		$t_1 =$	$t_2 =$		
3º		$t_2 =$	$t_3 =$		
11º		$t_{10} =$	$t_{11} =$		
16º		$t_{15} =$	$t_{16} =$		
<i>i</i> -ésimo		$t_{i-1} =$	$t_i =$		
				Área total =	

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \Delta t_{16} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \Delta t_i = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Os alunos fizeram o que era solicitado no enunciado e obtiveram o seguinte gráfico:

Figura 10 - Gráfico obtido no Winplot na atividade 3 – parte I – item (e)



De um modo geral, as duplas repetiram o procedimento executado no item anterior, utilizando as mesmas estratégias. A única mudança ocorrida foi no preenchimento da coluna “medida da altura”, uma vez que as duplas D_1 e D_3 anteriormente fizeram o cálculo sem utilizar calculadora e, neste momento, passaram a utilizá-la.

Atividade 3 – Parte I – Itens (f), (g), (h) e (i)

Enunciado:

- (f) Se alterarmos o número de subintervalos para 32, qual será a soma das áreas dos retângulos?
- (g) Se alterarmos o número de subintervalos para 64, qual será a soma das áreas dos retângulos?

- (h) Se alterarmos o número de subintervalos para 128, qual será a soma das áreas dos retângulos?
- (i) Se alterarmos o número de subintervalos para 256, qual será a soma das áreas dos retângulos?

Executando o era solicitado no enunciado, as duplas obtiveram as seguintes figuras:

Figura 11 - Gráfico obtido no *Winplot* na atividade 3 – parte I – item (f)

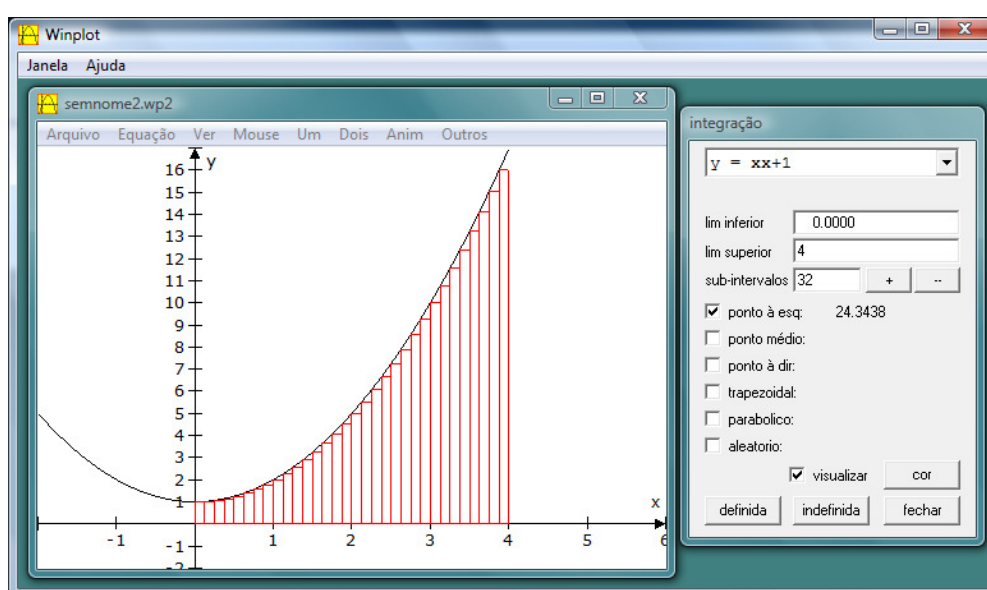


Figura 12 - Gráfico obtido no *Winplot* na atividade 3 – parte I – item (g)

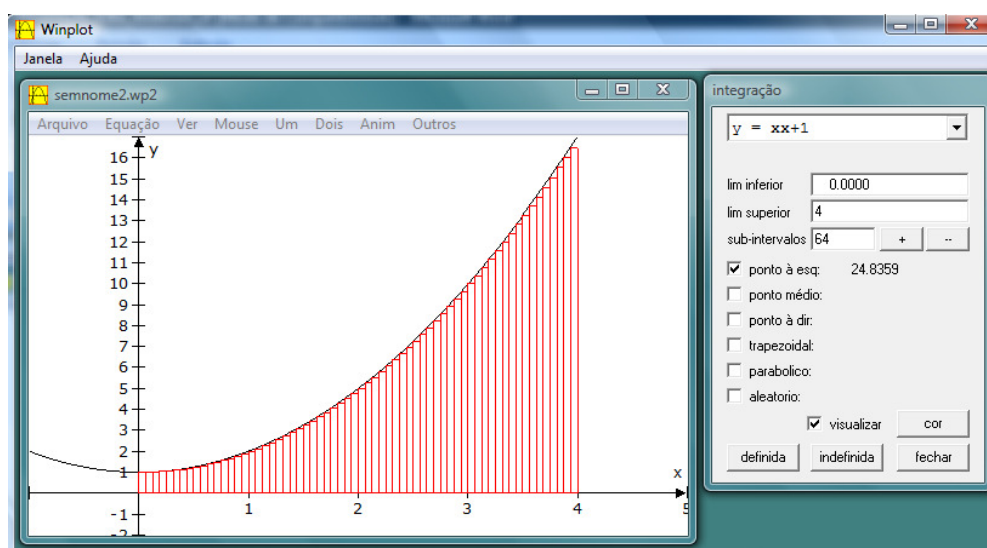


Figura 13 - Gráfico obtido no *Winplot* na atividade 3 – parte I – item (h)

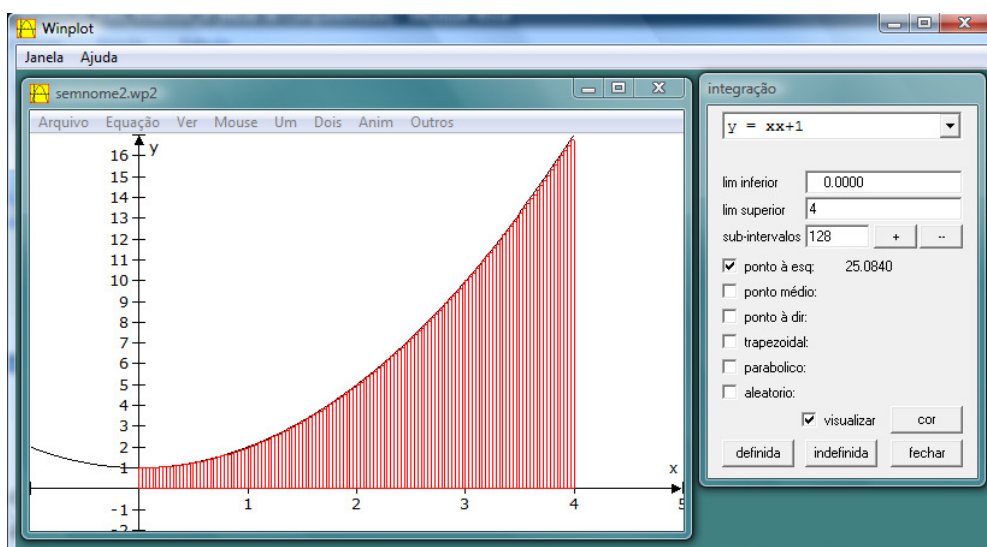
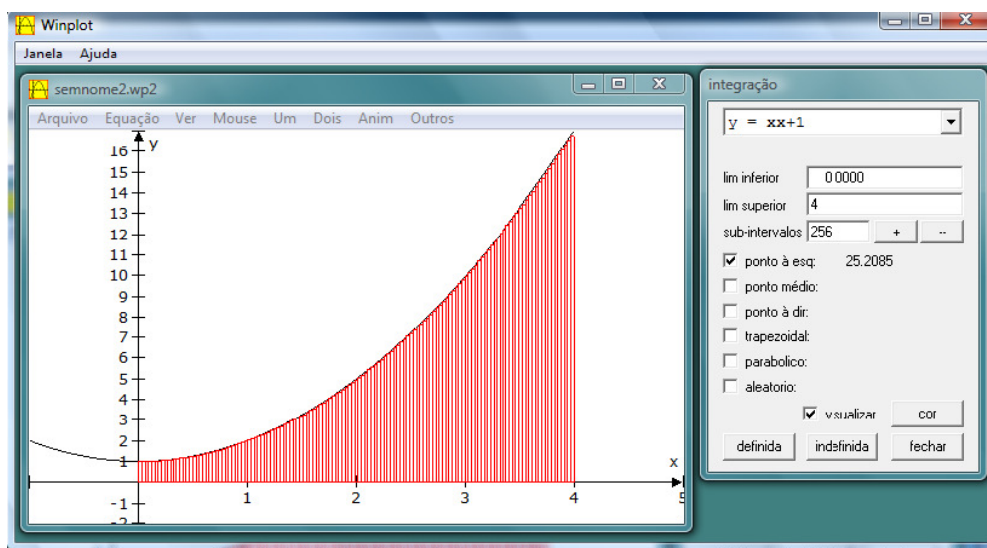


Figura 14 - Gráfico obtido no *Winplot* na atividade 3 – parte I – item (i)



Para responder os itens (f), (g), (h) e (i), todos os sujeitos utilizaram a informação fornecida pelo *Winplot*, no entanto, vale ressaltar que as duplas D_1 , D_2 e D_3 observaram que os valores estavam aumentando, conforme diálogos abaixo:

Dupla 1

Aluno A: - Você percebeu que conforme aumentamos o número de retângulos, a área também aumenta?

Aluno B: - É verdade. Dá para perceber que estamos diminuindo o espaço entre a curva e os retângulos. A cobertura da região fica melhor.

Aluno A: - Parece mesmo que vamos utilizar limite para calcular a área exata, mas como?

Aluno B: - Sei lá. Não faço a menor idéia.

Dupla 3

Aluno C: - Viu como a área está aumentando?

Aluno D: - Acho que a cada item estamos mais perto da área exata!

Por outro lado, a dupla D₅ continuou utilizando o *Winplot* para obter novos valores para a área total e concluíram que o valor da área desejada estaria próximo de 25,33, conforme ilustra o seguinte diálogo:

Aluno E: - Tenta agora com 1000 subintervalos. O que dá?

Aluno F: - 25, 3014. E com 10.000 dá 25,3301.

Aluno E: - Até quantos será que ele faz? Aumenta mais.

Aluno F: - Com 100.000 dá 25,3330.

Aluno E: - Pelo visto é alguma coisa bem próxima a 25,33! Viu que só mudou depois do 33?

Aluno F: - É verdade. Agora chega, senão não vamos terminar o resto.

Percebe-se que nos itens (f), (g), (h) e (i), os processos de intuição, generalização e abstração estiveram presentes nas duplas D₁, D₃ e D₅, ao utilizarem os resultados disponíveis para tirarem conclusões mais gerais.

Atividade 3 – Parte II – Itens (a), (b) e (c)

Enunciado:

- (a) Desmarque a opção “ponto à esq:” e selecione “aleatório”. Altere o número de subintervalos para 8 e clique em “definida”.

A soma das áreas dos retângulos é _____

Observe o 4º retângulo.

A medida da base é _____

A altura desse retângulo é $f(t_3)$? _____

É $f(t_4)$? _____

Existe um valor c , com $t_3 < c < t_4$, tal que a altura desse retângulo é $f(c)$?

- (b) Sem fazer nenhuma alteração, clique em “definida” novamente.

A soma das áreas dos retângulos é _____

Observe o 4º retângulo.

A medida da base é _____

A altura desse retângulo é $f(t_3)$? _____

É $f(t_4)$? _____

Existe um valor c , com $t_3 < c < t_4$, tal que a altura desse retângulo é $f(c)$?

O valor de c deste item é o mesmo encontrado no item (a)? _____

- (c) Sem fazer nenhuma alteração, clique em “definida” novamente.

A soma das áreas dos retângulos é _____

Observe o 4º retângulo.

A medida da base é _____

A altura desse retângulo é $f(t_3)$? _____

É $f(t_4)$? _____

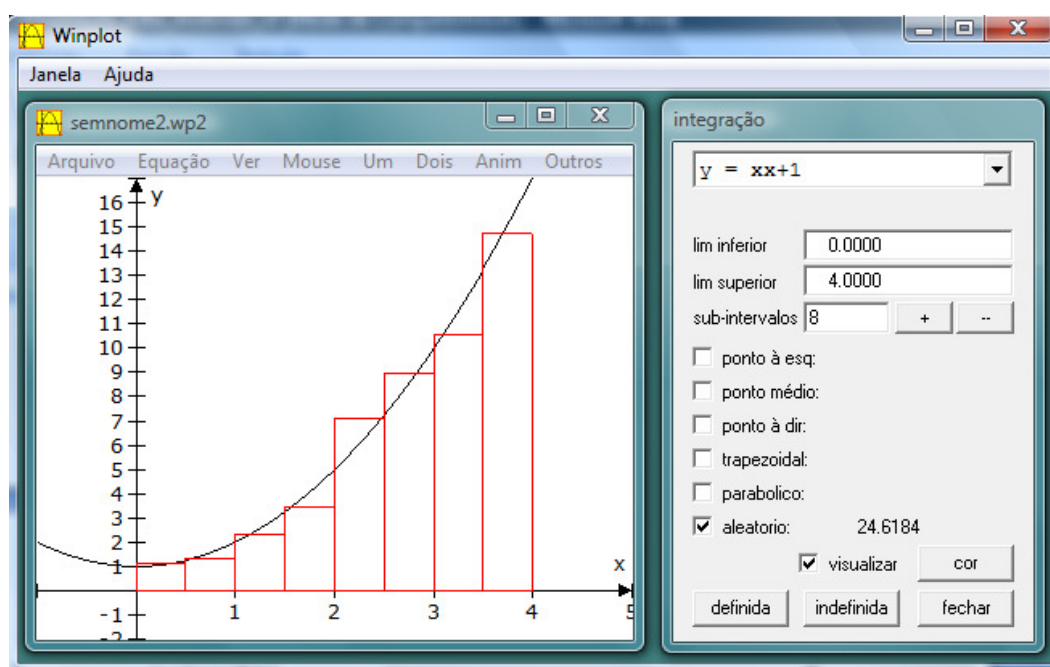
Existe um valor c , com $t_3 < c < t_4$, tal que a altura desse retângulo é $f(c)$?

O valor de c deste item é o mesmo encontrado no item (a)? _____

É o mesmo do item (b)? _____

As duplas fizeram o que era solicitado nos enunciados e obtiveram o seguinte gráfico:

Figura 15 - Gráfico obtido no Winplot na atividade 3 – parte II – item (a)



Para responder às questões dos itens (a), (b) e (c) todas as duplas utilizaram as informações contidas no gráfico. Todos os sujeitos perceberam que a altura não era nem o valor de $f(t_3)$ nem o de $f(t_4)$, mas sim de algum valor entre os dois. A seguir, o diálogo da dupla D_1

Aluno A: - Não é $f(t_3)$, pois está mais para lá.

Aluno B: - E não é mesmo. É só fazer a conta $f(t_3)$ é igual a $f(1,5)$ que é 3,25. A altura do retângulo não é esta! Nem $f(t_4)$ que é 5.

Aluno A: - Isto mesmo. Está entre os dois.

Percebe-se que esta dupla, utilizou o processo de validação ao efetuarem os cálculos de $f(t_3)$ e $f(t_4)$ para confirmar uma informação fornecida pelo gráfico.

Além disso, conforme perguntado nos itens (b) e (c), as duplas perceberam que a cada novo procedimento, o valor de c era alterado assim como a área. A dupla D_4 ao responder qual era a soma das áreas dos retângulos no item (b) percebeu que o valor era diferente do anterior e tentou encontrar novamente o primeiro valor obtido, conforme mostra diálogo abaixo:

Aluno A: - Olha! O valor da área é diferente que o anterior! Será que fizemos alguma coisa errada?

Aluno B: - Acho que não, clica em definida de novo.

Aluno A: - Mudou de novo. Será que a gente consegue fazer aparecer o mesmo resultado? Hum...pelo visto não. Cada vez que eu clico, a área muda.

Por outro lado, a dupla D_5 que no item anterior já havia tentado obter uma aproximação melhor, aumentando o número de subdivisões, realizou novamente o mesmo procedimento e percebeu que a área ficava bem próxima de 25,33. Um dos alunos concluiu que “não importa o método que utilizamos para calcular esta área, obtemos o mesmo valor quando o número de retângulos é bem grande”.

Em relação aos processos do PMA, nota-se que esta dupla utilizou os de descoberta, intuição e validação, ao aumentar o número de subdivisões do intervalo e verificar que a área ficava próxima a determinado número, independentemente do método utilizado para calcular a área.

Atividade 3 – Parte II – Item (d)

Enunciado: De quantas maneiras você acha que é possível escolher o valor de c , com $t_3 < c < t_4$?

As duplas D_1 , D_2 , D_3 e D_7 responderam de infinitas maneiras. Já as duplas D_4 , D_5 e D_6 responderam de inúmeras maneiras.

Atividade 3 – Parte II – Item (e)

Enunciado: Que diferenças você observa entre a aproximação das áreas calculadas utilizando a opção “ponto à esquerda” e a opção “aleatório”?

O quadro a seguir ilustra a resposta das duplas:

Quadro 11 - Resultados da atividade 3 - parte II - item (e)

Dupla	Resposta
D ₁	“No aleatório temos uma área mais aproximada”
D ₂	“No ponto à esquerda uma vez fixado o número de subintervalos, a área não mudava. Mas no ponto aleatório, para um mesmo número de subintervalos, a área sempre muda. De qualquer forma, a área obtida na segunda opção é maior”
D ₃	“Na opção ponto aleatório, as áreas encontradas foram sempre maiores que no ponto à esquerda”
D ₄	“No ponto aleatório a aproximação é melhor, mas no ponto à esquerda os valores das áreas não mudam”
D ₅	“Na opção ponto à esquerda a altura do retângulo é o valor da função na extremidade esquerda da base. Na opção aleatório, o valor fica entre os extremos da base. Mas conforme aumentamos número de retângulos, a área obtida é igual nos dois casos”
D ₆	“Na opção ponto à esquerda a área ficou menor”
D ₇	“Na opção ponto à esquerda, a altura do retângulo fica sempre abaixo da parábola. Na outra opção, não”

Analisando as respostas dos estudantes, podemos observar que diferentes aspectos foram percebidos ao comparar as duas opções para o cálculo da área. Entretanto, a maioria das duplas concluiu que a área obtida a partir da opção “aleatório” era maior do que a encontrada por “ponto à esq”. Somente a dupla D₅ que continuou aumentando o número de subintervalos verificou que as áreas seriam iguais para um elevado número de subdivisões.

Em relação aos processos do PMA, observa-se que a dupla D₅ utilizou os de intuição, descoberta e generalização ao concluir que a área encontrada é igual independentemente do método utilizado para obtê-la. As demais duplas utilizaram o processo de visualização para comparar os dois procedimentos.

4.3. 3ª SESSÃO

Na terceira sessão, a pesquisadora retomou os resultados obtidos na sessão anterior e, numa discussão com todos os participantes, formalizou a definição de

integral¹⁰ como: $\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta t$, onde c_i é um ponto arbitrário de do

i -ésimo intervalo, $t_{i-1} \leq c_i \leq t_i$ e Δt é o comprimento de cada subintervalo, ou seja,

$\Delta t = (b - a)/n$.

¹⁰ Como visto na seção 2.2 deste trabalho, intitulada “Integral definida”, sabe-se que os subintervalos da partição P não precisam ter o mesmo comprimento. No entanto, devido à limitação do software *Winplot*, não é possível considerar intervalos de larguras distintas. Sendo assim, foi comentado com os alunos sobre esta não obrigatoriedade, mas a definição de integral foi apresentada considerando-os de mesmo comprimento.

Na discussão feita com os alunos, a pesquisadora levantou as seguintes questões:

- 1) O que foi observado com a atividade anterior?
- 2) Conforme o número de subdivisões do intervalo aumentava, o que acontecia com a área?
- 3) Para obter uma aproximação ainda melhor, o que deveria ser feito?
- 4) Qual o conceito matemático poderia ser utilizado neste fim?

Diante dos questionamentos feitos pela pesquisadora, os alunos responderam que para obter uma aproximação melhor da área seria necessário aumentar o número de subdivisões tanto quanto fosse possível. Neste momento, um dos integrantes da dupla que, na atividade com o *Winplot*, havia concluído que a área deveria estar próxima de 25,33 informou aos demais que chegaram a este valor usando “um número muito grande de retângulos”.

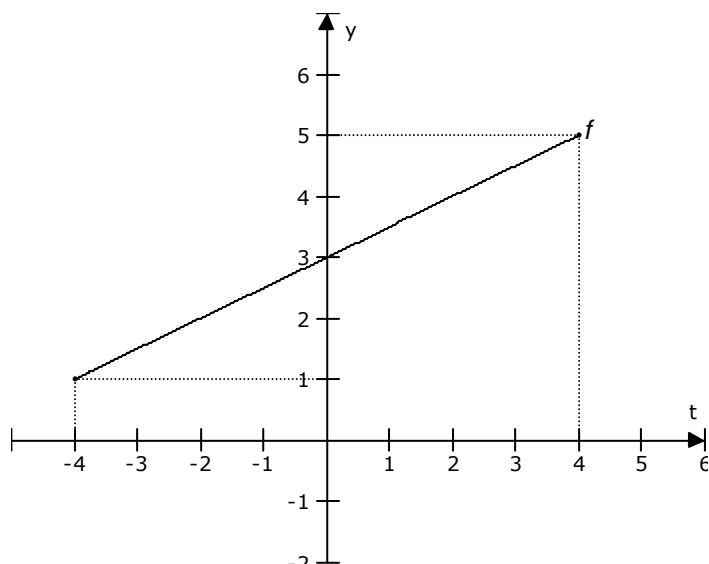
Em seguida, um dos estudantes indagou se utilizaríamos o conceito de limite para indicar este aumento do número de subdivisões. A pesquisadora aproveitou esta pergunta para discutir qual seria a notação matemática utilizada para formalizar este raciocínio, chegando então na definição de integral indicada acima.

A seguir, estão descritos e analisados os resultados obtidos nesta sessão. Para tanto, vale lembrar que o objetivo desta era analisar o significado dos termos

envolvidos da expressão $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Atividade 4

Enunciado: Seja $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está dado na figura a seguir:



- (a) O que representa a função $F(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$?
- (b) O que representam as variáveis t e x ?
- (c) O que representam os termos $f(t)$ e dt ?
- (d) O que podemos afirmar de $f(t)$ no intervalo $[-4, 4]$? É positiva, negativa ou nula? Varia ou permanece constante? Aumenta ou diminui? Justifique sua resposta.
- (e) Como se comporta a função $F(x)$? É positiva, negativa ou nula? É crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.

O quadro abaixo exibe as respostas obtidas no item (a).

Quadro 12 - Resultados da atividade 4 – item (a)

Dupla	Resposta
D ₁	“Representa a área da função (em módulo) no intervalo de -4 até uma posição indefinida”
D ₂	“Área entre -4 e x ”
D ₃	“Representa a área determinada pela função f , o eixo das abscissas e $t = -4$ e $t = x$ ”
D ₄	“Representa a cálculo da área da função a partir de -4 até um determinado ponto escolhido no intervalo de -4 a 4”
D ₅	“O cálculo da área de -4 a 4”
D ₆	“Representa a área delimitada pela reta de $f(t)$, pelo eixo t e se inicia no ponto -4, finalizando na variável x que deve ser maior que -4 e menor que 4.”
D ₇	“Representa a área”

De um modo geral, os alunos relacionaram a função $F(x)$ com uma área. Apesar de alguns deles se expressarem de maneira indevida como “área da função”, querendo provavelmente dizer a área da região plana abaixo do gráfico da função.

A seguir, está apresentado um quadro com respostas dos itens (b) e (c).

Quadro 13 - Resultados da atividade 4 – itens (b) e (c)

Dupla	Resposta item (b)	Resposta item (c)
D ₁	“A variável t representa a altura, pois para cada t encontramos um valor $f(t)$. A variável x representa a extremidade do intervalo”	“ $f(t)$ representa a altura dos retângulos e dt é o diferencial que representa a variável”
D ₂	“ x representa o ponto extremo da base e t os intervalos”	“ $f(t)$ representa a altura e dt , a base”
D ₃	“ t é o eixo das abscissas e x é um ponto qualquer dessa abscissa no intervalo de $[-4, 4]$ ”	“ $f(t)$ é a função no ponto t e dt é o diferencial”
D ₄	A variável x poderá ser qualquer valor no intervalo fechado -4 a 4 , e t representa os pontos no eixo horizontal”	“ $f(t)$ corresponde a altura e dt é a base”
D ₅	“ t é a variável da função $f(t)$ e x , o último ponto que limitará a região, ou seja, é variável da função que calcula a área.”	“ $f(t)$ é a variação da altura e dt da base”
D ₆	“ t é a base no eixo t , e x representa a variável da função $F(x)$ ”	“ $f(t)$ representa a altura e dt , a base”
D ₇	Não respondeu	Não respondeu

Analisando estas respostas, percebe-se que a maioria dos estudantes relacionou a variável t com o eixo das abscissas. No entanto, a variável x foi associada com o extremo direito da figura por alguns alunos, e como um valor entre -4 e 4, por outros. Além disso, os termos $f(t)$ e dt foram identificados com a base e com a altura dos retângulos, respectivamente. O que provavelmente ocorreu devido à maneira como foi definida a integral.

Já No item (d), todas as duplas responderam que $f(t)$ é positivo e aumenta no intervalo $[-4, 4]$. O quadro a seguir, resume as respostas dadas no item (e) que se refere à função $F(x)$.

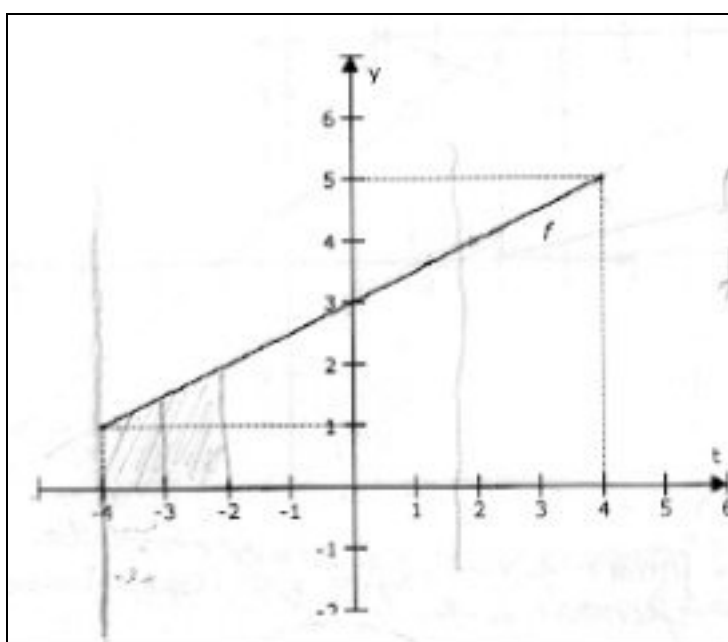
Quadro 14 - Resultados da atividade 4 – item (e)

Dupla	Resposta
D ₁	“Positiva e crescente, pela análise do gráfico.”
D ₂	“Parte positiva e parte negativa, que varia conforme o valor de t . A função é crescente e notamos ao analisar o gráfico.”
D ₃	“ $F(x)$ é positiva, pois $f(t) > 0$ e $dt > 0$. É crescente porque a área aumenta conforme aumentamos o valor de x .”
D ₄	“Depende, pois se considerarmos um intervalo de -4 a 4, afim de obter a área, a função é positiva e crescente. Mas se caminhararmos de -4 a 4, a função é positiva e decrescente. No entanto, a área formada é a mesma.”
D ₅	“ $F(x)$ é positiva e crescente. Positiva porque inicia em -4 e pode chegar a 4. Crescente porque a cada aumento da base a área aumenta.”
D ₆	“Positiva e crescente, pois à medida que se distancia do ponto inicial (-4), a reta crescente varia a altura do retângulo.”
D ₇	“Positiva e crescente.”

Analisando as respostas dadas, não é possível perceber se as duplas compreenderam o significado da função $F(x)$ ou se estão confundindo-a com $f(t)$, uma vez que ambas são positivas e crescentes.

Por outro lado, a resposta e o desenho feito pela dupla D_3 fornecem indícios que estes alunos perceberam a diferença entre as duas funções, pois de fato representaram uma área e observaram que a mesma aumentaria se x aumentasse.

Figura 16 - Resposta da dupla D_3 para a atividade 4.

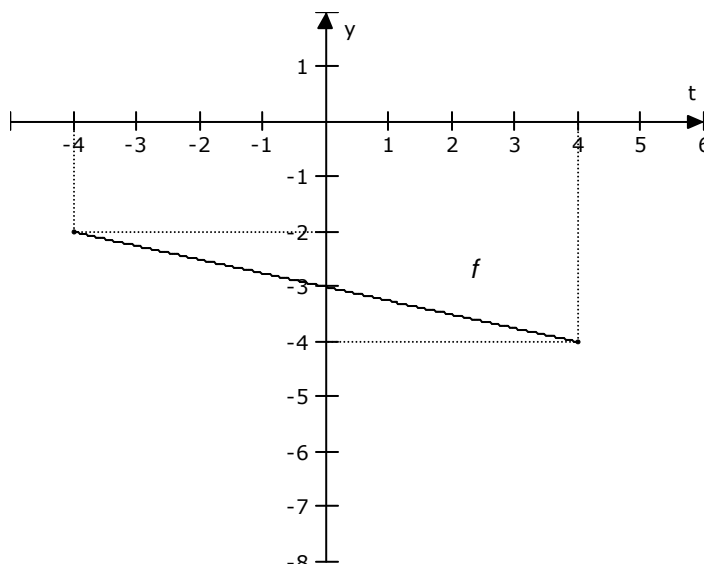


Em relação aos processos do PMA, percebe-se que no item (a) foram combinados os processos de visualização e síntese, uma vez que as duplas associaram os conceitos de área e integral.

Nos itens (b) e (c) nota-se que o processo de visualização não foi combinado com o de abstração, pois os alunos utilizaram somente a informação do gráfico para analisar as variáveis t e x , relacionando-as com $f(t)$ e $F(x)$, respectivamente.

Atividade 5

Enunciado: Seja $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está dado na figura abaixo:



- (a) O que representa a função $F(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$?
- (b) O que representam as variáveis t e x ?
- (c) O que representam os termos $f(t)$ e dt ?
- (d) O que podemos afirmar de $f(t)$ no intervalo $[-4, 4]$? É positiva, negativa ou nula? Varia ou permanece constante? Aumenta ou diminui? Justifique sua resposta.
- (e) Como se comporta a função $F(x)$? É positiva, negativa ou nula? É crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.

As respostas dos itens (a), (b) e (c) foram as mesmas da atividade 4. No item (d), todas as duplas responderam que $f(t)$ é negativo e diminui. O quadro a seguir, resume as justificativas dadas no item (e) que se refere à função $F(x)$

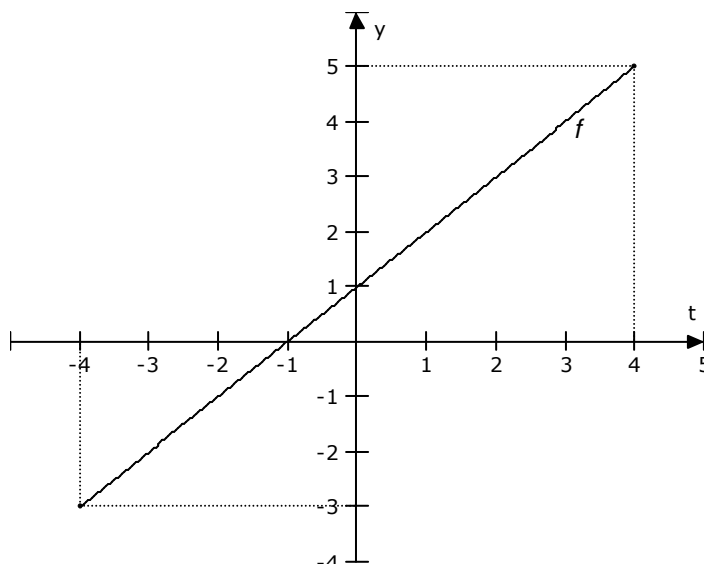
Quadro 15 - Resultados da atividade 5 – item (e)

Dupla	Resposta
D ₁	“Decrescente e negativa, pela análise do gráfico.”
D ₂	“Parte positiva e parte negativa, que varia conforme o valor de t. A função é decrescente e notamos ao analisar o gráfico.”
D ₃	“F(x) é negativa, pois $f(t) < 0$ e $dt > 0$. É decrescente porque a área aumenta em módulo.”
D ₄	“Negativa, pois a reta formada pela função está totalmente localizada na parte negativa do eixo vertical e a função é decrescente no intervalo de -4 a 4. OBS: No intervalo de 4 a -4, a função é crescente e negativa.”
D ₅	“F(x) é positiva e decrescente. Positiva porque inicia em -4 e pode chegar a 4. Decrescente porque a função está diminuindo.”
D ₆	“Negativa e decrescente, pois à medida que se distancia do ponto inicial (-4), a reta decrescente varia a altura do retângulo.”
D ₇	“Negativa e decrescente.”

Novamente, não é possível concluir, se os alunos analisaram realmente a função $F(x)$ ou se a estão confundindo com $f(t)$ uma vez que ambas são negativas e decrescentes. Somente a resposta da dupla D₃ parece indicar uma análise da função $F(x)$.

Atividade 6

Enunciado: Seja $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está dado na figura abaixo:



- (a) O que representa a função $F(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$?
- (b) O que representam as variáveis t e x ?
- (c) O que representam os termos $f(t)$ e dt ?
- (d) O que podemos afirmar de $f(t)$ no intervalo $[-4, 4]$? É positiva, negativa ou nula? Varia ou permanece constante? Aumenta ou diminui? Justifique sua resposta.
- (e) Como se comporta a função $F(x)$? É positiva, negativa ou nula? É crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.

Nos itens (a), (b) e (c), as respostas dadas pelas duplas foram as mesmas da atividade anterior. Já no item (d), todas as duplas responderam que $f(t)$ além de ser crescente, é negativa em um intervalo e positiva, em outro. No entanto, as duplas

D_1 , D_3 e D_5 especificaram estes intervalos, informando que $f(t)$ é negativa em $[-4, -1[$, positiva em $] -1, 4]$ e nula em $t = -1$.

Por outro lado, as respostas do item (e), que indaga sobre a função $F(x)$, estão apresentadas no quadro a seguir.

Quadro 16 - Resultados da atividade 6 – item (e)

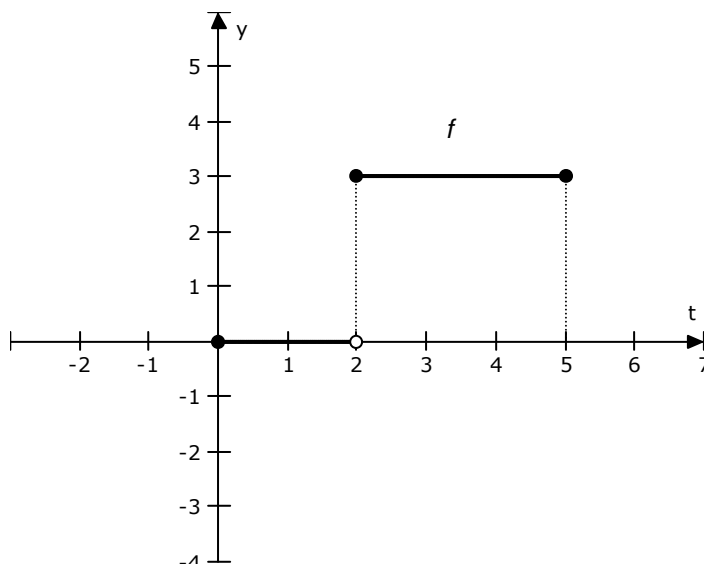
Dupla	Resposta
D_1	“Positiva para $t > -1$, nula para $t = -1$ e negativa para $t < -1$.”
D_2	“A maior parte é positiva e uma pequena parte é negativa. É uma função crescente, analisando o gráfico.”
D_3	“ $F(x)$ é positiva no intervalo $[-4, 4]$, pois a área de $[-1, 4]$ é maior que a área de $[-4, -1]$.”
D_4	“É crescente se considerarmos o aumento de t e muda o sinal dependendo de t .”
D_5	“ $F(x)$ é positiva e crescente. Positiva porque inicia em -4 e pode chegar a 4 .”
D_6	“Não respondeu.”
D_7	“Positiva, negativa e crescente.”

Analisando estas respostas, fica evidente que, exceto a dupla D_3 , as demais realmente fizeram confusão entre as funções $F(x)$ e $f(t)$, ou não perceberam o significado de $F(x)$, uma vez que $F(x)$ é negativa no intervalo $]-4, 2[$, positiva em $]2, 4]$ e nula quando $x = -4$ ou $x = 2$.

Em relação aos processos do PMA, percebe-se que no item (a) foram combinados os processos de visualização e síntese, uma vez que as duplas associaram os conceitos de área e integral.

Atividade 7

Enunciado: Seja $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está dado na figura abaixo:



- (a) O que representa a função $F(x) = \int_0^x f(t) dt$?
- (b) O que representam as variáveis t e x ?
- (c) O que representam os termos $f(t)$ e dt ?
- (d) O que podemos afirmar de $f(t)$ no intervalo $[0, 5]$? É positiva, negativa ou nula? Varia ou permanece constante? Aumenta ou diminui? Justifique sua resposta.
- (e) Como se comporta a função $F(x)$? É positiva, negativa ou nula? É crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.
- (f) A função $f(t)$ é contínua? E $F(x)$?

Novamente, as respostas dos itens (a), (b) e (c) foram semelhantes às das atividades 4, 5 e 6. A única diferença foi a mudança do intervalo de $[-4, 4]$ para

[0, 5]. Já no item (d) a dupla D_2 afirmou que $f(t)$ é positiva e constante. As demais duplas responderam que $f(t)$ é nula para $0 \leq t < 2$, positiva e constante para $2 \leq t \leq 5$.

A tabela abaixo ilustra as respostas dos itens (e) e (f).

Quadro 17 - Resultados da atividade 7 – itens (e) e (f)

Dupla	Resposta (e)	Resposta (f)
D_1	“É nula para $0 \leq x < 2$ e positiva e constante para $2 \leq t \leq 5$ ”	“Tanto $f(t)$ como $F(x)$ não são contínuas no ponto 2.”
D_2	“É positiva e constante”	“ $f(t)$ e $F(x)$ não são constantes, pois possuem um salto do zero para o três.”
D_3	“ $F(x)$ é positiva e crescente para $x > 2$, pois a área vai aumentando a partir deste ponto.”	“ $f(t)$ não é contínua, mas $F(x)$ sim.”
D_4	“É nula e, portanto, constante, entre os pontos $0 \leq t < 2$. É constante e positiva (igual a três) no intervalo em que $2 \leq t \leq 5$ ”	“Não são contínuas no dois”
D_5	“ $F(x)$ é positiva e constante.”	Não respondeu.
D_6	“Positiva e constante entre 2 e 5.”	“Não são contínuas”
D_7	“Nula em um intervalo e positiva e constante em outro.”	Não respondeu.

A dupla D_3 indicou por mais de uma vez que percebeu exatamente qual é o significado da função $F(x)$, tanto ao perceber que é crescente devido ao aspecto

cumulativo, quanto a visualizar sua continuidade que também advém deste mesmo aspecto.

As demais respostas confirmam que a maioria dos alunos confundiu as funções $f(t)$ e $F(x)$, pois esta última é positiva e crescente no intervalo $2 < x \leq 5$, e não constante.

Isto mostra que o processo de visualização e abstração não estiveram presentes na maioria dos estudantes, uma vez que não conseguiram gerar uma representação mental da função $F(x)$, confundindo-a com a representação visual (gráfica) de $f(t)$.

4.4. 4ª SESSÃO

Na quarta sessão, a pesquisadora retomou os principais resultados obtidos no encontro anterior, percebendo que algumas duplas já haviam começado a discutir, comparando suas respostas. No entanto, mesmo após esta discussão, os alunos não perceberam a confusão feita entre as funções f e F .

A pesquisadora optou por não mostrar o erro cometido pela maioria, uma vez que as atividades desta última sessão retornariam a estas funções, solicitando uma expressão algébrica para F .

Logo após, entregou os últimos questionários e continuou fazendo suas observações. Ao final da sessão, recolheu as produções das duplas e encerrou agradecendo a participação de todos.

A seguir, estão descritas e analisadas as atividades desta sessão que visa a conjectura de que a derivação e integração são operações recíprocas.

Atividade 8

Enunciado:

(a) Sejam $f(t) = t + 3$ e $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, tal que $x \geq 1$ e. Esboce o gráfico da função f e use a geometria para achar uma expressão para $F(x)$.

(b) Calcule $F'(x)$. O que você observa?

No item (a), todas as duplas começaram determinando o ponto $(1, f(1))$, ou seja, $(1, 4)$ e mais um ou dois pontos quaisquer para obter o gráfico de $f(t)$. Em seguida, representaram x no eixo das abscissas e delimitaram a área que seria calculada. No entanto, para efetuar este cálculo, as duplas utilizaram estratégias distintas:

- A1: Utilizaram a fórmula da área do trapézio;
- A2: Subdividiram a região obtida em um retângulo e um triângulo, calcularam a área de cada uma destas figuras e somaram os dois valores obtidos;
- NF: Não fizeram.

A tabela a seguir mostra a estratégia de cada dupla:

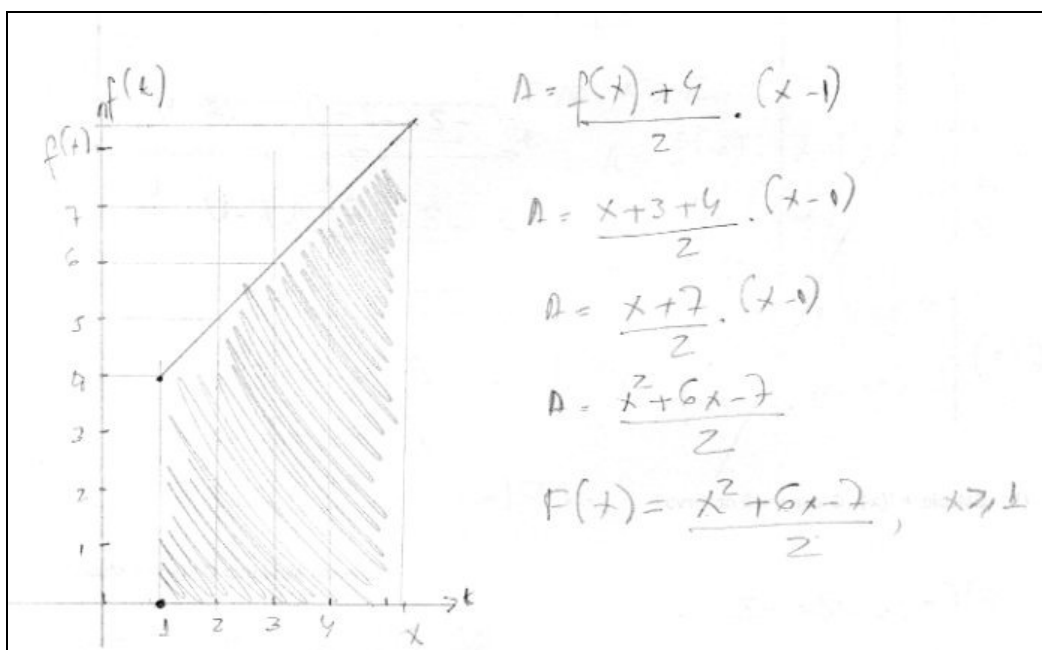
Quadro 18 - Resultados da atividade 8 - item (a)

Dupla	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇
Estratégia	A2	A1	A1	A1	A2	A1	NF

Independentemente da estratégia utilizada para obter a expressão de $F(x)$, todas as duplas que fizeram a atividade, exceto D_5 , encontraram a expressão

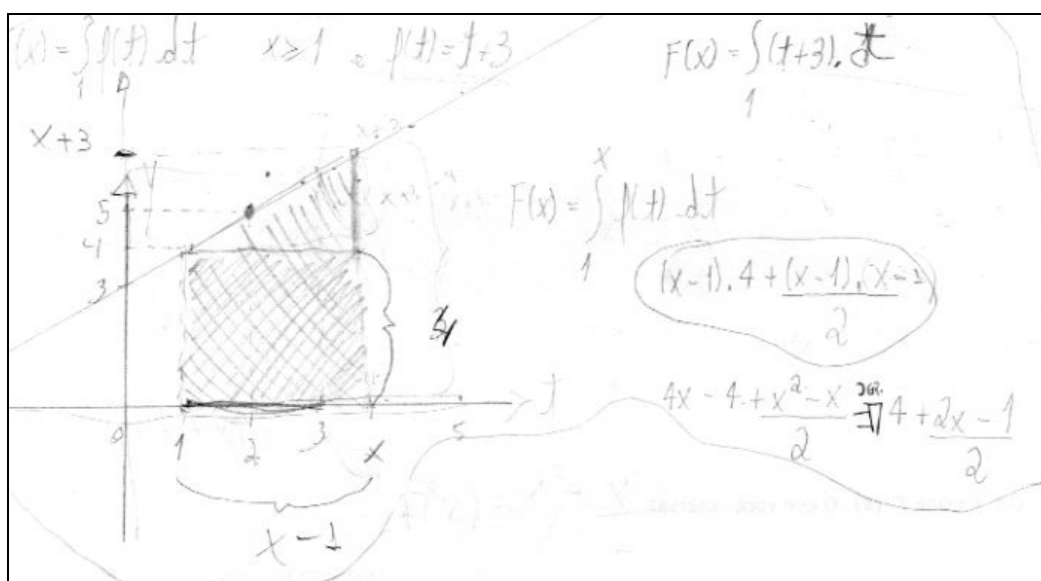
correta, ou seja, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{7}{2}$ ou $F(x) = \frac{x^2 + 6x - 7}{2}$.

Figura 17 - Resposta da dupla D_3 para a atividade 8.



A dupla D_5 , apesar de ter escrito corretamente as áreas do retângulo e do triângulo, não obteve esta expressão, pois cometeu um erro ao desenvolver o termo $(x-1) \cdot (x-1)$, como ilustra a figura a seguir:

Figura 18 - Resposta da dupla D₅ para a atividade 8.



Vale ressaltar que a dupla D₄, obteve a expressão de $F(x)$ somente após tentar resolver o item (b) que solicitava calcular $F'(x)$. Em um primeiro momento, os integrantes da dupla escolheram $x = 5$ e calcularam $F(5) = 24$. O diálogo abaixo narra este momento:

Aluno A: - E agora? Como vamos calcular $F'(x)$. Não temos x na expressão.

Aluno B: - Acho que a gente não podia ter escolhido $x = 5$.

Aluno A: - Mas e aí? Como vamos fazer sem este número?

Aluno B: - Acho que é igual à outra atividade que fizemos. Deixa como x mesmo, e usa $f(x)$ na altura.

No item (b), todas as duplas que obtiveram a expressão correta de $F(x)$, calcularam a derivada e observaram que $F'(x) = f(x)$. Somente a dupla D₅ não chegou a esta conclusão, uma vez que encontrou $F(x) = 4x - 4 + \frac{x^2 - x}{2}$ pelo fato de ter cometido um erro algébrico. Dessa forma, concluíram que $F'(x) = 4 + \frac{2x - 1}{2}$ e observaram que é uma função do 1º grau, sem poder com isto, relacionar a derivada de F com a f .

Em relação aos processos do PMA, percebe-se que as duplas utilizaram os de visualização, representação e mudança entre diferentes representações ao partirem da expressão algébrica para a gráfica e identificar a área que seria calculada. Além disso, o processo de síntese esteve presente ao relacionarem os conceitos de função e área na obtenção da expressão de $F(x)$.

Atividade 9

Enunciado:

(a) Sejam $f(t) = -2t - 2$ e $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, tal que $x \geq 1$ e. Esboce o gráfico da função f e use a geometria para achar uma expressão para $F(x)$.

(b) Calcule $F'(x)$. O que você observa?

No item (a), todas as duplas começaram determinando o ponto $(1, f(1))$, ou seja, $(1, -4)$ e mais um ou dois pontos quaisquer para obter o gráfico de $f(t)$. Em seguida, as seguintes estratégias foram utilizadas:

- E1: Representaram x no eixo das abscissas, delimitaram a região para calcular a área, utilizando a fórmula da área do trapézio;
- E2: Representaram x no eixo das abscissas, delimitaram a região para calcular a área, utilizando as fórmulas da área do retângulo e do triângulo;
- E3: Escolheram $x = 5$ e calcularam a área do trapézio;
- NF: Não fizeram.

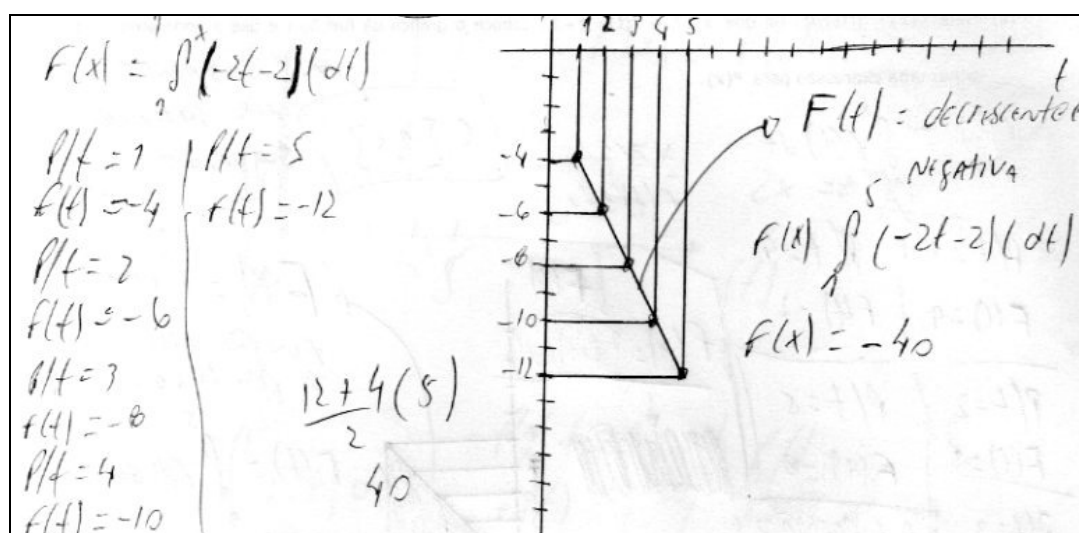
A tabela a seguir mostra a estratégia de cada dupla:

Quadro 19 - Resultados da atividade 9 - item (a)

Dupla	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	D ₇
Estratégia	E1	E1	E1	E3	E2	E1	NF

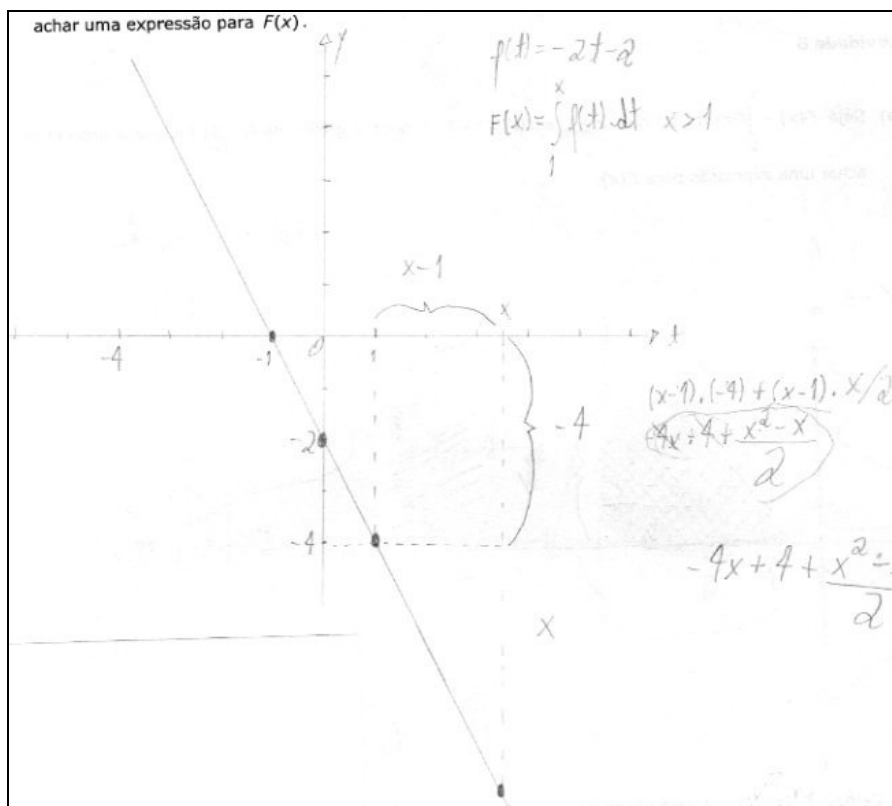
A dupla D₄, que fez o cálculo para um valor específico de x , observou que o resultado de $F(x)$ deveria ser negativo, uma vez que $f(t)$ é negativa. A figura a seguir ilustra este procedimento:

Figura 19 - Resposta da dupla D₄ para a atividade 9.



As duplas D₁, D₂, D₃ e D₆ obtiveram a expressão correta para $F(x)$, ou seja, $F(x) = -x^2 - 2x + 3$. Por outro lado, a dupla D₅ não encontrou esta expressão, pois cometeu um erro no cálculo da área do triângulo. Afirmou que a altura deste seria dada por x , ao invés de $-2x + 2$, conforme mostra a seguinte ilustração:

Figura 20 - Resposta da dupla D₅ para a atividade 9.



No item (b), todas as duplas que obtiveram $F(x) = -x^2 - 2x + 3$, concluíram que $F'(x) = f(x)$. Somente a dupla D₅ não chegou a esta conclusão, uma vez que encontrou $F(x) = -4x + 4 + \frac{x^2 - x}{2}$. Dessa forma, concluíram que $F'(x) = -4 + \frac{2x - 1}{2}$ e observaram que é uma função do 1º grau.

Novamente, foram mobilizados os processos de visualização, representação, mudança entre diferentes representações e síntese para obter a área desejada.

Atividade 10

Enunciado:

(a) Sejam $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 2 \\ 1 & \text{se } t > 2 \end{cases}$ e $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, tal que $x \geq 1$ e. Esboce o

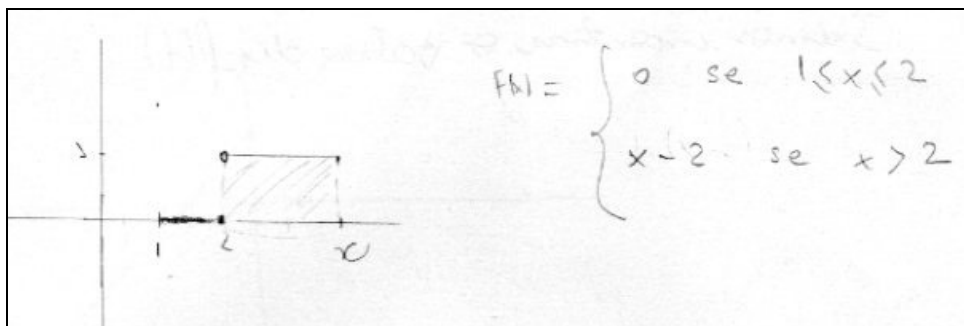
gráfico da função f e use a geometria para achar uma expressão para $F(x)$.

(b) Calcule $F'(x)$. O que você observa?

As duplas D_4 , D_5 e D_7 não fizeram esta atividade.

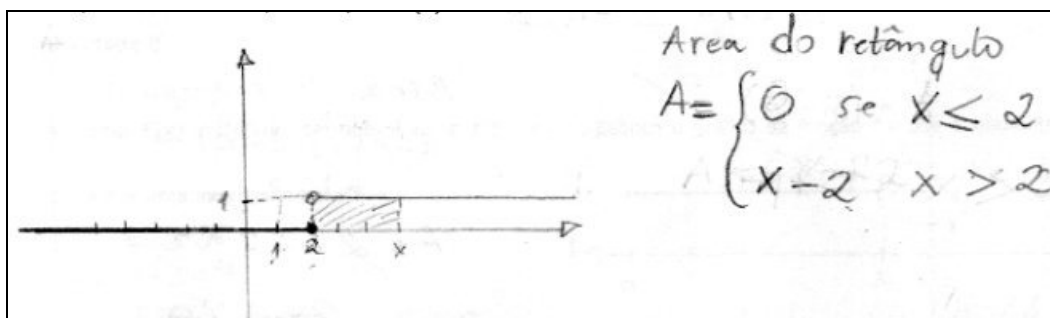
No item (a), as duplas D_2 e D_3 construíram o gráfico de f , fazendo $x \geq 1$ e utilizaram a fórmula da área do retângulo, conforme mostra a figura abaixo:

Figura 21 - Resposta da dupla D_2 para a atividade 10 (a).



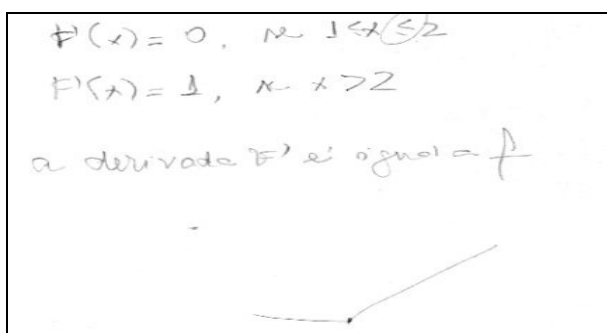
As duplas D_1 e D_6 também fizeram o gráfico de f , mas não observaram que x deveria ser maior ou igual a um. Em seguida, também utilizaram a fórmula da área do retângulo.

Figura 22 - Resposta da dupla D₁ para a atividade 10 (a).



Para responder o item (b), todas as duplas que encontraram a expressão de $F(x)$, calcularam a derivada de cada uma das partes de $F(x)$. Além disso, a dupla D₃ fez também um esboço do gráfico de F , conforme mostra figura abaixo:

Figura 23 - Resposta da dupla D₃ para a atividade 10 (b).



Entretanto, ninguém observou que a derivada em $x = 2$, deveria ser calculada pela definição, utilizando os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2) - 0}{x-2} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{0 - 0}{x - 2} = 0$$

Neste caso, como $\lim_{x \rightarrow 2^+} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-}$, não existe $F'(2)$.

Dessa forma, o objetivo de que utilizassem este exercício para constatar a necessidade da função f ser contínua em determinado intervalo, afim de que F seja derivável, não foi atingido.

Em relação aos processos do PMA, observa-se que os de visualização, representação, mudança entre diferentes representações e síntese estiveram presentes na obtenção da área. No entanto, não foi feita uma análise atenciosa da função $F(x)$, ao calcularem sua derivada, uma vez que sequer mencionaram a necessidade de calculá-la utilizando a definição por limite em $x = 2$.

Atividade 11

Enunciado: Suponha que f seja uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e definimos uma nova função g pela equação $g(x) = \int_a^x f(t) dt$. Com base nos seus resultados dos problemas anteriores, conjecture uma expressão para $g'(x)$.

As duplas D_1 , D_2 , D_3 e D_6 concluíram que $g'(x) = f(x)$. As demais não responderam esta questão.

Em relação aos processos do PMA, percebe-se que estas duplas realizaram os processos de análise e generalização.

Enfim, diante de tudo o que foi exposto e analisado neste estudo, pode-se perceber que as atividades elaboradas no instrumento de pesquisa propiciaram o desenvolvimento dos seguintes processos do PMA: visualização, representação e mudança entre diferentes representações, intuição, definição, descoberta, validação, generalização, síntese e abstração. O que possibilitou que muitos dos participantes

conjecturassem que a derivando a função F dada por $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ obtém-se f , ou

seja, que a derivação e integração são operações inversas uma da outra.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa era de investigar quais processos mentais poderiam intervir e serem combinados pelos alunos no desenvolvimento de atividades envolvendo a expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Além disso, verificar se esse tipo de atividade favoreceria a compreensão das ideias centrais que envolvem o Teorema Fundamental do Cálculo.

A escolha pelo TFC foi motivada pelo fato de que este relaciona os principais conceitos do Cálculo: derivada e integral. Além disso, apesar de existirem pesquisas em Educação Matemática relacionadas a este teorema, poucas apresentam como foco o processo de ensino e aprendizagem do mesmo.

Por outro lado, algumas pesquisas indicam que o método de ensino baseado no modelo exposição teórica – exemplos – exercícios favorece a algoritmização da Matemática, não permitindo aos alunos raciocinar para a construção do seu próprio conhecimento.

Sendo assim, este trabalho fundamentou-se no texto de Tommy Dreyfus, intitulado “Processos do Pensamento Matemático Avançado”, que privilegia o ensino por descoberta, por tentativa e erro.

Para a obtenção de dados do presente estudo, foi elaborado um instrumento de pesquisa que foi respondido por alunos de Licenciatura em Matemática. O experimento se realizou em quatro sessões.

A primeira sessão tinha por objetivo construir a função área a partir de uma figura limitada pelo gráfico de uma função do 1º grau e pelo eixo das abscissas, bem como, investigar quais procedimentos poderiam ser utilizados para determinar a área

ao trocar a função do 1º grau por uma de 2º. A análise dos protocolos indicou que a maioria dos alunos encontrou dificuldades para obter a expressão solicitada, pois não souberam converter informações gráficas em algébricas.

Por outro lado, a obtenção de procedimentos para o cálculo da área limitada pela parábola ocorreu de modo satisfatório, uma vez que os estudantes perceberam que seria necessário dividir a região em figuras regulares para obter um valor aproximado da área. Além disso, observaram que quanto mais subdivisões fossem feitas, melhor seria o resultado obtido.

Em relação aos processos do PMA, constatou-se que foram mobilizados os de visualização, representação, mudança entre diferentes representações, definição, validação, descoberta, generalização e síntese.

A segunda sessão visava definir as somas amostrais de Riemann visando à construção do conceito de integral. Para tanto, foi utilizado o *software Winplot* com o intuito de obter valores aproximados da área de uma região limitada superiormente por uma parábola. Estes cálculos foram feitos utilizando dois métodos distintos.

A análise dos protocolos mostrou que os alunos perceberam que ao aumentar o número de subdivisões do intervalo, o valor da área também aumentava. Além disso, observaram que, em um dos métodos, para um mesmo número de subdivisões, a área mudava sempre que solicitavam um novo cálculo. Entretanto, uma das duplas constatou que para um número de subintervalos maior que 100.000, a área obtida pelos dois métodos eram iguais até a segunda casa decimal.

Em relação aos processos do PMA, foram utilizados os de visualização, representação, mudança entre diferentes representações, descoberta, intuição, validação e generalização.

Vale ressaltar que esta sessão foi muito aproveitada pelos estudantes que se sentiram motivados após a utilização do *Winplot*. Um aluno comentou: “sem este programa, eu jamais teria percebido estas relações”. Isto pode indicar que a escolha pelo uso de um *software* nesta pesquisa foi adequada, uma vez que favoreceu a mobilização dos processos de intuição, descoberta e validação.

A terceira sessão tinha por objetivo explorar as propriedades da função $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ e as relações entre a função F e os componentes que a definem. A análise dos protocolos indicou que os estudantes apresentaram dificuldades em diferenciar as funções f e F . Apesar de terem associado F à área da região compreendida pelo gráfico de f e pelo eixo t , confundiram as duas ao analisar o comportamento de F . Para fazer tal análise, os estudantes não dispunham do gráfico, e nem da expressão algébrica, desta função, o que provavelmente foi um obstáculo.

Isto pode mostrar que as dificuldades em relacionar o comportamento da função F com o da f , são de natureza intrínseca aos conceitos envolvidos e que claramente as dificuldades não seriam superadas apenas com as atividades realizadas nesta pesquisa, e isso nem era o esperado.

Vale ressaltar que uma das duplas percebeu o real significado de F , atribuindo-lhe uma característica cumulativa. Em uma das atividades também conseguiu fazer um esboço do seu gráfico, comprovando seu entendimento.

A quarta sessão visava à conjectura de que a derivação e integração são operações recíprocas. A análise dos protocolos revelou que a maioria das duplas conseguiu estabelecer que se $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, então $F' = f$. No entanto, nenhum dos participantes observou a necessidade de que f fosse contínua.

Por outro lado, as duplas que não conseguiram concluir que $F' = f$, não o fizeram por diferentes razões. Uma delas respondeu completamente a primeira atividade, iniciou a resolução da segunda e deixou as atividades restantes em branco, talvez por achar que fossem similares e não trariam novas informações. As outras aparentemente perderam o interesse.

Em relação aos processos do PMA, percebe-se que foram mobilizados os de visualização, representação e mudança entre diferentes representações, síntese, análise e generalização.

Dessa forma, os resultados obtidos podem mostrar que as escolhas feitas na elaboração do instrumento de coleta foram adequadas e que o objetivo da pesquisa foi atingido, uma vez que muitos dos participantes conjecturaram que a derivação e integração são operações inversas uma da outra.

Além disso, a pesquisa aponta para outras questões que poderiam ser temas de estudos mais aprofundados, como por exemplo, quais as contribuições de atividades baseadas em um ensino por descoberta para a aprendizagem de conceitos matemáticos? Quais os efeitos do uso de uma ferramenta computacional no ensino e aprendizagem de conceitos relacionados à derivada e integral?

Enfim, espera-se que a elaboração deste trabalho possa auxiliar e estimular novas pesquisas sobre o assunto, além de reforçar a importância de atividades que permitam os alunos apropriarem-se de inter-relações entre conceitos envolvidos no Teorema Fundamental do Cálculo.

REFERÊNCIAS

ALMOULOD, S. A. *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ANACLETO, G. M. C. *Uma investigação sobre a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

BARBOSA, O. B., NETO, H. B. *Raciocínio lógico forma e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral: O caso da Universidade Federal do Ceará*. Temas e Debates, Blumenau: SBM, v. VIII, n.6, p.62-69, 1995.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora, 1994.

BORGES, H.; SANTANA, R.. *O Uso da Interface Computacional no Ensino de Matemática: Limites e Possibilidades do Computador quando o Assunto é Demonstração*. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Santos, 2000. XXIII CNMAC.

CAMPOS, R. P. *A abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

CARLSON, M. P. *A cross-sectional investigation of the development of the function concept*. In DUBISNKY, E., SCHOENFELD, A. H., KAPUT, J. J. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, III. Issues in Mathematics Education*, 7, p.115-162, 1998.

DREYFUS, T. *Advanced Mathematical Thinking Processes*. In David Tall (org), *Advanced Mathematical Thinking* (p.25-41). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991.

REIS, F. S. *A tensão entre o rigor e a intuição no ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*. Tese de Doutorado em Educação. São Paulo: Universidade Estadual de Campinas, 2001.

SEGADAS, V. C. *Student's Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: an Exploration of Definitions and Visual Imagery*. Tese de Doutorado em Educação. Institute of Education, University of London, 1998.

SOUZA JR, A.J.S. *Trabalho coletivo na universidade: trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral*. Tese de Doutorado em Educação. São Paulo: Universidade Estadual de Campinas, 2000.

PICONE, D. F. B. *Os registros de representação semiótica mobilizados por professor no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

STEWART, J. *Cálculo*. Volume 1. 6ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

THOMAS, G. B. *Cálculo*. Volume 1. 11ª edição. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2008.

THOMPSON, P. W. *Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus*. Educational Studies in Mathematics, 26,p. 229-274, 1994.

VILLARREAL, M. E. *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas*. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Rio Claro: IGCE-UNESP, 1999.

ANEXO - QUESTIONÁRIO

Nome _____

Nome _____

Atividade 1

(a) Construa o gráfico da função $f(t) = 2t + 1$ e use alguma fórmula da geometria para achar a área da região limitada pelo gráfico da função f , pelo eixo t e pelas retas verticais $t = 1$ e $t = 3$.

(b) Considerando x_0 um número maior do que um e diferente de três, use alguma fórmula da geometria para achar a área da região limitada pelo gráfico da função f , pelo eixo t e pelas retas verticais $t = 1$ e $t = x_0$.

(c) Se $x > 1$, seja $A(x)$ a área da região limitada pelo gráfico da função f , pelo eixo t e pelas retas verticais $t = 1$ e $t = x$. Ache uma expressão (em função de x) para $A(x)$.

(d) O que representam as variáveis t e x ?

Atividade 2

(a) Esboce o gráfico da função $f(t) = t^2 + 1$ e assinale a região do plano limitada pelo gráfico da função f , pelos eixos coordenados e pela reta vertical $t = 4$.

(b) É possível usar fórmulas da geometria para calcular exatamente a área da região acima descrita? Justifique sua resposta.

(c) Se não encontrou uma maneira de efetuar o cálculo exato da área da região descrita no item (a), ache uma aproximação para a mesma.

(d) É possível melhorar a estimativa feita no item anterior? Justifique sua resposta.

Nome _____

Nome _____

Atividade 3**Parte I**

- (a) Utilize o programa Winplot para construir o gráfico da função $f(t) = t^2 + 1$. Digite Ctrl + V e ajuste a tela de visualização do gráfico alterando a janela "esquerdo" para - 2, "direito" para 8, "inferior" para - 2 e "superior" para 17 (somente a opção "cantos" deve estar selecionada). Clique em "aplicar" e, em seguida, em "fechar".
- (b) Aperte a tecla F7. Na janela "lim inferior" digite 0. Na janela "lim superior" digite 4. Na janela "sub-intervalos" digite 2. Selecione apenas a opção "ponto à esq:" (as demais, devem estar desabilitadas) Selecione a opção "visualizar" e clique em "definida". Preencha o quadro abaixo:

Retângulo	Medida da base	Abscissas dos vértices da base		Medida da altura	Área
1º	2	$t_0 = 0$	$t_1 = 2$	1	2
2º		$t_1 =$	$t_2 =$		
					Área total =

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{_____}; \quad \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{_____}$$

- (c) Repita o procedimento do item (b), alterando o número de subintervalos para 4.

Retângulo	Medida da base	Abscissas dos vértices da base		Medida da altura	Área
1º		$t_0 =$	$t_1 =$		
2º		$t_1 =$	$t_2 =$		
3º		$t_2 =$	$t_3 =$		
4º		$t_3 =$	$t_4 =$		
					Área total =

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{_____}; \quad \Delta t_2 = t_2 - t_1 = \text{_____}; \quad \Delta t_4 = t_4 - t_3 = \text{_____}$$

(d) Altere o número de subintervalos para 8.

Retângulo	Medida da base	Abscissas dos vértices da base		Medida da altura	Área
1º		$t_0=$	$t_1=$		
2º		$t_1=$	$t_2=$		
3º		$t_2=$	$t_3=$		
4º		$t_3=$	$t_4=$		
5º		$t_4=$	$t_5=$		
6º		$t_5=$	$t_6=$		
7º		$t_6=$	$t_7=$		
8º		$t_7=$	$t_8=$		
					Área total =

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{_____}; \quad \Delta t_2 = \text{_____} = \text{_____}; \quad \Delta t_8 = \text{_____} = \text{_____}$$

(e) Altere o número de subintervalos para 16.

Retângulo	Medida da base	Abscissas dos vértices da base		Medida da altura	Área
1º		$t_0=$	$t_1=$		
2º		$t_1=$	$t_2=$		
3º		$t_2=$	$t_3=$		
11º		$t_{10}=$	$t_{11}=$		
16º		$t_{15}=$	$t_{16}=$		
i -ésimo		$t_{i-1}=$	$t_i=$		
					Área total =

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \text{_____}; \quad \Delta t_{16} = \text{_____} = \text{_____}; \quad \Delta t_i = \text{_____} = \text{_____}$$

- (f) Se alterarmos o número de subintervalos para 32, qual será a soma das áreas dos retângulos?
- (g) Se alterarmos o número de subintervalos para 64, qual será a soma das áreas dos retângulos?
- (h) Se alterarmos o número de subintervalos para 128, qual será a soma das áreas dos retângulos?
- (i) Se alterarmos o número de subintervalos para 256, qual será a soma das áreas dos retângulos?

De modo geral, a soma das áreas dos retângulos obtidos é dada por $A = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})\Delta t_i$,

sendo $t_0 < t_1 < \dots < t_n = 4$

Parte II

- (a) Desmarque a opção "ponto à esq:" e selecione "aleatório". Altere o número de subintervalos para 8 e clique em "definida".

A soma das áreas dos retângulos é _____

Observe o 4º retângulo.

A medida da base é _____

A altura desse retângulo é $f(t_3)$?

É $f(t_4)$? _____

Existe um valor c , com $t_3 < c < t_4$, tal que a altura desse retângulo é $f(c)$? _____

- (b) Sem fazer nenhuma alteração, clique em "definida" novamente.

A soma das áreas dos retângulos é _____

Observe o 4º retângulo.

A medida da base é _____

A altura desse retângulo é $f(t_3)$?

É $f(t_4)$? _____

Existe um valor c , com $t_3 < c < t_4$, tal que a altura desse retângulo é $f(c)$? _____

O valor de c deste item é o mesmo encontrado no item (a)? _____

- (c) Sem fazer nenhuma alteração, clique em "definida" novamente.

A soma das áreas dos retângulos é _____

Observe o 4º retângulo.

A medida da base é _____

A altura desse retângulo é $f(t_3)$?

É $f(t_4)$? _____

Existe um valor c , com $t_3 < c < t_4$, tal que a altura desse retângulo é $f(c)$? _____

O valor de c deste item é o mesmo encontrado no item (a)? _____

É o mesmo do item (b)? _____

- (d) De quantas maneiras você acha que possível escolher o valor de c , com $t_3 < c < t_4$?

De modo geral, a soma das áreas dos retângulos obtidos, é dada por $A = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta t_i$,

sendo c_i um ponto arbitrário do i -ésimo intervalo ($t_{i-1} < c < t_i$)

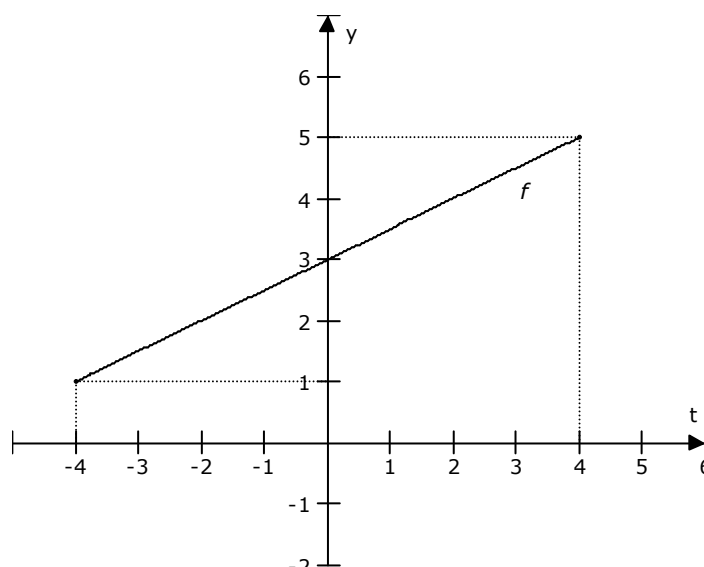
- (e) Que diferenças você observa entre a aproximação das áreas calculadas utilizando a opção "ponto à esquerda" e a opção "aleatório"?

Nome _____

Nome _____

Atividade 4

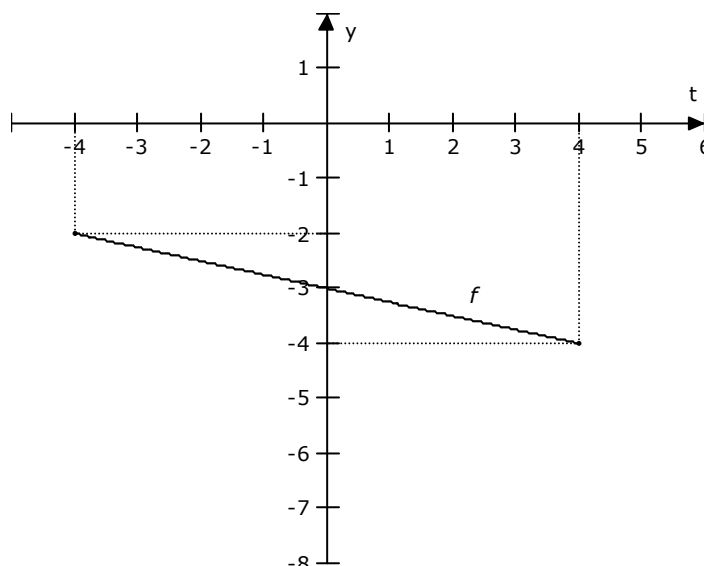
Seja $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está dado na figura abaixo:



- (a) O que representa a função $F(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$?
- (b) O que representam as variáveis t e x ?
- (c) O que representam os termos $f(t)$ e dt ?
- (d) O que podemos afirmar de $f(t)$ no intervalo $[-4, 4]$? É positiva, negativa ou nula? Varia ou permanece constante? Aumenta ou diminui? Justifique sua resposta.
- (e) Como se comporta a função $F(x)$? É positiva, negativa ou nula? É crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.

Atividade 5

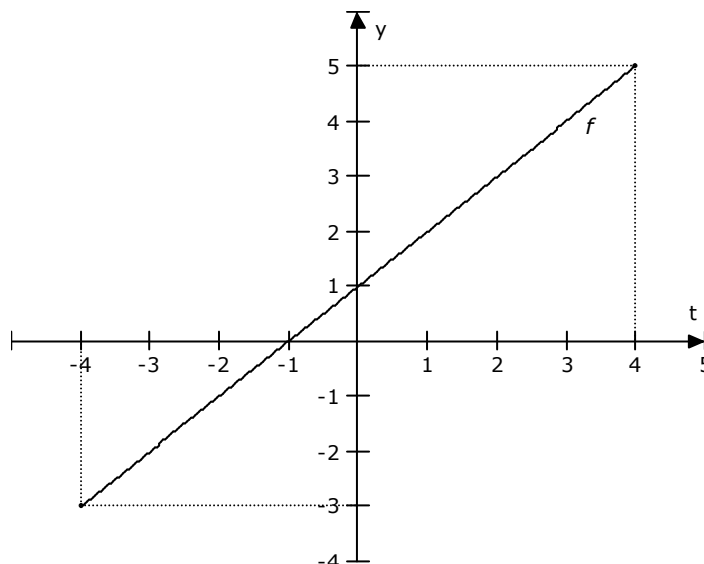
Seja $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está dado na figura abaixo:



- (a) O que representa a função $F(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$?
- (b) O que representam as variáveis t e x ?
- (c) O que representam os termos $f(t)$ e dt ?
- (d) O que podemos afirmar de $f(t)$ no intervalo $[-4, 4]$? É positiva, negativa ou nula? Varia ou permanece constante? Aumenta ou diminui? Justifique sua resposta.
- (e) Como se comporta a função $F(x)$? É positiva, negativa ou nula? É crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.

Atividade 6

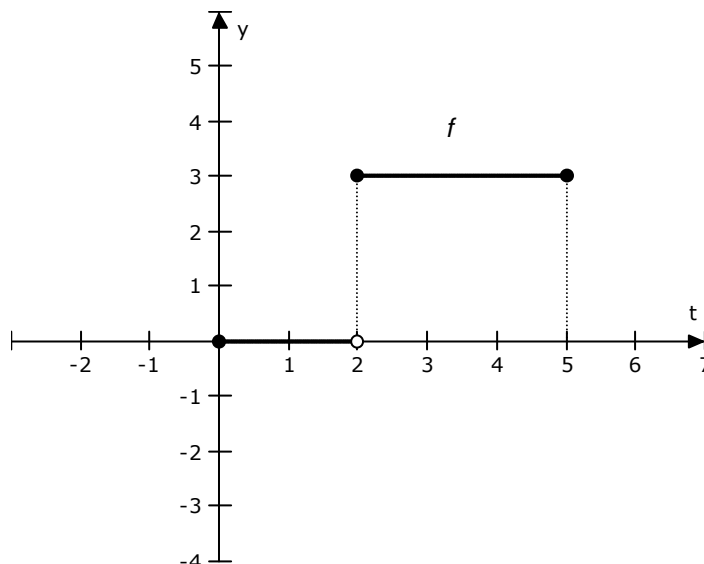
Seja $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está dado na figura abaixo:



- (a) O que representa a função $F(x) = \int_{-4}^x f(t) dt$?
- (b) O que representam as variáveis t e x ?
- (c) O que representam os termos $f(t)$ e dt ?
- (d) O que podemos afirmar de $f(t)$ no intervalo $[-4, 4]$? É positiva, negativa ou nula? Varia ou permanece constante? Aumenta ou diminui? Justifique sua resposta.
- (e) Como se comporta a função $F(x)$? É positiva, negativa ou nula? É crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.

Atividade 7

Seja $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está dado na figura abaixo:



- (a) O que representa a função $F(x) = \int_0^x f(t) dt$?
- (b) O que representam as variáveis t e x ?
- (c) O que representam os termos $f(t)$ e dt ?
- (d) O que podemos afirmar de $f(t)$ no intervalo $[-4, 4]$? É positiva, negativa ou nula? Varia ou permanece constante? Aumenta ou diminui? Justifique sua resposta.
- (e) Como se comporta a função $F(x)$? É positiva, negativa ou nula? É crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.
- (f) A função $f(t)$ é contínua? E $F(x)$?

Nome _____

Nome _____

Atividade 8

- (a) Sejam $f(t) = t + 3$ e $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, tal que $x \geq 1$. Esboce o gráfico da função f e use a geometria para achar uma expressão para $F(x)$.

- (b) Calcule $F'(x)$. O que você observa?

Atividade 9

- (a) Sejam $f(t) = -2t - 2$ e $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, tal que $x \geq 1$. Esboce o gráfico da função f e use a geometria para achar uma expressão para $F(x)$.

- (b) Calcule $F'(x)$. O que você observa?

Atividade 10

- (a) Sejam $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 2 \\ 1 & \text{se } t > 2 \end{cases}$ e $F(x) = \int_1^x f(t) dt$, tal que $x \geq 1$. Esboce o gráfico da função f e use a geometria para achar uma expressão para $F(x)$.

- (b) Calcule $F'(x)$. O que você observa?

Atividade 11

Suponha que f seja uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e definimos uma nova função g pela equação $g(x) = \int_a^x f(t) dt$. Com base nos seus resultados dos problemas anteriores, conjecture uma expressão para $g'(x)$.