PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

LUCIANE MENDONÇA

Trajetória hipotética de aprendizagem:

análise combinatória

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo
2011

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

LUCIANE MENDONÇA

Trajetória hipotética de aprendizagem:

análise combinatória

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, *sob a orientação do* ***Professor Doutor Armando Traldi Junior.***

São Paulo
2011

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** _______________

Dedico este trabalho a minha mãe, Antonia,
por seu carinho, dedicação e incentivo em
todos os momentos de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos

*A **Deus,** pela oportunidade desta experiência e pela presença em todos os momentos de minha vida.*

*A minha família. Em especial, minha mãe, **Antonia**, por seu incentivo e apoio constantes.*

*Aos meus sobrinhos, **Felipe e Fernanda**, que trouxeram luz para a família e alegria em momentos preciosos.*

*Ao meu amado, **Augusto**, que me amou e apoiou por todo este percurso, superando barreiras que para muitos seriam intransponíveis.*

*Ao anjo da guarda que Deus colocou em meu caminho, **Lu Rosenbaum**, por todos os momentos de estudos, desabafos, amizade e apoio nesse percurso. Que nossa amizade perdure.*

*A **Maria do Carmo**, que hoje faz parte da família, uma grande irmã com quem muitos momentos foram e com certeza serão compartilhados.*

*Aos **professores** da PUC-SP, que contribuíram para minha formação, com elogios ou puxões de orelhas.*

*Ao professor **Benedito**, que, com carinho e compreensão, apoiou-me em um momento de mudanças.*

*Ao professor **Armando Traldi Jr**, por suas contribuições durante o desenvolvimento deste trabalho.*

*Às Professoras **Cileda de Queiroz e Silva Coutinho e Marisa da Silva Dias,** por suas contribuições no exame de qualificação.*

*A todos os **amigos**, que compreenderam minha ausência em muitos momentos.*

*A todos os **colegas de curso**, cujos nomes não citarei para não esquecer nenhum. Todos foram realmente importantes, cada um a sua maneira, nos momentos de estudos, discussões ou brincadeiras.*

*A **Leda Farah**, pela atenção e dedicação durante a correção deste trabalho.*

*À **Secretaria de Educação do Estado de São Paulo**, pela bolsa concedida, que permitiu a realização deste sonho.*

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo verificar a possibilidade de compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com a planificação do ensino, em um trabalho colaborativo entre pesquisador e professores, no que se refere ao tema Análise Combinatória. Busca-se também verificar a atuação do professor de matemática nas atividades de planejamento de ensino, de forma compatível com a perspectiva construtivista de aprendizagem presente na Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA). É um estudo de natureza qualitativa com três professores e 104 alunos do Ensino Médio de duas escolas da rede pública do estado de São Paulo e tem como fundamentação teórica os trabalhos de Simon sobre o uso de THA no ensino de Matemática para formular modelos de ensino baseados no construtivismo. Os resultados obtidos levaram-nos a inferir que o uso de pesquisas contribui para a organização do ensino de Análise Combinatória; que o comprometimento do docente ao planejar suas aulas e a prática em sala de aula condizente com a perspectiva construtivista são fundamentais para alcançar os resultados esperados para THA elaborada; que a atuação do professor tem papel decisivo na mediação da construção do conhecimento dos seus alunos; e que a interação e a participação entre alunos e professor são essenciais para que ocorra a aprendizagem.

Palavras-chave: Análise Combinatória; Trajetória Hipotética de Aprendizagem; currículo de Matemática para o Ensino Médio; perspectiva construtivista.

ABSTRACT

The present study aimed to verify the possibility to reconcile constructivist perspectives of learning with the planning of teaching in a collaborative work between researches and teachers, what refers to the theme Combinatorial Analysis, and verify the performance of mathematics teachers in the activities of planning education, consistent with the constructivist perspective of present learning in the Hypothetical Learning Trajectory. It is a qualitative study with three teachers and 104 high school students of two public schools of the state of São Paulo and has as theorical reasons Simon’s works about the use of Hypothetical Learning Trajectory in the education of mathematics to formulate models of teaching based on constructivism. The results led us to conclude that the use of researches contributes to organizing the teaching of Combinatorial Analysis; that the commitment of the instructor when planning your lessons and the pratice in the classroom consistent with the constructivist perspective are fundamental to reach the expected results to the elaboreted Hypothetical Learning Trajectory; that the teacher performance has a decisive role in mediating the construction of knowledge of your students; and that the interaction and participation among students and teachers are essential for learning to occur.

Keywords: Combinatoral Analysis; hypothetical learning trajectory, the mathematics curriculum for High School; constructivist perspective.

Sumário

Índice de Figuras

APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

Inserção no Projeto de Pesquisa

O presente trabalho integra o projeto "Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio", que está inserido na linha de pesquisa "Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores" do Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, coordenado pelos professores doutores Célia Maria Carolino Pires e Armando Traldi Júnior, orientador desta pesquisa.

O objetivo do projeto é o desenvolvimento de pesquisas com enfoque na organização e no desenvolvimento curricular na área de Matemática, com o propósito de desenvolver propostas de apoio ao desenvolvimento curricular, a partir das orientações apresentadas nas Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio (DCNEM) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM).

As DCNEM propõem um currículo para o Ensino Médio organizado a partir de três áreas do conhecimento: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias; Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias. Esse documento destaca a importância de explorar situações contextualizadas e trabalhá-las por meio da resolução de problemas e/ou modelagem.

Para Mello (1999), afirmar que o currículo será organizado por área de conhecimento não significa eliminar as disciplinas, mas colocá-las em um permanente diálogo, conforme as afinidades entre elas, e entre elas e os problemas da realidade que se quer que os alunos compreendam e interpretem para propor soluções.

Ainda de acordo com essa autora, dois princípios são traçados nesse documento, com o objetivo de auxiliar as escolas no trabalho de organização de seus currículos: a interdisciplinaridade e a contextualização.

Os PCNEM (BRASIL, 1999) enfatizam que em todas as áreas a competência matemática se faz presente. A possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária para tirar conclusões, fazer argumentações e formar o cidadão para agir como um consumidor prudente na tomada de decisões em sua vida pessoal e profissional.

Pires (2009) afirma que os problemas mais frequentemente destacados em congressos, seminários, simpósios e grupos de pesquisa dizem respeito à desarticulação entre os objetivos, a metodologia e a avaliação, presente na prática da organização curricular. Para a autora, os cursos de formação inicial e continuada de professores não consideram as especificidades próprias dos níveis de ensino da Educação Básica. Pires destaca outros aspectos que devem ser considerados: a desarticulação entre conhecimentos específicos e pedagógicos, assim como entre teoria e prática; a falta de oportunidades para o desenvolvimento cultural dos alunos, para o uso de tecnologias da informação e comunicações; a falta de diálogo entre as instituições formadoras de professores e as escolas de ensino da educação básica; e a concepção do professor como transmissor de conhecimentos, presente ao longo da formação do docente.

Este cenário provoca a necessidade de desenvolver materiais de apoio ao trabalho curricular na área de Matemática, pautados em princípios apresentados nos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio: são necessários recursos didáticos, em especial, para favorecer a abordagem interdisciplinar e para explorar situações contextualizadas por meio de resolução de problemas e/ou da modelagem.

Os pesquisadores participantes deste projeto pretendem contribuir para aproximar teorias e resultados de estudos na área de Educação Matemática dos currículos praticados em sala de aula do Ensino Médio.

O projeto envolve alunos do Mestrado e do Doutorado e professores de Matemática de Ensino Médio da rede pública estadual de São Paulo, em trabalho cooperativo e colaborativo. Pesquisas como a de Traldi Júnior (2006) evidenciam a autonomia ganha por docentes que participam de trabalhos com tais características, o que os torna mais reflexivos a respeito de suas práticas e se reflete na busca e na produção de materiais que subsidiem seu trabalho em sala de aula.

Boavida e Ponte (2002, p. 44) afirmam que, para a realização de uma investigação sobre a prática, a colaboração é um recurso valioso e oferece vantagem, ao reunir pessoas que se empenham em um objetivo comum, com diferentes experiências, competências e perspectivas que refletem e dialogam em conjunto. Ela propicia mais energia, mais recursos para concretizar um dado trabalho, capacidade de reflexão acrescida e o aumento de possibilidades de aprendizagem mútua. E cria melhores condições para o docente enfrentar, com êxito, incertezas e obstáculos que venham a surgir.

As teses de Doutorado neste projeto têm por objetivo elaborar fundamentos teóricos sobre diferentes aspectos dos currículos de Matemática. As dissertações de Mestrado têm como finalidade a construção de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA) sobre temas do currículo do Ensino Médio, para atender diferentes expectativas de aprendizagem deste nível de ensino. Segundo Simon (1995, apud PIRES, 2009, p.147), as THA "consistem em objetivos para a aprendizagem dos estudantes, a partir de tarefas matemáticas que serão usadas para promover a aprendizagem dos estudantes bem como o levantamento de hipóteses sobre o processo dessa aprendizagem".

O grupo de pesquisa ampara seus estudos em um texto do pesquisador Martin A. Simon (1995) e em outro, de Pedro Gómez e José Luis Lupiáñez (2007), que apresentam a noção de trajetória hipotética de aprendizagem (THA) como parte do modelo de Ciclo de Ensino de Matemática, proposto por Simon.

A partir de discussões e reflexões, o grupo desenvolveu estudos que permitiram responder as seguintes questões: Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com a planificação do ensino? Como as pesquisas na área de Educação Matemática, que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem, podem contribuir para a organização de um ensino que potencialize situações de aprendizagem dos alunos? Que atuação pode ter um professor de Matemática, no que se refere às atividades de planejamento do ensino, de forma compatível com uma perspectiva construtivista de aprendizagem?

Esta pesquisa contribui para o projeto com a elaboração, o desenvolvimento e a análise de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para o ensino de Análise Combinatória.

Organizamos nosso trabalho em seis capítulos:

No primeiro, apresentaremos a problemática da pesquisa, que envolve a escolha do tema de pesquisa, as questões de pesquisa e os procedimentos metodológicos que conduziram nosso estudo.

O segundo capítulo é destinado à apresentação de nosso quadro teórico: as formulações de Martin Simon (1995), as pesquisas já realizadas pelo projeto “Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio” e a concepção construtivista na educação escolar dissertada por diferentes pesquisadores.

No terceiro capítulo, dissertaremos sobre a análise combinatória no sistema educacional e, para isso, realizaremos um levantamento de pesquisas realizadas sobre o tema Análise Combinatória e analisaremos documentos oficiais que regem o Ensino Médio Brasileiro, a Proposta Curricular do Estado de São Paulo e os livros didáticos utilizados nas escolas participantes desta pesquisa.

O quarto capítulo apresentará a Trajetória Hipotética de Aprendizagem sobre Análise Combinatória e, para auxiliar o seu desenvolvimento, iniciaremos com um breve estudo do objeto matemático em questão.

No quinto capítulo, exporemos a análise do desenvolvimento da THA em sala de aula e as alterações realizadas para a segunda versão da trajetória.

Ao longo do sexto capítulo, discorreremos sobre o processo de desenvolvimento da THA em sala de aula; para isso, descreveremos os relatórios de observações das aulas.

Finalizaremos o trabalho, apresentando nossas considerações sobre o desenvolvimento da THA e buscaremos, também, sugerir novas questões e problemáticas para futuras pesquisas.

CAPÍTULO 1
CONSTRUÇÃO DA PROBLEMÁTICA DE PESQUISA

Neste capítulo apresentamos a problemática de pesquisa que envolve a escolha, a motivação e a relevância do tema Análise Combinatória, além das questões de pesquisa. Em seguida, descrevemos os procedimentos metodológicos que conduziram a investigação e a forma como transcorreram seus primeiros movimentos.

1.1 Construindo a problemática

Na escolha do tema para esta dissertação, o anseio inicial foi garantir a efetiva ligação entre a atividade como docente no Ensino Médio e como pesquisadora na pós-graduação. Assim, entre as opções possíveis, consideramos que um tema que satisfaria esse anseio seria o estudo da Análise Combinatória, pouco explorado em pesquisas, apesar de sua importância na "matemática discreta e da sua aplicação em áreas como a programação linear, teoria dos jogos, topologia, teoria dos números, análise de redes, etc." (FISCHBEIN, 1975, apud BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 1999) enfatizam a importância de uma abordagem cuidadosa do tema Análise Combinatória no Ensino Médio, devido à possibilidade de ampliar a interface entre o aprendizado de Matemática e as demais ciências e áreas:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. (BRASIL, 1999, p. 19)

Decidir sobre a melhor forma de organizar números ou informações para contar os casos possíveis "não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação" (BRASIL, 2002, p. 126). As fórmulas devem ter a função de simplificar cálculos para quantidades elevadas de dados e surgir como consequência do raciocínio combinatório desenvolvido a partir da resolução de diferentes problemas.

Em nossa experiência docente, não percebemos esse cuidado no trabalho com a Análise Combinatória. Presenciamos, em diferentes ocasiões, docentes que afirmavam evitar o trabalho com este conteúdo ou o faziam de forma superficial, apenas com situações introdutórias e com a aplicação de fórmulas.

Inferimos que a resistência dos docentes ao trabalho com o tema Análise Combinatória seja consequência da dificuldade de cunho matemático. Para Sabo (2010), alguns docentes admitem possuir dificuldade em diferenciar os tipos de agrupamentos e identificar as fórmulas a serem aplicadas. Essa dificuldade não é privilégio de alunos e docentes brasileiros. Em Portugal, a Análise Combinatória é lecionada pela primeira vez no 12º ano de escolaridade, equivalente à segunda série do Ensino Médio brasileiro, e é integrada ao tema Probabilidades e Combinatória e considerada "um tema difícil, quer pelos alunos quer pelos professores." (SILVA; FERNANDES; SOARES, 2004, p. 62).

As pesquisas desenvolvidas retratam que os docentes, por vezes, dispensam a abordagem do tema e optam por apresentar algumas situações a partir da aplicação de fórmulas, sem a construção de um conhecimento expressivo por parte do aluno. Outro fator preponderante é que alguns professores reproduzem, em sua prática, "o saber dos professores que participaram de suas experiências escolares" em relação ao tema, ou seja, "valorizam a memorização e a aplicabilidade das fórmulas na resolução de problemas" (SABO, 2010, p.186).

Essas constatações e os resultados — que exporemos posteriormente — de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem do tema, que reafirmam a resistência dos docentes e apontam os principais entraves apresentados pelos alunos, nos conduziram a elaborar uma THA de Análise Combinatória, buscando contribuir com o avanço nos estudos nessa área.

A investigação que acompanhou o desenvolvimento deste estudo teve como objetivos: analisar a possibilidade de compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com a planificação do ensino, em um trabalho colaborativo entre pesquisador e professores, no que se refere ao tema Análise Combinatória, e verificar a atuação do professor de matemática nas atividades de planejamento de ensino, de forma compatível com a perspectiva construtivista de aprendizagem presente na Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA). Para isso, buscamos responder as seguintes questões:

a) É possível compatibilizar a perspectiva construtivista na planificação do ensino de Análise Combinatória? Caso sim, de que forma?
b) Como as pesquisas na área da Educação Matemática podem contribuir para a organização de um ensino que potencialize situações de aprendizagem de Análise Combinatória?
c) Que características podem ser identificadas na atuação do professor, durante o desenvolvimento da THA para a aprendizagem da Análise Combinatória?

A resolução de problemas é apresentada como ponto de partida em nosso estudo, utilizando como estratégias de solução: a enumeração (contagem direta, árvores de possibilidades, diagramas, tabelas) e o Princípio Fundamental da Contagem, que acreditamos, assim como afirmado por Esteves (2001), ser uma abordagem que facilite a visualização do processo utilizado para chegar à sistematização.

Com o desenvolvimento da THA, buscamos também observar as formas pelas quais o professor desenvolve seu planejamento para as atividades de sala de aula e identificar a interação deste com as observações dos estudantes, as modificações e as adaptações realizadas na proposta da THA, de acordo com as hipóteses do professor sobre como os alunos aprendem o conteúdo.

A presente pesquisa buscou desenvolver uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), com expectativas de atingir os seguintes objetivos de aprendizagem para o tema Análise Combinatória:

- Usar diferentes representações para a enumeração, como, por exemplo, a contagem direta, a árvore de possibilidades, a tabela de dupla entrada e o diagrama sagital.
- Fazer uso do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) na resolução de problemas de contagem, realizando divisões para evitar a sobrecontagem de agrupamentos.
- Resolver problemas de contagem e agrupamentos, a partir do reconhecimento da necessidade (ou não) da hierarquia (ordem).

Para melhor delinear como transcorreu a pesquisa, a seguir apresentaremos as etapas e o procedimento utilizado para o seu desenvolvimento.

1.2 Procedimentos metodológicos

O desenvolvimento desta pesquisa ocorreu em quatro etapas, apresentadas a seguir.

A primeira teve início com estudos sobre o referencial teórico e revisão bibliográfica sobre o tema escolhido: teses, dissertações e artigos referentes ao ensino e à aprendizagem de Análise Combinatória e ao estudo do objeto Análise Combinatória.

A segunda etapa culminou com o processo de elaboração da primeira versão da Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

A terceira etapa iniciou-se com o primeiro contato com as professoras colaboradoras, e incidiu sobre o desenvolvimento da THA.

A quarta etapa destinou-se à revisão da THA, realizada a partir das observações feitas em sala de aula e das discussões entre a pesquisadora e as professoras colaboradoras sobre o trabalho realizado, além de recomendações de possíveis mudanças feitas pelas docentes ou sugeridas pela pesquisadora, a partir da observação realizada. Os momentos de discussão com as docentes de Santo André aconteceram em Horário de Trabalho Coletivo Comum (HTPC) e, com a docente P4, ocorreram em finais de semana. Esta etapa, em que elaboramos a nova versão da THA e efetuamos a análise dos resultados obtidos, encerra-se com a elaboração do texto final da dissertação.

Escolha dos professores colaboradores

A opção para a escolha inicial dos professores colaboradores foi feita por conveniência, ou seja, buscamos a participação de professores em escolas próximas à residência e/ou ao local de trabalho da pesquisadora, para facilitar o processo de acompanhamento das aulas. Porém, as recusas por parte de alguns docentes conduziram-nos a fazer o convite a professores da escola em que a pesquisadora leciona.

As recusas dos docentes inicialmente convidados foram justificadas de diferentes formas: a “obrigatoriedade” de seguir a Proposta Curricular do Estado, a confiança na metodologia por eles utilizada, não julgando ser necessária uma abordagem diferente. Percebemos também que essas justificativas se tornavam mais contundentes, quando era mencionada a presença do professor pesquisador em sala de aula, assim como afirmou Mesquita (2009, p.57): “Percebemos que a professora não estava disposta a participar da pesquisa, principalmente quando comunicamos que suas aulas seriam filmadas e que em algumas delas atuaríamos como observadora”.

É possível notar a dificuldade em encontrar professores dispostos a participar de pesquisas — mesmo sem a presença do pesquisador nas aulas — em trabalhos de outros pesquisadores, como, por exemplo, Sabo (2010), que afirma não ter sido fácil encontrar professores para responder ao questionário inicial de sua pesquisa e às entrevistas semiestruturadas, tendo recebido várias recusas de docentes.

A partir desse fato, passamos a contar com a colaboração de três professoras de uma mesma unidade escolar situada na cidade de Santo André. Porém, após a desistência de uma delas, tivemos a participação voluntária de outra docente, identificada como P4, que leciona na cidade de Embu-Guaçu. Ao saber da desistência ocorrida, a professora dispôs-se a participar do projeto como colaboradora. É importante citar que, na ocasião do desenvolvimento da THA, ela era aluna do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC-SP e integrava o grupo de “Organização, Desenvolvimento Curricular e Formação de Professores” do qual este projeto faz parte; ou seja, era conhecedora do projeto.

Apresentamos a proposta de nosso projeto a cada professora colaboradora, em reuniões individuais. Neste contato inicial, aplicamos um questionário[1] para obter as seguintes informações: tempo de magistério, formação acadêmica e familiaridade com o tema Análise Combinatória.

Em seguida, descrevemos a proposta, situando-a como um projeto que envolve perspectivas construtivistas de ensino. Explicitamos que não iniciaríamos a abordagem com a utilização de fórmulas e que, no desenvolvimento das situações de aprendizagem, esperávamos auxiliar o aluno na construção do conhecimento envolvido, a partir de situações de exploração e resolução de problemas. Desse modo, pretendíamos propiciar oportunidade aos alunos de construir seus conhecimentos, sem que fossem “transmitidos” pela docente.

Buscamos esclarecer que a docente deveria atuar como mediadora, criando um ambiente que estimulasse o comportamento investigativo e questionador dos alunos. Procuramos deixar claro para as docentes que não estávamos ali para avaliá-las, e, sim, para avaliar o desenvolvimento da THA proposta às professoras.

Na apresentação das atividades, salientamos que as tarefas haviam sido escolhidas de forma a construir conhecimentos e estavam baseadas em resultados de pesquisas, e desejávamos que as docentes, de acordo com suas experiências e seus conhecimentos sobre o tema e também sobre como os alunos aprendem Análise Combinatória, sugerissem alterações. Como estas não ocorreram, acordamos que, durante o desenvolvimento das atividades, com a observação do desempenho dos alunos, as sugestões poderiam ser feitas e as alterações providenciadas.

Esclarecemos também que, durante o trabalho em sala de aula, a pesquisadora atuaria como observadora, e as características das aulas e os comentários, tanto de professores como de alunos, considerados relevantes seriam anotados para posterior análise.

[1] Anexo B

As aulas de todas as professoras foram acompanhadas pela pesquisadora e foram gravadas, porém, foi possível fazer a observação de apenas três aulas da professora de Embu-Guaçu; as demais foram gravadas e transmitidas diariamente via *e-mail* para a pesquisadora, junto com os relatos sobre o desenvolvimento das atividades.

Na instituição de Santo André, uma aula semanal ocorria simultaneamente em duas turmas; assim, a gravação e os relatos do desenvolvimento da aula que não acompanhávamos eram feitos pela docente à pesquisadora .

Para a gravação de áudio, disponibilizamos quatro gravadores em cada aula. Um deles permanecia com a docente, outro sempre com uma mesma dupla, considerada pelas docentes como composta por alunos participativos que, acreditavam elas, poderiam dar importantes contribuições. Os outros dois gravadores eram dispostos em pontos opostos da sala, mas não necessariamente sempre com os mesmos alunos.

Após o desenvolvimento da THA, ocorreu um novo encontro com as docentes, para identificar suas percepções a respeito do trabalho desenvolvido, suas reflexões e sugestões de alterações para uma nova versão da trajetória.

O desenvolvimento acima relatado permite considerar esta uma pesquisa de cunho qualitativo, que, segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 47), é composta por estudos que recorrem à observação participante e à entrevista em profundidade. Há cinco características que permeiam uma pesquisa qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 47):

> (1) a fonte dos dados é o ambiente natural;
> (2) é uma investigação descritiva;
> (3) os investigadores interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
> (4) os investigadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
> (5) o significado é de importância vital nesta abordagem.

Como já explicitamos, as entrevistas e as discussões foram realizadas no local de trabalho dos professores colaboradores, e o desenvolvimento da THA ocorreu em sala de aula; portanto, a escola e a sala de aula, ambiente natural, foram o local da coleta dos dados.

Essa coleta de dados foi realizada de forma descritiva e organizada, com palavras, anotações, transcrições de citações, gravações das aulas e relatórios redigidos logo após as aulas, para que a descrição correspondesse o mais fielmente possível ao ocorrido, pois pretendíamos que os detalhes não escapassem ao estudo. Na abordagem qualitativa, nenhuma informação é dispensada, pois “tudo tem potencial para uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do objeto de estudo” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 49).

A preocupação maior deste estudo diz respeito ao processo de desenvolvimento da THA em sala de aula. Nosso interesse não é somente mostrar os resultados positivos ou negativos da THA, mas, também, verificar qual é a atuação do professor e sua interação com os alunos a partir do uso de uma THA elaborada por um pesquisador. Temos a intenção de observar a prática das professoras colaboradoras diante de um trabalho com uma perspectiva construtivista.

Para melhor situar o leitor, descreveremos a seguir o cenário de pesquisa, ou seja, as escolas, os professores e os alunos envolvidos.

1.3 Caracterização do cenário de pesquisa

1.3.1 As unidades escolares

A escola dos professores P1, P2 e P3

Essa unidade escolar está situada na cidade de Santo André e, por estar próxima da divisa dos municípios de São Paulo e Santo André, sua clientela é composta por alunos da periferia da cidade de São Paulo. A escola apresenta boa estrutura, ou seja, salas amplas e limpas, laboratório de informática e sala de vídeo.

Possui também normas que visam a minimizar problemas de comportamento e relacionamento em sala de aula, assim como nas demais dependências.

O planejamento anual, realizado no início do ano letivo, não apresentou mudanças significativas quanto à prática educacional dos anos anteriores. Os planos de aula, segundo as professoras colaboradoras, não apresentaram alterações, o que foi justificado pela implementação da Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

A unidade escolar conta com um quadro docente composto por 80% de professores efetivos, o que significaria certa estabilidade de professores, porém, o número de afastamentos por motivos de licença saúde ou designação para outros cargos (coordenação e vice-direção) atinge 30% desses efetivos. Isso proporciona certa rotatividade de docentes, o que certamente não colabora para a continuidade de um trabalho pedagógico satisfatório.

A perspectiva construtivista não é predominante nessa unidade escolar, descrita como tradicional pelas professoras. Estas explicitam que há professores que fazem trabalhos que talvez se identifiquem com o construtivismo, porém, isso ocorre em situações pontuais.

O contato inicial, nesta unidade escolar, para viabilizar o desenvolvimento da pesquisa foi realizado com a professora-coordenadora do Ensino Médio e com a diretora da escola. Com a concordância e o apoio de ambas para o desenvolvimento de nosso trabalho, entramos em contato com as professoras que aceitaram participar do projeto.

A escola da professora P4

O público dessa unidade escolar, situada na área rural da cidade de Embu-Guaçu, é composto por alunos que moram em chácaras da cidade e nas redondezas da escola.

A unidade apresenta precariedade de espaço físico e prepara-se para iniciar a construção de um novo prédio em terreno próximo ao atual. Como é afastada do centro do município e convive com a falta de infraestrutura do bairro, que possui apenas alguns pequenos estabelecimentos comerciais, a escola torna-se o único local de encontro dos jovens.

Esta situação justifica o baixo índice de absentismo em comparação com as escolas centrais. Em contrapartida, como os alunos moram em média cinco quilômetros distantes da escola, em dias chuvosos, é comum faltarem à aula, por ser inviável que os ônibus trafeguem por alguns trechos enlameados das estradas vicinais.

Os alunos frequentam a escola desde as séries iniciais do ciclo I, com raras exceções; este fato, segundo a docente P4, colabora para o comportamento dos alunos — mais interessados e com menos problemas de indisciplina, se comparados aos das escolas centrais do município.

O quadro de professores é composto por 30% de efetivos, o que prejudica a formação de uma equipe escolar coesa, pois a cada ano uma nova equipe é formada. E, talvez pela localização da escola, há um grande índice de absentismo dos professores.

A perspectiva construtivista pode ser identificada, segundo a P4, apenas em casos pontuais, em que docentes realizam trabalhos diferenciados. A docente afirma que há resistência dos professores da unidade escolar ao uso do material encaminhado pela Secretaria da Educação do Estado (Caderno do aluno).

O contato inicial para viabilizar o desenvolvimento da pesquisa foi realizado com a Professora P4, que solicitou à equipe gestora a autorização para desenvolver o projeto naquela unidade escolar.

1.3.2 Os professores colaboradores

Professora 1

Docente do gênero feminino, 54 anos, licenciada em Ciências Biológicas com complementação em Matemática, atualmente cursa especialização na área de educação. Professora efetiva, com 16 anos de magistério, dos quais 7 naquela unidade escolar, ministrando aulas de matemática para o Ensino Fundamental II e para o Ensino Médio. Participou de cursos de formação oferecidos pela Secretaria de Educação do Estado, como, por exemplo, Teia do Saber e A Rede Aprende com a Rede.

Em suas aulas, a professora normalmente utiliza a lousa e o apoio de livros didáticos, não faz uso de materiais diferenciados ou novas tecnologias. No que se refere à Proposta Curricular do Estado de São Paulo, a professora afirma seguir seu conteúdo, porém faz pouco uso do material fornecido (Caderno do aluno e do professor). A docente afirmou não concordar com as situações propostas no material, por serem, segundo ela, difíceis para o aluno entender.

Quanto ao tema Análise Combinatória, a docente normalmente inicia a abordagem com definição de Fatorial; em seguida, trabalha arranjos e permutações; e, por fim, combinações, sempre com a definição, o uso de fórmulas e exercícios.

Segundo ela, a maior dificuldade que seus alunos apresentam é quanto à diferenciação entre arranjos e combinações e, assim, não identificam corretamente a fórmula a ser utilizada. A professora admite que também tem, em alguns momentos, dificuldades quanto a essa diferenciação. O emprego de situações-problema ocorre algumas vezes em suas aulas, mas de forma isolada, não como meio de abordagem para um tema matemático.

A consulta a resultados de pesquisas para auxiliar na elaboração de aulas não faz parte de sua prática docente, e ela afirma nunca ter tido curiosidade em buscar por esses resultados.

Professora 2

Docente do gênero feminino, 32 anos, é formada em Administração de Empresas (bacharelado) e cursa especialização em pedagogia. Professora não efetiva, atua há quatro anos no magistério, dos quais dois naquela unidade escolar, em caráter eventual. Na turma em que está desenvolvendo a THA, é professora em caráter excepcional, substituindo a titular de sala, que se encontra em licença saúde por período determinado. Nunca participou de cursos oferecidos pela Secretaria da Educação, o que, segundo ela, não foi possível por não ser professora contratada nas ocasiões dos cursos.

Normalmente utiliza a lousa e livros didáticos em seu trabalho docente e não faz uso de materiais diferenciados ou de novas tecnologias, porém costuma propor atividades em grupos, pois considera esta metodologia mais dinâmica. Afirma seguir o conteúdo da Proposta Curricular do Estado de São Paulo e utilizar o material, dependendo das aulas em que está substituindo a professora titular. Declara que costuma seguir as orientações desta e da coordenação da escola.

Revela nunca ter ministrado aulas de Análise Combinatória, e nunca ter estudado tal conteúdo em sua formação básica ou superior; por esse motivo, precisaria de orientações e estudo para poder colaborar com a pesquisa. Não pode, portanto, saber as dificuldades que os alunos apresentariam, porém, acredita reconhecer as diferenças entre as situações que envolvem permutações, arranjos ou combinações, e a identificação correta da fórmula a ser utilizada.

A consulta a resultados de pesquisas para auxiliar na elaboração de aulas não faz parte de sua prática docente; tampouco buscou esses resultados e ou conhece sua existência.

Professora 3

Docente do gênero feminino, 48 anos, licenciada em Matemática. Professora efetiva, 17 anos de magistério, sendo este o primeiro ano nesta unidade escolar, ministra aulas de matemática para o Ensino Fundamental II e para o Ensino Médio. Participou de cursos de formação oferecidos pela Secretaria de Educação do Estado, como Rede do Saber e Construindo Sempre Matemática. A professora normalmente utiliza a lousa e o apoio de livros didáticos em seu trabalho com os alunos, porém não faz uso de materiais diferenciados ou novas tecnologias. Afirma seguir a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, fazendo alterações e adaptações em seu conteúdo, de acordo com o que julga necessário para a melhor aprendizagem dos alunos.

Pensa ser necessário abordar Análise Combinatória a partir da resolução de situações-problema e sem a utilização de fórmulas, para melhor compreensão dos alunos, com destaque ao princípio fundamental da contagem. Assegura que a maior dificuldade apresentada pelos alunos normalmente é a escolha da melhor estratégia para a resolução de um problema, destacando a distinção entre a importância ou não da ordem como fator principal causador de tal dificuldade.

A professora declara ser importante o trabalho com problemas que envolvam situações do cotidiano, de forma a permitir aos alunos encontrarem diferentes estratégias de resolução e estimular a discussão entre eles, visando à troca de opiniões e proporcionando um aprendizado mais eficaz.

A consulta a resultados de pesquisas para auxiliar na elaboração de aulas não faz parte de sua prática docente e nunca buscou esses resultados.

O desenvolvimento da THA com essa professora não pôde ser acompanhado até o fim. A interrupção ocorreu por iniciativa da pesquisadora, após acompanhar o desenvolvimento da primeira atividade: no encerramento desta, a docente apresentou as fórmulas aos alunos e justificou "ser mais prático e rápido". Essa atitude nos pareceu pouco coerente com o discurso presente no questionário por ela respondido durante a entrevista, em que enfatizou a importância de não realizar um trabalho pautado no uso de fórmulas, e pouco adequada à metodologia construtivista proposta pelo uso da THA.

Com a interrupção dos trabalhos com essa professora, passamos a contar com a colaboração de outra docente, que nomeamos P4, apresentada a seguir.

Professora 4

Docente do gênero feminino, 38 anos, bacharel em Comunicação Social, bacharel e licenciada em Matemática, cursando Mestrado Profissional no Ensino de Matemática, é professora efetiva, com 16 anos de magistério, sendo este o sétimo ano na mesma unidade escolar, ministrando aulas de matemática para o Ensino Fundamental II e para o Ensino Médio.

Participou de cursos de formação oferecidos pela Secretaria de Educação do Estado, como Teia do Saber, Educação Especial, PEC, Educom TV e EaD, para uso da Proposta Curricular da SEE. Em suas aulas, normalmente utiliza livros didáticos, materiais manipulativos, vídeos, *softwares* matemáticos, com apoio de *data show* e de computador próprio, já que a unidade escolar não possui laboratório de informática.

No que se refere à Proposta Curricular do Estado de São Paulo, a professora afirma utilizar o material, fazendo alterações e adaptações de acordo com a metodologia da proposta, procurando preservar a abordagem construtivista. Tais adaptações dizem respeito a situações introdutórias e complementares ao material.

No trabalho com Análise Combinatória, a docente relata nunca partir de fórmulas e afirma ser uma prática habitual o trabalho a partir de situações problemas e contextos. O primeiro contato com a Análise Combinatória ocorreu em estudos particulares para provas de concurso, porém, em sua vida profissional, o primeiro contato com o ensino desse conteúdo aconteceu no ano de 2009, em que utilizou o material da proposta curricular e considerou bem elaborado, possibilitando um trabalho que julga satisfatório. Propôs-se, portanto, a abordar o tema de acordo com o proposto nesse material.

Devido à sua pouca experiência com esse tema, a docente não julgava poder fazer muitas inferências sobre as dificuldades dos alunos, porém, afirmou que a interpretação é o que mais causa dificuldades nesse estudo: por exigir operações simples, o tema apresenta uma falsa impressão de ser fácil; assim, os alunos não se atêm à análise da questão e compõem respostas rápidas, sem a preocupação de validá-las. Julga também que o uso da divisão como forma de eliminar a sobrecontagem seja motivo de dificuldade para eles.

Na elaboração de suas aulas, não costumava fazer uso de resultados de pesquisas, pois, segundo afirmou, não sabia da sua existência nem saberia como buscá-los. Porém, essa prática mudou com o início do curso de Mestrado no ano de 2008, em que teve contato com esses materiais e passou a buscá-los, dependendo do tema e do tempo disponíveis.

1.3.3 Alunos participantes da pesquisa

Colaboraram com a pesquisa 104 alunos da rede pública estadual paulista: 38 deles do 2º ano e 40 do 3º ano do Ensino Médio, estudantes do período noturno de uma mesma escola situada na cidade de Santo André; e 26 alunos do 2º ano do Ensino Médio, do período matutino de uma escola situada na cidade de Embu-Guaçu.

A turma do 3º ano foi selecionada pela professora colaboradora P1 para participar do projeto pelo fato de, no ano letivo de 2009, não ter estudado formalmente o tema Análise Combinatória no 2º ano do Ensino Médio e também por ser considerada pela docente como uma turma participativa. Os motivos declarados para o não estudo do tema foram: a ausência de professor de matemática durante aproximadamente 80% do ano letivo e a suspensão das aulas causada pelo surto da influenza pandêmica H1N1 (gripe A).

Os alunos do 2º ano da unidade escolar de Santo André são descritos pela professora P2 como participativos e interessados, sem grandes problemas de comportamento e indisciplina, porém com dificuldades na aprendizagem de matemática.

A professora P4 também descreve seus alunos como participativos e interessados. Embora considere que apresentem algumas dificuldades em conteúdos matemáticos, a docente afirma de maneira convicta que é uma sala comprometida com os estudos: os alunos realizam as tarefas diárias, tarefas para o lar, são curiosos, questionadores e possuem um ótimo relacionamento com a professora.

Esse entrosamento entre docente e alunos é justificado por ela pelo fato de ser professora da turma desde o Ensino Fundamental; portanto, trabalham harmoniosamente.

CAPÍTULO 2
TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM E PERSPECTIVA CONSTRUTIVISTA

Neste capítulo apresentaremos as formulações de Martin Simon, que retoma aspectos construtivistas de aprendizagem para a elaboração das Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA); em seguida, exporemos pesquisas desenvolvidas sobre THA e descreveremos alguns aspectos da abordagem construtivista na educação escolar.

2.1 As formulações de Martin Simon e outros autores

Martin Simon (1995), em seu artigo “Reconstructing Mathematics pedagogy from a constructivist perspective”, sugere o Ciclo de Ensino da Matemática, que tem como elemento-chave a Trajetória Hipotética de Aprendizagem como uma proposta de formulação de modelos de ensino baseados no construtivismo.

Segundo esse autor, resultados de diferentes estudos afirmam que a perspectiva construtivista vem contribuindo para a construção de esforços nas reformas de ensino de Matemática, porém ele não menciona um modelo particular. Ainda que o construtivismo indique, aos professores de matemática, caminhos úteis para a compreensão de como se processam as aprendizagens, o autor considera um desafio a reconstrução da Pedagogia da Matemática baseada em uma perspectiva construtivista.

Pires (2009, p. 150) explica que o uso da expressão “Pedagogia da Matemática” por Simon (1995) não tem a intenção apenas de indicar o trabalho do professor, mas de referir-se a todas as contribuições para a educação matemática na sala de aula, assim como para o currículo construído e para o desenvolvimento de materiais e pesquisas educacionais. Portanto, a reconstrução da Pedagogia da Matemática é a tomada de decisão a respeito dos conteúdos matemáticos e das tarefas de ensino da Matemática em sala de aula.

Para expor sua proposta de Ciclo de Ensino de Matemática e de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem, Simon (1995) busca situar sua posição diante das perspectivas construtivistas e das relações entre construtivismo e pedagogia da Matemática.

Ao apresentar a perspectiva construtivista, o autor refere-se ao discurso que tem sido moldado para diferentes pretensões do construtivismo, de acordo com o interesse de sua difusão entre teóricos da Educação Matemática, pesquisadores e praticantes:

> De expressões como “Construtivismo Radical” e “Construtivismo Social” derivam algumas orientações, caracterizando a existência de uma diversidade de perspectivas epistemológicas semelhantes dentro dessas categorias. Conseqüentemente, parece importante uma descrição aprofundada da perspectiva construtivista na qual nossa pesquisa está baseada. (SIMON, 1995, p. 5, tradução nossa)

Para a posição radical do construtivismo, o foco da aprendizagem está na reorganização cognitiva individual, ou seja, na construção individual do conhecimento. Por outro lado, a epistemologia com a orientação sociocultural identifica no social a parte indispensável do processo de aprendizagem.

Concordamos com o pesquisador em seu posicionamento de evitar qualquer extremo. Para Simon, a aprendizagem é definida como um processo de construção individual e social, mediada por professores com a concepção de um trabalho estruturado em que se entende a aprendizagem dos alunos.

Simon (1995) alerta para o perigo do engano em ver o construtivismo sob uma visão simplista, com a poética noção: “Deixe os alunos sozinhos, eles construirão seu conhecimento matemático”. Ou, ainda: “Colocar os alunos em grupos e deixá-los socializar como resolvem seus problemas”. Pires (2009) afirma que ideias como essa foram muito veiculadas em experiências educacionais brasileiras e acabaram por acarretar grandes problemas no que se refere ao papel do ensino e do professor.

No desenvolvimento desta pesquisa, buscamos deixar claro aos docentes que esta não é a visão que temos do construtivismo, mas que o professor tem papel fundamental na aprendizagem dos alunos, com suas mediações e percepções de como transcorre o processo de aprendizagem, para possíveis e/ou necessárias alterações na proposta.

O Ciclo de Ensino de Matemática apresentado por Simon (1995) é uma proposta de modelo de ensino que representa as relações cíclicas entre o conhecimento do professor, a reflexão e a tomada de decisões. O ciclo faz-se necessário, uma vez que o objetivo inicialmente planejado pelo docente, muitas vezes, necessita ser modificado para adaptar-se de forma adequada ao grupo de alunos. A interação professor e aluno e o modo como se envolvem no estudo de um conceito matemático é de grande importância neste Ciclo.

No que se refere ao conhecimento dos professores de Matemática, Simon destaca que, além das hipóteses do professor sobre o conhecimento dos alunos, é importante observar que outros conhecimentos interferem no ciclo de aprendizagem, como, por exemplo, teorias sobre ensino de matemática derivadas de pesquisa ou experiência docente; conhecimentos de representações matemáticas, de recursos disponíveis para o desenvolvimento do conteúdo; e conhecimento de diferentes atividades que permitem melhor entendimento do assunto.

Esses conhecimentos, ou seja, as hipóteses sobre o conhecimento dos alunos, as teorias de ensino derivadas de pesquisa e experiência docente, no caso da pesquisa desenvolvida, dizem respeito à pesquisadora, pois foi ela que buscou tais conhecimentos para a elaboração da THA.

Em suas experiências, Simon (1995) afirma que a discussão em sala de aula o motivou a rever seus conhecimentos para favorecer a elaboração de seu “mapa conceitual”. Segundo o autor, o termo “mapa” é usado para enfatizar que o “conhecimento do professor serve como um mapa que traduz como ele se empenha na construção da compreensão dos alunos e identifica o potencial de aprendizagem” (SIMON, 1995, p. 14, tradução nossa).

A partir da análise dos dados coletados em sua experiência com alunos, em que observou a atuação de um professor de matemática durante o desenvolvimento de atividades referentes à construção do conceito de área, Simon (1995) elaborou o

Ciclo de Ensino de Matemática como modelo esquemático de inter-relações cíclicas dos aspectos do conhecimento do professor, de reflexão e tomada de decisão.

Uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) é constituída por três componentes: o objetivo do professor com direções definidas para a aprendizagem de seus alunos; as atividades de ensino; o processamento hipotético de aprendizagem (uma suposição de como o pensamento e o entendimento dos alunos será colocado em ação no contexto de aprendizagem por meio de atividades). As constantes modificações possíveis na trajetória hipotética de aprendizagem são a parte central do modelo.

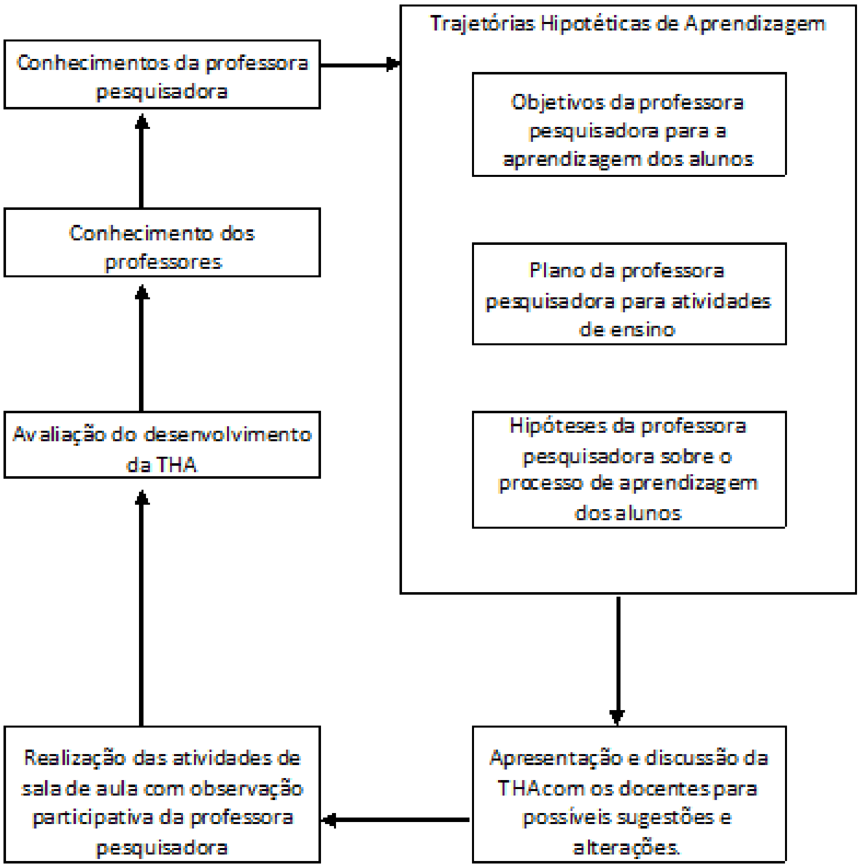


Figura 1 - Adaptação do ciclo de ensino de matemática para a presente pesquisa

Durante o desenvolvimento da THA de Análise Combinatória, acompanhamos as interações entre os alunos e os professores. Para a avaliação dos conhecimentos construídos pelos alunos, optamos por uma atividade escrita durante a THA, por sugestão das docentes, e as observações de seus questionamentos e levantamento de hipóteses, como instrumentos de análise.

A análise do desenvolvimento da THA propiciou aos docentes colaboradores e à pesquisadora enriquecerem seus conhecimentos sobre o processo de aprendizagem dos alunos quanto ao tema Análise Combinatória, gerando, assim, o processo cíclico apresentado no Ciclo de Aprendizagem proposto por Simon (1995).

Para Steffe (1994, apud SIMON, 1995), a partir de seus conhecimentos específicos, os professores de matemática devem interpretar a linguagem e as ações dos alunos e tomar decisões sobre possíveis conhecimentos e possibilidades de aprendizagem destes.

Pires (2009) afirma que, para Simon, a THA propicia ao professor a possibilidade de construir seu projeto de decisões, baseado nas suas melhores suposições de como o conhecimento poderia ser processado. E destaca como Simon explica o uso que faz do termo “trajetória”:

> [...] tanto para fazer referência ao prognóstico do professor como para o caminho que possibilitará o processamento da aprendizagem. É hipotética porque caracteriza a propensão a uma expectativa. O conhecimento individual dos alunos ocorre de forma idiossincrática, embora frequentemente em caminhos similares. O conhecimento do indivíduo tem alguma regularidade (cf. Steffe, Von Glaserfield, Richards e Cobb, 1983), que em sala de aula adquire com atividades matemáticas frequentes em métodos prognósticos, e que muitos dos alunos em uma mesma sala de aula podem beneficiar das mesmas tarefas matemáticas (SIMON, 1995, apud PIRES, 2009, p.157)

As principais características da noção de THA, segundo Simon e Tzur, são:

> As tarefas são selecionadas com base em hipóteses acerca do processo de aprendizagem; as hipóteses sobre o processo de aprendizagem se baseiam nas tarefas propostas.
> Esse construto se fundamenta nos seguintes pressupostos:
> (I) A construção de uma THA se baseia na compreensão do conhecimento atual dos estudantes aos quais será oferecido um dado ensino.
> (II) Uma THA é o veículo para planejar a aprendizagem de um determinado conceito matemático.
> (III) As tarefas matemáticas proporcionam as ferramentas para promover a aprendizagem de um determinado conceito matemático e, portanto, são elemento chave do processo de ensino.

> (IV) Dada a natureza hipotética e inerentemente incerta deste processo, o professor ver-se-á obrigado a modificar sistematicamente cada aspecto da THA. (SIMON; TZUR, 2004, apud GÓMEZ; LUPIAÑEZ, 2007, p. 81)

Steffe (2004, apud GÓMEZ; LUPIAÑEZ, 2007, p. 81) considera a construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem como um dos desafios mais urgentes enfrentados pela Educação Matemática, além de ser um dos “problemas mais apaixonantes”, pois possibilita que o professor compreenda o processo de construção da matemática dos alunos e a forma como os docentes podem influir nessa matemática.

Para Pires (2009), mesmo que diferentes investigadores reconheçam os três elementos centrais da THA e aceitem os pressupostos citados, cada um interpreta e faz uso dessa noção à sua maneira. Uma das principais diferenças de interpretação da noção entre esses investigadores tem a ver com o nível de concretização com que a utilizam: desde o planejamento de várias aulas, até o trabalho com atividades específicas em parte de uma aula.

Gómez e Lupiañez (2007) destacam os dois usos diferentes da THA: como ferramenta de investigação ou como ferramenta de planejamento de ensino. E apresentam a THA segundo alguns pesquisadores.

A noção de trajetória hipotética de aprendizagem, segundo Simon (1995), pressupõe a importância da relação entre a meta pretendida, o raciocínio sobre decisões de ensino e a hipótese sobre esse percurso. Simon e Tzur (2004, apud GÓMEZ; LUPIAÑEZ, 2007, p.82) veem a THA como uma ferramenta para o planejamento de atividades matemáticas no dia a dia de uma sala de aula.

Já Gravemeijer (2004, apud GÓMEZ; LUPIAÑEZ, 2007, p.82) apresenta sua proposta de teorias locais de ensino como “a descrição e a fundamentação para o caminho de aprendizagem prevista em sua relação a uma coleção de atividades de ensino para um tema”. O autor reconhece a dificuldade que teriam os professores para construir THA como as que são produzidas pelos investigadores. No entanto, isso não quer dizer que a única coisa que se pode entregar aos professores sejam meras sequências de ensino para usar. Ele sugere dois elementos que podem ser úteis aos professores: (a) um marco de referência e (b) sequências de atividades que lhes sirvam de exemplo.

Pires (2009) esclarece que, para a geração de uma THA, Simon destaca a prioridade de buscar a forma pela qual o professor desenvolve seu planejamento em atividades de sala de aula, mas também ajuda a identificar como ocorre a interação entre o professor e as observações dos alunos, coletivamente, construindo novos conhecimentos.

Simon enfatiza a relação entre os vários domínios do conhecimento matemático do docente, a THA e as interações com os alunos.

O conhecimento matemático do docente contribui para a identificação de um objetivo de ensino. Os domínios de conhecimento, as metas de ensino e o conhecimento da representação das atividades matemáticas para o professor, seu conhecimento sobre a aprendizagem do aluno, bem como a concepção de aprendizagem e ensino, segundo Simon (1995), contribuem para o desenvolvimento de atividades de aprendizagens e processos de aprendizagens hipotéticas.

Simon (1995) afirma ainda que a modificação da THA não ocorre apenas durante sua elaboração e seu planejamento entre aulas. O professor deve estar constantemente comprometido em fazer ajustes na THA para melhor refletir a ampliação no seu próprio conhecimento. Ele está sempre percebendo as modificações ou transformações que podem ser construídas em algum ou em todos os elementos que a compõem: o método, as atividades e o processamento hipotético.

O Ciclo de Aprendizagem Matemática é considerado por Simon como um caminho para pensar sobre o ensino matemático condizente com as perspectivas construtivistas, enquanto, para Gómez e Lupiañez (2007), a THA é vista como ferramenta de investigação ou como ferramenta de planejamento de ensino.

2.2 Pesquisas sobre o uso de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem

Apresentaremos os principais resultados obtidos pelas pesquisas já desenvolvidas no projeto “Construção de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem e Implementação de Inovações Curriculares em Matemática no Ensino Médio: uma pesquisa colaborativa entre pesquisadores e professores”.

Os temas abordados nas pesquisas foram: Razões e Funções Trigonométricas, por Barbosa (2009); Funções Exponenciais, por Angiolin (2009); Probabilidade, por Cabral Júnior (2009); Funções Logarítmicas, por Lima (2009); Geometria Espacial, por Luna (2009); Funções Polinomiais de 2º grau, por Mesquita (2009); Isometrias, por Freitas (2010); Estatística, por Tonnetti (2010); e Funções Trigonométricas, por Rosenbaum (2010).

A leitura das pesquisas que compõem o projeto permitiu-nos identificar pontos comuns que auxiliaram na análise do desenvolvimento deste trabalho: atuação do professor em sala de aula, dificuldades dos professores pesquisadores na construção das THAs e dificuldades dos docentes colaboradores para o desenvolvimento da THA em sala de aula.

Os resultados apresentados nas pesquisas indicam que o principal fator de aprendizagem dos alunos não é a THA, mas, sim, a dinâmica e o desempenho do professor em sala de aula. Coll e Solé (2009) afirmam que o professor deve atuar como orientador e mediador, e essa mediação, responsável em grande parte pelo aprendizado, deve variar em qualidade e quantidade, ajustando-se às necessidades do aluno.

Para Mesquita (2009), o professor que apresentou maior entusiasmo e envolvimento com a trajetória de aprendizagem proposta foi aquele que conseguiu despertar maior interesse e envolvimento de seus alunos. A autora infere que entregar o material pronto ao docente não é garantia de sucesso da THA, pois ele não pode ser visto como mero aplicador de atividades; ao contrário, o docente é peça fundamental para o desenvolvimento da trajetória de aprendizagem em sala de aula. No entanto, a concepção de um professor transmissor de conhecimentos é muito presente entre os docentes que participaram das pesquisas, o que dificulta o trabalho com a perspectiva construtivista, como relatam os pesquisadores Angiolin (2009) e Mesquita (2009):

> Também consideramos que, embora atividades envolvendo a resolução de problemas, investigação, contextos interdisciplinares, o uso de softwares e aplicação de conceitos e procedimentos matemáticos a situações do cotidiano e em outras áreas de conhecimento, possam favorecer a compreensão dos temas de estudo, ainda há muita dificuldade dos professores em trabalhar dessa forma em sala de aula, pois predomina a idéia de que os alunos só podem aprender mediante exposições/explicações dos professores. (ANGIOLIN, 2009, p. 130)

> Podemos observar [..] professor Gabriel algumas vezes era impaciente e não deixava seus alunos refletirem sobre as questões levantadas. Ele mesmo perguntava e automaticamente respondia a seus questionamentos, impedindo que seus alunos fizessem conjecturas em busca da solução. (MESQUITA, 2009, p.64)

É perceptível a concepção de professores que revelam a ideia equivocada a respeito do construtivismo, descrita por Simon (1995, p.8) como: “Deixe os alunos sozinhos eles construirão seu conhecimento matemático”. Ou, ainda, “Colocar os alunos em grupos e deixá-los socializar como resolvem seus problemas”, como descrevem Lima (2009) e Mesquita (2009):

> Temos como hipótese para a atitude passiva de alguns alunos a proposta da professora durante o desenvolvimento da THA. A professora pedia para os alunos resolverem as atividades e evitava explicações durante essas resoluções, porém os alunos não conseguiam solucionar e as explicações não eram dadas até que algum aluno conseguisse, o que causava desinteresse entre os alunos. (LIMA, 2009, p. 151)

> Observamos também que em várias atividades o professor deixava os alunos soltos, acreditava que eles poderiam construir seus próprios conhecimentos sozinhos, não interagindo com eles (uma falsa ideia de construtivismo). Essa falsa ideia [...] acarretou a desmotivação dos alunos, pois muitos se sentiam inseguros para resolver as atividades propostas sem o auxílio do professor. (MESQUITA, 2009, p. 67)

Outra característica relevante apontada pelos pesquisadores é ausência de discussões e sugestões dos professores com relação às atividades das THA, como relata Tonnetti (2010, p.95): “Após o desenvolvimento da THA, esperávamos sugestões dos professores para podermos elaborar a próxima THA, entretanto não opinaram”. Esse fato também é destacado por Mesquita, que afirma a não intervenção dos professores nas atividades, assim como na elaboração da avaliação proposta:

> Os procedimentos para a elaboração das avaliações se constituíram da mesma maneira que a primeira versão da THA, ou seja, elaboramos as avaliações e apresentamos para os dois professores para que pudessem dar opiniões, sugestões ou realizar alterações. Enfim, novamente os professores não procederam a nenhuma alteração, considerando que as avaliações estavam de acordo com o que tínhamos proposto na THA. (MESQUITA, 2009, p.76)

Porém, Luna (2009) e Rosenbaum (2010) relatam a ocorrência de reflexão dos professores a respeito da sua prática e sobre a aprendizagem dos alunos:

> Embora os professores não tenham alterado significativamente as THAs, notamos que o desenvolvimento do projeto e o compartilhar discussões, baseadas na dinâmica da sala de aula proporcionou aos professores reflexões sobre suas práticas pedagógicas e, consequentemente sobre as hipóteses de aprendizagem dos alunos. (LUNA, 2009, p.97)

> O envolvimento dos profissionais da escola no projeto provocou em ambos, uma reflexão sobre a prática. Há evidências que as tensões vivenciadas pelo professor P2 produziram a (re)significação de saberes e práticas e que as reflexões propiciadas pelo desenvolvimento da THA promoveram a tomada de consciência dos processos de aprendizagem; ampliando e enriquecendo seus conhecimentos. (ROSENBAUM, 2010, p. 202)

A elaboração de THA “não é uma tarefa fácil”, afirma Freitas (2010), opinião compartilhada por diferentes pesquisadores. Mesmo atuando como pesquisadores, a experiência docente nos confere algumas dificuldades que devem ser superadas para realizar um trabalho como esse:

> A primeira delas diz respeito à rotina do professor. Não estamos acostumados a elaborar trajetórias de aprendizagem, ou seja, estabelecer objetivos de aprendizagem, determinar atividades levando em consideração o pensamento do aluno e prever prováveis dificuldades que eles possam encontrar. (FREITAS, 2010, p.151)

O sucesso no desenvolvimento de uma THA depende não só das atividades que a compõem, mas também de todo o processo de elaboração que a envolve: o estudo de pesquisas que forneçam dados sobre como os alunos aprendem tais conteúdos, as hipóteses do docente sobre a aprendizagem de seus alunos, a dinâmica conferida pelos professores às aulas, a interação entre professor e alunos e entre os alunos, e o comprometimento dos alunos na realização das atividades. No entanto, segundo Barbosa (2009, p. 101), “a maneira como os alunos interagem com as tarefas é que determina o potencial de aprendizagem”, assim como afirma Simon:

> O ambiente de aprendizagem envolve resultados da interação entre o professor e os alunos e como eles se engajam em um conteúdo matemático. Um professor pode atribuir uma tarefa, contudo como os alunos constroem suas tarefas e suas experiências é que determina seu potencial de aprendizagem (SIMON, 1995, p. 8).

Outro item que não podemos deixar de citar é a dificuldade — também encontrada por nós — para encontrar professores colaboradores, que é descrita por Tonnetti (2010) como desconfiança, receio e resistência ao desconhecido e assim relatada por Rosenbaum:

> No estudo encontramos semelhante entrave, ao conversar com os Diretores de duas escolas, ambos gostaram do Projeto, mas esclareceram que a decisão de participar ou não caberia ao professor. Na primeira escola um professor temporário que atua há 6 anos na área gostou do projeto, usou algumas atividades iniciais, mas se recusou a ter as aulas observadas alegando constrangimento. Enquanto outra professora, efetiva da escola com mais de 25 anos de experiência, se negou participar do projeto, sequer quis ver as atividades, declarando que do modo que já estava acostumada a trabalhar tinha um bom rendimento e não necessitava de novidades. (ROSENBAUM, 2010, p.49)

Os pesquisadores participantes do projeto obtiveram alguns resultados como esses. No decorrer de nosso trabalho, oportunamente apresentaremos os resultados obtidos durante o desenvolvimento da nossa THA, que, em muitos casos, vêm confirmar os já alcançados por esses pesquisadores como, por exemplo, a resistência dos docentes a participar de pesquisas acadêmicas, como citamos anteriormente; e a importância do envolvimento do docente durante todo o processo, para que ocorra a aprendizagem dos alunos.

2.3 Concepção construtivista na educação escolar

Autores como Coll e Solé (2009) defendem que o construtivismo não é uma teoria, mas um referencial explicativo que, partindo da consideração social e socializadora da educação escolar, agrega diversas contribuições que têm em comum um acordo em torno de princípios que permitem diagnosticar, julgar e tomar decisões fundamentais sobre o ensino. Ou seja, o construtivismo não é um manual a ser seguido à risca sem considerar as necessidades de diferentes situações. Pelo contrário, os autores afirmam a necessidade de teorias que forneçam instrumentos de análise e reflexão sobre a prática, sobre como se aprende e como se ensina, "teorias que podem e devem enriquecer-se infinitamente com contribuições acerca do como influem, nesta aprendizagem e no ensino" (SOLÉ, 2009, p.12).

Para Coll e Solé (2009), a educação escolar provoca o desenvolvimento, na medida em que promove a atividade mental construtiva do aluno. Ou seja, aprender não é copiar ou reproduzir a realidade. Na concepção construtivista, segundo os autores, aprendemos quando "somos capazes de elaborar uma representação pessoal sobre um objeto da realidade ou conteúdo que pretendemos aprender" (Ibidem, p.19). E essa construção do conhecimento inclui a configuração ativa e global do aluno, sua disponibilidade, seus conhecimentos prévios, no âmbito de uma situação interativa, na qual o professor atua como orientador e mediador. Essa mediação varia em qualidade e quantidade e traduz-se em coisas muito diversas – afeto, correção, até o desafio de uma demonstração minuciosa - que se ajustam às necessidades do aluno. E dela depende, em grande parte, o aprendizado.

Ao construir os significados pessoais sobre a realidade, Solé (2009) considera que se constrói também o conceito sobre si próprio (autoconceito) e a estima que se declara (autoestima), características relacionadas ao equilíbrio pessoal. Ambos, autoconceito e autoestima, influenciam a maneira como o aluno constrói sua relação com os outros e com o conhecimento.

Segundo a autora, a crença na própria capacidade pode servir de estímulo para que um aluno se empenhe na realização de uma tarefa, assim como a descrença pode fazer com o que ele nem inicie os trabalhos, pois não crê ser capaz de realizá-lo.

Com relação à motivação para aprender, Solé (2009) divide a forma como os alunos estudam em dois enfoques: o enfoque profundo, em que o aluno se interessa por compreender o significado do que estuda e relaciona os conteúdos aos conhecimentos prévios e às suas experiências e o enfoque superficial, em que o aluno se limita a realizar as tarefas de forma satisfatória. O enfoque com que o aluno aborda uma tarefa pode variar de acordo com essa tarefa a realizar. A autora salienta que, para ser estimulado, o aluno deve saber "o que se pretende e sentir que isso preenche alguma necessidade" (SOLÉ, 2009, p.35). Portanto, o professor deve buscar desenvolver atividades que motivem os alunos a estabelecer um enfoque profundo com o conteúdo proposto.

Outro ponto que consideramos importante nas formulações de Solé (2009) é a visão que o professor possui da turma. Em função dessa visão e do que esperam dos alunos, os professores proporcionam tratamentos educativos diferenciados, que podem traduzir-se em coisas como: tipo e grau de ajuda oferecida, apoio emocional, tipos de atividades, quantidades e dificuldade oferecida pelos materiais utilizados como recurso educativo, entre outros.

Solé (2009) ressalta que o professor traz uma visão da sala de aula e, muitas vezes, subestima a capacidade dos alunos: julga que não sejam aptos para realizar as tarefas propostas. Para a autora, "não existe qualquer dúvida sobre o fato de que as expectativas dos professores sobre o rendimento de seus alunos podem chegar a modificar seu rendimento real." (2009, p. 46).

Tarefas que se ajustam às possibilidades dos alunos lhes são apresentadas como algo que dê a oportunidade de preencher certas necessidades, como a de aprender, por exemplo; e, quando a oportunidade de envolver-se na tarefa é dada ao aluno, são proporcionadas condições para que essa tarefa cause interesse. Quando não ocorre o interesse, "ele deve ser criado, e, depois de ter sido suscitado, deve ser cuidado para não decair. Seu melhor alimento é a experiência de que se aprende e de que se pode aprender" (SOLÉ, 2009, p. 51).

Para aprender um conteúdo escolar do ponto de vista da concepção construtivista, é preciso considerar os conhecimentos prévios dos alunos, sendo esses entendidos como os fundamentos da construção de novos significados. “Grande parte da atividade mental construtiva dos alunos deve consistir em mobilizar e atualizar seus conhecimentos anteriores para entender sua relação ou relações com o novo conteúdo” (MIRAS, 2009, p.61) e para isso é imprescindível que o professor conheça o que o aluno sabe.

Para identificar os conhecimentos prévios dos alunos, a autora destaca a importância da experiência docente, que proporciona indicações bastante confiáveis sobre as dificuldades mais frequentes dos alunos na aprendizagem de um novo conteúdo. Conhecer os conhecimentos dos alunos é essencial na construção da THA, tal qual preconizado por Simon (1995).

Interpretar melhor as ideias que professores e alunos têm sobre o processo de aprendizagem escolar é o aspecto dissertado por Mauri (2009). Para a autora, a concepção construtivista da aprendizagem consiste na construção de conhecimentos mediante a atividade pessoal dos alunos, e cabe ao professor prestar a ajuda necessária para possibilitar essa construção. Mauri salienta que professores conscientes do que representa a atividade de construção do conhecimento não podem deixar de intervir, em seu âmbito escolar, para que os aprendizes consigam apropriar-se dos conteúdos da escola. Este é um dos motivos que justificam o dever de planejar intencionalmente as atividades didáticas e prestar aos alunos a ajuda de que necessitam.

Essa ajuda não pode, porém, substituir a atividade construtiva do conhecimento pelo aluno; portanto, para que ela seja eficaz e possa atuar como tal, deve ser ajustada à situação e às características da atividade mental construtiva que, a cada momento, é apresentada pelo aluno. (COLL, 1990, 1991, apud ONRUBIA, 2009, p. 125) Para isso, a ajuda deve combinar duas características: considerar os conhecimentos prévios dos alunos, tomando-os como ponto de partida; e, ao mesmo tempo, criar desafios que permitam questionar esses conhecimentos. Ou seja, não devemos ignorar o que o aluno já sabe, mas devemos apontar o ensino para o que o aluno não conhece ou não domina suficientemente, colocando-o diante de situações que o obriguem a envolver-se em um esforço de compreensão e atuação autônoma. Segundo o autor,

> [...] a ajuda ajustada pressupõe desafios abordáveis para o aluno; abordáveis não tanto no sentido de que possa resolvê-los ou solucioná-los sozinho, mas de que possa enfrentá-los graças à combinação entre suas próprias possibilidades e os apoios e instrumentos recebidos do professor. (ONRUBIA, 2009, p.125)

Essas são características também descritas na pesquisa francesa, conhecida como situações adidáticas na Teoria das Situações Didáticas (TSD) desenvolvidas por Guy Brousseau (1975). A situação adidática é "[...]uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar". (ALMOULOUD, 2007, p.33)

De acordo com a complexidade das diferentes variáveis que intervêm no processo de ensino, segundo Zabala (2009, p. 154), a concepção construtivista "provê elementos de análise e reflexão sobre a prática, de modo a possibilitar uma compreensão maior dos processos que nela intervêm e a consequente avaliação sobre sua pertinência educativa". A função social atribuída ao ensino e às ideias e intenções do professor sobre como as aprendizagens ocorrem são fatores determinantes no processo de ensino.

Na concepção construtivista, o papel ativo e protagonista do aluno não se contrapõe à necessidade de um papel igualmente ativo por parte do professor (COLL; SOLÉ, 2009). As interações, no processo de construção de conhecimento, devem ser caracterizadas pelo respeito mútuo e pelo sentimento de confiança (SOLÉ, 2009).

As orientações apresentadas acerca de como deve ser a prática docente dirigida pelos pressupostos construtivistas, levaram-nos à construção de categorias de análise que foram utilizadas para direcionar as observações realizadas em sala de aula durante o desenvolvimento da THA. Buscamos observar a dinâmica da atuação docente a partir de características que permitissem identificar: as mediações realizadas quanto à quantidade e ao tipo de intervenção, a partir das dificuldades dos alunos; o interesse dos alunos durante a realização das atividades;

a valorização dos conhecimentos prévios dos alunos por parte da docente; a visão que as docentes apresentavam de seus alunos; e a influência ou não dessa visão em sua atuação em sala de aula.

CAPÍTULO 3
ANÁLISE COMBINATÓRIA NO SISTEMA EDUCACIONAL

Para a elaboração de nossa Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), buscamos orientações quanto ao ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória contidas em resultados de pesquisas, documentos oficiais e livros didáticos utilizados pelos docentes participantes da presente pesquisa. Esses materiais auxiliaram-nos na elaboração das atividades da THA e permitiram que tivéssemos um panorama dos resultados de pesquisas realizadas sobre o tema.

3.1 Pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da análise combinatória

Na busca de estudos realizados sobre o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória, realizamos uma pesquisa no Banco de Teses da Capes, em bibliotecas de universidades e *sites*. Nessa procura utilizamos como palavras-chave as expressões: análise combinatória, contagem, arranjos, permutações e combinações.

Dos trabalhos encontrados sobre o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória, selecionamos: Esteves (2001), que trata do tema no Ensino Fundamental; Costa (2003), que investiga as concepções de professores. Cinco trabalhos são destinados ao Ensino Médio ou equivalente: dissertações de mestrado de Sturm (1999), Pinheiro (2008) e Sabo (2009), e os trabalhos de Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) e de Correia, Fernandes e Almeida (2009); e, por fim, uma tese de Pessoa (2009), que investiga o raciocínio combinatório em alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.

Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997, p. 182) consideram fundamentais duas etapas para tornar a aprendizagem da Análise Combinatória mais fácil: “conhecer noções básicas sobre a natureza dos erros dos alunos ao solucionar problemas de combinatória e identificar as variáveis que podem influenciar essas dificuldades”.

Em investigação para avaliar o raciocínio combinatório de alunos do ensino secundário, os autores construíram e aplicaram a 720 alunos de 14 e 15 anos um questionário contendo 13 exercícios envolvendo problemas combinatórios sem repetição. Parte desses alunos já havia vivenciado situações de ensino sobre análise combinatória e parte deles nunca havia estudado o tema.

Este trabalho foi realizado com a intenção de responder as questões: “Qual o papel da Análise Combinatória na Probabilidade e Matemática discreta?”, “A capacidade combinatória é somente um componente matemático ou é um componente fundamental do raciocínio lógico?”, “Há variáveis de tarefas que afetam os procedimentos e os erros apresentados pelos alunos ao resolver problemas combinatórios?” e “Como deveríamos considerar estas variáveis no ensino e na avaliação?”.

Para a construção do questionário, foram consideradas as variáveis de tarefa: modelo combinatório implícito (seleção, distribuição e modelos de partição); tipo de operação combinatória[2] (permutações, combinações, arranjos); natureza dos elementos a serem combinados (letras, números, pessoas e objetos); e valor dado aos parâmetros.

Após a análise das respostas obtidas com a aplicação do questionário, os pesquisadores inferiram que os dois grupos revelaram dificuldades, mesmo nos exercícios que apresentavam agrupamentos com poucos elementos. O índice de erros foi um pouco menor entre os alunos que já haviam estudado o tema.

Os problemas elencados pelos pesquisadores são: erro de interpretação do enunciado do problema; erro de ordem (considerar a ordem quando esta é irrelevante); erro de repetição (o aluno não considera a possibilidade de repetir os elementos quando é possível e vice-versa); tipo de objeto (confundir objetos indistinguíveis por objetos distinguíveis e vice-versa); exclusão (exclusão de algum elemento na forma da configuração); enumeração não sistemática (tentar resolver o problema enunciado por tentativa e erro, sem um processo recursivo que conduza à formação de todas as possibilidades); resposta intuitiva (o aluno dá uma resposta

[2] Optamos por usar o termo “operação combinatória” ao nos referirmos aos tipos de agrupamentos: permutação, combinação e arranjo, quando referidos a trabalhos de Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997), pois essa forma é adotada por esses autores.

numérica, sem justificativa); operações aritméticas incorretas; esquecimento da fórmula (errar a fórmula após identificar corretamente a operação combinatória necessária); esquecimento do significado dos valores dos parâmetros na fórmula combinatória; interpretação errada do diagrama de árvore (pouco uso e construção inadequada); falha ao aplicar uma propriedade; confusão quanto ao tipo de subconjuntos; e erro nos tipos de partições formadas.

Para os autores, a recursão consiste em começar a obter uma versão mais fácil do problema, refletir sobre ela e exprimir o processo na forma de algoritmo. Assim, nas atividades que envolvem arranjos e permutações, a recursividade assume papel importante, dado que, geralmente, a construção de uma determinada configuração efetua-se a partir de uma menor. A construção da árvore de possibilidades apresenta caráter recursivo, já que uma árvore com k ramificações é construída a partir de outra com (k-1) ramificações.

Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) afirmam que o professor deve estar atento às diferentes variáveis na elaboração de atividades, para conseguir uma evolução do raciocínio combinatório, de forma que os alunos compreendam e tenham concepções corretas para os trabalhos com Análise Combinatória. Recomendam que a organização do ensino apresente atividades que compreendam o pensamento recursivo e os procedimentos sistemáticos de enumeração, em vez de centrar o ensino e a aprendizagem apenas na definição e na aplicação de fórmulas de combinatória.

Com essas recomendações, procuramos construir a THA com tarefas que proporcionassem ao professor situações em que poderia dar maior atenção aos procedimentos de enumeração. Elaboramos uma atividade inicial, que denominamos diagnóstica, para observar se os alunos mobilizariam conhecimentos para realizar a enumeração das possibilidades, ou seja, se utilizariam contagem direta, diagramas de árvores, tabelas e diagrama sagital. Buscávamos também identificar alguns dos erros citados por Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997).

Sturm (1999) elaborou, aplicou e analisou uma proposta alternativa para Análise Combinatória. Em seu trabalho, “Investigar as possibilidades pedagógicas de um ensino de Análise Combinatória sob uma abordagem alternativa”, seu objetivo foi identificar as possibilidades e os limites do ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio. Utilizou situações-problema para desenvolver a compreensão do princípio multiplicativo e suas aplicações e a construção de fórmulas e/ou técnicas de contagem.

Assim como em nossa pesquisa, a investigação de Sturm (1999) apresenta uma perspectiva qualitativa, uma vez que o pesquisador desenvolveu seu trabalho em suas aulas, estudando sua prática. O instrumento de análise utilizado foi o diário, que é descrito como um caderno em que o pesquisador fez anotações sobre suas reflexões, sobre as intervenções do professor e as reações dos alunos. Além do diário, foram usadas para análise duas provas com propostas de exercícios de acordo com as atividades utilizadas na pesquisa e um questionário que procurava identificar a opinião dos alunos sobre a abordagem utilizada. O estudo foi realizado com 33 alunos de uma sala de 2º série do Ensino Médio de uma escola do sistema privado de ensino do município de Itu-SP.

Para o autor, os exercícios foram preparados de forma que levassem os alunos a organizar-se para elaborar "uma listagem adequada ou chegar a um procedimento geral de cálculo, uma fórmula geral" (STURM, 1999, p. 36), ou seja, os trabalhos propiciariam momentos para que os alunos refletissem sobre o que estavam estudando.

Os exercícios propostos não apresentavam necessariamente uma ordem crescente de dificuldades e foram considerados pelo autor como tradicionais. Porém ele explicita que a denominação "alternativa" vem da abordagem utilizada: sem o uso inicial de fórmulas e com interações durante a sua aplicação. O pesquisador considera que o uso da árvore de possibilidades e os procedimentos para a enumeração sistemática das possibilidades deveriam ter sido mais incentivados e que a familiarização proposta na primeira fase propiciou que as fórmulas de Arranjo e de Permutação fossem compreendidas com certa "naturalidade". A partir da recomendação de Sturm (1999), adotamos, para nossas atividades, tarefas que exigem a enumeração das possibilidades.

O símbolo p! é recomendado pelo pesquisador como um simplificador, para evitar cálculos trabalhosos, não havendo a necessidade de ser apresentado inicialmente, já que o uso inicial da fórmula não é utilizado pelo autor.

O autor destaca como um aspecto positivo o uso do princípio multiplicativo que permitiu aos alunos "compreender a potencialidade e aplicações desta estratégia" (STURM, 1999, p.81). Ele enfatiza a importância de a sistematização ocorrer a partir da síntese de situações apresentadas anteriormente, ressaltando que nesta fase não apresentou a fórmula $C_{n,p} = \frac{n!}{p!\cdot(n-p)!}$, pois julga mais didático para o momento utilizar $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$, que permite ao aluno relacionar os tipos de agrupamentos, assim como é indicado nos trabalhos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996).

Optamos, em nossa pesquisa, pela sistematização, como sugere Sturm (1999), deixando livre escolha ao docente, caso prefira a aproximação das fórmulas utilizadas normalmente nos livros didáticos.

Concordamos com Sturm (1999), quando afirma que o conhecimento das fórmulas não garante sucesso e que convém iniciar o tema "combinação" a partir de situações que levem à percepção do efeito da divisão do número de arranjos pelo número de permutações, pois essa escolha diminuiria as dificuldades dos alunos, contribuindo para um melhor entendimento da fórmula.

Esteves (2001) buscou em sua dissertação investigar a aquisição e o desenvolvimento dos primeiros conceitos de análise combinatória em adolescentes de 14 anos de idade, cursando a última série do Ensino Fundamental.

A autora desenvolveu um estudo com a participação de dois grupos, um chamado "experimental" e outro "de referência", os quais estudaram a introdução desse conceito, segundo abordagens diferentes. O grupo de referência foi composto por 30 alunos do segundo ano do Ensino Médio, e o grupo experimental contou com a participação de 28 alunos da 8ª série (atual 9º ano) do Ensino Fundamental, todos de uma escola da rede particular de ensino da cidade de Santos, em São Paulo.

A abordagem adotada no trabalho com o grupo de referência foi, segundo a pesquisadora, a adotada pelos livros didáticos, com a predominância do uso de fórmulas. E, para o grupo experimental, foi elaborada e aplicada uma sequência em que não são apresentadas fórmulas, com apresentação das definições e da nomenclatura de cada agrupamento somente no último encontro da sequência.

Ambos os grupos realizaram um pré-teste e um pós-teste, e a análise dos resultados foi feita sob dois pontos de vista: desempenho geral dos grupos e desempenho por itens, objetivo, indivíduo.

Ao analisar as concepções apresentadas pelos alunos, Esteves (2001) fez uma classificação das dificuldades observadas durante o processo de aprendizagem da Análise Combinatória, que são: a falta de um procedimento recursivo que os levasse à formulação de todas as possibilidades; a resposta injustificada errônea; o não uso da árvore de possibilidades ou sua construção inadequada, o que causava uma interpretação equivocada; o emprego da palavra "distribuir" como "dividir", em problemas de permutação e arranjo; e a confusão ao identificar os problemas de combinação e arranjo, ou seja, o erro ao considerar importante a ordem quando ela não é e vice-versa.

A pesquisadora infere que a solução para tais dificuldades, que também foram apresentadas no trabalho de Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997), está na "busca de uma aprendizagem fundamentada na atividade do aluno que procura construir seu próprio conhecimento" (ESTEVES, 2001, p. 193). E propõe que o ensino da Análise Combinatória seja realizado a partir de atividades diversificadas que favoreçam a busca de hipóteses e despertem o raciocínio.

Em sua dissertação de mestrado, Costa (2003) desenvolveu uma pesquisa com professores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio da rede pública estadual de ensino. Os docentes eram participantes de um projeto de formação continuada na PUC-SP em convênio com a Secretaria Estadual da Educação de São Paulo. O estudo teve o objetivo de analisar e estudar os instrumentos disponíveis para o professor, na introdução do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental por processo de amostragem. Buscou também identificar as concepções dos docentes sobre o objeto matemático em questão.

Para responder às questões de pesquisa: "*Como o professor de Matemática está instrumentalizado para ensinar Combinatória no Ensino Fundamental?; Quais as concepções do professor que influenciam sua prática pedagógica e como uma formação continuada pode alterar ou reforçar estas concepções*?", o autor realizou um estudo da Transposição Didática da Análise Combinatória para o Ensino Fundamental, que envolveu a análise dos documentos oficiais, de livros didáticos e questionários respondidos pelos docentes.

Com a intenção de fazer inferências sobre o conhecimento matemático desses docentes de modo que não se sentissem avaliados, o questionário foi composto por questões que apresentavam estratégias de soluções desenvolvidas por alunos fictícios.

Na análise dos resultados obtidos pelo questionário, o autor constatou que os docentes apresentaram: dificuldades em estabelecer um procedimento sistemático que os levasse à formulação de todas as possibilidades de agrupamentos; resposta numérica errônea, sem explicação do raciocínio utilizado ou justificativa das respostas; pouco ou nenhum uso de representações, como árvore de possibilidades, ou dificuldades em sua construção; e dificuldade para reconhecer, na formação dos agrupamentos, se a ordem dos elementos é relevante ou não.

Em suas considerações, Costa (2003) afirma sua preocupação em verificar se os docentes analisados possuíam as mesmas dificuldades apresentadas pelos alunos do Ensino Fundamental e Médio participantes das pesquisas de Esteves (2001), Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) e Sturm (1999).

A dissertação de Pinheiro (2008) teve por objetivo investigar a viabilidade de uma sequência de ensino para introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória a partir da resolução de problemas por meio de situações didáticas.

Pinheiro (2008) inicia seu trabalho aplicando um pré-teste a 15 alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública em Belém do Pará, com a intenção de verificar se os alunos conseguiriam resolver problemas que envolvessem habilidades básicas de Análise Combinatória. A atividade apresentava cinco exercícios que envolviam Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples.

A sequência de ensino apresentada por Pinheiro (2008) foi elaborada contendo situações que visavam contribuir para a institucionalização do Princípio Fundamental da Contagem, do conceito de permutação e da notação de fatorial; para a introdução do conceito de arranjo simples e de combinação simples e para a percepção da diferença entre os dois; e para a institucionalização das fórmulas de Arranjo Simples e de Combinação Simples.

Esta sequência de ensino foi aplicada em dez encontros, destinados ao desenvolvimento dos itens descritos acima e aos jogos, todos estes com objetivos específicos: o jogo *PIF-PAF da Combinatória* busca aprofundar o conceito do princípio fundamental da contagem; o jogo *Cartas da Combinatória* tem o propósito de aprofundar o conceito de permutação e o cálculo com o fatorial e o jogo *Dominó Combinatório* tem a finalidade de aprofundar os conceitos de arranjo e combinação e estabelecer continuamente a diferença entre eles. Cada encontro seria seguido de outro destinado à resolução de exercícios, que não aconteceram por dificuldades apresentadas pela escola, pois o pesquisador, que não exercia a docência na ocasião da pesquisa, utilizou aulas cedidas por uma professora amiga.

Para analisar a evolução dos alunos e assim responder sua questão de pesquisa, foi aplicado um pós-teste, com questões semelhantes às do pré-teste.

Nas considerações apresentadas, Pinheiro (2008) valida sua hipótese de que as situações didáticas que enfatizam a resolução de problemas como ponto de partida são favoráveis à aprendizagem e à institucionalização dos conceitos básicos de Análise Combinatória. Comparando suas análises do pré-teste e do pós-teste, o pesquisador considera ter percebido uma melhora acentuada nos alunos quanto às habilidades para resolver situações que envolvem conceitos de Análise Combinatória, visto que o número de questões não respondidas diminuiu significativamente, do pré-teste para o pós-teste.

Correia, Fernandes e Almeida (2009) apresentam resultados de uma investigação sobre o ensino e a aprendizagem de operações combinatórias, realizada com a participação de 23 alunos de uma turma do 12º ano de escolaridade de uma escola do Distrito de Braga, em Portugal.

Este estudo foi realizado inicialmente com uma intervenção de ensino composta de questões que envolviam arranjos simples e com repetição, permutações simples e notação de fatorial e combinação simples, em 10 aulas de 90 minutos. Cada tema foi trabalhado em uma atividade de descoberta e com uma ficha de trabalho contendo exercícios.

A atividade de descoberta incorporava intencionalmente um fator de aprendizagem que sugeria a aplicação de um método particular, com o objetivo de levar os alunos a descobrir a lei de formação associada a cada operação combinatória. As fichas de trabalho continham exercícios variados que, segundo os pesquisadores, tinham por objetivo “a apreensão das operações combinatórias com a valorização da diversificação de estratégias de resolução em detrimento da utilização técnica de fórmulas” (CORREIA; FERNANDES; ALMEIDA, 2009, p. 135). Cada ficha apresentava exercícios das operações já estudadas em aulas anteriores, não se atendo à operação trabalhada na ficha de descoberta mais recente. Todas as fichas revelavam a solução numérica dos problemas, o que permitia aos alunos confrontar suas respostas e, no caso de incorretas, identificar falhas de raciocínio.

O papel do professor era questionar, acompanhar e incentivar o trabalho dos alunos, realizado em grupos. Segundo os pesquisadores, o trabalho colaborativo produz melhores resultados, consideração com a qual concordamos, o que nos levou a propor, em nosso trabalho, que parte das atividades fossem desenvolvidas em duplas ou grupos. Porém, também consideramos importante momentos de trabalho individual para que o aluno possa identificar e observar os conhecimentos que adquiriu.

Na pesquisa de Correia, Fernandes e Almeida (2009), para avaliar os resultados, foi aplicado um questionário, com o objetivo de obter a opinião dos alunos sobre a intervenção de ensino e sua metodologia e um teste, contendo sete questões, em que foram observados as estratégias de solução e os erros comuns apresentados pelos alunos.

As estratégias utilizadas foram categorizadas como: “desenhos, operações de multiplicação, adição e divisão, fórmulas, desenhos e operações, desenhos e fórmulas e operações e fórmulas” (CORREIA; FERNANDES; ALMEIDA, 2009, p.136), enquanto os erros identificados foram classificados em erro de ordem, de repetição, parâmetros, operação combinatória, operandos, operação numérica e enumeração.

Em suas conclusões, os autores afirmam que os alunos, em resposta ao questionário, apresentaram uma opinião positiva quanto ao trabalho realizado. Quanto ao teste, os pesquisadores declaram que os erros identificados relacionam-se predominantemente com os operandos e a ordem, seguindo-se a eles a repetição, a operação combinatória[3], os parâmetros, a operação numérica e a enumeração. O erro mais frequente referia-se aos operandos considerados nas operações obtidas, resultando contagens incompletas corretas (de parte da configuração) ou completas incorretas (repetição de configurações possíveis) e incompletas incorretas (apresentavam configurações além das pedidas no enunciado). O segundo erro típico foi o de ordem, predominando a não consideração da ordem quando esta era necessária.

Concordamos com os autores, que finalizam sua pesquisa enfatizando a importância de retirar o máximo proveito das diferentes estratégias, como o diagrama de árvore, os procedimentos de enumeração sistemática e a tradução de problemas em subproblemas, permitindo ao aluno uma clarificação dos operandos envolvidos e das operações numéricas consideradas.

O estudo de Pessoa (2009), em sua tese de doutorado, teve por objetivo verificar e analisar o desenvolvimento do raciocínio combinatório entre alunos do 2º ao 12º ano de escolarização. Sua pesquisa contou com a participação de 568 alunos da escola básica, em média 51 alunos de cada ano (2º ao 12º ano) de quatro escolas de Pernambuco — duas instituições particulares e duas públicas —, que responderam as mesmas oito questões que envolviam os quatro significados de combinatória (arranjo simples, permutação, combinação simples e produto cartesiano).

[3] A expressão “operação combinatória” é utilizada pelos autores, ao referirem-se a tipos de agrupamentos: arranjos, permutações e combinações.

Para delinear seu estudo, a pesquisadora traçou os seguintes objetivos específicos: verificar o desempenho dos alunos nos diversos tipos de problemas de combinatória; observar seus desempenhos ao longo do período de escolaridade, lidando com as mesmas questões; analisar como alunos das séries iniciais que não tiveram instrução sobre o tema resolvem tais problemas e como os alunos de séries finais da escola básica resolvem os mesmos problemas, após o conhecimento de procedimentos formais; identificar suas estratégias, comparar desempenhos e estratégias e verificar sua progressão ao longo dos anos; verificar quais invariantes são mais facilmente reconhecidas pelos alunos; e analisar as diferentes formas de representações simbólicas usadas pelos alunos na resolução de problemas que envolvem raciocínio combinatório.

A análise dos dados foi realizada de forma qualitativa e quantitativa, com o auxílio do *software* Statistical Package for Social Sciences – SPSS. O desempenho dos alunos foi analisado a partir das variáveis: gênero, tipo de escola, nível de ensino, ano de escolarização, significados de Combinatória dos problemas e ordem de grandeza dos números. Os tipos de estratégias e respostas apresentadas pelos alunos foram analisados qualitativamente.

Embora a variável gênero não tenha sido controlada, a pesquisadora confirmou sua hipótese de que essa variável não tem influência no aprendizado matemático. Quanto à variável tipo de escola, foi observado que, no início de escolarização, não há diferenças significativas, porém, com o avanço da escolaridade, o desempenho superior na escola particular é evidenciado, e a pesquisadora infere que um dos motivos possivelmente seja o fato de as escolas particulares participantes apresentarem perfil de características construtivistas e de incentivo à criatividade, o que contribui para o melhor desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos.

Porém, a pesquisadora teve o cuidado de ressaltar que esse resultado não pode ser generalizado, concluindo que a qualidade do ensino pode variar de escola para escola; dessa forma, a alguns alunos é dada uma maior oportunidade de avanço em suas habilidades matemáticas. Um dado importante foi o fato de que todos os alunos, independentemente do tipo de escola, aumentaram seu desempenho durante o passar dos anos escolares, o que parece indicar que o desenvolvimento do raciocínio combinatório está diretamente ligado ao ensino da Combinatória e aos demais conteúdos matemáticos e de outras áreas de ensino.

O progresso maior era esperado pela pesquisadora no Ensino Médio, porém, diferentemente do que foi antecipado, aconteceu do Ensino Fundamental I para o Ensino Fundamental II, principalmente no 5º e 9º anos, o que permitiu a Pessoa (2009) afirmar que experiências escolares ou não escolares, ligadas diretamente ou não ao ensino de Combinatória, devem contribuir e influenciar o desempenho dos alunos.

Entre alunos do 3º ano do Ensino Médio, segundo a pesquisadora, há um misto da influência escolar e não escolar. Apenas entre os alunos da escola particular surgiu o uso de fórmulas, porém, em muitos casos, de maneira inadequada, sem identificação da fórmula correta para cada situação.

Relacionando os significados de combinatória (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação), Pessoa (2009) afirma haver avanços na compreensão de tais significados com o desenvolvimento da escolarização. Já a última variável analisada, a grandeza numérica, apresentou uma forte influência no desempenho dos alunos: em problemas com um menor número de possibilidades, apresentaram um desempenho melhor, o que pode ser devido à facilidade de manipular as quantidades. Essa variável apenas não influenciou nas questões de produto cartesiano, que aparentemente é mais fácil para os alunos.

Pessoa (2009) conclui, salientando a importância de a escola reconhecer que o desenvolvimento do raciocínio combinatório acontece ao longo dos anos e de buscar aproveitar

> as pistas fornecidas pelas diversas formas que o aluno utiliza para resolver e responder a questões combinatórias, para que possa auxiliá-los nos processos de sistematização, aprofundamento, ampliação e formalização dos seus conhecimentos(PESSOA, 2009, p.252).

Da mesma forma que as recomendações dos demais estudos aqui apresentados, Pessoa confirma a necessidade de conhecer o que os alunos sabem e que tipos de erros cometem, para que o docente possa elaborar seu plano de ensino para a Análise Combinatória.

Sabo (2010) em “Saberes Docentes: A Análise Combinatória no Ensino Médio”, sua dissertação de mestrado, que objetivou investigar os saberes dos professores de Matemática com relação ao tema, realizou um estudo com professores desse nível de ensino, com o intuito de responder a questão: “Quais saberes podem ser identificáveis por meio da fala do professor do Ensino Médio, utilizando-se de entrevistas semiestruturadas, em relação ao ensino de análise combinatória?”

No desenvolvimento de sua pesquisa, o procedimento utilizado foi a realização de entrevistas semiestruturadas, livres e estruturadas, com seis professores. Nas análises, o pesquisador procurou verificar a influência da experiência escolar (Ensino Médio e Superior) na prática desses professores; sua participação em projetos de desenvolvimento profissional; as recomendações dos PCN; o uso de fórmulas, demonstrações e generalizações; as dificuldades e a valorização dada pelos docentes ao cálculo; o uso do princípio fundamental da contagem; e quais conceitos fundamentais devem ser discutidos no Ensino Médio com relação ao tema.

O pesquisador conclui, afirmando que foi possível observar a reprodução da prática docente e do saber herdado dos professores que participaram de suas experiências escolares e de formação. Com relação ao uso de fórmulas, o autor percebeu uma divergência, pois alguns professores afirmaram valorizar o Princípio Multiplicativo, enquanto outros, que optaram pelo uso de fórmulas, demonstraram não saber justificá-las ou validá-las.

Alguns professores entrevistados por Sabo (2010) declararam ter dificuldades em distinguir se é relevante ou não a hierarquia nos agrupamentos durante a leitura de problemas. Com essas constatações, o pesquisador afirma a importância de propiciar oportunidades, em grupos de formação e discussão, para possibilitar uma reavaliação dos saberes docentes e a construção de novos saberes, com o objetivo de favorecer mudanças na prática do professor.

Observamos, com a leitura de pesquisas sobre o tema Análise Combinatória, algumas considerações que convergem para um ensino pautado na resolução de problemas como ponto de partida. Nenhum dos estudos aqui elencados recomenda o uso de fórmulas para iniciar o estudo do tema, como percebemos na afirmação de Pessoa (2009, p. 80): “Um algoritmo corretamente executado não irá resolver um problema se estiver implementado incorretamente ou se não for apropriado ao problema”.

Porém, o seu uso não é desprezado pelos pesquisadores: há o consenso de que as fórmulas são “uma possibilidade de resolução de modo mais econômico e seguro” (PESSOA, 2009, p.80). É defendida pelos pesquisadores a necessidade de compreender o que é solicitado nos enunciados dos problemas que envolvem raciocínio combinatório sem o apelo a palavras-chave, assim como é indicado que a resolução de problemas combinatórios seja inicialmente feita, aproveitando as diferentes estratégias que os alunos apresentam, de acordo com seus conhecimentos prévios.

A dificuldade de reconhecer a importância da ordem ou não ordem nos agrupamentos é fato confirmado em todas as pesquisas, assim como a ampliação da dificuldade de resolver os problemas, quando há um acréscimo considerável na enumeração devido ao aumento dos parâmetros envolvidos.

Apoiados nos resultados, nas indicações de pesquisas e nos documentos oficiais que orientam o ensino brasileiro, procuramos elaborar uma trajetória hipotética de aprendizagem, com o objetivo de colaborar para a compreensão, pelos alunos, de situações que envolvem raciocínio combinatório, focalizando os pontos que são comuns nos resultados de pesquisas e buscando desenvolver atividades que visam minimizar as dificuldades citadas nesses trabalhos.

Buscamos, em nossa THA, uma organização que privilegiasse o uso do Princípio Fundamental da Contagem e o emprego da divisão como forma de evitar a sobrecontagem de agrupamentos. Procuramos propor a exploração de procedimentos de enumeração e o uso da árvore de possibilidades como ferramentas fundamentais para auxiliar a compreensão e minimizar a ocorrência dos erros considerados comuns por todos os pesquisadores, como, por exemplo, a não percepção da importância ou não de hierarquia dos elementos de um agrupamento.

3.2 Recomendações Curriculares

Neste item apresentaremos os documentos oficiais que regem o Ensino Médio brasileiro, assim como suas respectivas recomendações para o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória: Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 1999), Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) (BRASIL, 2002), Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais estão divididos em dois segmentos: Ensino Fundamental (PCNEF) e Ensino Médio (PCNEM). Como optamos por realizar nossa pesquisa com a colaboração de professores e alunos do Ensino Médio, iremos observar os documentos destinados a esse nível de ensino, ou seja, os PCNEM, os PCN+ e as Orientações Curriculares Complementares.

Os PCNEM tiveram sua primeira publicação no ano de 1999. O documento, dividido em três áreas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e suas Tecnologias, apresenta uma proposta para o Ensino Médio que pretende fazer “uma explicitação das habilidades básicas, das competências específicas, que se espera que sejam desenvolvidas pelos alunos” (BRASIL, 1999, p.203) em Matemática neste nível de ensino escolar.

O papel do raciocínio combinatório é destacado nesse documento, no que se refere à aplicação a fenômenos naturais e sociais:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (BRASIL, 1999, p.257)

Com a intenção de encaminhar um ensino compatível com as "pretensões educativas e ampliar as orientações contidas nos PCNEM, adiantando elementos ainda não explicitados" (BRASIL, 2002, p.12), foram publicados os PCN+[4], volume dedicado a trazer elementos de utilidade para o professor na definição de conteúdos, abordagens, opções metodológicas e avaliações do aprendizado, assim como a proporcionar uma formação continuada ao docente.

A apresentação do conteúdo da área Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias nos PCN+ é organizada em três eixos temáticos: 1 - Álgebra: números e funções; 2 – Geometria e medidas; 3 – Análise de Dados. A Análise Combinatória está inserida neste último tema, que é disposto em três unidades: Estatística, Contagem e Probabilidade.

Os PCN+ destacam a importância da análise de dados em "problemas sociais e econômicos, como nas estatísticas relacionadas à saúde, populações, transportes, orçamentos e questões de mercado" (BRASIL, 2002, p.126). E propõem como objetos de estudos para esse eixo temático, os conjuntos finitos de dados, numéricos ou qualitativos, o que dá origem a procedimentos que abordam processos de "contagem combinatórios, frequências e medidas estatísticas e probabilidades" (ibid., p. 127). "A contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório". (BRASIL, 2002, p. 126).

Segundo orientações do documento (ibid., p.127), o aluno deve ser capaz de decidir qual é a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder enumerar todos os casos possíveis, sem que isso seja aprendido por meio de fórmulas de aplicação. O conhecimento deve ser construído por um processo que traga significado para o modelo matemático a aprender. As fórmulas aparecem como consequência do raciocínio combinatório desenvolvido durante a resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos em situações com uma quantidade elevada de dados.

[4] PCN+ Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais

Os conteúdos e as habilidades propostos para a temática “contagem”, recomendados para o 2º ano do Ensino Médio são:

> **Contagem:** princípio multiplicativo; problemas de contagem.
> • Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.
> • Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.
> • Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem. (BRASIL, 2002, p. 124)

A elaboração das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) teve como objetivo “contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente” (BRASIL, 2006, p. 5) e, para isso, o documento trata de três aspectos: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhá-los; o projeto pedagógico e a organização curricular.

Na escolha dos conteúdos, é destacada a importância de considerar os diferentes propósitos da formação matemática na Educação Básica. Espera-se que o aluno, ao final do Ensino Médio, saiba usar a matemática para resolver problemas práticos e modelar fenômenos em diferentes áreas do conhecimento; compreenda que a Matemática é uma ciência com características próprias, organizada via teoremas e demonstrações; perceba a matemática com um conhecimento social e historicamente construído; e saiba apreciar sua importância no desenvolvimento científico e tecnológico.

No que tange à forma de trabalhar, o documento orienta que o aluno seja colocado em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático, ou seja, que ele formule questões, estabeleça hipóteses, tire conclusões, apresente exemplos e contraexemplos, generalize situações, abstraia regularidades, crie modelos e argumente com fundamentação lógico-dedutiva (BRASIL, 2006, p. 70).

Já quanto ao trabalho pedagógico, é enfatizado que as instituições devem elaborar seus projetos pedagógicos como um processo constante de reflexão e discussão sobre os problemas escolares, tendo como intenção “a busca de soluções, por meio de ações colaborativas entre os membros que constituem a escola." (BRASIL, 2006, p. 90).

Retornando aos conteúdos, estes são organizados em quatro blocos: Números e Operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade, o que não significa que devam ser trabalhados separadamente; ao contrário, o documento recomenda a articulação entre eles e a retomada, de forma intencional, a conteúdos trabalhados no Ensino Fundamental.

Os conteúdos do bloco *Análise de dados e probabilidade* são recomendados para todos os níveis da educação básica, em especial para o Ensino Médio. A Análise Combinatória e a Probabilidade são apresentadas como essenciais nesse bloco de conteúdos. Segundo os PCN+, os alunos devem adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas, porém, a Combinatória não tem apenas a função de auxiliar no cálculo probabilístico, mas tem inter-relação direta com as ideias de experimentos compostos a partir de um espaço amostral discreto e operações combinatórias (BRASIL, 2006, p. 79).

Outro destaque refere-se ao uso do diagrama de árvores como importante para a conexão entre os experimentos compostos e a Combinatória, pois permite a visualização da estrutura dos múltiplos passos de um experimento.

3.2.1 Análise da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (Caderno do Professor e Caderno do Aluno)

A Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE-SP), no ano de 2008, com o objetivo de apoiar o trabalho nas escolas estaduais e contribuir para a melhoria da aprendizagem dos alunos, iniciou a implementação da Proposta Curricular do Estado de São Paulo, buscando garantir um currículo mínimo para as escolas da rede pública estadual.

Este material prevê a elaboração dos seguintes subsídios:

- ✓ um documento básico, que apresenta os "princípios orientadores para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo", (SÃO PAULO, 2008, p.8), priorizando a competência da leitura e da escrita;

✓ um segundo documento, destinado às unidades escolares, aos dirigentes e gestores, com a finalidade de apoiá-los na implementação do currículo;

✓ um terceiro documento, dirigido aos professores, intitulado "Caderno do professor", composto por situações de aprendizagem organizadas por série/ano e acompanhadas de indicações das competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos em cada tema ou tópico de conteúdo, orientações e sugestões para a gestão da sala de aula, avaliação e recuperação; e

✓ um quarto documento, produzido no ano de 2009, composto por cadernos dirigidos aos alunos e organizados por série/ano, disciplina e bimestre. Este material contém as mesmas situações de aprendizagem que constam no Caderno dos professores.

De acordo com as orientações gerais sobre os cadernos, os temas que compõem o conteúdo disciplinar dos bimestres não se afastam do que é usualmente apresentado nos livros didáticos. A inovação refere-se à abordagem sugerida, pois esta evidencia a contextualização dos conteúdos, as competências relacionadas à leitura e à escrita matemática e seus elementos culturais internos e externos ligados à matemática (SÃO PAULO, 2009a).

Ainda segundo essas orientações, as situações propostas pretendem ilustrar a forma de abordagem sugerida, instrumentalizando o docente para o seu trabalho em sala de aula. Tais orientações afirmam que as situações de aprendizagem são independentes e podem ser exploradas pelo professor com diferentes intensidades, de acordo com seu interesse e o de sua classe.

Descreveremos e analisaremos, a seguir, a abordagem presente nas situações de aprendizagem que envolvem a Análise Combinatória.

Os conteúdos dos cadernos são organizados em oito unidades de extensões aproximadamente iguais, que podem corresponder a oito semanas de trabalho letivo. Essas unidades são distribuídas em quatro situações de aprendizagem.

O tema Análise Combinatória compõe o caderno do 3º bimestre da 2ª série do Ensino Médio, juntamente com o estudo de Probabilidade. E, segundo os autores, esses temas costumam trazer certo desconforto não apenas aos estudantes, mas também aos professores.

> A tradicional abordagem que prioriza a classificação dos tipos de agrupamento para a utilização de fórmulas é um dos fatos que causam tal dificuldade. Embora, essa abordagem seja um caminho rápido, ela não prioriza o entendimento das situações e a possibilidade de resolução de situações inéditas. (SÃO PAULO, 2009a, p. 9)

A resolução de problemas é sugerida como metodologia de aprendizagem, para que assim seja possível evitar a limitação demasiada das estratégias de raciocínio que os estudantes podem e devem mobilizar, ao confrontar-se com uma dificuldade real.

A proposta do documento é de que a classificação dos agrupamentos e a formalização nos moldes conhecidos dos livros didáticos sejam relegadas a um segundo plano e sejam realizadas no final, conforme a vontade e a necessidade do docente.

As quatro situações de aprendizagem deste volume são intituladas: Probabilidade e proporcionalidade: no início era o jogo; Análise Combinatória: raciocínios aditivo e multiplicativo; Probabilidade e raciocínio combinatório; Probabilidade e raciocínio combinatório: o binômio de Newton e o triângulo de Pascal.

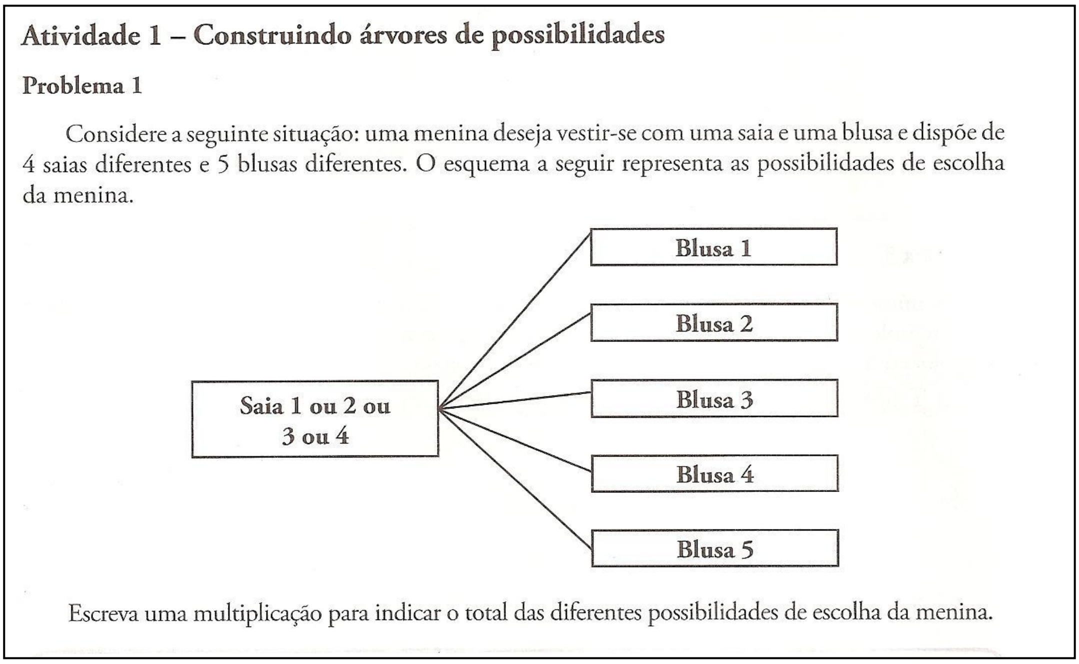
O estudo da Análise Combinatória está presente a partir da segunda situação de aprendizagem; portanto, apresentaremos nossas observações apenas sobre as situações de aprendizagem destinadas ao estudo desse conteúdo.

Segunda Situação de Aprendizagem: Análise Combinatória: raciocínios aditivo e multiplicativo.

Esta situação de aprendizagem apresenta, como conteúdos e temas, os casos de agrupamentos. A orientação dada ao professor é de que seja estimulado o uso de diferentes representações, como diagramas, árvores de possibilidades, tabelas e desenhos. Porém, o único tipo de registro encontrado nas atividades presentes no Caderno do aluno foi a árvore de possibilidades.

As atividades que compõem essa situação de aprendizagem envolvem agrupamentos em que a ordem dos elementos deve ser respeitada (arranjos simples, permutações simples e com repetição) e agrupamentos em que a ordem dos elementos pode ser alterada, sem que isso conduza a novos agrupamentos (combinações simples).

A atividade 1, denominada “Construindo árvores de possibilidades”, propõe uma situação que envolve o produto cartesiano.



Atividade 1 – Construindo árvores de possibilidades

Problema 1

Considere a seguinte situação: uma menina deseja vestir-se com uma saia e uma blusa e dispõe de 4 saias diferentes e 5 blusas diferentes. O esquema a seguir representa as possibilidades de escolha da menina.

Escreva uma multiplicação para indicar o total das diferentes possibilidades de escolha da menina.

Figura 2 – Problema 1 - Atividade 1 - Situação de Aprendizagem 2 - (SAO PAULO, 2009b)

Observamos que a atividade apresenta a árvore de possibilidades e indica que a solução é dada por meio de uma multiplicação. Em seguida, o Caderno propõe situações com diferentes contextos (números, letras, objetos), mas que são parecidas com o problema 1 em sua solução, não exigindo que o aluno explore a enumeração, pois fica explícito que precisarão identificar os números que deverão multiplicar.

Inferimos que essa indicação de como resolver os problemas elimina a oportunidade de o aluno explorar a situação e construir seu conhecimento a partir desta. Essas indicações são recorrentes nas demais atividades que compõem o estudo da Análise Combinatória, como podemos observar na proposta seguinte.

Atividade 2 – Formação de filas sem e com elementos repetidos

Leitura e Análise de Texto

As filas

Quando duas pessoas A e B colocam-se em fila, há apenas duas possibilidades: primeiro vem A e depois B, ou primeiro vem B e depois A. Se uma pessoa C juntar-se a essas duas, a fila poderá, agora, ser formada de 6 maneiras diferentes:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Se uma quarta pessoa juntar-se a essas, serão, agora, 4 vezes mais filas do que o número anterior. Isto é, serão $4 . 6 = 24$ filas.

Figura 3 - Atividade 2 - Situação de Aprendizagem 2 - (SAO PAULO, 2009b)

O texto explicativo apresenta ao aluno o raciocínio a ser usado. Após esse texto, o Caderno apresenta uma sequência de problemas que o aluno resolverá a partir do exemplo dado, ou seja, identificando os números que deverão ser multiplicados. E, após alguns exercícios de anagramas, a orientação é de que o professor apresente o número fatorial (n!).

Destacamos o problema 7, em que a instrução de como resolver uma situação que envolve anagramas com letras repetidas, ou seja, permutação com repetição, também é apresentada de forma a eliminar o desafio que poderia ser proposto aos alunos.

Problema 7

Trocando a ordem das letras INA podem ser formados 6 anagramas diferentes:

INA, IAN, AIN, ANI, NAI, NIA

Com as letras da palavra ANA, o número de anagramas é menor; são apenas 3:

ANA, AAN, NAA

Por que o número de anagramas dessas palavras não é o mesmo, se ambas têm 3 letras? A resposta é: a palavra ANA tem letras repetidas.

A palavra LUTA tem 24 anagramas, enquanto a palavra LULU, que tem 2 "L" e 2 "U", tem apenas 6 anagramas, pois a troca de um "L" com outro, ou a troca entre os dois "U" não gera novo anagrama. Quer dizer, o total de 24 anagramas de uma palavra com 4 letras distintas fica, no caso de LULU, duas vezes dividido por 2, por causa dos "L" e dos "U" repetidos. Então, $24 \div 2 \div 2 = 6$.

Agora, responda: qual é o total de anagramas das palavras a seguir?

a) CARRO

b) CORPO

c) CORRO

Figura 4 - Problema 7- Atividade 1 - Situação de Aprendizagem 2 - (SAO PAULO, 2009b)

O texto explicativo já indica ao aluno que deverá utilizar a divisão como meio de evitar a contagem de anagramas repetidos. Além disso, não é apresentada outra abordagem no Caderno do professor, para que este esteja mais bem instrumentalizado para essa explicação.

Problema 3 – Quantos anagramas podem ser formados com as letras das palavras:

a) ANA **b)** CASA

c) CABANA **d)** BANANA

a) $(3 \,.\, 2 \,.\, 1) \div 2 = 3$

b) $(4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1) \div 2 = 12$

c) $(6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1) \div 6 = 120$

d) $[(6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1) \div 2] \div 6 =$
$= (6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1) \div 12 = 60$

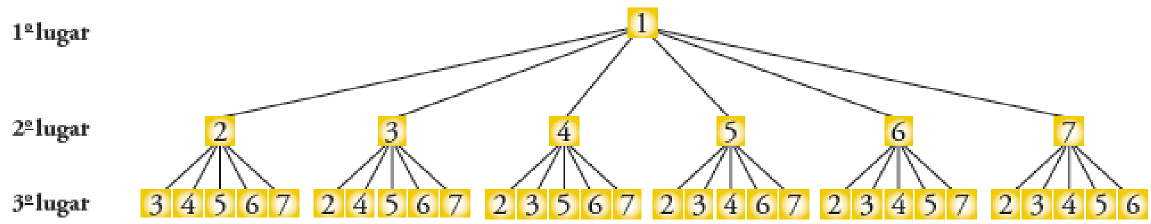
Figura 5 - Problema 2 - Situação de Aprendizagem 2 – (SAO PAULO, 2009a).

Podemos perceber o mesmo tipo de instrução nas demais atividades.

A atividade 3, intitulada: “Formação de grupos com elementos de uma ou mais categorias”, completa a situação de aprendizagem 2 e é composta por problemas que envolvem combinação simples. Inicialmente é apresentado o texto explicativo a seguir:

Leitura e Análise de Texto

Observe a representação de uma parte da *árvore de possibilidades* para o seguinte problema: quantos grupos ordenáveis (filas) de 3 elementos podemos formar com 7 pessoas?



Ao observar a *árvore* percebemos que, para determinada pessoa em 1º lugar, há 6 opções para o 2º colocado e, para cada um destes, há 5 possibilidades de escolha para o 3º colocado. Assim, a quantidade de grupos ordenáveis é, nesse caso, igual ao produto $7 . 6 . 5 = 210$.

Agora, vamos mudar a questão e perguntar: a quanto ficaria reduzido o número de agrupamentos se eles não fossem ordenáveis? Isto é, se o agrupamento “João, José, Maria” fosse o mesmo de “João, Maria, José”, o mesmo de “Maria, José, João” e igual a todos os demais em que só é trocada a ordem dos participantes? Em outras palavras, se em vez de serem feitas filas fossem feitos grupos de pessoas?

Os 210 grupos ordenáveis ficariam reduzidos a 35 grupos não ordenáveis (resultado de $210 \div 6$), uma vez que cada grupo de 3 elementos permite 6 permutações entre seus elementos.

Figura 6 – Texto explicativo – (SAO PAULO, 2009b)

Assim como ocorre com os casos de permutação com repetição, o texto explicativo retira o desafio que o aluno teria na exploração de situações que o levariam a identificar o uso da divisão.

No problema 8, a indicação é de que seja realizada a generalização do arranjo simples e da combinação simples. A orientação do Caderno do professor é de que esse enunciado objetiva o uso do fatorial, porém reafirma que deve ser utilizado caso o docente julgue necessário.

Problema 8

Em uma sala há **n** pessoas, com as quais formaremos grupos, ordenáveis ou não. De quantas maneiras diferentes poderemos formar o grupo se ele tiver:

a) apenas 1 elemento?

b) 2 elementos?

c) 3 elementos?

d) 4 elementos?

e) **p** elementos, $\mathbf{p} < \mathbf{n}$?

Figura 7- Problema 8 - Situação de Aprendizagem 2 – (SAO PAULO, 2009b)

Terceira Situação de Aprendizagem: probabilidades e raciocínio combinatório

Esta situação de aprendizagem tem por objetivo apresentar aos alunos o cálculo de probabilidades que exigem a mobilização do raciocínio combinatório. Os casos mais comuns, segundo as orientações do Caderno do professor, são aqueles associados à formação de grupos não ordenáveis, sendo esse o “principal aspecto que merece atenção no desenvolvimento metodológico proposto” (SÃO PAULO, 2009a, p.36).

Um dos problemas para esse estudo é apresentado a seguir. E, envolve a questão de ordenação.

Problema 3

Será realizado um sorteio de 3 pessoas entre 8, em que 5 delas são mulheres e 3 são homens. Determine a probabilidade de que sejam sorteados

a) um homem, outro homem e uma mulher, nessa ordem;

b) dois homens e uma mulher, em qualquer ordem;

c) um homem, uma mulher e outra mulher, nesta ordem;

d) um homem e duas mulheres, em qualquer ordem.

Figura 8 - Problema 3 – Situação de Aprendizagem 3 - (SAO PAULO, 2009b)

No Caderno do professor são apresentadas duas soluções: uma, que, segundo os autores, valoriza o raciocínio combinatório e outra, com a utilização de fórmulas. Porém, a proposta afirma que o uso da primeira estratégia "acarretará aos alunos maior desenvoltura ao enfrentarem novas situações". (SÃO PAULO, 2009a, p.37)

> Ainda no contexto desse problema, *como poderíamos calcular a probabilidade de sortear 3 pessoas e ocorrerem 2 homens e 1 mulher*? A estratégia de cálculo que pretendemos valorizar nesta Situação de Aprendizagem consiste em estabelecer uma ordem para os resultados sorteados e, em seguida, contar todas as sequências possíveis de resultados iguais a este. Para tanto, precisaremos do raciocínio combinatório abordado anteriormente.
>
> - Probabilidade de ocorrer "Homem-Homem-Mulher", nessa ordem:
> $$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{56}$$
> - Cada agrupamento com dois homens e uma mulher pode ser associado a $\frac{3!}{2!}$ sequências, que diferem pela ordem de seus elementos.
> - Probabilidade de 2 homens e 1 mulher, em qualquer ordem: $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3!}{2!}=\frac{5}{56}\cdot 3=\frac{15}{56}$

Figura 9 – Resolução item b – Problema 3 – Situação de aprendizagem 3 – (SAO PAULO, 2009a)

Solução apresentada com o uso de fórmulas:

Tradicionalmente esse tipo de problema é resolvido utilizando-se a fórmula das combinações:

- Número de elementos do espaço amostral = $= n(S) = C_{8,3} = \frac{8!}{5!3!} = 56$
- Número de elementos do evento desejado = $= n(E) = C_{3,2} \cdot C_{5,1} = \frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{5!}{4!1!} = 3 \cdot 5 = 15$
- Probabilidade procurada = $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{15}{56}$

Figura 10 - Resolução item b – Problema 3 – Situação de aprendizagem 3 com o uso de fórmulas – (SAO PAULO, 2009a)

A partir dessas situações, a proposta é de que os problemas de Probabilidade, que apresentam situações de ordenação ou não, sejam resolvidos sem o uso de fórmulas. Mas seu uso não é vetado, apenas é feita a sugestão de que seja adiado.

3.2.2 – Análise dos livros didáticos

Consideramos que os livros didáticos são utilizados pelo docente como um complemento em sua formação acadêmica e como apoio em sua prática escolar. Assim, buscamos verificar como o tema Análise Combinatória está estruturado nos livros: **Livro 1-** *Matemática*, de Manoel Paiva (2005) e **Livro 2-** *Matemática*, de Luiz Roberto Dante (2009). Os dois exemplares são volumes únicos, adotados pelas escolas participantes da pesquisa e fornecidos aos alunos pelo governo federal, por meio do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM).

Livro 1- *Matemática*, de Manoel Paiva (2005)

Este livro inicia o capítulo intitulado “Os princípios da Análise Combinatória” com a apresentação do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) como alicerce da Análise Combinatória (p.342). Uma situação contextualizada é utilizada como forma de auxiliar o entendimento do PFC.

2. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DE CONTAGEM

A análise combinatória é alicerçada pelo princípio fundamental de contagem, que pode ser entendido a partir do problema a seguir.

Uma empresa identifica seus funcionários por meio de crachá.

Os crachás dos funcionários da administração apresentam uma letra latina seguida de um algarismo; por exemplo, $\boxed{\text{B6}}$. Os crachás dos funcionários da fábrica apresentam uma letra latina seguida de um algarismo e de uma letra grega; por exemplo, $\boxed{\text{C4}\beta}$. O número de funcionários da administração é igual ao número de crachás compostos das letras A, B, C e dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5; o número de funcionários da fábrica é igual ao número de crachás compostos das letras A, B, C, dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e das letras α, β e λ. Quantos funcionários trabalham na administração dessa empresa? E na fábrica?

Figura 11 - PFC - Manoel Paiva (2005)

Ainda neste capítulo é apresentado o fatorial para “auxiliar em problemas que envolvem cálculos trabalhosos, permitindo apresentar resoluções de maneira abreviada” (Ibidem, p.348).

O capítulo seguinte, intitulado “Agrupamentos e métodos de contagem”, é iniciado com a introdução de dois tipos de agrupamentos: arranjos e combinações.

1. TIPOS DE AGRUPAMENTO

A análise combinatória identifica dois tipos distintos de agrupamento: os arranjos e as combinações.

- Os **arranjos** são agrupamentos em que se considera a ordem dos elementos agrupados. Por exemplo, a palavra LAGO é um arranjo de letras, pois, mudando-se a ordem dessas letras, obtém-se outra palavra:

LAGO **GALO**

Palavras diferentes

- As **combinações** são agrupamentos em que não se considera a ordem dos elementos agrupados. Por exemplo, a comissão de alunos formada por Luís, Joana e Rodrigo é uma combinação de alunos, pois a ordem dos membros não altera a comissão:

{**Luís**, **Joana**, **Rodrigo**} {**Joana**, **Rodrigo**, **Luís**}

Comissões iguais

Esses tipos de agrupamento podem ser **simples**, quando não apresentam nenhum elemento repetido, ou **compostos**, quando apresentam pelo menos um elemento repetido. Os exemplos anteriores são agrupamentos simples.

Neste capítulo, vamos estudar os arranjos simples, as combinações simples e um tipo particular de arranjo com repetição.

Figura 12 - Tipos de Agrupamentos - Manoel Paiva (2005)

A partir dessa descrição inicial, são mostrados de forma pontual os diferentes agrupamentos, a partir da definição, da fórmula, de exercícios resolvidos seguidos por exercícios de aplicação.

Diferentemente do que é feito para o Princípio Fundamental da Contagem, os exemplos utilizados para iniciar os estudos dos tipos de agrupamentos não utilizam situações contextualizadas. Eis como é feito com permutações:

3. PERMUTAÇÃO SIMPLES

Consideremos o conjunto $I = \{a, b, c\}$. Os arranjos simples dos três elementos de I tomados três a três são:

$$(a, b, c) \quad (b, a, c) \quad (c, a, b)$$
$$(a, c, b) \quad (b, c, a) \quad (c, b, a)$$

Cada um desses arranjos é chamado de **permutação simples** dos elementos de I. Isto é, uma permutação simples dos elementos de I é qualquer seqüência de elementos distintos formada por todos os elementos de I. Observe que duas dessas permutações se diferenciam apenas pela ordem dos elementos.

Exemplo

$(a, b, c) \neq (b, a, c)$ **Diferem pela ordem dos elementos.**

Definição

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ um conjunto com n elementos. Chama-se permutação simples dos n elementos de I todo arranjo simples desses n elementos tomados n a n.

Cálculo do número de permutações simples

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ um conjunto com n elementos. O número de permutações simples dos n elementos de I, que indicamos por P_n, é igual ao número de arranjos simples desses n elementos tomados n a n. Isto é:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1!} = n!$$

Assim, temos: $\boxed{P_n = n!}$

Figura 13- Definição de Permutação Simples (Livro *Matemática*, de Manoel Paiva (2005)

Outra opção feita pelo autor foi o pouco uso da enumeração. Paiva (2005) empregou um exemplo com o uso da tabela de dupla entrada para auxiliar no entendimento do Princípio Fundamental da Contagem; um caso de contagem direta para apresentar a definição de cada agrupamento simples (arranjos simples, permutações simples e combinações simples); e o diagrama de árvore, exclusivamente para justificar as fórmulas de permutação com repetição e de combinações, como podemos ver a seguir:

4. PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS

Quantos anagramas podemos formar com a palavra BANANA?

Se as seis letras que compõem essa palavra fossem distintas entre si, teríamos 6! anagramas. Porém, ao permutar letras iguais, a palavra não se altera; por isso, concluímos que o número de anagramas é menor que 6!.

Para calcular esse número de anagramas, vamos colocar "cores" diferentes nas letras iguais, considerando-as como elementos diferentes, isto é:

BANANA

Assim, podemos formar 6! permutações com esses elementos distintos. Em cada seqüência dos elementos B, A, N, A, N e A, se permutarmos A, A e A, entre si, e N e N, entre si, obteremos $3! \cdot 2!$ seqüências diferentes; por exemplo, agindo dessa maneira na seqüência BAAANN, temos:

$$\text{BAAANN} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{BAAANN} \\ \text{BAAANN} \\ \text{BAAANN} \\ \text{BAAANN} \\ \text{BAAANN} \\ \text{BAAANN} \\ \text{BAAANN} \\ \text{BAAANN} \\ \text{BAAANN} \\ \text{BAAANN} \\ \text{BAAANN} \\ \text{BAAANN} \end{array}\right\} 3! \cdot 2! = 12$$

Porém, se eliminarmos as "cores" nessas 12 seqüências, teremos o mesmo anagrama BAAANN.

Analogamente, se eliminarmos as "cores" nas 6! seqüências dos elementos B, A, N, A, N e A, obteremos grupos de $3! \cdot 2!$ anagramas iguais. O número de grupos assim obtidos é exatamente o número de anagramas distintos da palavra BANANA. Esse número é:

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$$

ou seja, há 60 anagramas distintos da palavra BANANA.

Podemos generalizar esse raciocínio considerando os n elementos:

$$\overbrace{\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{\substack{n_1 \text{ elementos} \\ \text{iguais a } a_1}},\ \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{\substack{n_2 \text{ elementos} \\ \text{iguais a } a_2}},\ \ldots,\ \underbrace{a_k, a_k, \ldots, a_k}_{\substack{n_k \text{ elementos} \\ \text{iguais a } a_k}}}^{n \text{ elementos}}$$

tais que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ são distintos entre si. O número de permutações desses n elementos, que indicaremos por $P_n^{(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)}$, é dado por:

$$P_n^{(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Figura 14 - Permutação com repetição (Livro *Matemática*, de Manoel Paiva (2005)

O uso da enumeração não é explorado em outras situações nem indicado nos exercícios propostos por esse autor, o que revela a opção pelo trato da Análise Combinatória a partir do uso de fórmulas, que é corroborado pela análise dos exercícios resolvidos e propostos. Exemplificaremos com o exercício de combinação simples, resolvido a seguir:

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R7 Calcular:

a) $C_{6,4}$ b) $C_{7,3}$ c) $C_{5,5}$ d) $C_{5,0}$

Resolução

Aplicando a fórmula $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, temos:

a) $C_{6,4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} = 15$

b) $C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 35$

c) $C_{5,5} = \frac{5!}{5!(5-5)!} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = \frac{5!}{5! \cdot 1} = 1$

d) $C_{5,0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} = \frac{5!}{1! \cdot 5!} = 1$

R8 Uma comissão de três membros deve ser escolhida entre sete pessoas. De quantos modos diferentes pode-se escolher a comissão, sabendo-se que as pessoas que formarem a comissão terão funções idênticas?

Resolução

Como a ordem dos elementos componentes **não** altera a comissão, temos que cada comissão é uma **combinação**. Logo, o número de comissões é:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 35$$

Figura 15 - Exercícios resolvidos de combinação - *Matemática*, de Manoel Paiva (2005)

A apresentação de situações diversas, em que o aluno deve identificar qual é o tipo de agrupamento da questão para assim resolvê-la, ocorre apenas no final do capítulo, com exercícios complementares, e após um texto que apresenta critérios para diferenciar os tipos de agrupamentos.

6. CRITÉRIO PARA DIFERENCIAR ARRANJO DE COMBINAÇÃO

Quando tentamos resolver um problema de análise combinatória, deparamo-nos com a seguinte questão: os agrupamentos mencionados no problema são arranjos ou combinações? Para eliminar essa dúvida, vamos agir da seguinte maneira: construímos um dos agrupamentos sugeridos pelo problema e, a seguir, mudamos a ordem de apresentação dos elementos desse agrupamento.

- Se com essa mudança na ordem dos elementos obtivermos um agrupamento **diferente** do original, então esse agrupamento será um **arranjo**.
- Se com essa mudança na ordem dos elementos obtivermos um agrupamento **igual** ao original, então esse agrupamento será uma **combinação**.

Figura 16 - Critério para diferenciar arranjo de combinação - Manoel Paiva (2005)

O livro encerra o estudo do tema com a apresentação do binômio de Newton.

Livro 2- *Matemática*, de Luiz Roberto Dante (2009)

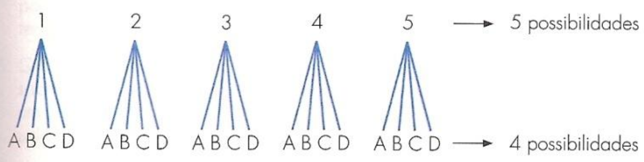
Este livro inicia o capítulo intitulado "Análise Combinatória" com a apresentação do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) a partir de uma situação contextualizada.

2 Princípio da multiplicação ou princípio fundamental da contagem

Acompanhe a seguir a resolução de alguns problemas.

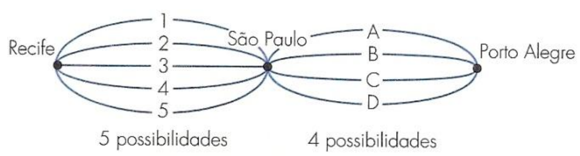
1ª) Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre? Para facilitar a compreensão vamos utilizar os esquemas seguintes:

PARA REFLETIR: Dizemos que a viagem de Recife a Porto Alegre é um evento composto de duas etapas sucessivas e independentes. Quais são elas?



PARA REFLETIR: A esse primeiro esquema damos o nome de árvore de possibilidades ou diagrama de árvore.

ou



Total de possibilidades: $5 \cdot 4 = 20$.
São elas:

1A	1B	1C	1D
2A	2B	2C	2D
3A	3B	3C	3D
4A	4B	4C	4D
5A	5B	5C	5D

Portanto, nas condições do problema, há 20 maneiras possíveis de viajar de Recife a Porto Alegre, passando por São Paulo.

Figura 17 - Princípio Fundamental da Contagem - Dante (2009)

Em seguida, expõe os tipos de agrupamentos de forma pontual. Cada um é apresentado a partir de exemplo, fórmula, definição, exercícios resolvidos e exercícios propostos. O estudo do fatorial é feito dentro do item “permutações simples”.

Para a enumeração foi utilizado o diagrama de árvore. Seu uso ocorre nos exemplos iniciais do PFC, de permutação simples e de arranjo simples. Diverso do livro 1, o diagrama de árvores não é utilizado como recurso para auxiliar no entendimento da fórmula de combinações ou permutações com repetição. A contagem direta, ou seja, a descrição dos agrupamentos por exaustão é utilizada no exemplo inicial de combinação simples.

5 Combinações simples

Nos problemas de contagem, o conceito de combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos.

Observe com atenção estes dois exemplos:

1º) Ane, Elisa, Rosana, Felipe e Gustavo formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quais e quantas são as possibilidades?
Representemos por **A**: Ane; **E**: Elisa; **R**: Rosana; **F**: Felipe; e **G**: Gustavo. Precisamos determinar todos os subconjuntos de 2 elementos do conjunto de 5 elementos {A, E, R, F, G}. A ordem em que os elementos aparecem nesses subconjuntos não importa, pois Ane–Elisa, por exemplo, é a mesma dupla que Elisa–Ane.
Então, os subconjuntos de 2 elementos são:
{A, E}, {A, R}, {A, F}, {A, G}, {E, R}, {E, F}, {E, G}, {R, F}, {R, G}, {F, G}.
A esses subconjuntos chamamos de combinações simples de 5 elementos tomados com 2 elementos, ou tomados 2 a 2, e escrevemos $C_{5,2}$.
Como o número total dessas combinações é 10, escrevemos $C_{5,2} = 10$.

2º) Consideremos um conjunto com 5 elementos e calculemos o número de combinações simples de 3 elementos, ou seja, o número de subconjuntos com 3 elementos.
Conjunto com 5 elementos: {a, b, c, d, e}.
Combinações simples de 3 elementos: {a, b, c}, {a, b, d}, {a, b, e}, {a, c, d}, {a, c, e}, {a, d, e}, {b, c, d}, {b, c, e}, {b, d, e}, {c, d, e}.
Cada combinação dessas dá origem a 6 arranjos, permutando de todos os modos possíveis seus 3 elementos.
Por exemplo: ao permutar todos os elementos da combinação {a, b, c}, encontramos os arranjos (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Isso significa que o número de arranjos de 5 elementos tomados 3 a 3 é 6 vezes o número de combinações de 5 elementos tomados 3 a 3, ou seja, $A_{5,3} = 6C_{5,3}$.

Como o 6 foi obtido fazendo permutações dos 3 elementos de, por exemplo, {a, b, c}, temos $P_3 = 6$. Logo,

$$A_{5,3} = P_3 \cdot C_{5,3} \text{ ou } C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{P_3} = \frac{\frac{5!}{(5-3)!}}{3!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{20}{2} = 10$$

Fórmula das combinações simples

A cada combinação de **n** elementos tomados **p** a **p** correspondem **p!** arranjos, que são obtidos permutando-se os elementos da combinação, ou seja:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Então:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \text{ ou } C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Combinações simples de **n** elementos tomados **p** a **p** ($p \leq n$) são os subconjuntos com exatamente **p** elementos que se podem formar com os **n** elementos dados.

Indica-se por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$ o número total de combinações de **n** elementos tomados **p** a **p** e calcula-se por $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ ou $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$.

Figura 18 - Combinação Simples - Dante (2009)

Para os demais agrupamentos não é utilizado nenhum tipo de representação para a enumeração, sendo o diagrama de árvore o único tipo utilizado no estudo da Análise Combinatória neste livro, e apenas nas situações citadas.

A opção pelo trato da Análise Combinatória a partir do uso de fórmulas também é feita por este autor e pode ser verificada nos exemplos resolvidos e nos exercícios propostos.

A apresentação de situações diversas, em que o aluno deve identificar qual é o tipo de agrupamento envolvido na questão para, assim, resolvê-la, é feita apenas no final do capítulo, em um tópico intitulado "Problemas que envolvem os vários tipos de agrupamento". O estudo do tema é encerrado com binômio de Newton.

Na análise desses livros encontramos algumas similaridades que entendemos ser importantes. Entre elas, citamos a opção pela apresentação dos tipos de agrupamentos isoladamente, seguidos de exercícios de aplicação; o pouco uso da enumeração; e a opção pela abordagem pautada na aplicação de fórmulas, o que não vai ao encontro das recomendações presentes nos resultados de pesquisas e nos documentos oficiais sobre o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória.

Diferentemente do que é proposto nos livros didáticos e na Proposta Curricular do Estado de São Paulo, em nossa THA propusemos que os alunos construíssem as árvores de possibilidades ou outras representações, como o uso de tabelas, e, a partir disso, esperávamos que, com mediação docente, identificassem o uso do princípio multiplicativo.

Nos casos de arranjos ou permutações com elementos repetidos, assim como nos casos de combinações, optamos por não apresentar o uso da divisão. Buscamos situações que, a partir da exploração da enumeração e com a escolha de parâmetros que consideramos auxiliar os alunos, estes identificassem a necessidade da divisão em casos em que a ordem dos elementos é irrelevante ou em casos que apresentem elementos repetidos.

CAPÍTULO 4
TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM: A ANÁLISE COMBINATÓRIA

Neste capítulo apresentaremos o objeto matemático em estudo, de acordo com a proposta utilizada na elaboração da Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Descreveremos e apresentaremos a primeira versão da THA e seu processo de construção, que envolveu a escolha de objetivos e o levantamento de hipóteses sobre a aprendizagem dos alunos, além da organização das atividades.

4.1 – O OBJETO MATEMÁTICO

Neste estudo, apresentaremos os quatro tipos de problemas considerados como característicos do raciocínio combinatório presentes no Ensino Fundamental e Médio: produto cartesiano, arranjo (simples e com repetição), permutação (simples e com repetição) e combinação simples.

Para isso, utilizaremos diversas situações-problema, visando desenvolver, discutir e generalizar as noções referentes ao estudo da Análise Combinatória.

Ressaltamos que o objetivo é realizar um trabalho que evite a ênfase normalmente dada ao uso de fórmulas presentes em livros didáticos, porém, iremos apresentá-las, para o caso de o professor ter necessidade de, na sistematização dos conceitos, aproximar a THA do que é apresentado nos livros didáticos.

PRODUTO CARTESIANO

O que caracteriza estes problemas é a combinação de dois ou mais conjuntos disjuntos para formarem um novo conjunto.

<u>*PROBLEMA 1:*</u> *Numa sala há 4 homens e 3 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal (homem-mulher)?*

Neste problema, observa-se que o conjunto de homens é distinto do de mulheres e formará um terceiro conjunto de outra natureza (casais).

Para solucioná-lo, indicaremos os homens por h_1, h_2, h_3, h_4 e as mulheres por m_1, m_2, m_3.

Entre as opções de estratégia possíveis para esse problema, apresentaremos a enumeração (contagem direta, tabela de dupla entrada e construção da árvore de possibilidades) e o Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Na contagem direta devemos listar "exaustivamente" todos os agrupamentos possíveis, com base nos dados enunciados no problema.

$h_1\,m_1$, $h_2\,m_1$, $h_3\,m_1$, $h_4\,m_1$,
$h_1\,m_2$, $h_2\,m_2$, $h_3\,m_2$, $h_4\,m_2$,
$h_1\,m_3$, $h_2\,m_3$, h_3m_3, h_4m_3,

Assim, o número de casais possíveis de formar com quatro homens e três mulheres será de12 casais.

A segunda opção para a estratégia de enumeração é a esquematização por meio da construção de uma <u>tabela de dupla entrada:</u>

mulher / homem	m_1	m_2	m_3
h_1	$h_1\,m_1$	$h_1\,m_2$	$h_1\,m_3$
h_2	$h_2\,m_1$	$h_2\,m_2$	$h_2\,m_3$
h_3	$h_3\,m_1$	$h_3\,m_2$	$h_3\,m_3$
h_4	$h_4\,m_1$	$h_4\,m_2$	$h_4\,m_3$

Resposta: É possível formar 12 casais.

Como terceira opção para a estratégia de enumeração, há a esquematização por meio da construção da árvore de possibilidades.

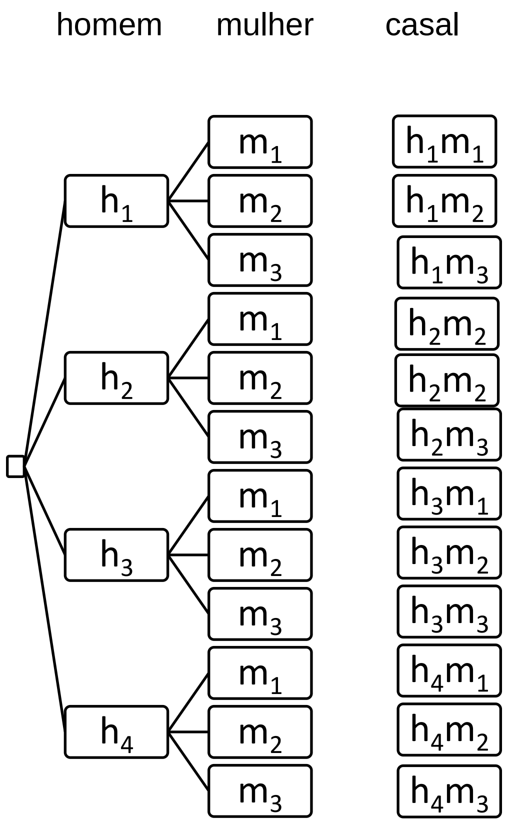


Figura 19 - Árvore de possibilidades - problema 1

Resposta: É possível formar 12 casais.

Como o problema solicita apenas a quantidade de casais a serem formados e não pede que seja feita a descrição dos casais, podemos recorrer ao Princípio Fundamental da Contagem (PFC), que será apresentado em detalhes a seguir.

Cada homem poderá formar casal com cada uma das quatro mulheres; portanto, é possível formar 12 casais, ou seja,

$$\frac{3}{\text{número de homens}} \times \frac{4}{\text{número de mulheres}} = 12\ casais$$

Resposta: É possível formar 12 casais.

Enumerar todas as possibilidades por "exaustão", construir a árvore de possibilidades ou mesmo a tabela de dupla entrada são estratégias de enumeração que se tornam inviáveis em situações em que o número de possibilidades é elevado. Exemplificaremos no problema seguinte.

<u>PROBLEMA 2</u>: *Em um baile de formatura estão 78 formandos, sendo 40 meninos e 38 meninas. Quantos casais (menino-menina) diferentes poderiam ser formados para a dança da valsa com esses formandos?*

Cada menino poderá formar dupla com cada uma das meninas, portanto, é possível formar 1520 duplas, ou seja,

$$\frac{40}{\text{número de meninos}} \times \frac{38}{\text{número de meninas}} = 1520$$

Neste caso, é razoável perceber que a enumeração (contagem direta, árvore de possibilidades ou tabela de dupla entrada) se tornaria inviável pelo grande número de agrupamentos possíveis.

Princípio Fundamental da Contagem – PFC*: se um acontecimento é composto de duas etapas sucessivas, e a primeira etapa pode ocorrer de* ***m*** *maneiras diferentes e, para cada uma das m maneiras de ocorrência da primeira etapa, uma segunda etapa pode ocorrer de* ***n*** *maneiras diferentes, então, o número de modos de ocorrência do acontecimento é* $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$.

Assim, no problema 2, temos que a primeira etapa é a escolha de um menino entre os 40; a segunda etapa é a escolha de uma menina entre as 38, após ter sido escolhido um menino. Então, temos $40 \times 38 = 1520$ casais possíveis de serem formados.

O Princípio Fundamental da Contagem pode ser estendido quando um acontecimento for composto para **n** etapas sucessivas (n>2). Assim, para um problema composto por **n** etapas sucessivas, o Princípio Fundamental da Contagem pode ser enunciado da seguinte maneira:

Se um acontecimento pode ocorrer de m_i *maneiras diferentes para* (*i* = 1,2,3,...,*n*) *, então, a sequência de* n *acontecimentos sucessivos pode ocorrer de* $m_1 \times m_2 \times m_3 \times \cdots \times m_n$.

PROBLEMA 3: Renata possui quatro blusas, quatro saias e três pares de sapatos. Sabendo que todos os itens são diferentes, de quantas formas ela pode vestir-se com uma blusa, uma saia e um par de sapatos?

Para cada opção de blusa que Renata escolher, haverá quatro opções de saias e três opções de pares de sapato. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, Renata poderá vestir-se de 48 maneiras diferentes, ou seja,

$$\frac{4}{\text{número de blusas}} \times \frac{4}{\text{números de saias}} \times \frac{3}{\text{números de pares de sapatos}} = 48$$

A enumeração (contagem direta, árvore de possibilidades, tabela de dupla entrada) e o PFC podem ser utilizados para resolver os problemas. Porém, a enumeração pode tornar-se extremamente árdua em situações que apresentam um número elevado de agrupamentos, como ocorre no problema 2. A tabela de dupla entrada não é conveniente em situações com número superior a dois conjuntos, como no problema 3.

ARRANJOS

Igualmente utilizaremos situações-problema para apresentar, discutir e desenvolver a noção de arranjos.

PROBLEMA 4: Quantas centenas podem ser formadas apenas com algarismos ímpares?

Empregaremos a estratégia do PFC para a discussão desse problema.

O problema é composto pela escolha ordenada de três dos cinco algarismos disponíveis (1, 3, 5, 7 e 9).

Para o algarismo das unidades, teremos cinco opções de escolha. Sendo escolhido o algarismo das unidades, teremos cinco opções de escolha para o algarismo das dezenas, já que o exercício não exige que os algarismos sejam distintos. E para o algarismo das centenas também teremos cinco opções de escolha. Ou seja:

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

Portanto, pelo Princípio Fundamental da contagem, é possível compor 125 centenas formadas apenas por algarismos ímpares.

O problema 4 apresenta uma situação de **arranjo com repetição**. Entendemos esse agrupamento da seguinte forma:

*Seja **M** um conjunto de **m** elementos. Um arranjo com repetição dos **m** elementos tomados **r** a **r** é qualquer sequência de **r** elementos, não necessariamente distintos, escolhidos entre os **m** elementos do conjunto. As sequências diferenciam-se pela natureza e pela ordem dos elementos.*

Pelo Princípio Fundamental da contagem, o número de arranjos com repetição é dado por:

$$(AR)_{m,r} = m \cdot m \cdot m \cdot \cdots \cdot m = m^r$$

<u>PROBLEMA 5:</u> Quantas comissões podem ser formadas com presidente, vice-presidente e tesoureiro, entre os 15 membros de um clube? (JULLIANELLI et al., 2009, p.35)

Novamente empregaremos a estratégia do Princípio Fundamental da Contagem para a discussão desse problema.

O problema é composto por três etapas: a escolha do presidente entre os 15 membros do clube; em seguida, a escolha do vice-presidente entre os 14 membros, já que o membro que ocupar a posição de presidente não poderá ao mesmo tempo ocupar outras posições; e, por fim, a escolha do tesoureiro entre os 13 membros ainda não escolhidos.

Teremos, então, 2730 possibilidades de escolhas dessa comissão, ou seja, $15 \times 14 \times 13 = 2730$.

Neste problema, temos uma situação de arranjo simples. Entendemos arranjo simples da seguinte forma:

*Seja M um conjunto de m elementos. Um arranjo simples dos **m** elementos tomados **r** a **r** é qualquer sequência de **r** elementos distintos, escolhidos entre os **m** elementos do conjunto. Em um arranjo, os agrupamentos diferem pela ordem de seus elementos e pela natureza deles.*

Novamente, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de arranjos simples é dado por:

$$A_{m,r} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot [m-(r-1)].$$

Se multiplicarmos e dividirmos o segundo membro da igualdade por $(m - r)!$, teremos:

$$A_{m,r} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot [m-(r-1)](\boldsymbol{m}-\boldsymbol{r})!}{(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{r})!}$$

$$A_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!}$$

Essa igualdade é a fórmula apresentada normalmente nos livros didáticos do Ensino Médio. Concordamos com Sabo (2010, p.86), quando afirma que a "fórmula não revela, explicitamente, os dados e a questão do problema", assim como "não favorece o desenvolvimento do raciocínio combinatório".

Julgamos ser necessário que os alunos entendam e desenvolvam os conhecimentos de Análise Combinatória pautados nas diferentes estratégias (enumeração e PFC) utilizadas para resolver as situações e assim conduzir a uma sistematização.

***Permutação** – um arranjo que considera a totalidade dos elementos*

Utilizaremos situações-problema para apresentar, discutir e desenvolver a noção de permutações simples e com repetição.

<u>Permutação Simples</u>

<u>*PROBLEMA 6:*</u> De quantas maneiras cinco pessoas podem organizar-se em uma fila indiana?

O problema pode ser traduzido na escolha de uma pessoa para cada um dos cinco lugares de uma fila. Então, para o primeiro lugar existem cinco possibilidades de escolha. Para cada possibilidade de escolha do primeiro lugar, teremos quatro possibilidades para o segundo, já que a pessoa que ocupa o primeiro lugar não poderá ocupar outros lugares ao mesmo tempo. E assim, sucessivamente, até os cinco lugares da fila serem ocupados pelas cinco pessoas.

Desta forma, utilizando o PFC, obteremos 120 diferentes formas de organizar essa fila, ou seja, $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

O problema 6 apresenta uma situação denominada permutação simples. Entendemos esse agrupamento da seguinte forma:

*Seja **M** um conjunto de **m** elementos. Denominamos permutação simples dos **m** elementos dados a qualquer arranjo simples dos **m** elementos, agrupados **m** a **m**. Ou seja, podemos dizer que a permutação é um caso particular do arranjo, quando todos os elementos são usados na formação dos agrupamentos (ou sequências).*

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de permutações de m elementos representado por P_m é dado por:

$$P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Assim, na resolução do problema 6, temos a permutação de cinco pessoas, que será determinada por $P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Ou seja, 120 filas diferentes.

Concordamos com Sturm (1999, p. 43), que sugere o uso do símbolo de fatorial (!) como um “simplificador de uma conta”, devendo ser retomado “com ênfase quando for o momento de apresentar fórmulas que envolvam a notação”. Essa sugestão é feita pelo autor pelo fato de ele não iniciar um trabalho pautado no uso de fórmulas, assim como propomos em nossa pesquisa.

Para facilitar a notação, utilizaremos o símbolo de fatorial (!). Dessa forma, o produto $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ será representado por 5!. Então, no caso geral, temos que:

$$P_m = m!$$
$$P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

PROBLEMA 7: Quantos e quais anagramas podem ser formados com a palavra BOLA?

O número de anagramas de uma palavra determina uma situação de permutação. Para o cálculo do número de anagramas de uma palavra de quatro letras distintas, efetuamos a permutação de 4, ou seja, $P_4 = 4! = 24$.

Mas, para enumerar, é preciso lançar mão de um tipo de representação, como a contagem direta:

BOLA	OBLA	LOBA	AOLB
BOAL	OBAL	LOAB	AOBL
BALO	OALB	LABO	ABLO
BAOL	OABL	LAOB	ABOL
BLAO	OLAB	LBAO	ALBO
BLOA	OLBA	LBOA	ALOB

Permutação com repetição

PROBLEMA 9: Quantos anagramas podem ser formados com a palavra CASA?

Neste caso, existem anagramas que se repetem devido à repetição da letra A, que ocasiona duas permutações dessas letras.

$$\left.\begin{matrix} \text{CASA} \\ \text{CASA} \end{matrix}\right\} 2\ palavras\ iguais, em\ que\ as\ letras\ A\ foram\ permutadas$$

Portanto, permutando todas as letras, teremos que cada configuração apresentada contará com a permutação de duas letras.

CASA	CAAS	CSAA	ACAS	ACSA	AACS
CASA	CAAS	CSAA	ACAS	ACSA	AACS
AASC	ASCA	ASAC	SACA	SAAC	SCAA
AASC	ASCA	ASAC	SACA	SAAC	SCAA

Portanto, teremos 12 anagramas, a metade do número que seria obtido, caso as letras fossem todas distintas. Representaremos a permutação de quatro elementos com duas repetições por P_4^2, assim:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$$

PROBLEMA 10: E quantos são os anagramas da palavra ARARA?[5]

Se calcularmos os anagramas das cinco letras da palavra ARARA como se fossem diferentes, teríamos 5!, ou seja, 120 anagramas; mas, entre elas, existem permutações que se repetem devido às permutações das letras A (3!) e das letras R (2!), o que resulta em $3! \cdot 2!$ permutações dessas letras que não alteram a palavra.

ARARA ARARA ARARA ARARA ARARA ARARA	ARARA ARARA
seis palavras iguais, em que as letras A foram permutadas	duas palavras iguais, em que as letras R foram permutadas

Assim, as 120 permutações devem ser reduzidas, já que cada bloco de seis delas tem as letras A na mesma posição, e cada bloco de duas tem as letras R na mesma posição. Logo, a redução dever ser realizada pela divisão:

$$P_5^{4,2} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 10$$

A palavra ARARA tem 10 anagramas possíveis.

Os problemas 9 e 10 apresentam situações denominadas “permutação com repetição”. Entendemos esse agrupamento da seguinte forma:

5 Extraído de Zampirolo, 2000b, p.15

*Se entre os **n** elementos de um conjunto existem $\boldsymbol{n_1}$ elementos iguais a $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{n_2}$,elementos iguais a $\boldsymbol{a_2}$, ..., $\boldsymbol{n_k}$, elementos iguais a $\boldsymbol{a_k}$, de modo que* $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ *e* $a_i \neq a_j$ *se* $i \neq j$. *Esta permutação com repetição de elementos será determinada pela expressão:*

$$P_n^{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

<u>COMBINAÇÃO</u>

<u>PROBLEMA 9:</u> De quantas maneiras diferentes uma empresa poderia sortear três passagens aéreas para Natal entre os cinco funcionários de melhor desempenho no ano de 2010?

Para resolver este problema, iniciaremos enumerando todas as possibilidades de escolhas de três dos funcionários a serem premiados, no caso em que a ordem de escolha é relevante; sendo assim, utilizaremos o princípio fundamental da contagem. Dessa forma, mobilizaremos conhecimentos já discutidos anteriormente – noção de arranjo – com a finalidade de desenvolver um novo conhecimento, a noção de combinação. Portanto, teremos

$$\frac{5}{\begin{array}{c} funcionários\ para\ a \\ primeira\ passagem \end{array}} \times \frac{4}{\begin{array}{c} funcionários\ para\ a \\ segunda\ passagem \end{array}} \times \frac{3}{\begin{array}{c} funcionários\ para\ a \\ terceira\ passagem \end{array}} = 60$$

Nomearemos os funcionários de A, B, C, D e E para enumerarmos as possibilidades.

ABC	ABD	ABE	ACD	ACE	ADE	BCD	BCE	BDE	CDE
ACB	ADB	AEB	ADC	AEC	AED	BDC	BEC	BED	CED
BAC	BAD	BAE	CAE	CAE	DAE	CDB	CBE	DBE	DCE
BCA	BDA	BEA	CEA	CEA	DEA	CBD	CEB	DEB	DEC
CAB	DAB	EAB	EAC	EAC	EAD	DBC	EBC	EBD	ECD
CBA	DBA	EBA	ECA	ECA	EDA	DCB	ECB	EDB	EDC

Observe que cada um dos 10 subconjuntos é composto por três elementos, e a permutação desses três elementos formará seis agrupamentos distintos, ou seja, $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$. Então, das 60 configurações enumeradas, teremos 3! que determinaram o mesmo subconjunto. Por exemplo, o trio formado por (A, B, C) é o mesmo formado (B, C, A) e assim por diante.

Logo, das 60 enumerações, podemos observar que 10 foram contadas 6 vezes.

Assim,

$$10 = \frac{60}{6} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!}$$

$$\frac{A_{5,3}}{P_3} = C_{5,3}$$

Ressalvamos que o número de agrupamentos para os quais a ordem não é relevante poderá ser determinado a partir da divisão do número de possibilidades em que a ordem é relevante (arranjo) pela permutação do número de elementos de cada agrupamento.

O problema 10 apresenta uma situação denominada “combinação simples”. Entendemos esse agrupamento da seguinte forma:

Seja M um conjunto de m elementos. Uma combinação simples dos ***m*** *elementos tomados* ***r*** *a* ***r*** *é qualquer subconjunto de* ***r*** *elementos distintos escolhidos entre os* ***m*** *elementos do conjunto. E representaremos por* $C_{m,r}$.

Em uma combinação os agrupamentos diferem apenas pela natureza de seus elementos.

Conforme apresentado, combinação é um conjunto; portanto, não depende da ordem dos elementos.

O cálculo do número de combinações é dado por:

$$C_{m,r} = \frac{A_{m,r}}{P_r}$$

Se desenvolvermos essa igualdade, obteremos a fórmula usual apresentada nos livros didáticos:

$$C_{m,r} = \frac{A_{m,r}}{P_r} = \frac{\frac{m!}{(m-r)!}}{r!}$$

$$C_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!\,r!}$$

De acordo com Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997), a falha da interpretação dos problemas de análise combinatória deve-se à dificuldade em identificar o tipo de agrupamento envolvido. A esses erros unem-se outros, como o erro no emprego da fórmula.

Concordamos com Esteves (2001, p. 33), que declara ser melhor um trabalho que proporcione aos alunos situações-problemas para que, “de forma independente, os mesmos resolvam-nos sem o uso ou conhecimento da fórmula”.

A autora infere que a apresentação das fórmulas em uma rápida abordagem após a apresentação formal da definição de cada tipo de agrupamento pode causar dificuldades, por parte dos alunos, para identificar os agrupamentos envolvidos em um problema e, por consequência, na identificação da fórmula. Essa abordagem induz ao domínio da técnica sem a preocupação da interpretação do problema, e esta é fundamental no estudo da Análise Combinatória.

4.2.1 Objetivos de aprendizagem para Análise Combinatória

Apresentamos a seguir os objetivos de aprendizagem para alunos da 2ª Série do Ensino Médio em relação ao tema Análise Combinatória:

- Utilizar diferentes representações para a enumeração, como, por exemplo, a árvore de possibilidades, a tabela de dupla entrada e o diagrama sagital.
- Fazer uso do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) na resolução de problemas de contagem, realizando divisões para evitar a sobrecontagem de agrupamentos.
- Resolver problemas de contagem e agrupamentos, a partir do reconhecimento da necessidade (ou não) da hierarquia (ordem).

4.2.2 Hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos

As leituras realizadas na revisão bibliográfica e as recomendações curriculares auxiliaram-nos na elaboração da THA. Os resultados apresentados, as sugestões, as dificuldades comuns aos alunos foram o eixo norteador para a escolha das atividades da THA e serviram de base para que nós identificássemos as seguintes hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos na THA. É preciso que em tal processo o aluno:

- apresente conhecimentos de diferentes representações, como o diagrama de árvore ou a tabela de dupla entrada;
- apresente o raciocínio combinatório para situações simples, uma vez que esse assunto é recomendado nos documentos oficiais desde as séries iniciais do Ensino Fundamental;
- busque um procedimento sistemático de enumeração;
- calcule o número de configurações, inicialmente mediante enumeração;
- identifique as características que diferenciam os agrupamentos e, a partir dessas características, busque a melhor estratégia de solução.

Na elaboração das atividades da THA, observamos alguns procedimentos básicos, que também enumeramos aqui: dispensamos o uso de fórmulas, ficando a critério do docente a opção de utilizá-las em um segundo momento, se intencionar apresentá-las, como é feito nos livros didáticos; procuramos elaborar sequências de tarefas que permitissem ao aluno perceber e entender a diferença entre os agrupamentos; usamos o trabalho em duplas, que permite ao aluno expressar melhor suas ideias e seus argumentos para confrontá-las com as dos colegas.

A THA foi elaborada inicialmente contendo uma atividade diagnóstica e outras seis atividades, que descreveremos a seguir.

4.3 A Primeira Versão da THA

4.3.1 Versão da THA desenvolvida em sala de aula

Essa primeira versão serviu de ponto de partida para a discussão com os professores colaboradores, que apresentaram poucas alterações.

A trajetória hipotética de aprendizagem foi elaborada com o propósito de que o professor pudesse trabalhar com o aluno a partir de uma perspectiva construtivista.

Apresentaremos as respostas esperadas e os comentários sobre os tipos de agrupamentos envolvidos nas tarefas propostas em letra *Times new roman itálico*. Para a atividade diagnóstica, trancreveremos as diferentes respostas esperadas, porém, a partir da primeira atividade, para evitar um grande volume de páginas, uma vez que a nossa THA é constituída por um número significativo de atividades, ofereceremos a solução apenas de um tipo de resposta esperada e citaremos as demais.

Embora não tivéssemos a pretensão de que a utilização de fórmulas ocorresse durante o desenvolvimento da THA, pois os alunos não haviam tido contato com o ensino formal do tema no 2º ano do Ensino Médio, série em que o uso de fórmulas é proposto para o tema, citaremos essa estratégia pelo fato de a THA também ter sido desenvolvida com uma turma de 3ª série do Ensino Médio. E, apesar de a escolha da turma pela docente ter sido feita exatamente por não terem acesso ao conteúdo no ano anterior, alguns alunos participavam de cursos preparatórios para o vestibular, o que lhes possibilitou o conhecimento e o uso das fórmulas.

As tarefas foram elaboradas pela pesquisadora, baseadas em sua experiência docente ou em fontes como livros didáticos, materiais de formação continuada para docentes, como “Construindo Sempre Matemática” (COUTINHO; MIGUEL, 2002) e GESTAR II (BRASIL, 2008), *sites* de matemática e as pesquisas já citadas.

É importante salientar que a construção de uma THA não compreende a elaboração de uma sequência com exercícios inéditos, e sim, a escolha de tarefas de acordo com as hipóteses e os objetivos para a aprendizagem dos alunos.

THA INICIAL

Atividade Diagnóstica

Iniciamos a THA por uma atividade que denominamos diagnóstica, com o objetivo de verificar se os alunos possuíam habilidades para solucionar questões que envolviam raciocínio combinatório e de identificar estratégias utilizadas e possíveis erros cometidos. Com isso, tínhamos a intenção de averiguar quais intervenções deveriam ser realizadas pelo docente com maior amplitude.

A questão 1 envolve produto cartesiano, tipo de agrupamento que é recomendado pelos PCN desde os anos finais do ciclo I do Ensino Fundamental, e por esse motivo acreditávamos que os alunos não apresentariam dificuldades em resolvê-la.

A questão 2 envolve uma situação em que os agrupamentos diferem apenas pela sua natureza, ou seja, uma situação de Combinação Simples. Conjecturávamos que os alunos apresentariam dificuldades em responder a questão, pois, como afirmam resultados de pesquisa como as de Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) e Esteves (2001), a não percepção da importância de identificar a relevância ou não da ordem na formação dos agrupamentos é um erro típico em situações de Análise Combinatória.

A questão 3 envolve arranjo simples, ou seja, os agrupamentos diferem pela ordem ou pela natureza de seus elementos. Não esperávamos que os alunos apresentassem dificuldades nessa questão, pois, como o número de agrupamentos possível é pequeno, a enumeração satisfaria a questão.

A questão 4 envolve situações de permutação simples e permutação com repetição, ou seja, os agrupamentos feitos com a totalidade dos elementos diferem pela sua ordem. De acordo com os resultados de pesquisas, como as de Batanero, Navarro-Pelayo e Godino

(1997) e Esteves (2001), a dificuldade esperada para essa situação diz respeito à existência de elementos repetidos na formação dos agrupamentos; no caso, dos anagramas da palavra OVO e VIVO.

Para a resolução das tarefas propostas, o aluno necessitaria mobilizar conhecimentos de operações com números naturais ou enumerar as possibilidades. Era esperado que a contagem direta, ou seja, a listagem de todos os casos possíveis fosse o procedimento mais utilizado. Não esperávamos que os alunos utilizassem fórmulas para a resolução de nenhuma das questões, pois embora o conteúdo seja recomendado desde as séries iniciais do Ensino Fundamental II, o uso de fórmulas para Análise Combinatória é proposto no Ensino Médio.

Atividade

1) A sorveteria GELINHO oferece cinco sabores de sorvete de massa (chocolate, morango, brigadeiro, abacaxi e pistache), três coberturas (caramelo, chocolate e morango). De quantas maneiras diferentes você poderia escolher seu sorvete com um sabor de massa e uma cobertura? Descreva as maneiras.

Soluções esperadas

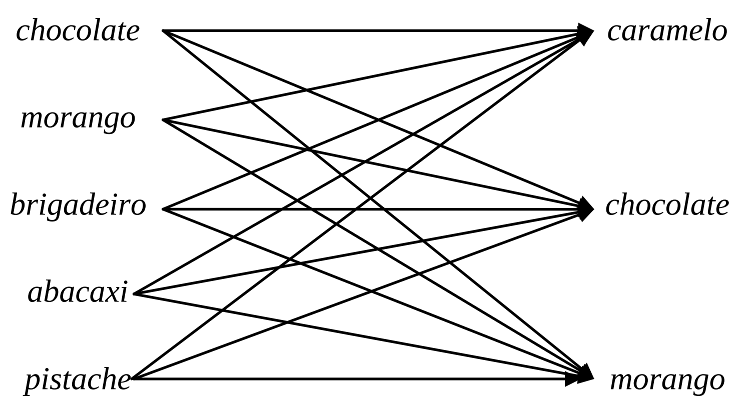
- *Contagem direta*:

chocolate - caramelo	*abacaxi - caramelo*	*brigadeiro - caramelo*
chocolate - chocolate	*abacaxi - chocolate*	*brigadeiro - chocolate*
chocolate - morango	*abacaxi - morango*	*brigadeiro - morango*
morango - caramelo	*pistache - caramelo*	
morango - chocolate	*pistache - chocolate*	
morango - morango	*pistache - morango*	

R: São 15 opções diferentes de escolha de sorvete com um sabor de massa e um sabor de cobertura.

- <u>*Diagrama sagital*</u>

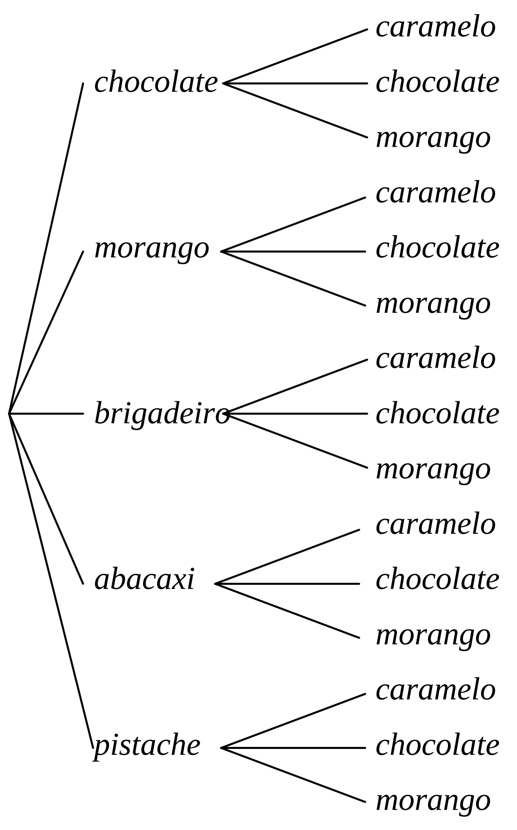
Sabor da massa *Sabor da cobertura*



R: São 15 opções diferentes de escolha de sorvete com um sabor de massa e um sabor de cobertura.

- <u>*Árvore de possibilidades:*</u>

Sabor da massa *Sabor da cobertura* *Sorvete com cobertura*



chocolate-caramelo
chocolate-chocolate
chocolate-morango
morango-caramelo
morango-chocolate
morango-morango
brigadeiro-caramelo
brigadeiro-chocolate
brigadeiro-morango
abacaxi-caramelo
abacaxi-chocolate
abacaxi-morango
pistache-caramelo
pistache-chocolate
pistache-morango

R: São 15 opções diferentes de escolha de sorvete com um sabor de massa e um sabor de cobertura.

- *Princípio Fundamental da Contagem*

$$\frac{5}{sabores\ de\ massa} \times \frac{3}{sabores\ de\ cobertura} = \frac{15}{nº\ de\ sorvetes\ diferentes}$$

R: São 15 opções diferentes de escolha de sorvete com um sabor de massa e um sabor de cobertura.

- *Tabela de dupla entrada*

cobertura / *massa*	*caramelo*	*chocolate*	*morango*
chocolate	*chocolate/caramelo*	*chocolate/chocolate*	*chocolate/morango*
morango	*morango/caramelo*	*morango/chocolate*	*morango/morango*
brigadeiro	*brigadeiro/caramelo*	*brigadeiro/chocolate*	*brigadeiro/morango*
abacaxi	*abacaxi/caramelo*	*abacaxi/chocolate*	*abacaxi/morango*
pistache	*pistache/caramelo*	*pistache/chocolate*	*pistache/morango*

R: São 15 opções diferentes de escolha de sorvete com um sabor de massa e um sabor de cobertura.

2) Na última prova de matemática de 2009, a professora elaborou cinco questões (A, B, C, D, E). Os alunos deveriam responder apenas três. De quantas formas eles poderiam ter escolhido essas três questões? Descreva as possíveis escolhas.

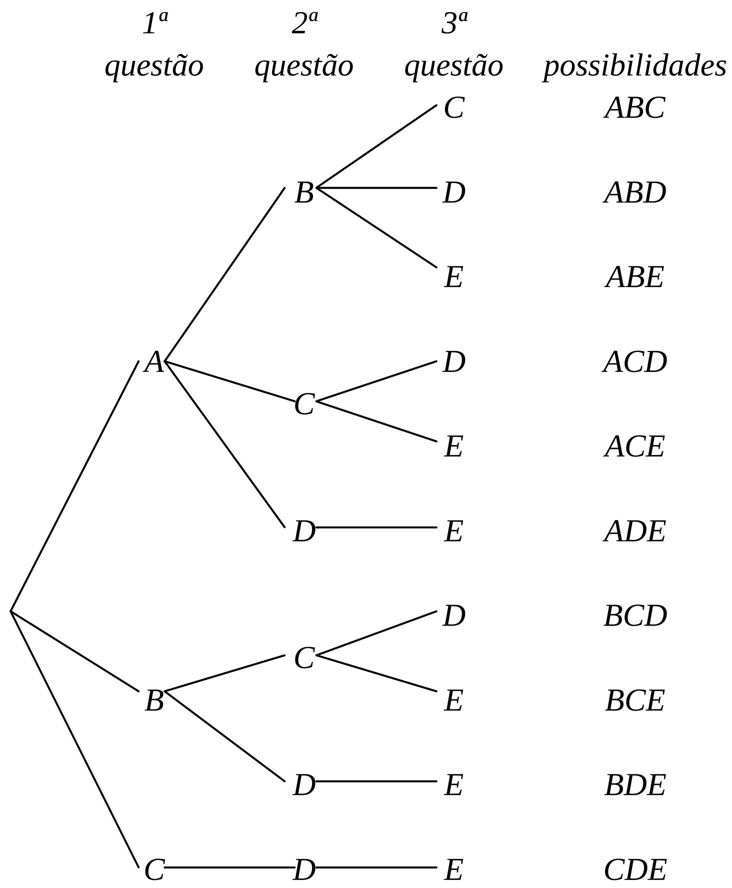
Soluções esperadas:

- *Contagem direta*

ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE

Resposta: É possível escolher três das cinco questões, de dez maneiras diferentes.

- *Árvore de possibilidades*



Resposta: É possível escolher três das cinco questões, de dez maneiras diferentes.

- *Fórmula de combinação*

$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!}$$

$$C_{5,3} = 10$$

Resposta: É possível escolher três entre cinco questões, de dez maneiras diferentes.

3) No campeonato paulista de vôlei de praia feminino, quatro duplas (D1, D2, D3, D4) foram para a semifinal. De quantas maneiras diferentes poderiam ocorrer as duas primeiras colocações (campeão e vice-campeão)? Descreva essas maneiras.

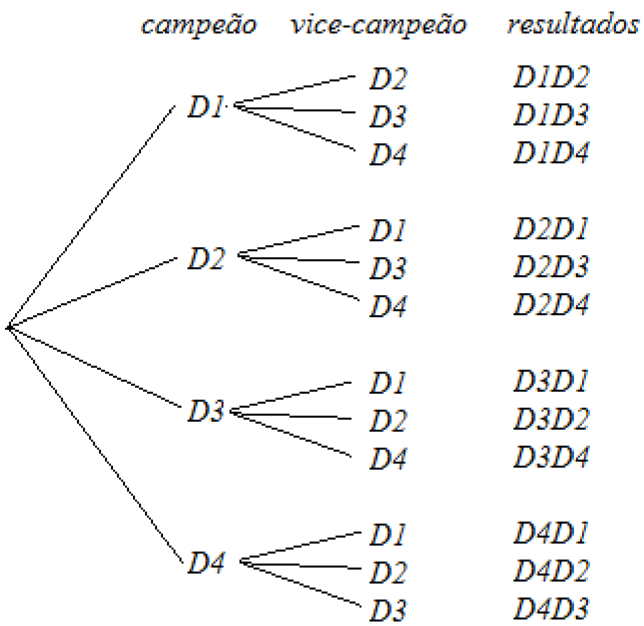
Soluções esperadas

- *<u>Contagem direta</u>*

D1 D2	*D2 D1*	*D3 D1*	*D4 D1*
D1 D3	*D2 D3*	*D3 D2*	*D4 D2*
D1 D4	*D2 D4*	*D3 D4*	*D4 D3*

Resposta: As duas primeiras colocações podem ocorrer de 12 maneiras diferentes

- *<u>Árvore de possibilidades</u>*



Resposta: As duas primeiras colocações podem ocorrer de 12 maneiras diferentes

- *<u>Tabela de dupla entrada</u>*

1º / *2º*	*D1*	*D2*	*D3*	*D4*
D1		*D1/D2*	*D1/D3*	*D1/D4*
D2	*D2/D1*		*D2/D3*	*D2/D4*
D3	*D3/D1*	*D3/D2*		*D3/D4*
D4	*D4/D1*	*D4/D2*	*D4/D3*	

Resposta: As duas primeiras colocações podem ocorrer de 12 maneiras diferentes

- *Fórmula de arranjo simples*

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!}$$

$$A_{4,2} = 12$$

Resposta: As duas primeiras colocações do campeonato podem ocorrer de 12 maneiras diferentes.

4) Quantos e quais são os anagramas formados pelas palavras a seguir: (Lembre-se: anagramas são sequências de letras formadas pela reordenação das letras de uma palavra, podendo ou não ter significado).

a) CÉU

b) RICO

c) VIVO

d) OVO

Soluções esperadas.

a) CÉU

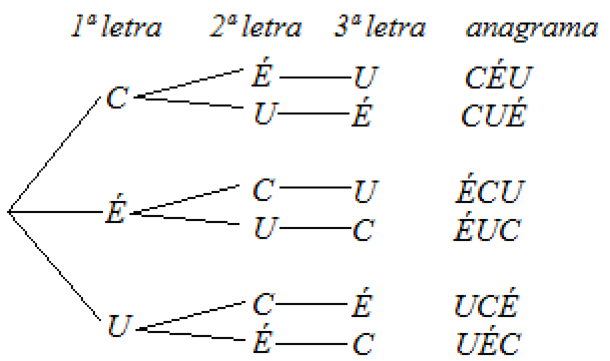
- *Contagem direta*

C É U ,........, É U C .... U É C

C U É É C U U C É

Resposta: A palavra CÉU possui seis anagramas

- *Árvore de possibilidades*



Resposta: A palavra CÉU possui seis anagramas

- *Princípio Fundamental da Contagem*

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

Resposta: A palavra CÉU possui seis anagramas

- *Fórmula de permutação simples*

$$P_3 = 3!$$
$$P_3 = 6$$

Resposta: A palavra CÉU possui seis anagramas

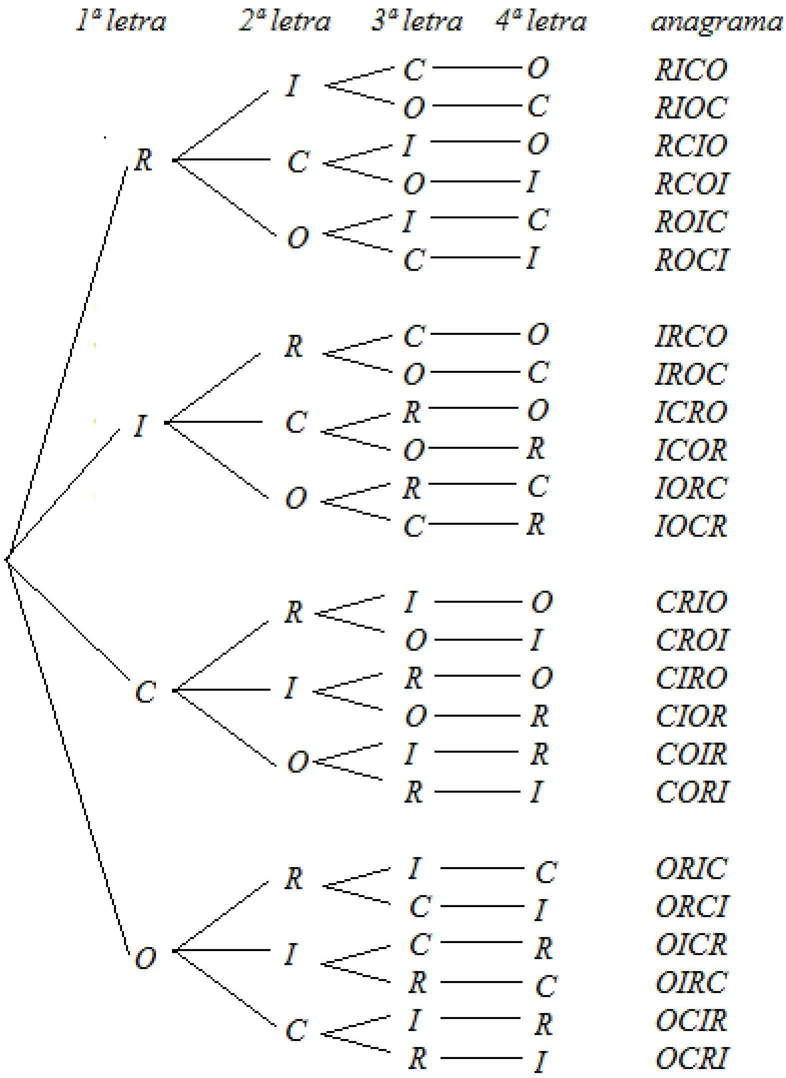
b) RICO

- *Contagem direta*

R I C O	....	*I R C O*	....	*C I R O*	....	*O I C R*
R I O C		*I R O C*		*C I O R*		*O I R C*
R O C I		*I O C R*		*C O R I*		*O R C I*
R O I C		*I O R C*		*C O I R*		*O R I C*
R C O I		*I C O R*		*C R O I*		*O C R I*
R C I O		*I C R O*		*C R I O*		*O C I R*

Resposta: A palavra RICO possui 24 anagramas

- *Árvore de possibilidades*



Resposta: A palavra RICO possui 24 anagramas

- *Princípio Fundamental da Contagem*

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Resposta: A palavra RICO possui 24 anagramas

- *Fórmula de permutação simples*

$$P_4 = 4!$$
$$P_4 = 24$$

Resposta: A palavra RICO possui 24 anagramas.

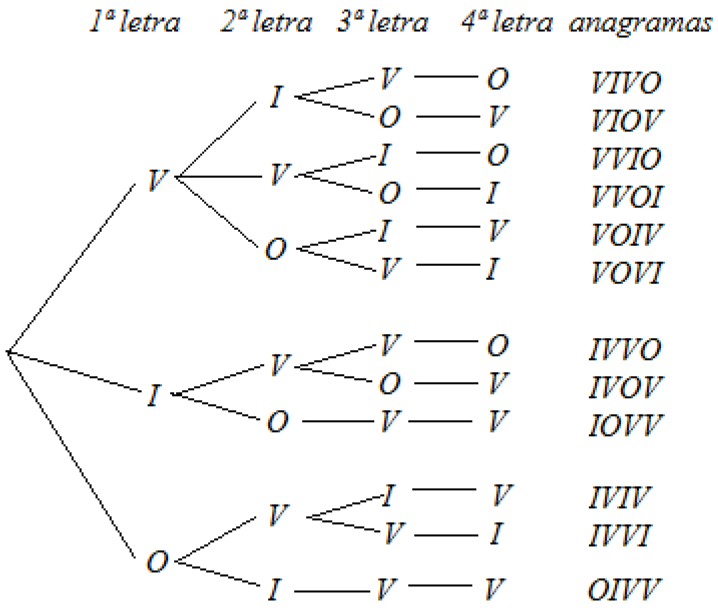
c) VIVO

- *<u>Contagem direta</u>*

V I V O	....	*I V V O*
V I O V		*I V O V*
V O I V		*I O V V*
V O V I		*O V V I*
V V O I		*O V I V*
V V I O		*O I V V*

Resposta: A palavra VIVO possui 12 anagramas

- *<u>Árvore de possibilidades</u>*



Resposta: A palavra VIVO possui 12 anagramas

- *<u>Fórmula de permutação com repetição</u>*

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!}$$

$$P_4^2 = \frac{24}{2} = 12$$

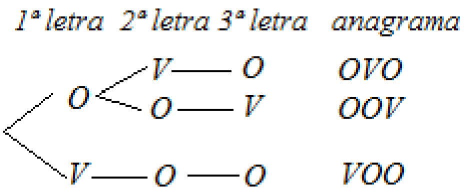
Resposta: A palavra VIVO possui 12 anagramas *d) OVO*

- *Contagem direta*

O V O
O O V
V O O

Resposta: A palavra OVO possui três anagramas

- *Árvore de possibilidades*



Resposta: A palavra OVO possui três anagramas

- *Fórmula de permutação com repetição*

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!}$$

$$P_3^2 = 3$$

Resposta: A palavra OVO possui três anagramas

ATIVIDADE 1

Esta atividade é composta por sete tarefas em que os agrupamentos se diferenciam pela ordem e pela natureza dos elementos, ou seja, tratamos de produto cartesiano, arranjos simples e permutações simples.

Na escolha das tarefas que compõem esta atividade, optamos por utilizar números pequenos para os parâmetros, para que a estratégia de enumeração pudesse ser explorada pelos alunos, já que tínhamos como objetivo que, a partir desta exploração, os alunos identificassem a multiplicação como estratégia de solução.

O objetivo das tarefa 1 foi de proporcionar questões que contribuíssem para o contato com diferentes representações que poderiam ser utilizadas em casos de enumeração; com isso, os alunos optariam por aquela que considerassem mais adequada para cada uma das *tarefas seguintes. E, também para que, a partir da exploração da enumeração, identificassem a multiplicação como estratégia de solução, o que auxiliaria na sistematização do Princípio Fundamental da Contagem. A tarefa envolve o produto cartesiano.*

A escolha da tarefa 2 teve por objetivo encaminhar o aluno para a construção parcial da árvore de possibilidades, para que percebesse a regularidade; ou seja, construindo uma ramificação, o aluno determinaria 16 possibilidades e, percebendo a simetria para os outros ramos, poderia multiplicar por 3 sem a necessidade da construção da árvore completa.

Na escolha das tarefas 3, 4 e 5, tínhamos por hipótese que os alunos iniciariam o uso da multiplicação como estratégia de solução. E, com a intenção de que validassem seus resultados e também utilizassem a enumeração de forma sistemática, ou seja, que buscassem organizá-la de forma a não ocorrer a falta ou excesso de configurações, optamos por solicitar que também descrevessem os agrupamentos possíveis.

Com a tarefa 6, pretendíamos que, com o aumento do número de letras para configurar os anagramas, o aluno percebesse que o uso da enumeração se tornara uma estratégia árdua e buscasse uma estratégia mais eficaz, identificando, assim, o uso do Princípio Fundamental da Contagem. Com a escolha das palavras, ou seja, da quantidade de letras das palavras da tarefa, tínhamos como objetivo que o aluno utilizasse a recursão, ou seja, pretendíamos que o aluno identificasse a multiplicação do número de letras pelo número de anagramas de uma palavra com uma letra a menos, possibilitando o contato com uma situação de permutação simples que seria sistematizada em atividades seguintes.

A tarefa 7 teve por objetivo propiciar ao docente um momento em que discutiria as possíveis soluções apresentadas pelos seus alunos e iniciaria a sistematização do Princípio Fundamental da Contagem.

ATIVIDADE

Objetivo: Explorar o uso de diferentes representações para a enumeração das possibilidades, para, com o apoio destas, identificar a multiplicação como estratégia de solução e utilizá-la, quando possível, na resolução de problemas de contagem.

Procedimentos: Trabalho em duplas.

Tarefa 1: Montando um lanche[6].

Os sanduíches da padaria Portuguesa são muito famosos. O freguês pode escolher entre três tipos de pães: pão de forma, pão italiano ou baguete. Para o recheio, há quatro opções: queijo, presunto, carne, salame.

Usando as letras F, I e B para representar os tipos de pães e as letras Q, P, C e S para representar os tipos de recheios, descreva quais são:

a) Os lanches diferentes que a padaria oferece no pão de forma? Quantos são?

Solução:

No pão de forma são oferecidos quatro tipos de lanches, que são: pão de forma com queijo, pão de forma com presunto, pão de forma com carne e pão de forma com salame. Total de quatro opções de lanche.

b) Os diferentes lanches oferecidos pela padaria? Quantos são?

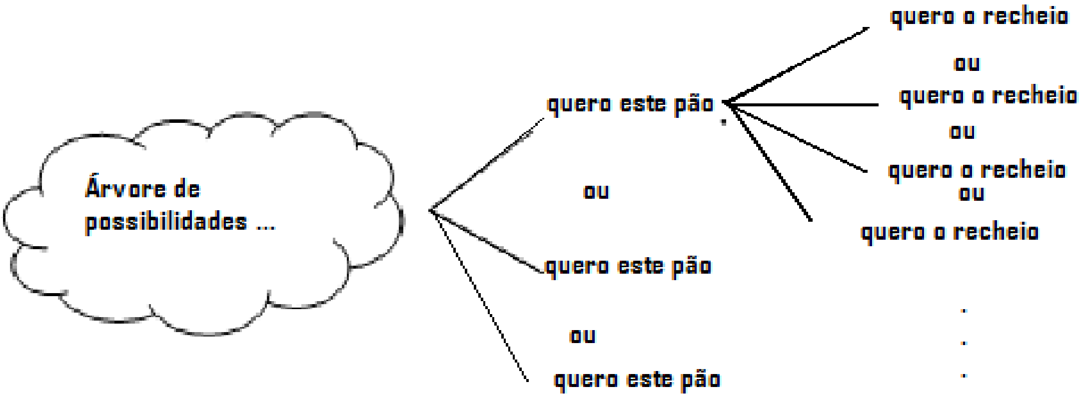
Solução

- *pão de forma com queijo, pão de forma com presunto, pão de forma com carne e pão de forma com salame*
- *pão italiano com queijo, pão italiano com presunto, pão italiano com carne e pão italiano com salame*
- *baguete com queijo, baguete com presunto, baguete com carne e baguete com salame*

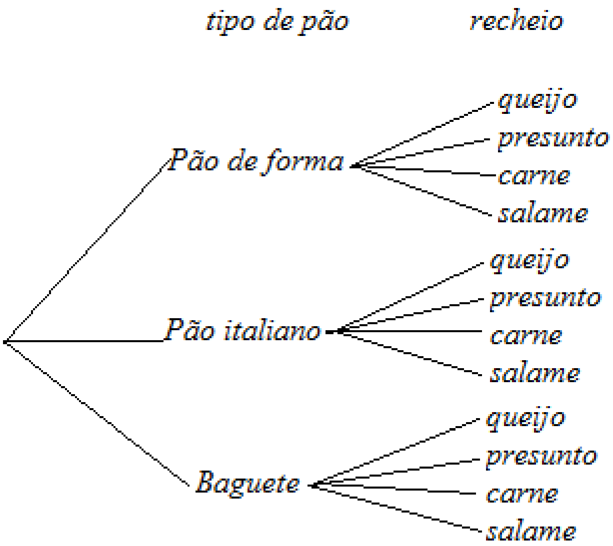
Total de 12 tipos de lanches.

c) Como você pode representar estas opções, usando uma árvore de possibilidades?

[6] Situação adaptada de Coutinho e Miguel, 2002, p.8.



<u>*Solução*</u>



2) Joca costuma fazer a primeira refeição do dia na padaria de seu bairro. Ele sempre escolhe uma bebida e um lanche na tabela fixada no alto da parede. Joca quer saber: quantos dias, no máximo, ele pode fazer pedidos diferentes?[7]

[7] Adaptado de Zampirolo, 2000b, p.2

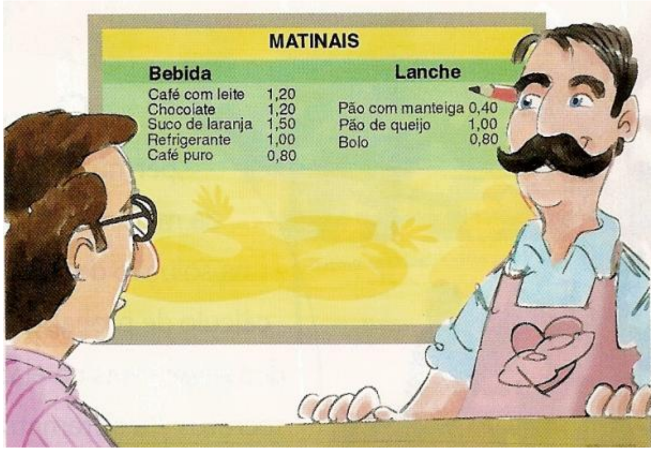
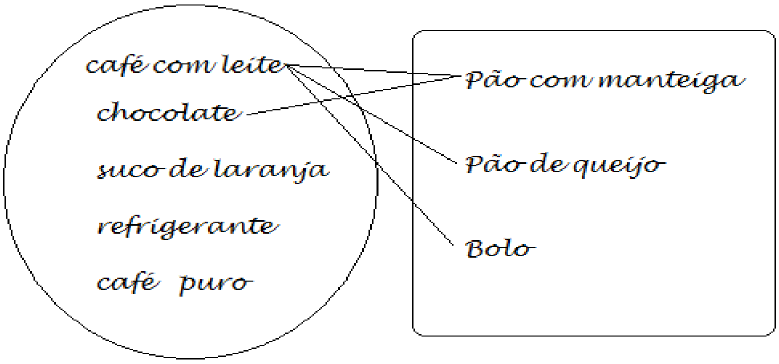


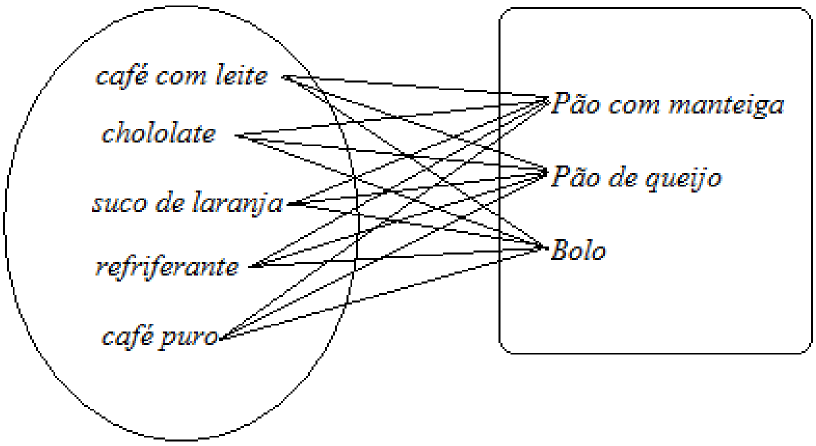
Figura 20 - Imagem extraída de Zampirolo, 2000b, p.2

Três amigos de Joca tentaram ajudá-lo a descobrir esse total, cada um de um jeito diferente, mas, como estavam atrasados para o trabalho, nenhum deles terminou. Ajude Joca, terminando o que cada amigo começou.

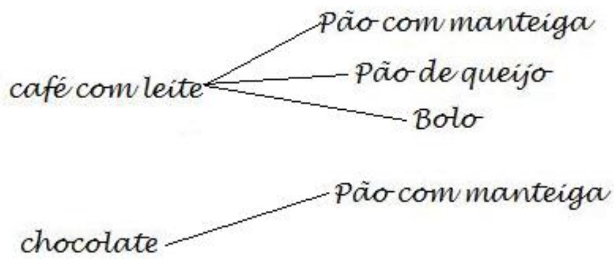
a) O primeiro amigo utilizou o Diagrama de Euler-Venn



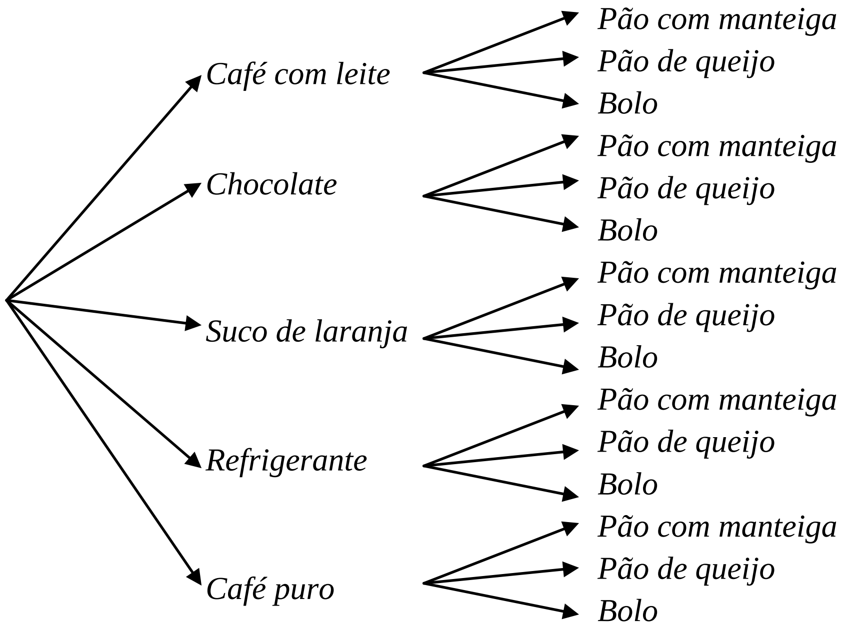
Solução



b) O segundo amigo escolheu a árvore de possibilidades



<u>Solução</u>



c) E o terceiro optou por uma tabela de dupla entrada (ou contingência)

Lanche / Bebida	Pão com manteiga	Pão de queijo	Bolo
café com leite	café com leite e pão com manteiga		
Chocolate			
Suco de laranja			
Refrigerante			
Café puro			

Solução

lanche / bebida	*pão com manteiga*	*pão de queijo*	*bolo*
café com leite	*café com leite e pão com manteiga*	*café com leite e pão de queijo*	*café com leite e bolo*
chocolate	*chocolate e pão com manteiga*	*chocolate e pão de queijo*	*chocolate e bolo*
suco de laranja	*suco de laranja e pão com manteiga*	*suco de laranja e pão de queijo*	*suco de laranja e bolo*
refrigerante	*refrigerante e pão com manteiga*	*refrigerante e pão de queijo*	*refrigerante e bolo*
café puro	*café e pão com manteiga*	*café e pão de queijo*	*café e bolo*

d) Com a intenção de agradar seus fregueses, o dono da padaria passou a lhes oferecer uma bala de hortelã ou de morango para completar o café da manhã. Quantas opções diferentes tem Joca para fazer o pedido com uma bebida, um lanche e uma bala?

Solução:

O aluno poderá utilizar a enumeração ou utilizar o produto $15 \times 2 = 30$*, ou seja, para cada opção de café da manhã, Joca poderia escolher uma entre duas balas oferecidas. Assim, Joca poderá fazer o pedido de 30 maneiras diferentes .*

e) Que estratégia você utilizou para responder a questão d?

Resposta pessoal

Tarefa 2: Pintando casas[8]

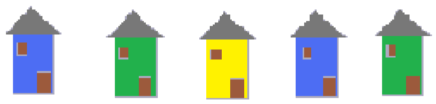
Para pintar um conjunto de cinco casas, dispõe-se dos seguintes dados:

- Conta-se com três cores diferentes (azul, amarela e verde).
- Cada casa é pintada com apenas uma cor.
- As casas estão em sequência do mesmo lado da rua.
- Deseja-se que duas casas vizinhas não sejam pintadas com a mesma cor.

Calcule de quantos modos as casas podem ser pintadas.

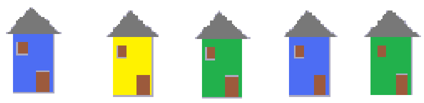
Por exemplo, duas possibilidades são:

Primeira



azul verde amarelo azul verde

Segunda



azul amarelo verde azul verde

<u>*Solução*</u>

Possibilidades de solução: árvore de possibilidades, contagem direta ou PFC.

- <u>*Princípio Fundamental da Contagem*</u>*:*

Existem três cores para escolher para a primeira casa e duas cores para cada uma das seguintes; então, temos 3x2x2x2x2=3x16=48 maneiras.

Tarefa 3: Jogando

1) Carlos, Renata, Fabiano, Pedro, Daniela e Andréia são amigos e participarão de um campeonato de cartas. O campeonato é disputado individualmente. **Quantas e quais** são as possibilidades de ocorrência dos dois primeiros colocados (campeão e vice-campeão)?

8 Adaptado de Julianelli et all, 2009, p.53.

Possibilidades de solução: enumeração (árvore de possibilidades, contagem direta) ou PFC.

Solução:

Princípio Fundamental da Contagem.

$$6 \times 5 = 30$$

Há 30 possibilidades de ocorrência dos dois primeiros colocados, que são:

Carlos-Renata	*Carlos-Fabiano*	*Carlos-Pedro*	*Carlos-Daniela*	*Carlos-Andréia*
Renata-Carlos	*Renata-Fabiano*	*Renata-Pedro*	*Renata-Daniela*	*Renata-Andréia*
Fabiano-Renata	*Fabiano-Carlos*	*Fabiano-Pedro*	*Fabiano-Daniela*	*Fabiano-Andréia*
Pedro-Renata	*Pedro-Fabiano*	*Pedro-Carlos*	*Pedro-Daniela*	*Pedro-Andréia*
Daniela-Renata	*Daniela-Fabiano*	*Daniela-Pedro*	*Daniela-Carlos*	*Daniela-Andréia*
Andréia-Renata	*Andréia-Fabiano*	*Andréia-Pedro*	*Andréia-Daniela*	*Andréia-Andréia*

Tarefa 4: Indo e voltando

Para chegar a um lago que fica em uma área de mata fechada, existem quatro trilhas (A, B, C e D).

Podemos fazer um esquema para melhor visualizar.

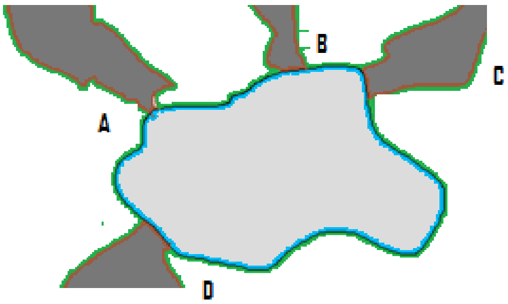


Figura 21- Esquema das trilhas do lago

a) De quantas maneiras podemos ir e voltar do lago? Descreva todas as maneiras possíveis.

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta, árvore de possibilidades, tabela de dupla entrada, diagrama sagital) ou PFC.

Solução:

Princípio Fundamental da Contagem

$$4 \times 4 = 16$$

Há 16 possibilidades de ir e voltar do lago pelas quatro trilhas, que são: AA, AB, AC, AD, BA, BB, BC, BD, CA, CB, CC, CD, DA, DB, DC, DD.

b) E se não for possível voltar pela mesma trilha utilizada para chegar ao lago?

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta, árvore de possibilidades, tabela de dupla entrada, diagrama sagital) ou PFC.

Solução:

Princípio Fundamental da Contagem

$$4 \times 3 = 12$$

Há 12 possibilidades de ir e voltar do lago pelas quatro trilhas, sem que a mesma trilha seja utilizada:

AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC.

Tarefa 5: Escolhendo o que vestir.

Kátia, ao abrir seu armário para escolher o que vestir para ir à escola, encontrou: três calças, duas blusas e três pares de sapatos. Ela tem que escolher uma calça, uma blusa e um par de sapatos. Considerando todas as peças diferentes, quantas são as maneiras diferentes com que ela pode se vestir?

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta, árvore de possibilidades) ou PFC.

Solução:

Princípio Fundamental da Contagem

$$3 \times 2 \times 3 = 18$$

Há 18 possibilidades de Kátia vestir-se com as opções dadas.

Tarefa 6: Jogando com letras

Numa revista de palavras cruzadas, num determinado passatempo, devem-se formar todas as palavras possíveis usando-se as letras de palavras dadas. Para isso, precisamos inicialmente formar todos os anagramas possíveis com essas letras. Quantos anagramas são possíveis formar com as palavras a seguir? Se necessário, utilize a árvore de possibilidades para ajudá-lo.
(Observe que não estamos interessados em conhecer quais as palavras formadas, com ou sem significado delas. Queremos apenas contar esses anagramas.)

a) RUA
b) LUTA
c) CORSA
d) ESCOLA

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta, árvore de possibilidades,) ou PFC.

a) RUA

Solução

Princípio Fundamental da Contagem

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

R: A palavra RUA possui seis anagramas

b) LUTA

Solução

Princípio Fundamental da Contagem

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

R: A palavra LUTA possui 24 anagramas

c) CORSA

<u>Princípio Fundamental da Contagem</u>

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

R: A palavra CORSA possui 120 anagramas

d) ESCOLA

<u>Princípio Fundamental da Contagem</u>

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

R: A palavra Escola possui 720 anagramas.

Tarefa 7: Sistematizando

O uso da árvore de possibilidades e outras representações, como tabela de dupla entrada ou diagrama de Euler-Venn, são importantes ferramentas para a enumeração das possibilidades, auxiliando o entendimento do raciocínio envolvido nas situações de Análise Combinatória. Não podemos negar sua eficiência, porém, sua utilização nem sempre é conveniente, como você pode perceber, se construir a árvore de possibilidades para a palavra ESCOLA.

Portanto, precisamos de estratégias mais eficazes ou apropriadas, quando temos um aumento no número de elementos que farão parte de nossos agrupamentos, e é isto que veremos nas próximas atividades.

Como você determinou o número de anagramas para a palavra ESCOLA?

Resposta pessoal. Neste momento, esperávamos que os alunos iniciassem o uso do Princípio Fundamental da Contagem, ou seja, que percebessem a eficácia da multiplicação para a resolução das situações propostas até aqui. E que o professor promovesse uma discussão para a sistematização do Princípio Fundamental da Contagem.

ATIVIDADE 2:

As tarefas que compõem esta atividade foram selecionadas com os seguintes objetivos: que os alunos mobilizassem o PFC; que se propusessem tarefas que encaminhassem o aluno para a observação da relevância da ordem, para que ele identificasse a redução de agrupamentos possíveis, quando existem elementos repetidos; e que os alunos buscassem uma estratégia de solução, ou seja, iniciassem a percepção da necessidade da divisão para situações em que a ordem é irrelevante ou que apresentem elementos repetidos.

Nas atividades 1 e 2, tínhamos a intenção de que o aluno mobilizasse o PFC.

As atividades 3 e 6 envolviam situações em que os agrupamentos se diferenciam apenas pela natureza dos elementos, ou seja, combinações simples. Na atividade 3, que solicita ao aluno determinar o número de duplas possíveis reunindo seis amigos, optamos por solicitar que descrevessem as duplas, para que assim percebessem que é necessária uma estratégia diferente, pois a enumeração não validaria sua resposta numérica obtida a partir do PFC. Na questão 6, optamos por trocar a variável de contexto em uma situação que também envolve combinação simples. Assim, utilizamos figuras geométricas regulares planas para que o aluno determinasse o número de triângulos possíveis de formar com seus vértices.

A tarefa 4 e o exercício 2 da tarefa 5 envolviam permutações com repetições e, para isso, optamos pelo uso de anagramas. Com as questões dessa tarefa, pretendíamos que o aluno percebesse a necessidade da divisão como forma de evitar a sobrecontagem de agrupamentos.

As tarefas 5(exercício 1), 7, 8 e 9 tinham por objetivo explorar a leitura dos enunciados, já que o erro de interpretação é uma das dificuldades apresentadas pelos alunos. Então, nessas questões trabalhamos com situações que poderiam ser resolvidas com o princípio fundamental da contagem, porém, o aluno deveria estar atento às condições impostas em seus enunciados.

Embora esperássemos que os alunos utilizassem o PFC, todas as tarefas poderiam ser resolvidas por enumeração. Porém, a partir da tarefa 5, com o objetivo de o aluno perceber a necessidade de optar pelo Princípio Fundamental da Contagem, foram incluídas situações *com maior quantidade de elementos, que tornassem a utilização da enumeração como estratégia uma tarefa árdua.*

ATIVIDADE

Objetivos: Identificar e utilizar o Princípio Fundamental da Contagem como estratégia de solução, reconhecer e utilizar a divisão como forma de evitar a dupla contagem de agrupamentos.

Tarefa 1: Fábrica de camisas

1) A fábrica de camisas do Sr. Joca produz dois tipos de camisa (manga longa e manga curta). Em uma visita ao depósito, Sr. Joca observou que havia tecidos nas cores azul, branca, rosa e verde. Quantos tipos de camisa diferentes poderá fabricar? (cada camisa é produzida em cor única)

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta, árvore de possibilidades, tabela de dupla entrada, diagrama sagital) ou PFC.

Solução

- *Princípio Fundamental da Contagem*

$$2 \times 4 = 8\ tipos\ de\ camisas\ diferentes$$

R: Sr. Joca poderá fabricar oito tipos de camisetas.

2) Sr. Joca comprou tecidos em mais duas cores, lilás e preta. E agora, quantos são os tipos de camisa que a fábrica poderá produzir com todas as cores?

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta, árvore de possibilidades, tabela de dupla entrada, diagrama sagital) ou PFC.

Solução esperada

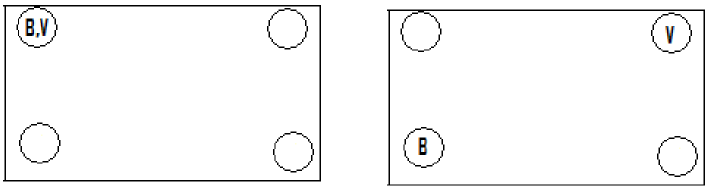
- *Princípio multiplicativo*

$$2 \times 6 = 12\ tipos\ de\ camisas\ diferentes$$

R: Sr. Joca poderá fabricar 12 tipos de camisetas.

Tarefa 2: Bilhar

Dois amigos estavam jogando bilhar e propuseram um desafio: acertar duas bolas (verde e vermelha), com apenas duas tacadas, nas caçapas dos cantos da mesa. Supondo que um dos amigos tenha acertado, quantas são as diferentes maneiras que ele teria para colocar essas bolas nas caçapas? Duas das possibilidades são:



- Princípio Fundamental da Contagem

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta, árvore de possibilidades, tabela de dupla entrada, diagrama sagital) ou PFC.

Solução

São quatro caçapas possíveis de acertar a primeira bola e também quatro caçapas possíveis de acertar a segunda bola. Temos, então:

$$4 \times 4 = 16$$

R: É possível colocar as duas bolas nas caçapas de 16 maneiras diferentes.

Tarefa 3: Campeonato de cartas

A segunda rodada do campeonato de cartas realizado pelos amigos Carlos, Renata, Fabiano, Pedro, Daniela e Andréia será disputado em duplas. Quais e quantas são as duplas possíveis de serem formadas com os seis amigos?

Possibilidades de solução: enumeração (árvore de possibilidades ou contagem direta) ou uso da divisão como procedimento para evitar a sobrecontagem.

A tarefa apresenta uma situação que envolve combinação, ou seja, as duplas são diferenciadas pela natureza dos elementos.

Solução:

$$\frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15\ duplas$$

Carlos -	*Renata*	*Renata -*	*Fabiano*	*Fabiano-*	*Daniela*
Carlos-	*Fabiano*	*Renata -*	*Pedro*	*Fabiano-*	*Andréia*
Carlos	*Pedro*	*Renata -*	*Daniela*	*Pedro -*	*Daniela*
Carlos -	*Daniela*	*Renata -*	*Andréia*	*Pedro -*	*Andréia*
Carlos -	*Andréia*	*Fabiano-*	*Pedro*	*Daniela -*	*Andréia*

R: *São 15 duplas possíveis de serem formadas entre os 6 amigos que participam do campeonato.*

Tarefa 4: Anagramas

1) Sabemos que a palavra RUA possui seis anagramas, que são RUA, RAU, ARU, AUR, URA, UAR. A palavra ASA possui o mesmo número de letras que a palavra RUA. Você pode afirmar que as duas palavras possuem o mesmo número de anagramas? Justifique.

Solução:

As palavras RUA e ASA não possuem o mesmo número de anagramas, pois, embora possuam o mesmo número de letras, a palavra ASA possui duas letras que não se distinguem nas configurações dos anagramas.

2) O mesmo ocorre com as palavras LUTA, CASA ou BOBO, que possuem o mesmo número de letras. A palavra LUTA possui 24 anagramas. Já as palavras CASA ou BOBO possuem quantos anagramas cada uma?

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades) ou uso da divisão como procedimento para evitar a sobrecontagem.

<u>Solução</u>:

<u>Enumeração Direta</u>

C A S A	*B O B O*
C A A S	*B O O B*
C S A A	*B B O O*
A C A S	*O B B O*
A C S A	*O B O B*
A A C S	*O O B B*
A A S C	
A S C A	*6 anagramas com a palavra BOBO*
A S A C	
S C A A	
S A C A	
S A A C	
12 anagramas com a palavra CASA	

R: A palavra casa possui 12 anagramas e a palavra BOBO possui 6 anagramas.

3) Como você calcularia o número de anagramas de uma palavra que possui letras repetidas, como CASA e BOBO, sem precisar escrever todos eles?

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades) ou uso da divisão como procedimento para evitar a sobrecontagem.

<u>Solução</u>:

Palavra CASA

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12\ anagramas$$

Palavra BOBO

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 6\ anagramas$$

R: A palavra CASA possui 12 anagramas e a palavra BOBO possui 6 anagramas.

Tarefa 5: Organizando livros

1) Paulo precisa organizar seus livros de Biologia, Matemática, História e Inglês em sua estante.

a) De quantas formas diferentes ele poderá enfileirar esses livros?

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades) ou PFC.

<u>Solução</u>:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \; maneiras\ de\ enfileirar\ os\ 4\ livros$$

R: É possível enfileirar os 4 livros de 24 maneiras diferentes.

b) De quantas formas ele pode enfileirar os livros, deixando sempre os de Matemática e Biologia juntos?

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades) ou PFC.

<u>Solução</u>:

<u>Princípio Fundamental da Contagem</u>

$$2 \times (3 \times 2 \times 1) = 12$$

R: É possível enfileirar os 4 livros de 12 maneiras diferentes, com a condição de manter os livros de Biologia e Matemática juntos.

2) Paulo ganhou outro livro de Matemática idêntico ao seu e guardará esse exemplar até poder doar para outra pessoa que não o tenha. E agora, quantas são as maneiras de Paulo organizar seus cinco livros?

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades) ou uso da divisão como procedimento para evitar a sobrecontagem.

<u>Solução</u>:

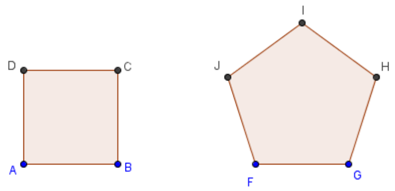
Paulo terá cinco livros, sendo dois deles idênticos; então, temos:

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$$

R: Paulo pode organizar seus livros de 60 maneiras diferentes.

Tarefa 6: Formando triângulos

Quantos triângulos podem ser formados, tendo seus vértices nos vértices de cada figura?:



Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades) ou uso da divisão como procedimento para evitar a sobrecontagem.

<u>Solução</u>:

Para formar triângulos, necessitamos de três pontos não colineares; portanto, em ambas as figuras, quaisquer três pontos diferentes determinam um triângulo. E a ordem de escolhas desses pontos não é relevante para a formação dos triângulos.

No quadrado, teremos agrupamentos de três pontos em um grupo de quatro pontos. Assim, temos:

$$\frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4\ triângulos$$

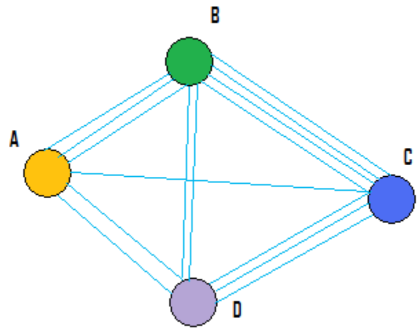
No pentágono teremos agrupamentos de três pontos em um grupo de cinco pontos. Assim, temos

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10\ triângulos$$

R: É possível formar quatro triângulos a partir dos vértices do quadrado e dez triângulos a partir dos vértices do pentágono.

Tarefa 7: Viagem

Felix mora em uma cidade A de um país distante. Há várias estradas que ligam sua cidade a três cidades vizinhas. Felix visita com frequência a cidade B. Às vezes passa pelas cidades C e D, já que está a passeio; outras vezes, não. Quantos trajetos diferentes Felix pode fazer para chegar até B? (não passando duas vezes pela mesma cidade)



( ) a) 3

( ) b) 35

( ) c) 28

( ) d) 8

( ) e) 45

( ) f) 41

Para resolver essa situação, o aluno deveria identificar todos os trajetos diferentes que Felix poderia realizar.

De A para B, direto, há três estradas.

De A para B, passando por D, há quatro possibilidades de trajeto.

De A para B, passando pela cidade C, há quatro possibilidades de trajeto.

De A para B, passando pelas cidades C e D, nessa ordem, há seis possibilidades de trajeto.

De A para B, passando pelas cidades D e C, nessa ordem, há 24 possibilidades de trajeto.

Portanto, para saber o total de possíveis trajetos, devemos adicionar todos os resultados, obtendo, assim, 41 possibilidades de trajetos diferentes.

Tarefa 8: Números

Utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades) ou PFC.

a) Quantos números pares de três algarismos podemos formar ?

Solução:

Princípio Fundamental da Contagem

$$7 \times 7 \times 3 = 147.$$

R: É possível formar 147 números pares com os algarismos dados.

b) Quantos números ímpares de três algarismos distintos podemos formar?

Solução:

Princípio Fundamental da Contagem

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

R: É possível formar 120 números ímpares com os algarismos dados.

c) Quantos números de três algarismos todos repetidos podemos formar?

Solução:

Princípio Fundamental da Contagem

$$7 \times 1 \times 1 = 7$$

R: É possível formar sete números de três algarismos repetidos entre os algarismos dados.

d) Quantos números de três algarismos podemos formar?

Solução:

Princípio Fundamental da Contagem

$$7 \times 7 \times 7 = 343$$

R: É possível formar 343 números de três algarismos com os algarismos dados.

Tarefa 9: Iluminação

Em um galpão existem cinco pontos de luz. De quantas maneiras diferentes podemos iluminar esse galpão? (Lembre-se: ele só não estará iluminado se todas as luzes estiverem apagadas)

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades) ou PFC.

<u>Solução</u>:

Temos cinco pontos de luz, e cada um desses tem duas possibilidades: aceso ou apagado. Então, teremos, pelo PFC, $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ *possibilidades de ocorrência. Porém a única possibilidade que não pode ocorrer é estarem todos apagados; então, teremos 32 – 1 = 31 maneiras diferentes de o galpão estar iluminado.*

R: É possível iluminar o galpão de 31 maneiras diferentes.

ATIVIDADE 3

A Atividade 3 teve por objetivo um momento de sistematização dos conhecimentos até então desenvolvidos, ou seja, a sistematização do Princípio Fundamental da Contagem e da divisão como estratégia de solução para casos em que a ordem seja irrelevante ou que apresentem elementos repetidos.

Objetivo: Sistematizar o Princípio Fundamental da Contagem e o uso da divisão para evitar a sobrecontagem.

Professor: busque incentivar uma discussão entre os alunos para elencar as características relevantes, como a importância da ordem ou não e a existência de elementos repetidos. A utilização de exemplos é uma estratégia importante nesse momento.

ATIVIDADE

1) Na resolução de problemas de contagem, várias estratégias podem ser utilizadas. Sua escolha está relacionada à percepção de algumas características do problema. A fundamentação para essas estratégias é o Princípio Fundamental da Contagem, que podemos esquematizar pelo diagrama a seguir[9]:

---

[9] Situação adaptada de Coutinho e Miguel, 2002, p.14

nº de opções para primeira etapa × nº de opções para segunda etapa × nº de opções para terceira etapa × ... × nº de opções para enésima etapa

Porém, alguns fatores devem ser considerados para a resolução dos problemas. Vamos descobrir quais são esses fatores ou características que diferenciam os problemas propostos. Converse com seu colega de dupla e faça uma relação das características que são importantes nas situações que resolveu até agora. Anote todas elas para que possamos, juntos, descobrir cada uma delas e sua importância.

Professor: questione e relacione na lousa as características apresentadas pelos alunos. É importante sempre destacar a necessidade de uma leitura criteriosa antes de resolver as situações propostas.

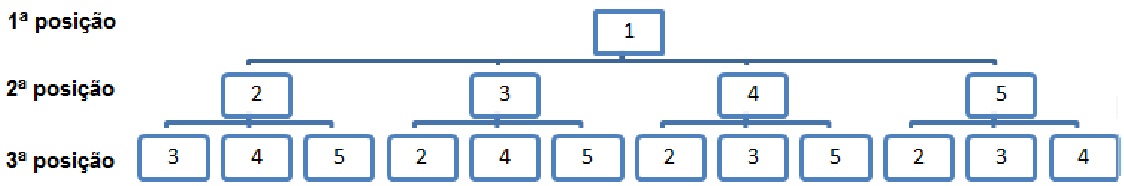
Agora que conhecemos esse princípio, calcule quantas são as centenas diferentes que podemos escrever, utilizando apenas os números 0, 1, 2, 3 e 4? E se não houver algarismos repetidos?

Podemos escrever $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100\ centenas\ diferentes$

Se não houver números repetidos, teremos $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48\ centenas\ diferentes.$

2) Observe a árvore de possibilidades para o problema[10]:

Quantos grupos ordenáveis de três elementos podemos formar com cinco pessoas?



Ao observar a árvore, percebemos que, para cada elemento que ocupar a primeira posição, teremos quatro elementos para ocupar a segunda posição e três elementos para ocupar a terceira posição. Assim, como temos cinco elementos para a primeira posição, o número de grupos ordenáveis nesse caso será igual ao produto $5 \times 4 \times 3 = 60$.

[10] Texto adaptado de São Paulo, 2009b, p.21

Agora, se não estivéssemos considerando a ordem das pessoas: por exemplo, vou convidar três dessas cinco pessoas para uma festa. Em quanto ficaria reduzido esse número, se a ordem não é importante, ou seja, o agrupamento “1, 2, 3” é o mesmo que “1, 3, 2” e igual a todos os outros em que ocorre a troca de posição dos mesmos participantes? Ou seja, não estamos ordenando as pessoas e apenas formando grupos.

Os 60 grupos ordenáveis ficariam reduzidos a 10 grupos não ordenáveis (resultado de $60 \div 6$), uma vez que cada grupo de três elementos permite a troca de posições de seis maneiras diferentes.

Portanto, teremos $\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = \frac{60}{6} = 10$ grupos não ordenáveis.

Usando esse raciocínio, calcule o número de duplas diferentes que podem ser formadas entre sete amigos.

$$\frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21\ duplas$$

ATIVIDADE 4

A escolha dos exercícios da atividade 4 teve por objetivo destacar a importância de verificar a relevância ou não da ordem nos agrupamentos, para, assim, escolher a estratégia de solução. Buscávamos com esta atividade que o aluno mobilizasse os conhecimentos desenvolvidos nas atividades anteriores.

Objetivo: Ressaltar a importância ou não da ordem e utilizar o Princípio Fundamental da Contagem e a divisão como forma de evitar a sobrecontagem, para resolver os problemas propostos.

Tarefa 1: Cinco amigos

1) Um grupo de cinco amigos (A, B, C, D, E). A seguir, aparecem critérios para agrupá-los. Identifique se cada grupo é ordenado ou não ordenado e calcule o número de agrupamentos possíveis em cada situação.

Para responder os seguintes itens, os alunos podem optar pelo diagrama de árvore, pela contagem direta ou pelo PFC e divisão, para evitar a sobrecontagem.

Esperamos que, neste momento, o uso de representações como a árvore ou a contagem direta sejam pouco utilizadas.

a) Escolher três pessoas para irem a uma festa.

Solução:

Agrupamento não ordenado. Três pessoas podem ser escolhidas de dez maneiras diferentes.

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

R: É possível escolher três pessoas entre os cinco amigos de dez maneiras diferentes.

b) Definir os dois primeiros colocados num concurso.

Solução:

Agrupamento ordenado. Os dois primeiros colocados podem ocorrer de 20 maneiras diferentes.

$$5 \times 4 = 20$$

R: É possível definir os dois primeiros colocados entre os 5 amigos de 20 maneiras diferentes.

c) Colocar as cinco pessoas em fila.

Solução:

Agrupamento ordenado. As cinco pessoas podem ser enfileiradas de 120 maneiras diferentes.

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

R: É possível enfileirar as cinco pessoas de 120 maneiras diferentes.

d) Dar presentes iguais a quatro dessas pessoas.

Solução:

Agrupamento não ordenado. Quatro pessoas irão ganhar presentes que não são distinguíveis; portanto, isso poderá ocorrer de cinco maneiras diferentes.

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$$

R: É possível dar presentes iguais a quatro dos cinco amigos de cinco maneiras diferentes.

e) Dar quatro presentes diferentes a quatro dessas pessoas.

Solução:

Agrupamento ordenado. Quatro pessoas irão ganhar presentes que são distinguíveis; portanto, isso poderá ocorrer de 120 maneiras diferentes.

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

R: É possível dar presentes diferentes a quatro dos cinco amigos de 120 maneiras diferentes.

Tarefa 2: Ordenado ou não?

1) Analise, em cada caso, se os agrupamentos são ordenados ou não ordenados e calcule o número de agrupamentos possíveis de cada situação.

a) Números de três algarismos, tomados a partir dos algarismos 3, 4, 5, 6 e 7.

Solução:

Agrupamentos ordenados.

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

R: São possíveis 125 números de três algarismos formados a partir dos algarismos dados.

b) Códigos de quatro símbolos distintos, escolhidos entre os elementos do conjunto {1, 2, 3, a, b, c}.

Solução:

Agrupamentos ordenados.

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

R: São possíveis 360 códigos diferentes a partir dos símbolos dados.

c) Grupos de 5 alunos, escolhidos entre os 40 alunos de uma sala, para participarem de um evento.

Solução:

Agrupamentos não ordenados

$$\frac{40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 658.008$$

R: São possíveis 658008 *grupos de 5 alunos escolhidos entre os 40 alunos da sala.*

d) Formas de arrumar seis livros diferentes em uma estante.

<u>Solução</u>:

Agrupamentos ordenados

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

R: Os 6 livros podem ser arrumados na estante de 720 formas diferentes.

e) Misturas obtidas, juntando-se volumes iguais de três líquidos, escolhidos entre seis disponíveis.

<u>Solução</u>:

Agrupamentos não ordenados

$$\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

R: É possível obter 20 misturas diferentes, juntando-se 3 líquidos entre os 6 disponíveis.

Tarefa 3

2) A mega-sena está acumulada!

Ricardo fez um único jogo, escolhendo as seis dezenas marcadas no cartão a seguir:

a) Quantas quinas diferentes Ricardo poderia formar com os números marcados?

<u>Solução</u>:

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 6$$

- Contagem direta

03,04,10,13,32	*03,04,10,32,44*	*03,10,13,32, 44*
03,04,10,13,44	*03,04,13,32, 44*	*04,10,13,32, 44*

R: Ricardo pode formar seis quinas diferentes com os números marcados.

b) Quantas quadras diferentes ele poderia formar?

<u>Solução</u>:

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15$$

3, 8, 10, 13	*3, 10, 13, 32*	*4, 8, 10, 32*
3,8, 10, 32	*3, 10, 13, 44*	*4, 8, 10, 44*
3, 8, 10, 44	*3, 10, 32, 44*	*4, 10, 13, 32*
3, 8, 13, 32	*3, 13, 32, 44*	*4, 10, 13, 44*
3, 8, 13, 44	*4, 8, 10, 13*	*4, 13, 32, 44*

R: Ricardo pode formar 15 quadras diferentes com os números marcados no bilhete.

ATIVIDADE 5

A elaboração da atividade 5 teve por objetivo sistematizar os conceitos de permutação, arranjo e combinação. Para isso, optamos por tarefas que permitissem ao aluno identificar a relação existente entre os diferentes agrupamentos.

Na tarefa 1, solicitamos aos alunos que enumerassem e quantificassem as possibilidades de enumeração na escolha de três vogais distintas. Após, solicitamos que observassem de quantas maneiras três dessas vogais poderiam ser enfileiradas, ou seja, de quantas maneiras poderiam trocar suas posições. E, por último, que identificassem quantos agrupamentos poderiam ser formados por três vogais em que a ordem não fosse elemento diferenciador.

A partir disso, solicitamos que identificassem a relação existente entre essas três possibilidades, para, assim, nomearmos os tipos de agrupamentos.

As tarefas seguintes tiveram como objetivo sistematizar cada um dos tipos de agrupamentos e suas estratégias de solução: permutações simples e permutações com repetições, arranjos simples e arranjos com repetições e, por fim, combinação simples.

Optamos por inserir o fatorial apenas no momento da sistematização das permutações simples, seguindo a sugestão de Sturm (1999) de que o estudo do fatorial não é imprescindível no início do estudo de combinatória. Porém, inferimos que a escolha do momento de inserir esse símbolo fica a critério do docente, de acordo com o desenvolvimento de seus alunos.

ATIVIDADE

Objetivo: Identificar os tipos de agrupamentos, de acordo com as características observadas.

Objetivo específico: Sistematizar os conceitos de permutação, arranjo e combinação.

Agora que conhecemos importantes características que influenciam na escolha da estratégia de solução das situações que envolvem raciocínio combinatório, iremos identificá-los.

Tarefa 1: PERMUTAÇÕES – ARRANJOS SIMPLES E COMBINAÇÕES

1) Em uma urna colocamos cinco bolas, cada uma com uma vogal escrita. Sortearemos três bolas sem reposição e anotaremos sua vogal, ou seja, sortearemos a primeira bola, anotaremos sua vogal, em seguida sortearemos a segunda e assim até anotarmos as três vogais. Quais e quantas são as sequências possíveis de formar, sorteando as três bolas?

Solução:

aei	*aeo*	*aeu*	*aio*	*aiu*	*aou*	*eio*	*eiu*	*eou*	*iou*
aie	*aoe*	*aue*	*aoi*	*aui*	*auo*	*eoi*	*eui*	*euo*	*iuo*
eia	*eoa*	*eau*	*ioa*	*iau*	*oau*	*ioe*	*ieu*	*oeu*	*oui*
eai	*eao*	*eua*	*iao*	*iua*	*oua*	*ieo*	*iue*	*oue*	*oiu*
iae	*oae*	*uae*	*oai*	*uai*	*uao*	*oei*	*uei*	*ueo*	*uio*
iea	*oea*	*uea*	*oia*	*uia*	*uoa*	*oie*	*uie*	*uoe*	*uoi*

R: São possíveis 60 sequências diferentes com 3 vogais distintas.

2) De quantas maneiras podemos trocar as posições de três letras já determinadas? Por exemplo, de quantas maneiras diferentes podemos organizar as letras aei ?

Solução:

Três vogais podem ser organizadas de seis maneiras diferentes.

O aluno poderia responder a essa questão, observando a questão anterior ou enumerando as possibilidades.

3) De quantas maneiras podemos escolher três vogais, se a ordem de escolha não é importante? Por exemplo, aei é a mesma coisa que eia ou iea, etc.

Solução:

R: Podemos escolher três vogais, sem importar a ordem de escolha, de dez maneiras distintas.

4) Observe as três questões anteriores e seus resultados. Descubra a relação que há entre a questão 3 e as questões 1 e 2.

Solução:

Esperávamos que os alunos percebessem que, na questão 1, a ordem é relevante na escolha de um subgrupo; na questão 2, trabalha-se a ordem de todos os elementos pedidos em um agrupamento; e, na questão 3, a ordem é irrelevante. E esperávamos também que, observando os valores, identificassem a divisão.

5) Definindo agrupamentos

a) Na primeira questão, temos uma situação que chamamos de **ARRANJO**. Então, escreva com suas palavras o que é um arranjo. Dê um novo exemplo.

Solução:

Esperávamos que o aluno descrevesse arranjo como agrupamento de parte dos elementos de um grupo, que se diferenciam pela ordem dos elementos.

b) Na segunda questão, temos **PERMUTAÇÂO**. Escreva com suas palavras o que é uma permutação e dê um novo exemplo.

Solução:

Esperávamos que o aluno descrevesse permutação como a organização de todos os elementos de um grupo, diferenciando-os pela ordem de seus elementos.

c) E, na terceira questão, temos a situação que denominamos **COMBINAÇÃO**. Escreva com suas palavras o que é uma combinação e dê um novo exemplo.

Solução:

Esperávamos que o aluno descrevesse combinação como agrupamento de parte dos elementos de um grupo em que a ordem dos elementos não os diferencia.

d) Como podemos descrever um agrupamento, relacionando-o aos outros?

Solução:

Esperávamos que o aluno identificasse a relação $n^o\, de\ combinação = \frac{n^o\, de\ arranjos}{n^o\, de\ permutões}$

Tarefa 2: Institucionalizando permutações

A- Chamaremos de **Permutação** a todos os agrupamentos ordenáveis formados com todos os elementos de um conjunto. Os elementos podem ser todos distintos ou pode haver elementos repetidos.

a) Escreva todas as possibilidades de ordenar as letras abc. Quantos grupos você obteve?

Solução:

abc, acb, bca, bac, cab, cba

Representaremos o total de agrupamentos por P_3, onde o 3 corresponde à quantidade de elementos do conjunto. Portanto, $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

Você sabe o que quer dizer fatorial em Matemática?

Por exemplo, o que significa 3 fatorial?

3 fatorial é indicado por 3! e significa que estamos considerando o produto $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

O fatorial é uma ferramenta útil para simplificar nossos cálculos, então podemos utilizá-lo.

1) Agora que sabemos o que é uma permutação, qual é o número de:

a) Permutações de três elementos distintos

Solução:

$$\mathrm{P}_3 = 3!$$
$$\mathrm{P}_3 = 3 \times 2 \times 1$$
$$\mathrm{P}_3 = 6$$

R: A permutação de três elementos distintos é 6.

b) Permutações de cinco elementos distintos

Solução:

$$P_5 = 5!$$
$$P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$P_5 = 120$$

c) De quantas maneiras oito pessoas podem estar em uma fila?

Solução:

$$P_8 = 8!$$
$$P_8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$P_8 = 40.320$$

R: Oito pessoas podem organizar-se de $40{,}320$ *maneiras diferentes em uma fila.*

d) Pintar as quatro listras de uma bandeira com as cores azul, vermelho, verde e amarelo, sem repetir cores.

Solução:

$$P_4 = 4!$$
$$P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$P_4 = 24$$

R: É possível pintar 4 listras de uma bandeira de 24 formas distintas.

e) A permutação de r elementos distintos será calculada por:

Solução:

$$P_r = r!$$

$$P_r = r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

B) Mas e se contarmos com elementos repetidos?

A - Jogo das senhas

Paulo é o responsável por criar um programa de senhas de um *site*. Para testar seu programa, ele colocou as sequências abaixo para verificar a quantidade de senhas possíveis. Coloque o total de senhas diferentes obtidas para cada agrupamento:

a) 1234

Solução:

$$P_4 = 4!$$

$$P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$P_4 = 24$$

R: São possíveis 24 senhas.

b) 1232

Solução:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!}$$

$$P_4^2 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

R: São possíveis 12 senhas.

c) 1221

Solução:

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$P_4^2 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 6$$

R: São possíveis seis senhas.

d) 1111

Solução:

É possível apenas uma senha.

e) Explique que estratégia você usou para resolver o problema.

Solução:

Esperávamos que o aluno utilizasse a divisão para os casos de elementos repetidos.

B- Lembra do caso dos anagramas das palavras ASA, BOBO ou CASA?

Então, nesses casos tínhamos a permutação com elementos repetidos e, no caso da palavra ASA, representaremos por P_3^2, em que o 3 é o número total de letras e o 2 é o número de vezes que a letra A repete. Portanto, $P_3^2 = \frac{3!}{2!}$; logo, teremos que $P_3^2 = \frac{3\times2\times1}{2\times1} = 3$. Sendo assim:

a) Represente e calcule o número de permutações das palavras BOBO e CASA.

Solução:

Palavra BOBO

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$P_4^{2,2} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 6$$

Palavra CASA

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!}$$

$$P_4^2 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

R: A palavra BOBO possui 6 anagramas e a palavra CASA possui 12 anagramas.

b) A permutação de cinco elementos dos quais dois são repetidos será calculada por:

<u>Solução</u>:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!}$$

$$P_5^2 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$$

c) Um aluno respondeu da seguinte forma, quando foi perguntado o número de anagramas da palavra CIDADANIA:

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 15.120$$

Você concorda com a solução desse aluno? Explique.

<u>Solução</u>:

Esperávamos que o aluno respondesse que concordava e justificasse, apresentando a quantidade de letras repetidas.

d) Quantos anagramas existem da palavra MATEMÁTICA?

<u>Solução</u>:

$$P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2! \times 3! \times 2!}$$

$$P_{10}^{2,3,2} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3! \times 2!}$$

$$P_{10}^{2,3,2} = 15.1200 \ anagramas$$

R: A palavra MATEMÁTICA possui 15.1200 anagramas.

Tarefa 3: Arranjos simples

Chamaremos de **Arranjo simples** a todos os agrupamentos formados com parte dos elementos de um conjunto em que a ordem é importante.

a) Escreva todas as centenas formadas somente por algarismos ímpares, que não possuam nenhum algarismo repetido. Quantos grupos você obteve? Exemplos: 135, 351, etc.

Solução:

135	*137*	*139*	*157*	*159*	*179*	*357*	*359*	*379*	*579*
153	*173*	*193*	*175*	*195*	*197*	*375*	*395*	*397*	*597*
351	*371*	*319*	*571*	*519*	*719*	*573*	*539*	*739*	*795*
315	*317*	*391*	*517*	*591*	*791*	*537*	*593*	*793*	*759*
513	*713*	*913*	*715*	*915*	*917*	*735*	*935*	*937*	*957*
531	*731*	*931*	*751*	*951*	*971*	*753*	*953*	*973*	*975*

R: Obtêm-se 60 grupos.

Representaremos o total de agrupamentos por $A_{5,3}$, em que o 5 corresponde ao total de algarismos ímpares no sistema decimal e 3 corresponde à quantidade de algarismos que compõem uma centena. Portanto,

$$\boldsymbol{A_{5,3} = 5 \times 4 \times 3 = 60.}$$

b) Quantos arranjos simples de quatro elementos podemos formar com as letras de {a, b, c, d, e, f}?

Solução:

$$A_{6,4} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

R: É possível formar 360 arranjos simples com as letras a, b, c, d, e, f.

c) De um baralho (52 cartas diferentes), 3 cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas sequências de cartas podemos obter?

Solução:

$$A_{52,3} = 52 \times 51 \times 50 = 132.600$$

R: É possível escolher 132.600 sequências de três de cartas de um baralho que contenha 52 cartas.

d) Quantas são as siglas de três letras diferentes que podemos formar a partir das letras do nosso alfabeto?

Solução:

$$\mathrm{A}_{26,3} = 26 \times 25 \times 24 = 15.600$$

R: É possível formar 15.600 siglas com 3 letras diferentes a partir das letras do nosso alfabeto.

e) Um concurso conta com seis participantes. De quantas formas diferentes podemos definir os três primeiros colocados?

Solução:

$$A_{6,3} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

R: Os três primeiros colocados de um concurso com 6 participantes podem ser organizados de 120 maneiras diferentes.

Tarefa 4: Combinação simples

Chamaremos de **Combinação simples** a todos os agrupamentos não ordenáveis formados com parte dos elementos de um conjunto.

Representaremos a combinação de três elementos de um grupo de seis elementos por $C_{6,3}$, em que 6 é o total de elementos e 3, o número de elementos nos agrupamentos.

a) Quantas são as possibilidades de escolher três brinquedos em uma prateleira com oito opções diferentes?

Solução:

$$C_{8,3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$$

$$C_{8,3} = 56$$

R: É possível escolher 3 entre 8 brinquedos de uma prateleira de 56 maneiras diferentes.

b) Na prova de matemática de 2008, a professora elaborou cinco questões, das quais os alunos deveriam responder três. De quantas formas ele poderia ter escolhido essas três questões?

<u>*Solução*</u>*:*

$$C_{5,3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}$$
$$C_{5,3} = 10$$

R: O aluno pode escolher três entre as cinco questões da prova de matemática de dez maneiras diferentes.

c) Como você determinaria o número de combinações possíveis de oito elementos de um conjunto que possui dez elementos?

<u>*Solução*</u>*:*

Esperávamos que o aluno apresentasse a seguinte solução:

$$C_{10,8} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$C_{10,8} = 45$$

d) Com as observações que você fez na tarefa 1 desta atividade, como poderia relacionar combinação com permutação e arranjo? Você poderia escrever uma forma de determinar o número de combinações possíveis a partir do número de arranjos e permutações? Como?

<u>*Solução*</u>*:*

Esperávamos que o aluno identificasse a relação $n^o\ de\ combinação = \frac{n^o\ de\ arranjos}{n^o\ de\ permutões}$

ATIVIDADE 6 –

A elaboração da sexta atividade teve por objetivo propor exercícios para que os alunos mobilizassem os conhecimentos desenvolvidos durante as atividades anteriores. Para isso, selecionamos problemas que envolvem os diferentes tipos de agrupamentos estudados.

Na escolha dos problemas, optamos por aqueles que poderiam ser resolvidos tanto por enumeração quanto por PFC ou pelas estratégias sistematizadas na atividade 5 e também por situações em que a enumeração seria inviável devido à quantidade de agrupamentos possíveis.

Objetivo: Resolver situações-problema com diferentes tipos de agrupamentos, utilizando as estratégias aprendidas.

Tarefa: Resolva os problemas a seguir.

1) Ao planejar uma viagem turística de São Paulo a Tóquio pela Empresa TUR-INTERNACIONAL, o turista deseja saber quantas e quais são as suas opções de viagem. Sabendo que a empresa oferece viagens saindo de São Paulo com a primeira escala no Rio de Janeiro ou em Recife, ou em Brasília, e a segunda escala em Miami ou São Francisco, para poder escolher a que mais lhe convém, o turista resolve montar todas as opções. Quais e quantas opções ele possui? (Atividade adaptada de Zampirolo, 2000a, p. 3)

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades, tabela de dupla entrada) ou uso da divisão como procedimento para evitar a sobrecontagem.

Solução:

Princípio Fundamental da Contagem

$$3 \times 2 = 6$$

R: O turista terá seis opções de escolha para sua viagem: SP-RJ-MI-TO , SP-RJ-SF-TO, SP-RE-MI-TO, SP-RE-SF-TO, SP-BR-MI-TO, SP-BR-SF-TO

2) Quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4? Em ordem crescente, qual a posição que ocupará o número 2341? E o número 4213?

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades) ou permutação com repetição.

Solução:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

R: Podemos formar 24 números, utilizando os 4 algarismos dados. Em ordem crescente, o número 2341 ocupará a décima posição e o número 4213 ocupará a vigésima posição.

3) André, Beto, Carlos e Danilo estão participando de um campeonato de futebol de botão. De quantas maneiras diferentes pode terminar esse campeonato (1º, 2º, 3º e 4º lugares) ?

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades, tabela de dupla entrada), PFC ou arranjo.

Solução:

$$A_{4,2} = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$A_{4,2} = 24$$

R: Há 24 maneiras diferentes de ocorrer os dois primeiros colocados entre quatro participantes de um campeonato.

4) Em um setor de uma fábrica de automóveis trabalham oito estagiários, dos quais três serão promovidos. De quantas formas podem ocorrer essas promoções?

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades) ou combinação.

Solução:

$$C_{8,3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$$
$$C_{8,3} = 56$$

R: É possível promover 3 entre 8 estagiários da fábrica de 56 maneiras diferentes.

5) Seis amigos de faculdade resolveram fazer um churrasco no final de semana para comemorar os bons resultados durante o semestre letivo. Mas ninguém queria ir ao mercado fazer compras, então decidiram sortear três deles: escreveram os nomes em papéis iguais e colocaram em uma caixa para o sorteio. De quantas maneiras diferentes pode ser formado, por sorteio, o trio que irá ao mercado?

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades) ou combinação.

<u>Solução</u>:

$$C_{6,3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}$$

$$C_{6,3} = 20$$

R: O sorteio de 3 entre 6 amigos pode ocorrer de 20 maneiras diferentes.

6) Fábio comprou um cadeado com senha para colocar em sua bicicleta. A senha desse cadeado é composta de quatro algarismos. Em uma brincadeira com Rodrigo, seu irmão caçula, Fábio o desafiou a descobrir a senha e deu uma dica: “A minha senha termina com o algarismo 5 e não possui números repetidos”.
Sem ter nenhuma ideia a mais sobre a senha de Fábio, Rodrigo aceitou o desafio e começou a testar as possíveis senhas. Supondo que Rodrigo não tenha muita sorte e só acerte na última tentativa possível, quantas senhas no total ele tentará?

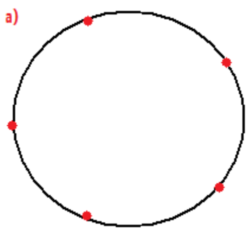
Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades) ou combinação.

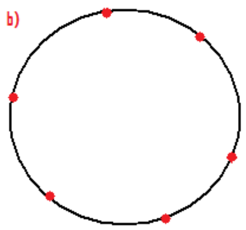
<u>Solução</u>:

$$9 \times 8 \times 7 = 504$$

R: Rodrigo testará 504 senhas.

7) Qual é o número máximo de triângulos que você pode formar, tendo suas extremidades nos pontos contidos nas circunferências a seguir?:





Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades) ou combinação.

<u>Solução</u>:

a) $C_{5,3} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10\ triângulos$

b) $C_{6,3} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20\ triângulos$

R: É possível formar 10 triângulos a partir de 5 pontos sobre uma circunferência e 20 triângulos a partir de 6 pontos sobre uma circunferência.

8) A vovó Nina possui três quartos em casa. No próximo final de semana irá receber quatro netas para dormir em sua casa. De quantas formas as netas podem escolher os quartos para dormir? (Uma neta pode dormir em cada quarto, todas podem dormir em um único quarto, podem dormir em duplas, etc.)

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades) ou arranjo com repetição.

<u>Solução</u>:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

R: As netas de vovó Nina poderão escolher seus quartos de 81 maneiras diferentes.

9) Um grupo é formado de sete alunos e três professores. De quantos modos se pode formar uma comissão de:

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades), ou combinação.

a) cinco pessoas?

<u>Solução</u>

$$\mathrm{C}_{10,5} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252$$

R: Há 252 maneiras de formar comissões com 3 entre 7 professores.

b) sete pessoas, sendo que exatamente três são professores?

<u>Solução</u>:

Sabendo que os três professores fazem parte da comissão, resta escolher os quatro alunos.

$$C_{7,4} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

R: É possível fazer a escolha de 35 maneiras diferentes.

c) quatro pessoas, sendo pelo menos um aluno?

<u>Solução</u>:

$$C_{7,1} \cdot C_{3,3} + C_{7,2} \cdot C_{3,2} + C_{7,3} \cdot C_{3,1} + C_{7,4}$$
$$7 \times 1 + 21 \times 3 + 35 \times 3 + 35 = 210 \textit{ comissões}$$

R: É possível fazer a escolha de 210 comissões diferentes.

10) Quatro atores, Juca, Max, Frank e Lucas estão concorrendo aos papéis de Aramis, Porthus e Athos: os três mosqueteiros. De quantas formas diferentes podem ser escolhidos três desses atores para representar esses papéis?

Possibilidades de solução: enumeração (contagem direta ou árvore de possibilidades), PFC ou arranjo simples

<u>Solução</u>

$$A_{4,3} = 4 \times 3 \times 2$$
$$A_{4,3} = 24$$

R: Os três atores podem ser escolhidos de 24 formas diferentes.

CAPÍTULO 5
O DESENVOLVIMENTO DA THA

Neste capítulo apresentaremos o desenvolvimento das atividades da THA em sala de aula, em que buscamos verificar o desenvolvimento matemático e, em seguida, as alterações propostas para a segunda versão da THA.

Introdução

Na segunda quinzena do mês de abril de 2010, foram realizados dois encontros com as professoras colaboradoras da Escola de Santo André, para a entrevista e a apresentação da THA inicial. Porém, não foi possível um encontro conjunto com todas as colaboradoras, por incompatibilidade de horários. Com a professora de Embu-Guaçu foi realizado um encontro para a apresentação da THA na segunda quinzena de junho; no entanto, consideramos importante salientar que mantivemos contato quase diário com essa professora para o relato das aulas que não foram acompanhadas pela pesquisadora e para discussões sobre as atividades propostas na THA.

As professoras P1, P2 e P3 concordaram com as atividades propostas, sugerindo apenas a alteração na ordem de uma das atividades, adiando a introdução de uma tarefa que envolve agrupamentos que se diferenciam apenas pela natureza dos elementos da primeira para a segunda atividade. Não sugeriram outras alterações. Nesses encontros, as docentes realizaram um estudo superficial das atividades, o que talvez seja um dos motivos de não haver questionamentos.

Quanto à docente P4, por fazer parte do grupo que está desenvolvendo o projeto no qual essa pesquisa está inserido, colaborou na elaboração da primeira versão da THA meses antes de tornar-se professora colaboradora. Portanto, apresentou sugestões e questionamentos que nos auxiliou, porém, como não era docente colaboradora, suas sugestões eram tidas como colaboração do grupo para a elaboração da THA e não foram relacionadas. Por essa razão, infelizmente não poderemos descrevê-las.

Uma observação que acreditamos ser relevante é a afirmação das professoras colaboradoras P1 e P3 sobre o fato de nunca terem trabalhado situações sem a utilização de fórmulas. Declararam acreditar que os alunos teriam dificuldades em trabalhar com situações em que não fossem definidos os agrupamentos anteriormente e não se a apresentassem as fórmulas. Porém, percebemos certa contradição, pois elas afirmam que a maior dificuldade dos alunos é exatamente esta: saber qual fórmula utilizar, o que significa não identificar os tipos de agrupamentos.

Entendemos que predomina entre essas docentes (P1 e P3) uma abordagem fragmentada, em que cada tipo de agrupamento é apresentado e seguido de exercícios de aplicação, tal qual observamos na análise dos livros didáticos adotados pela sua unidade escolar e usados por elas e por seus alunos como apoio didático. A P2 nunca ministrou aulas deste conteúdo e admitiu ter dificuldades, pedindo à pesquisadora auxílio para entender as atividades. Com essa professora, atuamos também como formadores, pois as atividades foram resolvidas e explicadas a ela, buscando esclarecer suas dúvidas durante o desenvolvimento da THA.

A professora colaboradora P4, que começou a desenvolver a THA posteriormente ao trabalho com as demais professoras, afirmou não dominar totalmente tal conteúdo, tendo ministrado aulas do tema apenas uma vez, no ano de 2009, com o material da Proposta Curricular do Estado de São Paulo. A seguir apresentaremos as observações - escritas e gravadas em áudio - e as análises acerca do desenvolvimento das atividades pelos professores. Relatamos aqui apenas dados que julgamos relevantes para a análise da THA, a fim de evitar detalhes desnecessários. São parte da análise trechos que relatam características comuns dos professores e alunos, erros cometidos, estratégias utilizadas e intervenções dos professores que enriqueceram as atividades.

5.1 A THA em sala de aula

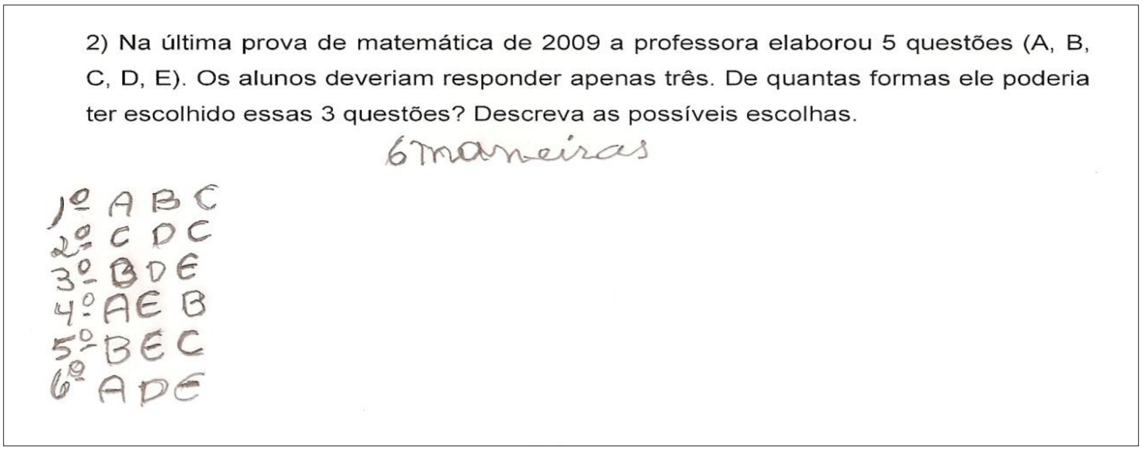
Atividade diagnóstica

A atividade diagnóstica foi desenvolvida de forma semelhante pelas docentes, que não fizeram intervenções, porém instruíram os alunos a realizar a atividade com bastante atenção e ressaltaram a importância de uma leitura criteriosa.

A única intervenção feita pelas docentes durante a atividade diagnóstica diz respeito ao significado da palavra “anagrama”. Embora seu sentido estivesse explicitado no enunciado da questão 4, alunos de todas as turmas apresentaram dificuldades em entender o que é um anagrama, o que indicou a necessidade de alteração do texto para a última versão da THA. As demais tarefas não foram motivo de questionamentos por parte dos alunos.

Os alunos não apresentaram dificuldades na primeira questão, o que era esperado, pois a questão envolve o produto cartesiano, que é recomendado pelos PCN desde as séries finais do Ensino Fundamental I. As estratégias mais utilizadas foram a contagem direta e a árvore de possibilidades, esta utilizada com maior frequência entre os alunos de P4, em número pequeno entre os alunos de P1 e P3 e ausente entre os alunos de P2. A árvore de possibilidades é um instrumento importante utilizado no estudo de Combinatória, pois auxilia na visualização das possibilidades de combinar os elementos e oportuniza ao aluno o exercício do raciocínio combinatório e a sistematização de formas de contagem.

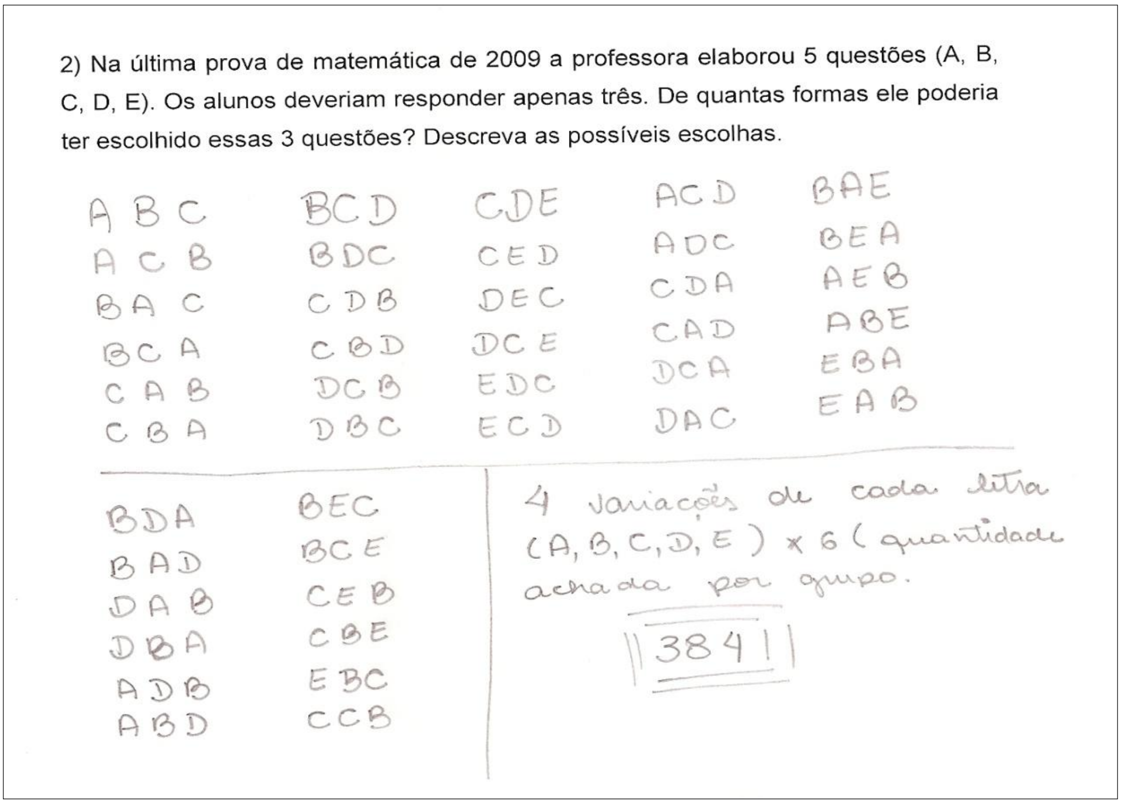
As soluções apresentadas nas demais tarefas reafirmam erros citados por Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) e Esteves (2001): ausência de um procedimento sistemático para a contagem, o que ocasionou a contagem por excesso ou por falta de configurações, erro de ordem (considerar a ordem na formação dos agrupamentos quando esta é irrelevante), erro de repetição (considerar diferentes elementos repetidos).


2) Na última prova de matemática de 2009 a professora elaborou 5 questões (A, B, C, D, E). Os alunos deveriam responder apenas três. De quantas formas ele poderia ter escolhido essas 3 questões? Descreva as possíveis escolhas.

6 maneiras

1º A B C
2º C D C
3º B D E
4º A E B
5º B E C
6º A D E

Figura 22 – Protocolo de aluno - Atividade Diagnóstica - falta de procedimento sistemático de enumeração


2) Na última prova de matemática de 2009 a professora elaborou 5 questões (A, B, C, D, E). Os alunos deveriam responder apenas três. De quantas formas ele poderia ter escolhido essas 3 questões? Descreva as possíveis escolhas.

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

BCD BDC CDB CBD DCB DBC

CDE CED DEC DCE EDC ECD

ACD ADC CDA CAD DCA DAC

BAE BEA AEB ABE EBA EAB

BDA BAD DAB DBA ADB ABD

BEC BCE CEB CBE EBC CCB

4 variações de cada letra (A, B, C, D, E) x 6 (quantidade achada por grupo.

384

Figura 23 - Protocolo de aluno - Atividade Diagnóstica – erro de ordem

Após a análise da atividade diagnóstica, orientamos as docentes sobre a importância de mediar as atividades de forma que os alunos desenvolvessem procedimentos sistemáticos de enumeração e para isso consideramos imprescindível a exploração da árvore de possibilidades, assim como recomendado por Esteves (2001), Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997), Correia, Fernandes e Almeida (2009). Explicitamos que se trata de um importante instrumento utilizado no estudo de Combinatória, pois auxilia na visualização de todas as possibilidades e da forma de combinar elementos envolvidos em uma situação, além de ajudar na sistematização do Princípio Fundamental da Contagem.

Atividade 1

A atividade 1 foi desenvolvida em duplas (ou grupos), em todas as turmas, por recomendação da pesquisadora, para que os alunos trabalhassem de forma colaborativa.

As professoras P1, P2 e P3 apresentaram a atividade de forma semelhante. Orientaram os alunos a resolver toda a atividade e informaram que ao final realizariam as correções. Enfatizaram a importância de uma leitura criteriosa, para que obtivessem sucesso na resolução das tarefas, e sugeriram que buscassem discutir suas soluções com os colegas de dupla (ou grupo). Após as orientações, as docentes atendiam as equipes que solicitavam explicações.

A dinâmica utilizada por P4 foi diferenciada: ela sempre solicitava aos alunos que resolvessem duas ou três tarefas e, em seguida, corrigia e fazia mediações coletivas, o que colaborava para não haver dispersão e também para socializar os conhecimentos, permitindo, assim, que todos acompanhassem as atividades. A docente demonstrou preocupação em explorar as diferentes estratégias de resposta apresentadas pelos discentes, o que ocasionava uma participação mais efetiva destes.

As diferentes representações contidas na tarefa inicial colaboraram para que os alunos iniciassem uma organização na enumeração nas tarefas seguintes. O uso da árvore de possibilidades pelos alunos passou a ser mais frequente nas demais tarefas, mesmo naquelas em que o enunciado não fizesse recomendações relativas a esse tipo de representação para enumeração.

A tarefa 1 não ofereceu dificuldades entre os alunos de P1, P3 e P4. Várias duplas de P2 apresentaram dificuldades para construção da árvore de possibilidades, solicitando auxílio da docente, que optou por construir na lousa a árvore de possibilidades, já que a dificuldade era comum aos alunos.

A tarefa 2 foi causadora de dificuldades entre os alunos, que não conseguiam enumerar todas as possibilidades, o que, segundo a docente P1, era devido ao número de possibilidades. Porém inferimos que a dificuldade ocorre pelo fato de não conseguirem fazer a enumeração de maneira organizada. Esperávamos que os alunos optassem pela árvore de possibilidades, porém percebemos que, entre os que optaram por essa representação, houve aqueles que desistiram por não conseguir organizá-la, confundindo-se quanto às cores que poderiam utilizar nas casas seguintes.

P1 orientou a organização da tarefa da seguinte forma:

P1: *Fixem a cor da primeira casa e troquem a cor das vizinhas de maneira organizada, depois pensem em como ficaria se mudar a cor da primeira casa. A árvore pode ajudar vocês.*

Os alunos que responderam corretamente optaram pela construção parcial da árvore de possibilidades ou pelo Princípio Fundamental da Contagem.

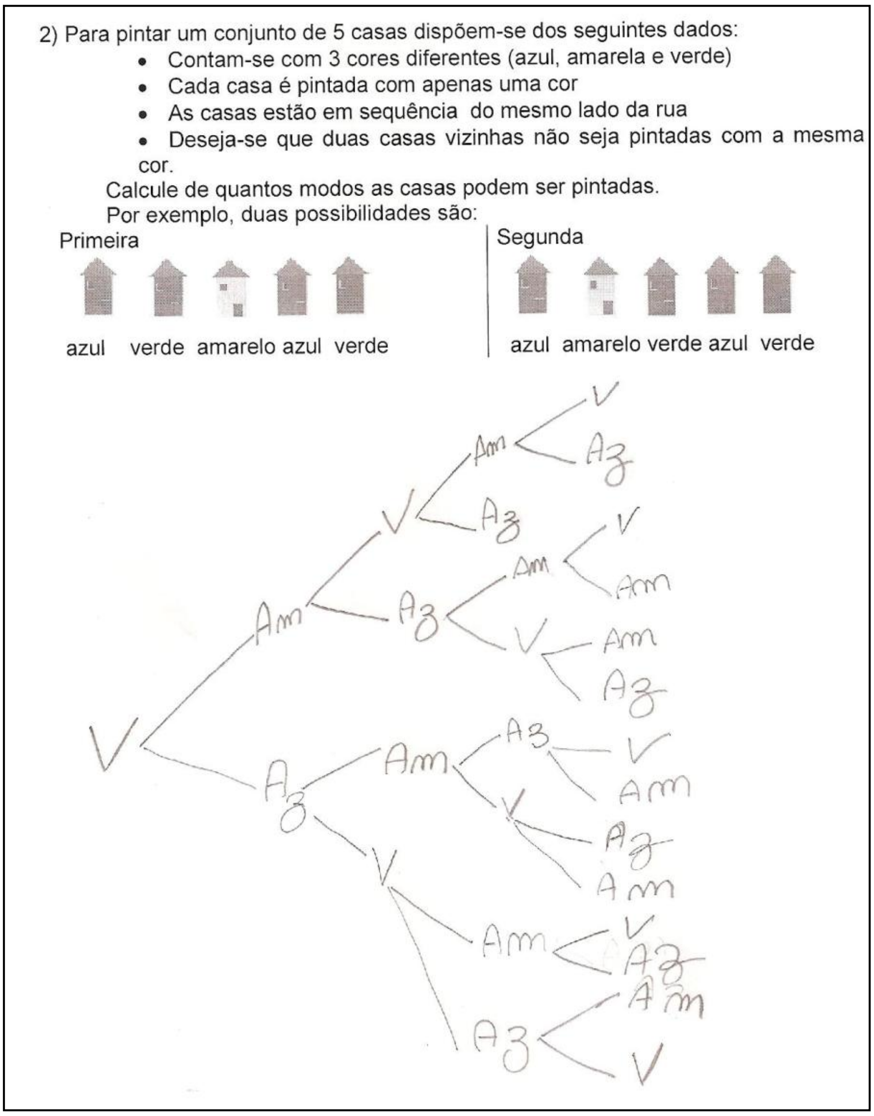


Figura 24 - Protocolo de aluno - Solução correta da tarefa 2 da atividade 1

As demais duplas de P1 apresentaram resultados intuitivos, sem o uso de nenhum tipo de estratégia. Ocorria, mesmo, de iniciarem a enumeração e, por falta de um procedimento sistemático, não a terminarem.

Os alunos das demais colaboradoras apresentaram dificuldades na mesma questão. Porém, o auxílio prestado por elas foi diferenciado.

A colaboradora P2 optou por construir parte da árvore de possibilidades na lousa, junto com os alunos. Iniciou com a cor azul e construiu todos os ramos, obtendo as 16 possibilidades e, a partir disso, os alunos calcularam o produto entre 16 e 3 como forma de obter o total de possibilidades de pintar as casas.

A professora P3 optou por utilizar a multiplicação. Colocou cinco quadrados na lousa, representando as cinco casas e perguntou aos alunos quantas cores poderiam utilizar:

P3: *Quantas cores podem ser usadas pra pintar a primeira casa?*

Alunos: *Três.*

P3: *Tá, se usamos uma dessas três aqui, e não posso usar ela na vizinha, sobrou quantas cores pra poder pintar a segunda casa?*

Alunos: *Duas.*

P3: *Legal. E pra terceira?*

Alguns alunos responderam uma cor, e a professora afirmou que estava errado, pois a cor da primeira casa poderia ser utilizada novamente. Então:

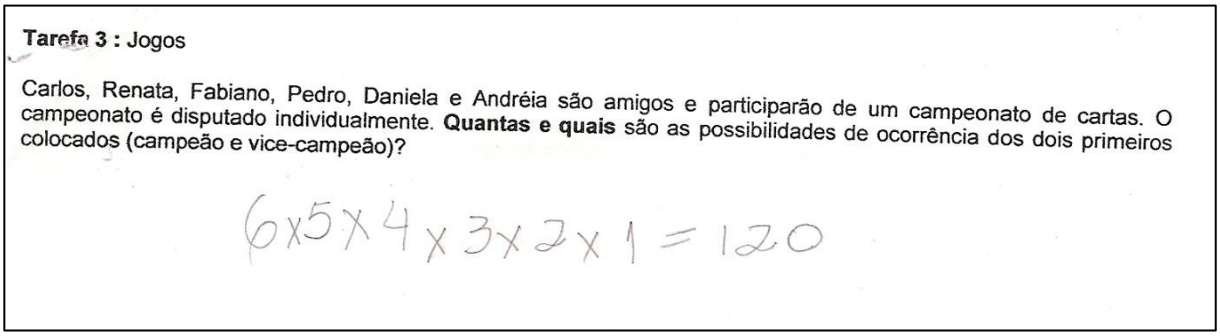
P3: *Agora temos: 3, 2, 2, 2, 2, é só multiplicar tudo que dá o resultado.*

Uma dupla questionou a docente sobre o porquê da multiplicação, e ela respondeu que era a conta que fazia o resultado dar certo, sem outras explicações. A dupla pediu auxílio à pesquisadora, que solicitou aos alunos que construíssem a árvore de possibilidades para a tarefa; após isso, perguntou o que ocorria para cada um dos ramos iniciais da árvore. Os alunos perceberam que cada ramo inicial possuía o mesmo número de ramos na segunda parte e compreenderam o motivo do uso da multiplicação.

Inferimos que a orientação dada pela docente não auxiliou o entendimento dos alunos e encaminhou-os para o uso da multiplicação, sem que percebessem a sua validade. A docente forneceu a informação, porém não mediou a atividade de forma que os alunos construíssem o conhecimento.

Percebemos que os alunos de P3 passaram a utilizar a multiplicação na resolução das demais tarefas, mesmo sem ter compreendido; afirmavam que o importante era chegar a um resultado numérico satisfatório.

A docente também apresentou explicação de como calcular o número de anagramas e como determinar o número de possibilidades de enfileirar cinco amigos a partir da multiplicação. O fato de a docente ter apresentado apenas situações em que eram usados todos os elementos na ordenação dos agrupamentos (permutações) conduziu os alunos a sempre realizar a multiplicação até usar a totalidade dos elementos, como podemos perceber no protocolo seguinte:


Tarefa 3 : Jogos

Carlos, Renata, Fabiano, Pedro, Daniela e Andréia são amigos e participarão de um campeonato de cartas. O campeonato é disputado individualmente. **Quantas e quais** são as possibilidades de ocorrência dos dois primeiros colocados (campeão e vice-campeão)?

$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Figura 25 - Protocolo de aluno - Solução incorreta da tarefa 3 da atividade 1

As observações das aulas de P3 ocorreram apenas durante a atividade 1, pois a docente optou pelo uso das fórmulas para dar continuidade às aulas de Análise Combinatória.

A professora P4, diante da dificuldade dos alunos na tarefa dois, optou por uma dinâmica em sala:

P4: *Vamos supor que tenho nessa sala crianças, mulheres e homens. E só temos três cadeiras.*

A professora colocou três cadeiras na frente da sala e convidou alunos para participar da atividade. Três alunos representaram homens, três alunas representaram mulheres e outros três representaram crianças. Salientou que as pessoas não se diferenciavam dentro do grupo, o que era importante era o fato de ser homem, mulher ou criança.

P4: *Temos três cadeiras para acomodar três pessoas, mas duas pessoas de mesma espécie (homem, mulher ou criança) nunca podem estar juntas.*

P4: *Então, se o homem sentar na primeira cadeira quem poderá sentar na segunda? E na terceira?*

A docente manteve um “homem” na primeira cadeira e foi trocando os demais alunos, com o objetivo de que percebessem que a posição ocupada pelos alunos diferenciava as sequências formadas, porém precisavam ter cuidado com a condição de não serem vizinhas duas crianças, ou dois homens, ou duas mulheres. As configurações eram anotadas na lousa. Após esgotar todas as possibilidades com um homem sentado na cadeira, a docente trocou esse aluno por outro, que representava a mulher, e questionou:

P4: *E agora, colocamos uma mulher aqui. De quantas maneiras vamos conseguir mudar seus vizinhos?*

Os alunos perceberam que obteriam o mesmo número de configurações.

Este exemplo, além de promover uma participação ativa dos alunos, permitiu que entendessem e resolvessem a tarefa dois.

A docente P1 sugeriu que esta atividade fosse apresentada em um momento posterior da THA, já que os alunos ainda não conseguiam utilizar um procedimento sistemático de enumeração, como a árvore de possibilidades, por exemplo.

Optamos, então, por adiar a proposta desta tarefa na nova versão da THA, pois acreditamos que assim os alunos já teriam maior familiaridade com a enumeração de forma sistemática e também com o uso do PFC como estratégia de solução.

As tarefas 3, 4 e 5 foram resolvidas sem muitos questionamentos. O fato de as questões 3 e 4 solicitarem o número de agrupamentos e também a descrição destes auxiliou os alunos a validarem suas respostas. Percebemos que os alunos mobilizaram o uso da multiplicação após essas atividades, pois iniciavam com a descrição dos agrupamentos e, após isso, apresentavam a multiplicação, que validava a resposta; não contavam apenas o que haviam enumerado.

Na sexta tarefa, os alunos de P3 utilizaram a multiplicação, assim como nas demais. Inferimos que isso se deve ao fato de a docente já ter dito aos alunos que era para ser resolvido dessa forma; nenhum aluno buscou enumerar os anagramas.

Observamos que aproximadamente 80% dos alunos de P1 não responderam as duas últimas tarefas. Inferimos que um motivo para que isso ocorra é o fato de a sistematização dos conhecimentos ocorrer apenas ao fim das atividades. Os alunos esperavam pela explicação da docente, em perceptível dependência da explicação para resolver as questões. Podemos observar tal comportamento no trecho a seguir.

Aluna Ana Paula: *Professora, a senhora vai explicar esse de anagramas?*

P1: *Vocês conseguem fazer. Vou corrigir depois que terminarem.*

Aluna Ana Paula: *Vamos esperar ela fazer um, então, depois a gente faz o resto.*

Os alunos de P2 apresentavam maior autonomia. Buscavam resolver ou iniciar as atividades e depois perguntar à docente se a estratégia que estavam utilizando era adequada.

Aluno Joan: *Professora, estou fazendo assim (e mostra a construção da árvore para a primeira palavra). Esse jeito que escolhi serve?*

P2: *Serve. Tá certo. Mas vai fazer assim para todas as palavras? Acho que vai dar trabalho.*

Aluno Joan: *É, não dá. Vou achar outro jeito.*

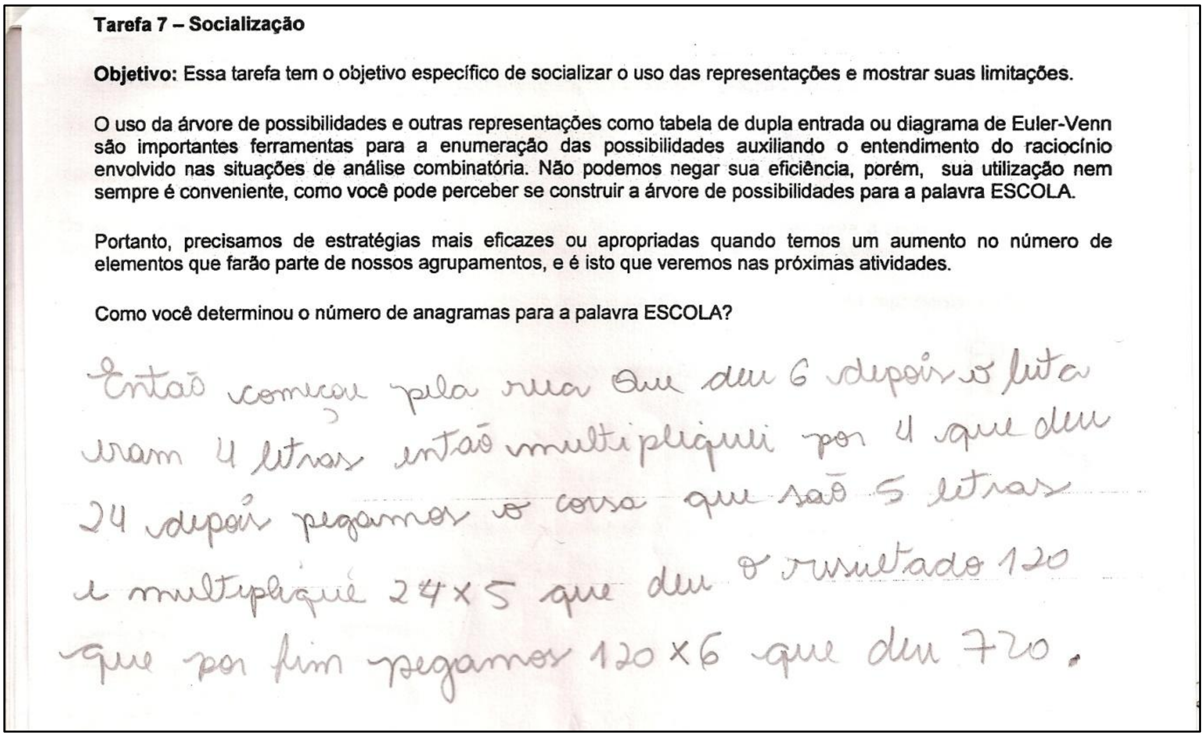
A escolha por atividades com poucos elementos, que podem ser resolvidos por enumeração, além de proporcionar situações em que os alunos identificariam a multiplicação (PFC) como estratégia de solução, também foi fator motivador para alguns alunos, como podemos perceber na seguinte fala do aluno de P2:

Aluno Adonias: *Se matemática fosse sempre assim, eu ia aprender. Essa atividade eu vou conseguir!*

A docente P4 optou por inserir o símbolo de fatorial já na primeira atividade. Isso ocorreu devido ao fato de a professora inserir exercícios durante a THA, incluindo vários anagramas, o que a fez sentir a necessidade de inserir o símbolo para simplificar a notação. Também sistematizou a permutação após esta tarefa.

A observação do desenvolvimento das aulas e o uso do fatorial de forma adequada por esses alunos indicaram-nos a possibilidade de antecipar o uso do fatorial na segunda versão da THA. Porém optamos por deixar essa antecipação a critério do docente, já que as demais docentes, durante a discussão após o desenvolvimento da THA, não entenderam necessária essa antecipação.

A sexta e sétima tarefas contribuíram para que os alunos utilizassem um raciocínio recursivo, como podemos perceber na resposta dada à sétima atividade. Veja a seguir:



Tarefa 7 – Socialização

Objetivo: Essa tarefa tem o objetivo específico de socializar o uso das representações e mostrar suas limitações.

O uso da árvore de possibilidades e outras representações como tabela de dupla entrada ou diagrama de Euler-Venn são importantes ferramentas para a enumeração das possibilidades auxiliando o entendimento do raciocínio envolvido nas situações de análise combinatória. Não podemos negar sua eficiência, porém, sua utilização nem sempre é conveniente, como você pode perceber se construir a árvore de possibilidades para a palavra ESCOLA.

Portanto, precisamos de estratégias mais eficazes ou apropriadas quando temos um aumento no número de elementos que farão parte de nossos agrupamentos, e é isto que veremos nas próximas atividades.

Como você determinou o número de anagramas para a palavra ESCOLA?

Então comecei pela rua que deu 6 depois o leta eram 4 letras então multipliqui por 4 que deu 24 depois pegamos o corsa que são 5 letras e multipliquei 24x5 que deu o resultado 120 que por fim pegamos 120x6 que deu 720.

Figura 26 - Protocolo de aluno –Solução da tarefa 7 da Atividade 1

ATIVIDADE 2

A atividade 2 foi desenvolvida em duplas em todas as turmas.

Nesta atividade introduzimos situações que envolviam combinação simples e permutações com repetição.

A tarefa 2 envolve uma situação de combinação simples e foi motivo de questionamentos, o que era esperado, pois o erro de ordem é um dos mais frequentes no estudo da Análise Combinatória, de acordo com os resultados das pesquisas apresentadas. Para Correia, Fernandes e Almeida (2009), este é o segundo erro mais frequente no estudo do tema.

Nesta tarefa, os alunos já estavam utilizando o produto como estratégia de solução e optaram pela multiplicação 6×5 para determinar quantas duplas poderiam ser formadas entre seis amigos. Assim, o fato de a tarefa solicitar que as duplas fossem descritas auxiliou na busca por outra estratégia, pois a descrição das duplas não validava o resultado numérico obtido. Podemos verificar isso na seguinte fala de alunos de P1:

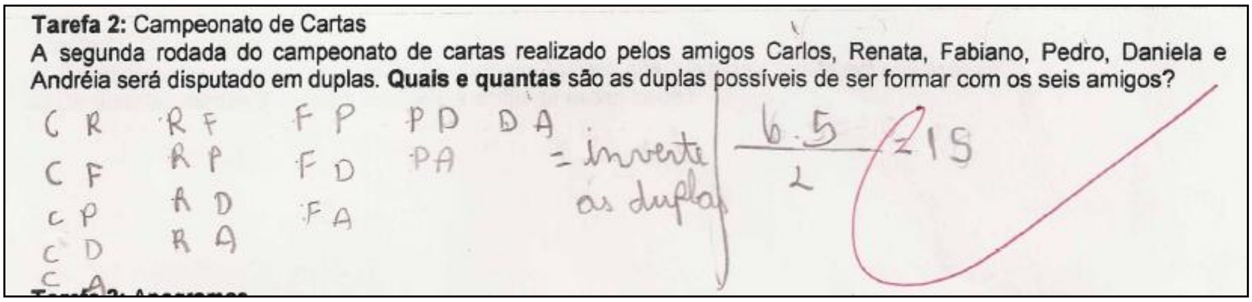
Felipe e Mike: *Fazendo conta ia dar 30, mas montei as duplas e deu 15, não tem lógica isso!*

P1: *Por que vocês fizeram* 6×5*?*

Felipe e Mike: *Porque são 6 pessoas e depois 5, aí deu 30.*

P1: *Tá bom, e qual a diferença desses 15 para os 30 que você fez seguindo as atividades anteriores?*

Felipe e Mike: *A ordem, dã. São duas pessoas, tem que dividir por dois.*


Tarefa 2: Campeonato de Cartas
A segunda rodada do campeonato de cartas realizado pelos amigos Carlos, Renata, Fabiano, Pedro, Daniela e Andréia será disputado em duplas. **Quais e quantas** são as duplas possíveis de ser formar com os seis amigos?

CR RF FP PD DA
CF RP FD PA
CP AD FA
CD RA
CA

= inverte as duplas

$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

Figura 27- Protocolo de aluno - Solução correta da tarefa 2 - Atividade 2

Inferimos que os alunos começam a entender que, quando a ordem não é relevante, deve-se utilizar a divisão como parte da estratégia de solução. Mas observamos, em seus comentários posteriores, que inicialmente haviam entendido que a divisão deveria ser realizada pelo número de pessoas, e não pelo número de disposições diferentes que essas pessoas poderiam apresentar.

Felipe e Mike: *Se for trio, dividiremos por três.*

A docente informou que verificariam se essa constatação era verdade com as próximas atividades.

Para outra dupla, P1 optou por exemplificar utilizando as próprias alunas:

P1: *Imagine vocês 5, escolhe uma dupla. Escolheu? É a única possível? [...] Ah, tá, a dupla é a Bia e a Paula, se eu escolher a dupla Paula e Bia, o que acontece?*

Aluna Ana Paula: *Não pode.*

P1: *Por quê?*

Aluna Ana Paula: *Porque é a mesma, né!*

P1: *Ah, tá, então tá bom. E daí?*

Aluna Ana Paula: *Vai dar a metade, porque é dupla.*

A docente saiu do grupo. Podemos inferir que os alunos entenderam que nessa questão a ordem dos elementos era irrelevante.

Ao final da atividade, a docente P1 optou por escolher apenas algumas tarefas para correção. Entre elas, corrigiu a tarefa 4, mas cometeu um engano na correção, que acreditamos ser prejudicial, uma vez que os momentos de correção eram os únicos em que todos os alunos realmente se concentravam na atividade. O erro cometido pela docente reafirmou a divisão pelo número de elementos, e não pelo número de permutações possíveis desses elementos. A correção apresentada foi:

Tarefa 4: Em um grupo de oito amigos de uma sala de aula:

c) quantos grupos diferentes de duas pessoas podemos formar?

$$\frac{8 \times 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

P1: *Para escolher a primeira pessoa, temos oito possibilidades e para a segunda, sete. Então, 8 vezes 7; porém são duas pessoas, e não importa a ordem delas; por isso dividimos por 2.*

d) quantos grupos diferentes de três pessoas podemos formar?

$$\frac{8 \times 7 \times 6}{3} = \frac{336}{3} = 112$$

P1: *Para escolher a primeira pessoa, temos oito possibilidades; para a segunda, sete; e para a terceira, seis. Só que aqui devemos dividir por três porque são três pessoas.*

Alertamos discretamente a docente quanto ao erro, e ela afirmou ter sido distração, mas, como estava no fim da aula, iria rever a correção na aula do dia seguinte. E assim o fez. Porém inferimos que, mesmo com a correção, este foi um momento prejudicial, pois reafirmou um erro que os alunos estavam cometendo. Na aula seguinte, por ser sexta-feira, houve um número considerado de alunos ausentes, que acabaram ficando sem a correção do erro.

A docente P1 dirigia-se aos alunos sempre que solicitavam auxílio e explicações. Nesta atividade, começamos a notar que a falta de momentos de mediação coletiva e de sistematização estava desmotivando os alunos, pois aqueles que apresentavam maiores dificuldades estavam deixando de ter empenho em solucionar as atividades e passavam a esperar pela correção.

A partir desta constatação, verificamos a necessidade de, na reformulação da THA, optar por atividades com menores quantidades de tarefas e propor atividades que exijam do docente a mediação e a sistematização dos conhecimentos.

A docente P2, assim como na atividade anterior, diante dos questionamentos de diferentes duplas sobre as mesmas questões, optava por resolver a tarefa na lousa. Embora ela, nas atividades iniciais, precisasse com frequência consultar o gabarito para auxiliar os alunos, esta prática diminuiu com o decorrer das tarefas. P2 realizou a correção de todas as tarefas, porém, percebemos um comportamento que não condiz com a prática construtivista: a correção foi realizada apenas pela docente, e os alunos não foram questionados quanto à possibilidade de soluções e/ou estratégias diferentes.

As duas professoras foram atenciosas com os alunos e prestaram atendimento, quando solicitadas. Porém percebemos que a turma de P1 solicitava atendimento individual para repetir orientações iniciais. Os alunos eram extremamente dependentes e, por muitas vezes, dispersos e entretidos com outras coisas, como ouvir música ou discutir assuntos alheios à aula.

Os alunos de P2 apresentavam um comportamento investigativo maior. Eles se mostravam menos dependentes das explicações iniciais da docente. As duplas iniciavam as atividades antes das orientações. Buscavam solucionar tarefas e solicitavam ajuda apenas quando apresentavam dificuldades, enquanto os alunos de P1 aguardavam pelas explicações antes de iniciar as atividades e portavam-se de forma que, se as explicações não antecedessem as atividades, seria como se eles mesmos não devessem ou não conseguissem resolver as tarefas.

Os alunos de P4 apresentavam maior autonomia entre todas as turmas. Inferimos que a postura da docente de sempre mediar e sistematizar os conhecimentos, além de explorar as diferentes soluções apresentadas pelos alunos, com o objetivo de mostrar os pontos positivos de cada uma, e, durante as discussões, fazer com que os alunos encontrassem possíveis falhas e não apenas apresentar os erros proporcionava aos alunos maior confiança para realizar seus trabalhos.

Na atividade 6, o número reduzido de triângulos que poderia ser formado a partir dos vértices de um quadrado e pentágono permitiu que os alunos optassem pela enumeração. Assim, por sugestão de P1, para a segunda versão da THA, alteramos a figura: optamos por um octógono em vez do quadrado inicialmente proposto.

A tarefa 7 foi excluída para diminuir o número de atividades e direcioná-las de acordo com objetivos mais específicos.

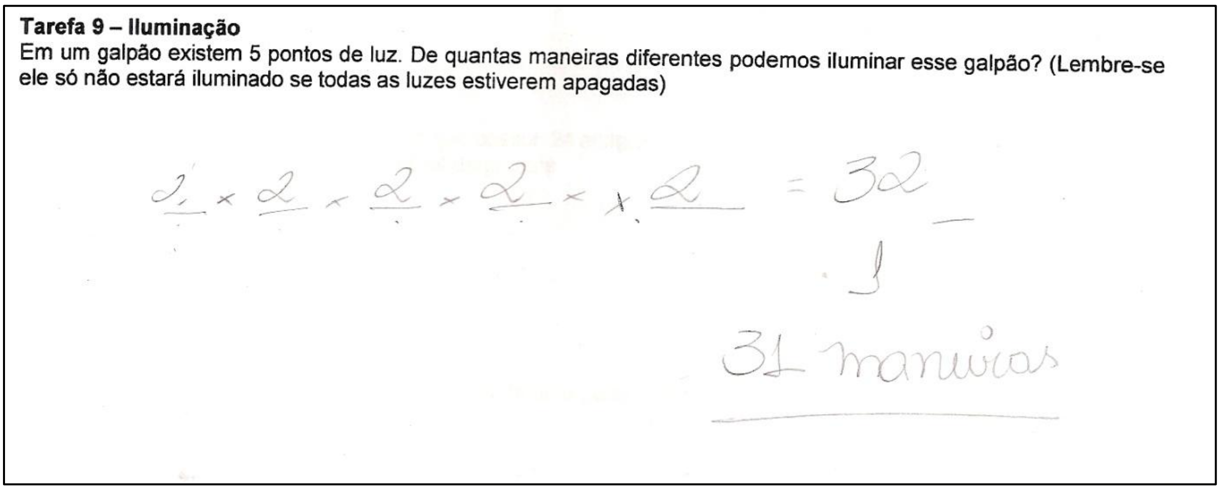
A tarefa 3 da atividade 1 será trabalhada juntamente com a tarefa 3 da atividade 2, com o objetivo de explorar a diferença entre os agrupamentos e propor momentos de mediação docente.

Na tarefa 4, por sugestão de P3, incluímos mais palavras, para evitar que os alunos entendam que a divisão deva ser realizada pelo número de letras repetidas. No estudo dessas palavras, a docente buscou compará-las com as palavras propostas para os anagramas da tarefa 6 da atividade 1, a fim de auxiliar os alunos no entendimento da divisão pelo número de permutações das letras repetidas.

As palavras ali inseridas foram utilizadas pela docente P4 no desenvolvimento da THA, como podemos observar a seguir:

Figura 28 - Imagem da lousa na resolução de anagramas

As tarefas 8 e 9 foram desenvolvidas pelos alunos de todas as turmas, sem muitos questionamentos. O Princípio Fundamental da Contagem e a divisão foram utilizados de forma adequada pelos alunos, salvo exceções. Na tarefa 9, os alunos de P4 apresentaram uma possibilidade de solução — que apresentaremos a seguir — que não ocorreu com nenhuma dupla das outras turmas. Vale lembrar que a primeira possibilidade foi apresentada por alunos de todas as turmas, já a segunda possibilidade foi apresentada apenas por alunos de P4.

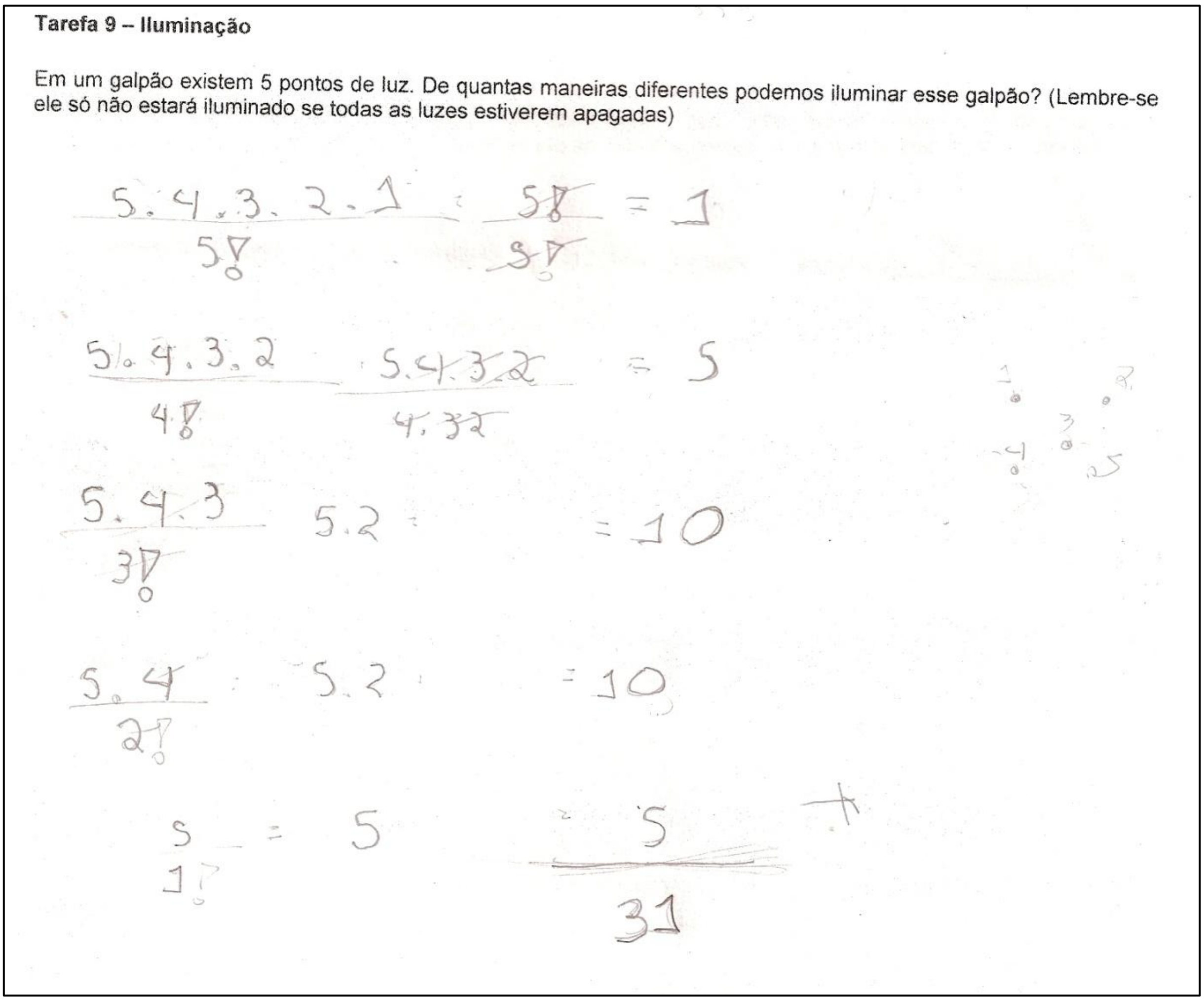

Tarefa 9 – Iluminação
Em um galpão existem 5 pontos de luz. De quantas maneiras diferentes podemos iluminar esse galpão? (Lembre-se ele só não estará iluminado se todas as luzes estiverem apagadas)

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

$- 1$

31 maneiras

Figura 29 - Protocolo de aluno – Solução correta da tarefa 9 - Atividade 2 (P2)


Tarefa 9 – Iluminação

Em um galpão existem 5 pontos de luz. De quantas maneiras diferentes podemos iluminar esse galpão? (Lembre-se ele só não estará iluminado se todas as luzes estiverem apagadas)

$\frac{5.4.3.2.1}{5!} : \frac{5!}{5!} = 1$

$\frac{5.4.3.2}{4!} \quad \frac{5.4.3.2}{4.3.2} = 5$

$\frac{5.4.3}{3!} \quad 5.2 = 10$

$\frac{5.4}{2!} : 5.2 = 10$

$\frac{5}{1!} = 5 \qquad 5$

$+$

31

Figura 30 - Protocolo de aluno – Solução correta da tarefa 9 - Atividade 2 (P4)

Nesta resolução, os alunos optaram por determinar o número de configurações possíveis de estar iluminado o galpão, a partir do número de lâmpadas que poderiam estar acesas, enquanto os demais alunos optaram por determinar o número total de possibilidades de encontrar as lâmpadas (acesas ou não) e excluir a única possibilidade que não satisfaria a questão, que é todas estarem apagadas. Podemos inferir que a escolha por essa opção talvez tenha ocorrido pelo fato de P4, em suas mediações e intervenções, buscar sempre valorizar as diferentes estratégias dos alunos, evitando apresentar uma resposta única para as atividades.

ATIVIDADE 3

A terceira atividade teve por objetivo a sistematização do Princípio Fundamental da Contagem e do uso da divisão para os casos de sobrecontagem. A orientação era de que as docentes deveriam propor debates para a sistematização, de forma que os alunos identificassem as características que determinariam a escolha de cada estratégia de solução.

A docente P1 optou por apenas entregar a atividade aos alunos como um texto explicativo, sem fazer a sistematização. Inferimos que isso prejudicou o desenvolvimento da THA, já que os alunos passaram a usar a tarefa como material de consulta. Consideramos a sistematização fundamental na aprendizagem de qualquer tema matemático.

A docente P2 faltou no dia destinado à sistematização, e essa aula foi ministrada pela pesquisadora. Esta optou por, antes de entregar a atividade 3 aos alunos, apresentar exemplos na lousa e, a partir deles, propôs uma discussão sobre as características de cada situação, para, a partir daí, identificar que estratégias deveriam ser utilizadas.

Os exemplos foram:

“1- Quantas centenas podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?”

“2- Quantas centenas podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?”

“3- De quantas formas podemos ter o campeão e o vice-campeão entre os competidores A, B e C?”

“4- Quantas duplas podemos formar com os amigos A, B e C?”

“5- Quantos são os anagramas possíveis das palavras AZUL e CORO?”

Após elencar as características citadas pelos alunos, pediu que formassem frases que explicassem o que entenderam. Os alunos resumiram suas falas nas seguintes frases:

“Se a ordem é importante, usamos a multiplicação (PFC).”

“Se a ordem não é importante, utilizamos a multiplicação e depois a divisão, para não repetir os grupos”.

“Se tem elementos repetidos, também usamos a divisão para não contar várias vezes o mesmo grupo”.

Em seguida, a pesquisadora entregou a atividade 3 aos alunos e pediu que uma aluna lesse em voz alta para a sala. Os comentários dos alunos mostraram satisfação em perceber que haviam descrito as características corretamente.

Aluno Lucas: *É o que a gente falou. Não falamos com as mesmas palavras, mas está certo.*

Aluno Carlos: *É. Então tem mesmo que olhar a ordem e se tem “coisa” repetida.*

Inferimos que esse momento de discussão foi importante para os alunos, pois eles mostraram confiança em expor suas opiniões durante as discussões, sem grandes preocupações em falar algo incorreto.

Aluno Joan: *Assim é mais legal, a gente não acha que sempre tá errado.*

A atividade com a turma de P4 foi lida pelos alunos e rapidamente discutida, pois, como a docente sempre corrigia e propunha discussões com os alunos após dois ou três exercícios, essa sistematização já havia ocorrido durante a atividade 2; portanto, a atividade 3 serviu como um momento de rever o que haviam aprendido.

ATIVIDADE 4

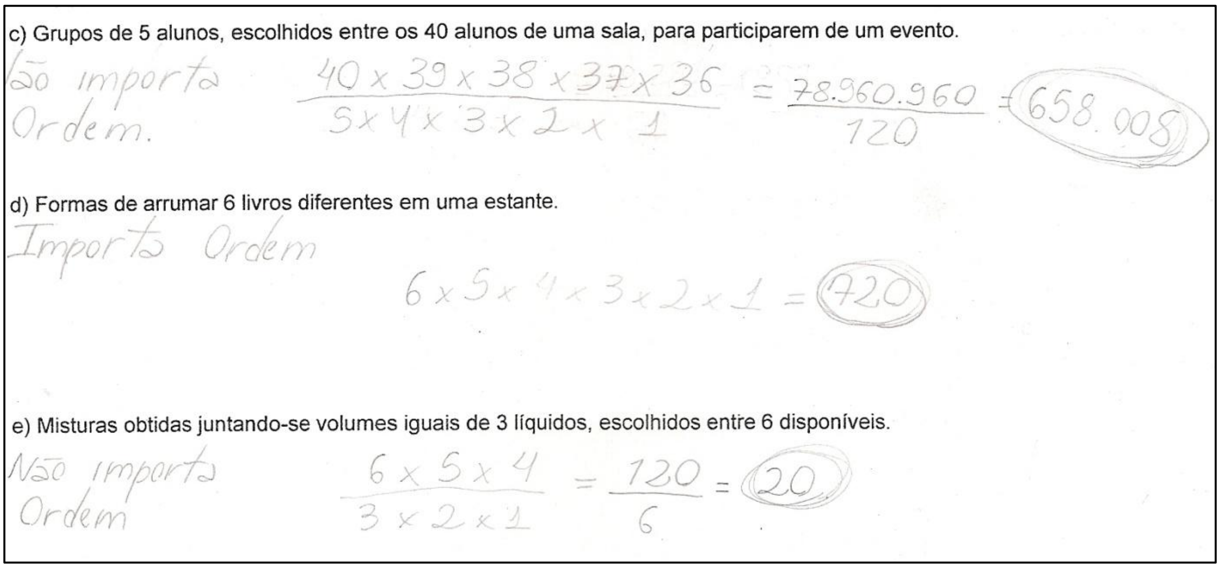
Esta atividade foi elaborada para ser trabalhada individualmente, com o objetivo de os alunos mobilizarem seus conhecimentos. Mas, por sugestão das docentes P1 e P2, ela foi realizada como avaliação por todas as docentes, que, para isso, sugeriram a exclusão da tarefa 1, pois para uma avaliação seria necessário reduzir o número de tarefas.

Entre os alunos de P1, o resultado apresentado poderia ser considerado satisfatório, já que, analisando os protocolos, o índice de acertos foi elevado para todas as questões, próximo a 80%, mas podemos inferir que o sucesso não foi real, já que não se deve à participação efetiva dos alunos na THA. A cópia das respostas dos colegas foi prática comum nesta avaliação. Aproximadamente 10 alunos resolveram a atividade realmente como avaliação, e os demais copiaram destes ou resolveram consultando a atividade 3, que foi cedida pela docente como material de consulta.

O desenvolvimento da THA foi encerrado com a turma de P1 após a avaliação, por decisão da docente. Ela afirmou que, por ser uma turma que participaria do SARESP[11], ela necessitava trabalhar os conteúdos visando a essa avaliação. Além disso, considerava satisfatório o desenvolvimento dos alunos até aquele momento.

Os alunos de P2 resolveram a avaliação sem consultar nenhum material e sem questionar a docente. Percebemos que a dificuldade em identificar a importância ou não de ordenação nas questões e a escolha das estratégias de solução diminuíram consideravelmente com o desenvolvimento da THA.

[11] SARESP: Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo



c) Grupos de 5 alunos, escolhidos entre os 40 alunos de uma sala, para participarem de um evento.

Não importa Ordem. $\frac{40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{78.960.960}{120} = 658.008$

d) Formas de arrumar 6 livros diferentes em uma estante.

Importa Ordem $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

e) Misturas obtidas juntando-se volumes iguais de 3 líquidos, escolhidos entre 6 disponíveis.

Não importa Ordem $\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = \frac{120}{6} = 20$

Figura 31 – Protocolo de aluno - Solução correta de parte da tarefa 1 da atividade 3

Aproximadamente 30% dos alunos identificaram corretamente a característica (ordem), porém não utilizaram a estratégia correta, ou seja, a divisão, o que permite inferir que, após a atividade de sistematização, talvez seja necessária a proposta de tarefas para que os alunos explorem as estratégias corretamente, como era o objetivo inicial desta atividade.

Entre os alunos de P4 o mesmo ocorreu: percebemos que identificaram corretamente a importância da ordem, mas, em alguns casos, não utilizaram a estratégia adequada.

ATIVIDADE 5

Esta atividade teve como objetivo sistematizar os tipos de agrupamentos: arranjos simples, permutações simples e com repetição e combinações simples.

O fatorial foi inserido nesta atividade, na sistematização de permutações. Porém, ele não foi utilizado pelos alunos de P2, pois já estavam habituados a resolver sem esse símbolo.

Na mediação realizada pela docente P2 acreditamos que foi insuficiente a exploração da relação que há entre os diferentes agrupamentos e também de suas características. A professora corrigiu as atividades, mas com pouca participação dos alunos, em um momento que considerávamos importante.

Inferimos que a atividade 5 foi adequadamente explorada pela docente P4. Cada tarefa era discutida e corrigida antes de iniciar a tarefa seguinte. A docente, a cada atividade, solicitava aos alunos que identificassem palavras que eram importantes para cada situação. Palavras como “ordem”, “total” e “parcial” eram sempre mencionadas tanto pela P4 como por seus alunos.

Na correção de cada atividade, a docente sempre buscava envolver os alunos, de forma que todos expusessem suas estratégias. E, quando alguma possível estratégia não era citada, a docente questionava os alunos quanto à possibilidade de uma forma diferente.

Durante a sistematização de cada conceito, P4 recorria a tarefas realizadas anteriormente na THA para validar as estratégias que estavam utilizando.

Inferimos que a proposta da atividade 5 com mediação adequada da docente P4 proporcionou a diminuição na dificuldade de identificar características que diferenciam os tipos de agrupamentos, citada por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996).

Durante essa atividade, docente e alunos construíram um quadro para resumir as características discutidas no trabalho.

	ORDEM	TOTAL DE ELEMENTOS
PERMUTAÇÃO	SIM	SIM
ARRANJO	SIM	NÃO
COMBINAÇÃO	NÃO	NÃO

Ao fim da primeira tarefa, os alunos identificaram a relação entre os agrupamentos, como podemos perceber nas falas:

Aluna Nathalia: *O arranjo é a permutação vezes a combinação, e a combinação é a divisão do arranjo pela permutação.*

Vários exemplos utilizados pela docente foram deixados na lousa propositalmente. Assim, ela iniciou a tentativa de uma generalização:

P4: *Como poderíamos fazer uma fórmula para Arranjos?*

Após algumas discussões, os alunos apresentaram que um arranjo pode ser escrito como "a divisão entre o fatorial de todos os elementos e o fatorial do que sobra (dos elementos que não são utilizados)".

$$Arranjos = \frac{total\,!}{sobra\,!}$$

P4: *Precisamos melhorar isso. Se chamarmos o total de n e o número de elementos que vamos usar de p, como ficaria?*

Três duplas chegaram a fórmula $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$.

A discussão e a correção das atividades foram concluídas. E, assim como para a fórmula de arranjos, os alunos, com mediação de P4, chegaram a fórmulas de combinação simples.

Para a fórmula de combinação simples, os alunos partiram da relação $Combinação \;\; = \frac{Arranjos}{permutação}$ e, substituindo as fórmulas já encontradas de arranjos e permutações, determinaram a fórmula $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p}$.

ATIVIDADE 6

Esta atividade não foi desenvolvida em sala de aula por nenhuma das docentes.

Para a segunda versão da THA, optamos por atividades com um número menor de tarefas, porém, buscamos fazer adaptações, de forma que exijam maior mediação dos docentes. Acreditamos que, dessa forma, evitaremos a dispersão dos alunos e o possível desânimo com o desenvolvimento da THA. Essa inferência partiu da observação das aulas de P4 e também das aulas de P2, pois percebemos que, quando esta docente afirmava ter tido tempo para preparar as atividades, suas mediações eram enriquecidas, e as aulas aconteciam com maior envolvimento dos alunos. E, com as mediações e as sistematizações de P4, sempre após um reduzido número de tarefas, era proporcionada a participação dos alunos de forma que consideramos satisfatória, já que mesmo aqueles que apresentavam um pouco mais de dificuldades, com as mediações, conseguiam acompanhar os colegas no desenvolvimento das atividades.

5.2 . ALTERAÇÕES NA THA

Apresentaremos neste tópico apenas as alterações realizadas na THA. A segunda versão da THA será apresentada na íntegra em anexo. Exporemos aqui apenas tarefas que tenham sido incluídas ou modificadas e suas respectivas soluções.

A sugestão das docentes após o desenvolvimento da THA foi referente à diminuição do número de tarefas por atividade. Concordamos com a sugestão, com o propósito de, com um menor número de tarefas, ser possível propor a sistematização, de forma a abranger os alunos que apresentem dificuldades. A correção e a sistematização realizadas apenas após um grande número de tarefas não se mostraram eficazes: causaram dispersão e desinteresse em grupos de alunos.

No que se refere à proposta de tarefas, à modificação, ou à exclusão de tarefas específicas, as sugestões foram pontuais. Portanto, a escolha de tarefas a serem excluídas ou alteradas foi quase integralmente realizada pela pesquisadora.

Atividade Diagnóstica - não foi alterada.

Atividade 1

A tarefa 1, “Montando um lanche”, foi mantida sem alterações.

A tarefa 2, “Pintando Casas”, foi excluída desta atividade e incluída na atividade 6, por sugestão de P1. A docente afirmou que a atividade não era condizente com o momento, pois os alunos ainda apresentavam dificuldades na enumeração sistemática e não mobilizavam o PFC.

A tarefa 3, “Jogando”, foi transferida para a atividade 2, para ser desenvolvida com a tarefa “Campeonato de Cartas”. Temos, com isso, o objetivo de proporcionar ao aluno a percepção da relevância ou não da ordem nos agrupamentos.

As demais tarefas (4, 5, 6 e 7) foram mantidas sem alterações.

Atividade 2

As tarefas 1, 5 e 7 foram excluídas. Como o objetivo desta atividade é encaminhar os alunos para o uso do Princípio Fundamental da Contagem e a identificação da relevância ou não da ordem nos agrupamentos, julgamos que tais tarefas poderiam ser excluídas, uma vez que o número de agrupamentos formados em cada uma delas não exige do aluno a mobilização desse princípio, poderia optar pela enumeração. Tais tarefas tampouco são questionadoras para a questão da ordem.

A tarefa 2, “Bilhar”, foi mantida sem alterações.

Na tarefa 3, “Campeonato de Cartas”, incluímos a tarefa três da atividade um, como mencionamos anteriormente, com o propósito de iniciar a percepção da relevância ou não da ordem nos agrupamentos como determinante para a escolha de uma estratégia adequada de resolução. A tarefa então ficou organizada da seguinte forma:

Tarefa: Campeonato de Cartas

1) Carlos, Renata, Fabiano, Pedro, Daniela e Andréia são amigos e participarão de um campeonato de cartas. O campeonato é disputado individualmente. **Quantas e quais** são as possibilidades de ocorrência dos dois primeiros colocados (campeão e vice-campeão)?

2) A segunda etapa do campeonato de cartas será disputado em duplas. **Quais e quantas** são as duplas possíveis de serem formadas com os cinco amigos?

3) Observe as duas questões anteriores. O que as diferencia?

Solução: Esperamos que o aluno identifique a ordem como diferenciador das questões.

Para a tarefa 4, "Anagramas", incluímos, por sugestão de P4, o item quatro, contendo palavras com número diferenciado de letras repetidas. A tarefa "Anagramas" ficou organizada da seguinte forma:

Tarefa : Anagramas

1) Sabemos que a palavra RUA possui seis anagramas, que são RUA, RAU, ARU, AUR, URA, UAR. A palavra ASA possui o mesmo número de letras que a palavra RUA. Você pode afirmar que as duas palavras possuem o mesmo número de anagramas? Justifique.

2) O mesmo ocorre com as palavras LUTA, CASA ou BOBO, que possuem o mesmo número de letras. A palavra LUTA possui 24 anagramas. Já as palavras CASA ou BOBO possuem quantos anagramas cada uma?

3) Como você calcularia o número de anagramas de uma palavra que possui letras repetidas, como CASA e BOBO, sem precisar descrever todos os anagramas?

4) Utilize o mesmo raciocínio para determinar o número de anagramas das palavras CORSA, BRASA, ARARA, BACANA, ATACADA.

Solução:

CORSA

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

BRASA

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$$

ARARA

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 10$$

BACANA

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

ATACADA

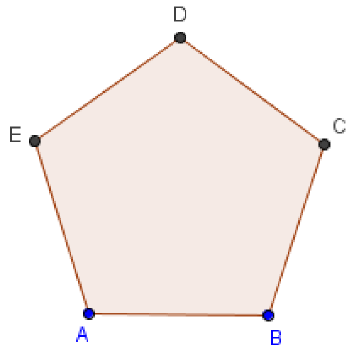
$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 840$$

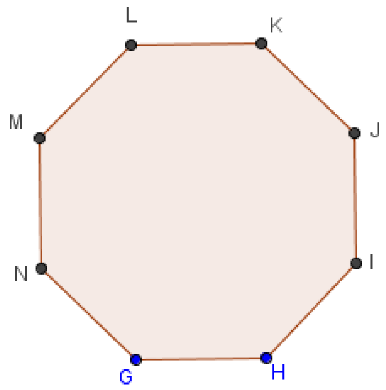
R: O número de anagramas da palavra CORSA é 120, da palavra BRASA é 60, da palavra ARARA é 10, da palavra BACANA é 120 e da palavra ATACADA é 840.

Na tarefa 6, “Formando triângulos”, optamos por excluir o quadrado e incluir o octógono, com o objetivo de aumentar o número de triângulos possíveis, o que dificultará a opção pela enumeração e, assim, exigirá que o aluno busque pela estratégia de cálculo adequada.

Tarefa: Formando triângulos

Quantos triângulos podem ser formados tendo seus vértices nos vértices de cada figura?:





<u>Solução</u>:

Pentágono:

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10\ triângulos$$

Octógono

$$\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56\ triângulos$$

R: É possível formar 10 triângulos com vértices nos vértices do pentágono e 56 triângulos tendo seus vértices nos vértices do octógono.

ATIVIDADE 3 – Não foi alterada

ATIVIDADE 4 – Não foi alterada

Não houve sugestões para alterações na atividade 4, porém, sugerimos que ela seja utilizada como atividade a ser desenvolvida individualmente, para que os alunos mobilizem seus conhecimentos. Não indicamos o uso da atividade como avaliação, como feito na primeira versão da THA por sugestão das docentes (P1, P2 e P3).

ATIVIDADE 5 – não foi alterada

ATIVIDADE 6

A sugestão das docentes para a atividade 6 foi de exclusão. Porém, elas consideram importante haver algumas tarefas após a sistematização, para que o aluno mobilize seus conhecimentos. Optamos, então, por selecionar algumas das tarefas desta atividade e incluir algumas das que foram retiradas anteriormente, para propor uma atividade com esse objetivo, porém, com menor quantidade de exercícios. A atividade 6 é apresentada na THA em anexo, não a apresentaremos aqui por não conter tarefas inéditas ou alteradas.

CAPÍTULO 6
TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM NA SALA DE AULA

Neste capítulo apresentaremos o processo de desenvolvimento das atividades da THA em sala de aula.

6.1 DESCRIÇÃO DOS RELATÓRIOS DE OBSERVAÇÕES

Realizamos a observação participante, com o objetivo de acompanhar a atuação dos professores, o processo de aprendizagem dos estudantes e possíveis dificuldades dos professores e alunos em relação ao tema: Análise Combinatória.

Os alunos desenvolveram as atividades em duplas ou grupos. Apenas a avaliação foi realizada individualmente.

6.2 O desenvolvimento da THA em sala de aula

Neste tópico de nosso trabalho, descreveremos como ocorreu o desenvolvimento das atividades da THA em cada turma e apresentaremos algumas observações que consideramos relevantes para esta pesquisa.

Para isso, elegemos categorias em função dos acontecimentos nas aulas e também pensando na realimentação de nossa THA. Todas as informações são baseadas nas observações, nos relatórios e nas gravações de áudio.

As categorias elegidas são:

a) Clima de gestão da classe

Esta categoria de análise é justificada pela concepção construtivista presente na teoria de Martim Simon (1995), nosso principal referencial teórico. O clima de gestão da classe deve ser criado pelo docente, de modo que os alunos sejam incentivados a interagir com as atividades e entre seus pares de maneira autônoma e participativa. Para tal, o professor deve abandonar a postura convencional de “transmissor de conhecimentos” em prol da postura de “mediador de aprendizagens”, ao apresentar as atividades e, partindo das observações dos alunos, fazer o levantamento das dúvidas e das hipóteses e promover a construção dos conhecimentos.

O clima de gestão da classe é um importante fator que influencia a aprendizagem. Se o professor não conseguir manter o interesse dos alunos nas atividades, fazendo intervenções nos momentos apropriados, o sucesso das atividades será comprometido. Tal como recomendam Coll e Solé (2009), as mediações e as intervenções variam em quantidade e qualidade, ou seja, não devem ocorrer em demasia, nem devem ser escassas, de forma a abandonar os discentes durante o processo. Devem, também, ser diferenciadas, de acordo com as necessidades dos alunos.

b) Interesse dos alunos pelas atividades

Esta categoria está diretamente relacionada à anterior. Na concepção construtivista, o aluno é o principal ator no processo de ensino e aprendizagem, ou seja, se não estiver com interesse na consecução da atividade, o processo de aprendizagem será estéril e não ocorrerá. Logo, o interesse do aluno é essencial e muito mais importante que na estratégia tradicional, em que o professor apenas transmite os conhecimentos aos alunos.

c) Dificuldades observadas e possíveis causas

Nesta categoria podemos elencar diversos temas apresentados no nosso quadro teórico: os conhecimentos matemáticos e didáticos do professor (que se encontram no rol dos conhecimentos descritos anteriormente por Simon), se forem insuficientes ou não se adaptarem à concepção construtivista, podem comprometer o sucesso da THA; as dificuldades dos alunos — que devem ser superadas pelas mediações do professor — quanto aos conhecimentos matemáticos anteriores e quanto à adaptação ao método construtivista exigem uma postura atuante do educando.

d) Interação professor x aluno

Esta categoria talvez seja a principal a influenciar no sucesso da THA. Segundo nosso referencial, no construtivismo, o aluno constrói seus conhecimentos a partir das interações realizadas entre ele e o conhecimento, que ocorrem individualmente, com os colegas e com a mediação do professor.

Se as interações não forem eficazes, o aluno não aprende. Deste modo há três importantes itens que devem ser garantidos para que aconteça a aprendizagem: as atividades devem ser elaboradas de modo a provocar interações, os alunos devem estar motivados a realizar as atividades e o professor deve mediar as aprendizagens para garantir que as interações sejam eficazes e, nos momentos em que detectar dúvidas que indiquem que os alunos não estão mobilizando algum conhecimento, deve fazer intervenções de modo a resgatar seu interesse.

Essas categorias serão observadas separadamente, isto é, por professora colaboradora.

6.2.1 O desenvolvimento da THA pela professora P1

A professora P1 iniciava as atividades com orientações gerais e, em seguida, dirigia-se aos grupos para responder questionamentos e realizar as orientações necessárias aos alunos. Foram poucos os momentos em que a docente fez alguma mediação coletiva ou se dirigiu à lousa para alguma explicação ou correção.

Ela resolveu todas as tarefas da THA antes de iniciar o desenvolvimento com os alunos, porém, não percebemos nela o hábito de planejar as aulas diárias.

A professora entregava as atividades aos alunos e solicitava que respondessem todas as tarefas, pois corrigiria cada atividade ao seu término. Não havia momentos de discussões coletivas. Na correção das atividades, a docente escolhia alguns exercícios para resolver, pois declarou não haver necessidade de corrigir todos.

Nas atividades iniciais, notamos uma participação dos alunos que consideramos satisfatória, pois apenas duas duplas não estavam empenhadas em resolver as tarefas. A professora demonstrava entusiasmo, quando percebia que os alunos estavam conseguindo responder e sempre se dirigia à pesquisadora para relatar os procedimentos dos alunos.

Com o decorrer do desenvolvimento, percebemos que essa participação dos alunos foi reduzida, com poucos alunos mostrando interesse em entender as questões. Foi perceptível que os alunos passaram a preocupar-se apenas em responder, não importando se haviam entendido ou não. Inferimos isso a partir da observação do aumento no número de alunos que copiavam as respostas dos colegas e daqueles que questionavam a docente se estavam corretos; e, nos casos em que a resposta estava incorreta, queriam que a professora dissesse onde estava o erro e como corrigir.

Inferimos que a falta de mediação por parte da docente e de momentos de sistematização foram fatores que causaram tal desânimo, já que os alunos não tinham um retorno das atividades que estavam fazendo.

A turma apresentava um comportamento que privilegiava a distração, com conversas excessivas, brincadeiras e grupos numerosos. Assim, mesmo os alunos mais interessados, em alguns momentos, dispersavam-se. A docente, algumas vezes, solicitava a atenção dos alunos; porém, normalmente deixava os alunos resolvendo as atividades cada um ao seu ritmo, o que contribuiu para que fosse lento o desenvolvimento das atividades. A professora afirmava sempre que os alunos estavam participando com empenho, porém esta não é opinião compartilhada pela pesquisadora, que observou a participação efetiva de poucos alunos. O interesse era superficial, e algumas duplas apenas copiavam as soluções dos colegas.

Os alunos, em alguns momentos, buscavam a pesquisadora para esclarecimento de dúvidas, mesmo sendo orientados que questionassem a professora. Podemos entender que esse comportamento ocorreu pelo fato de a pesquisadora já ter ministrado aula a esses alunos em anos anteriores; portanto, não a viam como uma pessoa estranha ao ambiente e, sim, como mais uma professora na sala. Em alguns momentos, esclarecemos as dúvidas dos alunos após conversarmos com a professora P1 e esta afirmar que não se incomodava com a nossa participação nas aulas. Optamos por participar dessa maneira, por percebermos que os alunos que questionavam a docente ou a pesquisadora desejavam entender as atividades com maior profundidade, o que daria uma riqueza maior à observação.

A correção das atividades permitiu-nos perceber o quanto é difícil mudar a abordagem adotada em sala de aula, tanto por parte da docente como dos alunos. Nesses momentos em que a docente pedia a atenção dos alunos, estes paravam o que estavam fazendo e prestavam atenção à correção, o que aparentemente acontecia como momento de explicação. Após as correções, a participação normalmente era um pouco maior entre os alunos, o que reforça a ideia de que a explicação para eles deve acontecer antes da proposta de exercícios.

A docente afirmou, na entrevista final, que não se sentia à vontade trabalhando com o construtivismo: *“Tenho dificuldades em trabalhar com o construtivismo. Não sei como deixar os alunos soltos aprendendo e ao mesmo tempo ter que controlar isso. Não consigo saber quando devo interferir. Prefiro o tradicional mesmo, que já estou acostumada”.*

Clima de gestão da classe

A professora P1 manteve um clima amistoso com a sala, com conversas e brincadeiras, e notamos que não havia receio por parte dos alunos de realizar questionamentos. Percebemos que, no início das atividades, os alunos mostravam-se dependentes da professora: poucos começavam as atividades antes das orientações. Porém, esse comportamento foi se alterando, com o decorrer das atividades, entre os alunos mais envolvidos com o trabalho.

A professora dirigia-se sempre ao local das “duplas” para dar orientações e esclarecer dúvidas, quando solicitada. Apesar de a orientação ser para que trabalhassem em duplas, vários se organizavam em grupos que ultrapassavam quatro integrantes. Sentavam-se sem muita organização, falavam alto, havia momentos em que ouviam música e não prestavam atenção às orientações da professora. Acreditamos que esse comportamento tenha colaborado para o desânimo de outros alunos no desenvolvimento das atividades.

Na maioria das atividades, a professora não conseguiu manter a atitude de gestora de aprendizagens Ao contrário do que recomendam Coll e Solé (2009), a docente administrava a aula sem fazer mediações coletivas ou intervenções: entregava as atividades e pedia aos alunos que continuassem os trabalhos. Seus momentos de correções podem ser descritos como tradicionais: a docente assumia a postura de “transmissora de conhecimentos” e os alunos, de “receptores”.

Interesse dos alunos pelas atividades

A professora P1 iniciou o desenvolvimento da THA, explicando aos alunos que estariam participando de um projeto com uma metodologia diferenciada da que estavam acostumados — a pesquisa de mestrado da professora Luciane, que já conheciam, pois em algum momento haviam sido seus alunos. Explicou também que o conteúdo a ser estudado não era próprio do terceiro ano do Ensino Médio, porém era importante e, por diversos motivos, eles não haviam tido no ano anterior.

A professora enfatizou que estavam trabalhando em colaboração com a pesquisadora. Inicialmente acreditamos que isso seria um fator positivo, de motivação, porém, com o avanço do desenvolvimento da THA, percebemos que alguns alunos não se envolviam com as atividades porque ficaram com a impressão de que estavam apenas fazendo um trabalho que era importante para a pesquisadora, mas, não para eles — fato que confirmamos a partir de algumas falas de alunos.

Aluno Daniel: *Esse trabalho é pra sua pós, pra gente não vai ter nota não, né?*

Aluno Diego: *Falta muito pra terminar seu trabalho? É até legal, faz pensar, mas é muito grande!*

Durante as atividades iniciais, a participação foi mais efetiva, porém, com o decorrer do trabalho, percebemos diminuir o interesse por parte dos alunos, com algumas exceções. A docente não fazia intervenções de forma a atrair os alunos não participativos para o desenvolvimento das atividades e permitia que se ocupassem de outras atividades, alheias à aula. Isso se deve à ideia de que, no construtivismo, os alunos devem ficar “soltos” para aprender, afirmação feita pela docente na entrevista posterior ao desenvolvimento, como já mencionamos anteriormente.

Podemos inferir que o número grande de tarefas apresentadas em cada atividade e a falta de incentivo e de mediações por parte da docente foram alguns dos fatores que desmotivaram parte da turma.

Dificuldades observadas e possíveis causas

Professora

A professora P1 não apresentou maiores dificuldades no conteúdo matemático durante a THA, porém. durante a correção da tarefa 4 da segunda atividade. cometeu um erro que consideramos grave, pois reafirmou uma ideia errônea dos alunos sobre a divisão em situações em que a ordem não é relevante. Afirmou que, na formação de grupos em que a ordem não é relevante, a divisão é feita pelo número de elementos do agrupamento; no entanto, a divisão é realizada pelo número de permutações desses elementos.

Quando alertamos para o fato, a docente afirmou que havia sido apenas distração e na aula seguinte reveria a questão, pois aquela aula estava em seu final. A correção foi feita, porém, inferimos que ocorreu em situação prejudicial, fora do momento de correção, o único de mediação coletiva, em que os alunos prestavam mais atenção; esse fato pode ter criado um empecilho à aprendizagem dos alunos sobre aquela questão.

A partir das observações das aulas, pudemos perceber que a docente P1 apresentou grande dificuldade de adaptação ao método construtivista, pois não estava acostumada a administrar a aprendizagem dos alunos. Não fazia questionamentos e não aproveitava as intervenções e os questionamentos dos alunos para propor discussão coletiva. Questões que promoveriam discussões sobre características envolvidas nos agrupamentos e auxiliariam o entendimento dos conceitos foram apresentadas apenas em momentos de correção, com respostas dadas pela docente.

Alunos

As dificuldades apresentadas pelos alunos da professora P1 referem-se à leitura e à interpretação dos enunciados. Nas atividades iniciais, a construção da árvore de possibilidades não ocorreu tranquilamente para alguns, o que não era esperado, pois, além de ser uma representação recomendada desde o Ensino Fundamental, os alunos cursavam o terceiro ano do Ensino Médio e muitos faziam cursos preparatórios para o vestibular.

Os erros correntes diziam respeito à despreocupação com a importância ou não da ordem nos agrupamentos, dificuldade que diminuía expressivamente entre os alunos que mostraram mais empenho nas atividades.

Os alunos não estavam habituados a levantar hipóteses, a fazer conjecturas e a trabalhar de maneira mais autônoma. Percebemos, ao observar seus questionamentos, que as discussões não eram direcionadas para o entendimento das questões e de como resolvê-las e, sim, voltavam-se para o fato de terem ou não acertado a questão. Quando se afirmava a eles que havia erro ou que não tinham prestado atenção a um fato importante no enunciado, sua postura era de querer saber que “conta” deveriam fazer para chegar ao resultado.

Podemos inferir que a abordagem construtivista não ocorreu de forma tranquila entre os alunos, já que eles aguardavam explicações da docente e, muitas vezes, esperavam a correção para copiar as respostas e, a partir delas, resolver outras tarefas.

Uma das duplas, durante todo o desenvolvimento, destacou-se pelo empenho e pelo interesse em compreender o que estavam estudando. Para esses alunos, um entendimento apenas superficial ou somente a obtenção de um resultado numérico satisfatório não era suficiente. As dificuldades iniciais apresentadas por essa dupla diminuíram expressivamente com o desenvolvimento da THA.

Interação professor x aluno

Durante as aulas, notamos que a professora P1 atendia aos alunos que solicitavam sua ajuda, mas dava pouco incentivo para alguns alunos que não tentavam realizar as atividades. Com o decorrer do trabalho, percebemos que o número de alunos que não participavam aumentou.

Com exceção da dupla já mencionada, os alunos não faziam conjecturas, eram dependentes das explicações da docente, solicitando várias vezes sua presença para tirar dúvidas. Quando não entendiam, não insistiam, apenas aguardavam pela resposta — não compreendiam que, se tentassem alcançá-la sozinhos, teriam melhores resultados em sua aprendizagem. Não assumiram a postura de aprendizes de forma condizente com a perspectiva construtivista. O mesmo ocorreu a docente.

Não percebemos mudanças na interação entre professor e alunos durante o desenvolvimento da THA.

6.2.2 O desenvolvimento da THA pela professora P2

A professora P2 iniciou o desenvolvimento da THA, explicando aos alunos que estariam participando de um projeto com uma metodologia diferenciada da que estavam acostumados, e que participariam da pesquisa de mestrado da professora Luciane, já conhecida por eles. Explicou também que seriam avaliados pela participação, ou seja, a avaliação seria diária.

No início das atividades, a professora dava à classe uma orientação geral e, após isso, costumava dirigir-se aos grupos para responder aos questionamentos e prestar ajuda aos alunos, porém percebemos que, devido à sua falta de conhecimento matemático, ela sempre consultava a versão resolvida que a pesquisadora havia fornecido às docentes, para que conseguisse responder as questões feitas pelos alunos. Dessa maneira, P2 algumas vezes acabava por orientar como eles deveriam fazer, quando não fornecia as soluções diretamente.

O fato de ela consultar a resposta para poder responder as questões levou os alunos a direcionarem suas perguntas à pesquisadora. Inferimos que perceberam a falta de confiança com que a docente respondia as questões inicialmente. Durante o desenvolvimento das atividades, com o preparo das aulas e após alguns momentos de discussões e orientações, percebemos que a tendência a consultar o gabarito e dar os resultados começou a ser substituída, mesmo que timidamente, por questionamentos e mediações que auxiliavam os alunos a pensar e descobrir, por si só ou com seus pares.

A docente não realizava mediações coletivas, a não ser nas poucas vezes em que optou por resolver tarefas na lousa para explicar algum questionamento dos alunos. Entregava a atividade para os alunos e solicitava que resolvessem todas as tarefas, pois corrigiria cada atividade ao seu término. Porém, durante essas correções, houve a colaboração da pesquisadora, já que a docente afirmou apresentar dúvidas quanto ao conteúdo. Em uma das aulas, destinada à correção da atividade 3, de sistematização, a professora faltou e solicitou que a pesquisadora mediasse a discussão e a correção das tarefas da atividade.

A professora declarou estar surpresa com a participação de alguns alunos, pois percebia um envolvimento não habitual: alunos considerados desinteressados participavam das atividades. Inferimos que esta sua surpresa se deva ao fato de não estar acostumada a trabalhar com situações de exploração.

A docente resolveu todas as atividades antes de desenvolvê-las em sala de aula e sempre estava em contato com a pesquisadora para esclarecer dúvidas e saber como estava se saindo — uma forma de indagar se havia alguma maneira diferente de intervir durante as atividades. Acreditamos que essa postura da professora tenha auxiliado na sua mudança de sua visão de um ensino direcionado, como transmissão de conhecimentos. Porém, segundo seu próprio relato, sua dificuldade com o conteúdo matemático não lhe permitia mediar as aulas de forma mais enriquecedora.

Durante o desenvolvimento da THA com os alunos de P2, ocorreram vários momentos de colaboração por parte da pesquisadora nas mediações realizadas. Essas intervenções ocorreram, pois, diante do questionamento por parte dos alunos, em algumas situações, a resposta da docente não satisfez a ansiedade dos alunos e não resolveu a dificuldade inicial em entender o contexto construtivista.

Durante a entrevista e nos vários momentos de contato com essa docente, enfatizávamos que o construtivismo não consiste em deixar os alunos aprenderem sozinhos, ou em grupos, e, sim, em mediar seus conhecimentos, proporcionando caminhos para que eles desenvolvam a aprendizagem. Procurávamos também destacar a importância das diferentes ajudas prestadas, deixando claro que a ajuda a um aluno nem sempre era a adequada a outro: é necessário observar os alunos para poder conduzir à aprendizagem.

Clima de gestão da classe

A professora P2 orientou os alunos a formarem duplas para a realização das atividades. Apenas um grupo se formou para as discussões, porém, buscavam responder as questões. Esse grupo não foi separado, o que, segundo a professora, deve-se ao fato de que algumas das alunas do grupo, por apresentarem muitas dificuldades na aprendizagem de matemática, normalmente contam com a colaboração das colegas.

O clima entre professora e alunos era harmonioso, porém, diferentemente de P1, não havia brincadeiras ou momentos de maior descontração. Talvez isso seja justificado pelo fato de a professora estar ministrando aulas há um mês para eles e por tempo determinado, já que estava substituindo a professora titular de sala, que se encontrava em licença saúde por um período de três meses. Embora P1 estivesse há pouco tempo ministrando aula para essa turma, os alunos não apresentavam receios em fazer questionamentos.

A docente, durante as aulas, circulava entre as duplas para verificar se todos estavam desenvolvendo suas atividades e para incentivar as duplas que se dispersavam a voltar aos trabalhos em aula.

Interesse dos alunos pelas atividades

No início das atividades, os alunos esperavam pela explicação da professora, desejavam que ela revelasse como resolver cada exercício; chegavam, mesmo, a perguntar qual fórmula deveria ser utilizada. Algumas manifestações ocorreram quando foi explicado que existia fórmula, porém eles iriam aprender a resolver sem a sua utilização; que deveriam *"fazer, explorar, até descobrirem uma maneira"*.

Na segunda aula de desenvolvimento da atividade 1, uma das duplas trouxe todas as fórmulas impressas — que os alunos haviam pesquisado na internet — e questionou a professora: *"Usar a fórmula não é mais fácil? Nós temos elas"*. A docente respondeu: *"Você sabe utilizá-las, quando usar cada uma?"* O aluno não questionou mais a docente, mas era perceptível que a dupla não havia aceitado a resposta.

A docente, diante disso, queria encontrar uma maneira que mostrasse a eles que saber a fórmula não era suficiente e, em conversa com a pesquisadora, buscou uma forma de convencê-los. Forma esta que consideramos interessante destacar. Na aula seguinte, a docente colocou na lousa uma situação-problema envolvendo equações do segundo grau e pediu para que os alunos respondessem; diante da dificuldade deles, após alguns minutos, resolveu a situação e questionou: *"Mas vocês conhecem a fórmula de Bhaskara, porque não responderam?"*. E, após uma conversa com a turma, acreditamos, a dupla entendeu qual era o objetivo de não ser apresentado um trabalho inicial com o uso das fórmulas. Esta foi uma das duplas mais envolvidas durante todo o desenvolvimento da THA.

O fato de a THA privilegiar atividades que poderiam ser resolvidas por enumeração e/ou esquemas fez com que alunos considerados não participativos se empenhassem em seu desenvolvimento. Alunos que acreditavam não conseguir aprender matemática envolviam-se nas atividades como se elas nem se tratassem de matemática, respondendo e comparando suas resoluções com os colegas de sala. Era perceptível a satisfação por conseguirem resolver algumas das questões, como podemos perceber nas falas dos alunos durante o desenvolvimento da primeira atividade:

Adonias: *Se matemática fosse sempre assim, eu ia aprender. Essa atividade eu vou conseguir!*

João: *Legal, porque se você não sabe a conta, dá pra fazer mesmo assim.*

Acreditamos que as atividades proporcionaram uma melhora na autoestima dos alunos, mesmo os que não se julgavam capazes de aprender matemática participaram das atividades. Como afirma Solé (2009), a autoestima influencia a maneira como o aluno constrói sua relação com o conhecimento.

Dificuldades observadas e possíveis causas

Professora

A professora P2 afirmou ter dificuldades em relação à Análise Combinatória e justificou com o fato de não ter estudado o tema em sua educação básica, assim como em sua graduação. Lembramos que essa docente não é Licenciada em Matemática e está atuando em caráter excepcional.

A docente resolveu as atividades antes de iniciar o desenvolvimento e buscava sempre rever as tarefas que seriam trabalhadas na aula do dia e esclarecer dúvidas com a pesquisadora antes do início das aulas. A professora mostrou-se dedicada e lamentou o fato de não ter tempo disponível para preparar melhor as aulas, pois trabalha em empresa durante o dia, o que dificulta aprimorar sua formação.

P2 afirmou sentir dificuldades para orientar os alunos, nas atividades iniciais, sem consultar as respostas, e justificou essa dificuldade como receio de cometer enganos que pudessem prejudicar a aprendizagem. Esse receio, segundo a docente, diminuiu com o decorrer do desenvolvimento, pois ela declarou estar aprendendo o conteúdo.

P2: *No início era mais difícil responder as perguntas deles (alunos) sem olhar as respostas, depois fui aprendendo e foi ficando mais fácil.*

Identificar a relevância ou não da ordem nos agrupamentos foi citado pela docente como sua maior dificuldade, assim como justificar o uso da divisão para evitar a sobrecontagem. Afirmou também que só entendeu o porquê da divisão após observar a enumeração de forma sistemática, em que pôde perceber que se repetia o número de agrupamentos para cada seleção de elementos que formavam o agrupamento ou sequência.

Embora ainda apresente dificuldade para questões que envolvam a Análise Combinatória, a docente afirma ter aprendido com a THA, já que nunca havia estudado o tema antes.

Outra dificuldade citada pela docente foi a proposta construtivista em que se baseia a THA, pois não estava habituada aos momentos de discussão, ao levantamento de hipóteses e à sistematização. A docente declarou que sua atuação apresenta características tradicionais: inicia-se com a explicação, seguida de exemplos e exercícios, porém declarou que considerou produtiva essa nova forma de trabalhar, pois percebeu a participação de alunos que normalmente só copiavam da lousa.

Notamos que a docente, com o desenvolvimento da THA, criou maior autonomia, não sendo mais necessária a consulta constante ao material cedido; também passou a questionar mais os alunos, evitando responder-lhes como resolver os exercícios. Consideramos essa mudança de postura importante para a retroalimentação dos conhecimentos necessários para o ensino de Análise Combinatória.

Alunos

Os alunos de P2 inicialmente apresentaram dificuldades na construção da árvore de possibilidades. Com o decorrer dos trabalhos, essa dificuldade foi diminuída. Diferenciar questões que envolviam ou não a ordem dos elementos foi outro entrave apresentado por esses alunos: o erro de ordem foi recorrente, reafirmando os resultados apresentados por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), Esteves (2001) e Sturm (1999).

Na atividade inicial, esperavam pela explicação da professora, porém, após explicações de que deveriam explorar as situações, passaram a apresentar uma postura mais autônoma, investigativa, discutiam entre eles e exploravam as situações.

Durante as correções ou intervenções da docente e da pesquisadora, os alunos passaram a apresentar suas soluções e buscar identificar semelhanças ou discordâncias; por vezes, eles mesmos encontravam e explicavam seus erros. Inferimos que esse comportamento se deva ao fato de a docente P2, com o decorrer das atividades, ter começado a realizar mediações sem fornecer-lhes diretamente as respostas; e, também, por estarem acostumados a ser questionados pela docente titular de sala que, no momento do desenvolvimento da THA, encontrava-se afastada por motivos de saúde. Identificamos essa possibilidade nesta fala:

Kevinyn: *Vai ter que explicar que nem a “professora” faz às vezes, nem adianta achar só o resultado.*

Interação professor x aluno

Os alunos de P2 inicialmente se mostraram dependentes das orientações da docente para resolver as atividades.

Como relatado anteriormente, com o desenvolvimento da THA, a professora diminuiu as consultas que realizava às atividades respondidas para esclarecer dúvidas dos alunos e, também, começou a questioná-los e pedir que explicassem suas soluções.

É possível inferir, a partir da observação das aulas, que, mesmo com a dificuldade de cunho matemático que a docente afirmou ter, houve uma mudança na gestão de suas aulas, e isso influenciou a sua relação com os alunos e proporcionou um aumento na autonomia deles, que passaram a fazer conjecturas, validá-las ou refutá-las. Dessa forma, a docente e a pesquisadora, nos momentos de mediações, puderam dispensar maior tempo de atenção aos alunos que apresentavam maiores dificuldades.

6.2.3 O desenvolvimento da THA pela professora P3.

Embora a THA não tenha sido concluída com os alunos desta professora, gostaríamos de fazer alguns comentários pontuais que consideramos importantes durante a observação da aula destinada à atividade diagnóstica e das aulas destinadas à primeira atividade.

A professora P3, assim como as demais, iniciou apresentando à classe a THA e informou sobre o trabalho colaborativo de que fariam parte. Explicou que, para isso, a professora Luciane participaria das aulas.

Um comportamento da docente que acreditamos ser significativo citar é o fato de ela sempre enfatizar que os alunos deveriam “tentar” fazer aquilo que conseguissem; a palavra “tentar” era repetida várias vezes, como se os alunos apenas pudessem tentar, mas não conseguiriam obter êxito. Os comentários abaixo transcritos exemplificam esta afirmação. Percebemos que isso desestimulou alguns dos alunos.

P3: *Os primeiros são "facinhos", vocês não vão precisar de cálculos pra fazer.*

P3: *Eu vou fazer a chamada enquanto vocês* ***tentam*** *fazer aí.*

Este comportamento da docente permitiu verificar o que, segundo Solé (2009), é fator importante no aprendizado: a crença na capacidade de aprender. Para Solé (2009), essa crença pode servir de estímulo para que o aluno se empenhe na realização de uma tarefa, assim como a descrença pode fazer com que ele desista dos trabalhos, sem ao menos iniciá-lo, como aconteceu com alunos de P3, que esperavam pela docente, pois não acreditavam conseguir sucesso na atividade. E essa descrença era ratificada pela visão que a docente apresentava da turma: julgava — e isto foi perceptível durante as observações — que os alunos não seriam capazes de resolver as questões propostas.

Outro comportamento que não esperávamos era o fato de a professora sempre perguntar para a pesquisadora se estava fazendo certo, se poderia ter dado a "dica" para o aluno; afirmava que, se não fornecesse essas dicas, os alunos não conseguiriam bom resultado, pois em algum momento ela deveria ensiná-los a fazer. Isso podemos observar na fala seguinte:

P3: *Posso deixar eles quebrarem a cabeça um pouquinho, aí depois posso dar uma dicazinha né? Em algum momento vou ter que ensinar.*

Tal afirmação nos leva a inferir que a professora não acredita no construtivismo, pelo menos não no construtivismo concebido por ela, com a visão de *"deixar os alunos fazendo sozinhos"*.

Não nos aprofundaremos nos comentários, por não termos concluído o trabalho com esses alunos.

A última aula observada culminou com a docente apresentando um quadro de fórmulas aos alunos, afirmando ser mais fácil e rápido, o que, além de ser contraditório com as ideias propostas na THA, com as recomendações feitas pelos pesquisadores já citados, também contradiz o discurso de P3 de que o trabalho envolvendo a Análise Combinatória deveria ser realizado a partir de situações problemas e sem a costumeira ênfase ao uso de fórmulas.

Agradecemos a participação dessa docente, mesmo que por pouco tempo, pois nos permitiu perceber o quanto situações inesperadas podem ocorrer durante o processo de pesquisa e o quanto mudar a prática docente não é uma tarefa fácil. Inferimos que nossa presença em sala de aula tenha sido um fator de incômodo e concluímos isso a partir da percepção da insatisfação da docente, quando os alunos optavam por questionar a pesquisadora, mesmo tendo sido solicitado que não o fizessem. Essa atitude dos alunos pode ser explicada pelo fato de eles conhecerem a pesquisadora de anos anteriores, o que lhes permitiu maior liberdade para questioná-la, enquanto a docente P3, por ser nova nessa unidade escolar e ter tido pouco contato com os alunos, ainda não tinha um relacionamento de confiança estabelecido com eles.

6.2.4 O desenvolvimento da THA pela professora P4.

A professora P4 iniciou o desenvolvimento da THA, explicando os objetivos do projeto de que estariam participando de forma colaborativa e enfatizando a importância de seriedade durante os trabalhos. A metodologia utilizada, segundo a docente, não era nova para seus alunos, pois ela costumava trabalhar com situações de exploração, situações-problema e incentivar a participação e a elaboração de conjecturas por parte dos alunos, havendo sempre momentos de discussões sobre as diferentes resoluções apresentadas por eles.

O início da THA contou com orientações gerais. Porém, é importante destacar uma diferença no trabalho desta docente: ela não pedia que os alunos resolvessem todas as tarefas de uma determinada atividade para depois corrigi-las. Solicitava sempre que os alunos resolvessem um pequeno número de tarefas, e os momentos de mediação durante o desenvolvimento das atividades eram frequentes, assim como durante as correções, em que a professora solicitava sempre aos alunos que explicitassem suas respostas, que eram discutidas por todos, alunos e professora. A docente também se dirigia às carteiras para prestar ajuda aos alunos.

Sempre que percebia que permaneciam dúvidas, buscava elaborar exemplos extras e exercícios para que fizessem em casa e discutissem na aula seguinte; ou seja, assim como recomenda Simon (1995), a docente apresentava alterações durante o desenvolvimento da THA, a partir da observação do desenvolvimento os alunos.

Alguns desses novos exercícios foram acrescentados na nova versão da THA, pois consideramos que colaboraram para melhor compreensão pelos alunos. As correções eram sempre realizadas na lousa, com a participação destes.

A professora demonstrou entusiasmo e compromisso com o projeto, o que acreditamos ter contagiado os alunos.

Clima de gestão da classe

A professora P4 manteve um clima amistoso com a sala. Muito atenciosa com os alunos, sempre que questionada procurava atender às solicitações na própria carteira do aluno ou para toda a sala. A professora controlou bem o comportamento dos alunos e durante o desenvolvimento das atividades propostas na THA procurava sempre incentivá-los a resolver as atividades.

Percebemos que a participação dos alunos foi efetiva durante praticamente toda a THA. Quando percebia alguma distração ou alunos com dificuldades, a docente sempre se dirigia a eles, buscando auxiliá-los ou resgatá-los para as atividades. O incentivo era constante. Os alunos participavam da aula coletivamente, apresentando os questionamentos e suas estratégias de solução. Importante destacar que a professora sempre valorizava todas as estratégias utilizadas pelos alunos. A docente listava na lousa todas as diferentes soluções apresentadas por eles e discutia os pontos fortes de cada solução, ou suas limitações, além de questionar os alunos para que identificassem possíveis erros, evitando revelar por que estava errado, com o objetivo de que os alunos identificassem e corrigissem seus próprios erros.

Mesmo alunos que, segundo a docente, apresentavam dificuldades na aprendizagem matemática mostravam-se empenhados em resolver as atividades.

Podemos afirmar que a professora P4 sempre manteve o controle da sala. A expressão “gestão” aplica-se bem ao seu desempenho.

A professora manteve a atitude de gestora de aprendizagens no desenvolvimento das atividades. Administrava a aula, fazendo instruções iniciais para todos, intervindo apenas nas duplas que necessitavam de ajuda e provocando questionamentos e conjecturas, com algumas mediações durante a atividade. Podemos inferir que a postura adotada pela docente proporcionava maior interesse e autonomia por parte dos alunos na realização das atividades.

Interesse dos alunos pelas atividades

Os alunos da professora P4 resolviam as atividades entre os pares e, antes de solicitar a intervenção da professora, validavam ou refutavam os resultados com os colegas.

Em meados da THA, notamos certo cansaço dos alunos com o tema Análise Combinatória, o que inferimos se deva à quantidade de exercícios por tarefa, aspecto revisto para a segunda versão da THA.

Consideramos satisfatória a interação entre os alunos da professora P4. Os alunos respeitavam-se, não tinham receios de expor aos colegas suas ideias e soluções e, quando algum deles apresentava um comentário importante, a docente pedia que socializasse com a sala. Esses momentos eram enriquecedores para os alunos e para o desenvolvimento da aula.

Dificuldades observadas e possíveis causas

Professora

A professora P4 afirmou na entrevista inicial não ter total domínio sobre o conteúdo Análise Combinatória, porém, nas observações realizadas e ao ouvir o áudio das aulas que não acompanhamos, não percebemos nenhum fato que viesse a prejudicar a aprendizagem dos alunos.

A docente preparava suas aulas com antecedência, sempre tinha controle do que trabalharia nas aulas. Em contato com a pesquisadora antes do início das atividades, buscou saber quais dificuldades os alunos apresentam normalmente no estudo desse tema e, durante a THA, sempre informava a pesquisadora sobre o desenvolvimento de seus alunos e questionava se estava de acordo com resultados de pesquisas.

Inferimos que a postura construtivista é adotada pela docente em sua prática, já que está habituada a realizar mediações, sistematizações e é adepta da prática construtivista em aula. Vale ressaltar novamente, também, que a docente faz parte do grupo de estudos em que este trabalho está inserido, conhece a teoria e também realizou um trabalho de observação nos moldes desta pesquisa.

Notamos, a partir da sua prática em sala de aula e de sua postura receptiva à THA, que a docente é perceptivelmente diferenciada das demais. Podemos inferir que essa postura diferenciada se deva ao conhecimento da teoria, mas, principalmente ao fato de acreditar na perspectiva construtivista para o ensino. Segundo P4, tal abordagem já fazia parte de sua prática, antes mesmo de iniciar o estudo de tal teoria no curso de Mestrado.

Alunos

As dificuldades apresentadas pelos alunos de P4 foram as mesmas indicadas pelos resultados de pesquisas. Porém, esses alunos, diferentemente dos demais participantes, não apresentaram dificuldades na construção de árvores de possibilidades ou em outras representações, como o diagrama de Venn-Euller e a tabela de dupla entrada. Inferimos que isso se deva ao fato de a docente buscar o uso de diferentes representações em suas aulas e sempre propor discussões sobre as soluções apresentadas pelos alunos.

Interação professor x aluno

Durante as aulas da professora P4, percebemos que ela sempre atendia todos os alunos em seus lugares ou, quando percebia que as dúvidas eram comuns, realizava mediações coletivas. Sempre procurava incentivar todos os alunos a resolver as atividades. Quando percebia algum aluno distraído, a docente questionava sobre a tarefa, que estratégias estava utilizando e evitava que os alunos ficassem ocupados com assuntos alheios.

Sempre que explicitavam suas soluções, os alunos buscavam justificá-las. As justificativas, as validações e as refutações de hipóteses sempre eram feitas por eles e pela docente, aconteciam naturalmente, já faziam parte do contrato didático[12] estabelecido.

[12] Guy Brousseau define contrato didático como o conjunto de comportamentos específicos do professor, esperado pelos alunos, e o conjunto de comportamentos dos alunos, esperados pelo professor. (ALMOULOUD, 2007, p. 89).

CONSIDERAÇÕES

Nosso estudo integra o projeto “Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio”, do Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

A contribuição desta pesquisa para o projeto foi a elaboração, o desenvolvimento e a análise de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para o ensino de Análise Combinatória, com o objetivo de verificar a possibilidade de compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com a planificação do ensino, em um trabalho colaborativo entre pesquisador e professores; para isso, buscamos evidências que permitissem responder as seguintes questões de pesquisa:

a) *É possível compatibilizar a perspectiva construtivista na planificação do ensino de Análise Combinatória? Caso sim, de que forma?*

Percebemos, ao longo do trabalho, que elaborar uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem não é uma tarefa simples, é necessário superar algumas dificuldades, para a elaboração de uma THA. A primeira delas diz respeito à prática docente. O professor não está habituado a criar trajetórias de aprendizagem, ou seja, a elaborar atividades, considerando objetivos, hipóteses de aprendizagem, conhecimentos prévios dos alunos, e a antecipar possíveis dificuldades que venham a ser apresentadas pelos alunos.

Simon (1995) destaca que, além das hipóteses do professor sobre o conhecimento dos alunos, é importante observar que outros conhecimentos interferem no ciclo de aprendizagem, como, por exemplo, teorias sobre o ensino de matemática, derivadas de pesquisa ou da própria experiência docente. Assim, para a elaboração de uma THA que tenha uma perspectiva construtivista, é necessário um amplo estudo de pesquisas que ofereçam um norte ao processo de ensino-aprendizagem do tema escolhido. O que se mostra como outro item de dificuldade, pois, como afirmado pelas docentes participantes da pesquisa, a busca por esses resultados não é uma prática comum — três das docentes afirmaram nunca terem tido acesso a esses resultados ou curiosidade por conhecê-los. A docente P4 conhece e utiliza resultados de pesquisa, porém, é preciso salientar que ela é uma pesquisadora do grupo de estudos no qual esse projeto é desenvolvido.

Na elaboração das atividades de aprendizagem que compuseram a THA, com o objetivo de provocar interações e motivação entre os alunos para a realização das atividades, procuramos preparar tarefas que propiciassem ao aluno construir o próprio conhecimento.

As atividades foram criadas com a intenção de atingir tanto alunos que apresentassem bom desempenho em matemática como aqueles que apresentavam dificuldades de aprendizagem, a fim de contribuir para a autoestima e o autoconceito e incentivar os alunos na busca pelo sucesso na aprendizagem, pois, para Solé (2009), a autoestima e o autoconceito são aspectos que influenciam a maneira como o aluno constrói sua relação com os outros e com o conhecimento.

Percebemos que o fundamental para planificar o ensino de Análise Combinatória de acordo com a perspectiva construtivista que compõe a THA é o comprometimento do professor. Nas observações e no contato com P4, notamos que, quando o docente está envolvido no trabalho e possui apoio para tirar dúvidas, para discutir; e liberdade para propor sugestões e alterações, sente-se mais motivado para ensinar e aprender, enriquecendo suas aulas e seus conhecimentos.

Para Zabala (2009), o papel protagonista e ativo do aluno, tão característico do construtivismo, não se contrapõe à necessidade de um papel igualmente ativo por parte do professor. Consideramos o planejamento a chave para a elaboração, a modificação e o desenvolvimento de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem; e é fundamental para o desenvolvimento de aulas que propiciem o enriquecimento dos conhecimentos dos alunos e do próprio docente.

Sendo assim, respondendo nossa primeira questão de pesquisa, inferimos que é possível compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento de ensino de Análise Combinatória. Porém, diante das dificuldades para elaborar uma THA, acreditamos que esta é uma tarefa mais condizente aos pesquisadores que aos professores, como afirmam Gomez e Lupiánez (2007). No entanto, o pesquisador pode elaborar uma primeira versão da THA, que pode ser o ponto de partida para o professor. Ao desenvolver essa versão, interagir com os alunos e avaliar os resultados, o professor estará adquirindo novos conhecimentos e poderá realizar modificações com confiança e, assim, criar suas próprias versões, concluindo o ciclo de aprendizagem proposto por Simon (1995).

b) Como as pesquisas na área da Educação Matemática podem contribuir para a organização de um ensino que potencialize situações de aprendizagem de Análise Combinatória?

Antes da elaboração da THA, realizamos um levantamento sobre as pesquisas na área da Educação Matemática, com o objetivo de buscar resultados sobre o ensino e a aprendizagem do tema Análise Combinatória no Ensino Médio, que foi o foco desta pesquisa.

As pesquisas voltadas à Análise Combinatória identificam os tipos de erros cometidos pelos alunos no estudo deste tema. Entre eles, os recorrentes são: erro de interpretação do enunciado do problema; erro de ordem (considerar a ordem, quando esta é irrelevante); erro de repetição (o aluno não considera a possibilidade de repetir os elementos quando é possível, e vice-versa); enumeração não sistemática (tentar resolver o problema enunciado por tentativa e erro, sem um processo recursivo que conduz à formação de todas as possibilidades).

A partir da constatação desses erros, os estudos fazem algumas sugestões de como minimizar sua ocorrência. Entre essas sugestões, destacamos: a proposta do estudo realizado a partir de situações problemas, a exploração da árvore de possibilidades e o uso do Princípio Fundamental da Contagem, que adotamos na elaboração da THA.

Portanto, respondendo a segunda questão, podemos afirmar que os resultados de pesquisas foram imprescindíveis para que elaborássemos a THA, pois, a partir deles, foi possível elencar objetivos de aprendizagem e hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos, conhecer as dificuldades correntes e os principais erros cometidos por alunos e docentes e elencados por diferentes pesquisadores: Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997), Esteves (2001), Sabo (2010). Tais resultados possibilitaram, também, propor atividades que potencializassem o surgimento de dúvidas, para que, com a mediação dos professores, as dificuldades fossem minimizadas ou superadas, ainda que as mediações nem sempre tenham acontecido da forma esperada.

c) *Que características podem ser identificadas na atuação do professor durante o desenvolvimento da THA para a aprendizagem da Análise Combinatória?*

Antes da primeira reunião com os professores, a nossa expectativa era de que as contribuições para modificações na THA fossem escassas. Essa expectativa deve-se ao fato de termos percebido certa resistência dos docentes ao trato com o tema e à participação em pesquisas acadêmicas, resistência essa confirmada na pesquisa de Sabo (2010). Também colaborou para essa resistência o fato de os docentes não estarem habituados a elaborar e a desenvolver Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem, ou seja, atividades elaboradas de acordo com objetivos, hipóteses de aprendizagem e conhecimentos dos alunos.

Essa expectativa confirmou-se com as docentes P1, P2 e P3, que realizaram apenas um estudo superficial da THA no encontro inicial e não propuseram alterações significativas, apenas a mudança na ordem de uma das tarefas.

A docente P4, por ser aluna do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática e fazer parte do projeto em que esta pesquisa está inserida, colaborou com a elaboração da THA, meses antes de tornar-se professora colaboradora. Suas sugestões foram valorizadas, porém, como P4 não era colaboradora na ocasião, *ela*s não foram elencadas pela pesquisadora.

Concordamos com a afirmação de Mauri (2009) sobre a importância do planejamento e das mediações adequadas para o sucesso do processo de ensino e aprendizagem, pois professores conscientes do que representam atividades de construção de conhecimentos não podem deixar de realizar mediações para que os alunos se apropriem dos conhecimentos. Portanto, é importante o planejamento intencional das atividades e a realização de mediações necessárias para o seu desenvolvimento. Assim, durante o desenvolvimento da THA, buscamos observar o planejamento e as mediações realizadas pelas docentes e notamos diferenças e semelhanças marcantes no desenvolvimento das atividades realizadas por elas.

A professora P1 apresentou uma motivação decrescente no desenvolvimento da THA. Acreditamos que esse fato tenha ocorrido porque a professora não possuía o hábito de planejar suas aulas, o que pode ter interferido na qualidade das mediações realizadas e, consequentemente, no envolvimento dos alunos com as atividades e na interação entre docente e alunos. No que se refere às mediações, observamos que a falta de momentos de mediação coletiva e de sistematizações acabou também causando dispersão e desmotivando os alunos. E, em consequência disso, houve desmotivação também da docente no decorrer das atividades, o que levou à interrupção da THA antes de seu término.

Inferimos que esse comportamento se deva à dificuldade para trabalhar com pressupostos construtivistas. Como foi afirmado pela própria docente:

"Tenho dificuldades em trabalhar com o construtivismo. Não sei como deixar os alunos soltos aprendendo e ao mesmo tempo ter que controlar isso. Não consigo saber quando devo interferir. Prefiro o tradicional mesmo, que já estou acostumada". (P1, em entrevista após o desenvolvimento da THA).

Por outro lado, percebemos que, quando planejava suas aulas, a docente P2 mostrava maior desenvoltura no desenvolvimento das atividades e realizava mediações com maior tranquilidade. Planejar as aulas pode ter garantido à docente o domínio do conteúdo matemático a ser trabalhado com os alunos, pois a falta de conhecimento matemático dessa docente também foi fator de interferência no desenvolvimento da THA. Como afirma Simon (1995), apenas com conhecimento matemático é possível ao professor interpretar as dúvidas, as conjecturas e as ações dos alunos. O professor deve conhecer os objetivos de aprendizagem que espera alcançar, para que possa realizar modificações na THA, quando perceber que uma atividade não é adequada a seus alunos ou quando estes se distanciam das metas de aprendizagem.

Detectamos uma característica da docente P3 na observação das aulas: a visão que a docente tem dos alunos. Ao afirmar sempre que deveriam tentar fazer as tarefas, que algumas eram bem “facinhas” e as outras ela ensinaria, o rendimento dos alunos pode ter sido alterado, causando nestes desânimo e crença de que não seriam capazes de conseguir bons resultados. Isso foi percebido na fala de alguns alunos, que afirmaram que não resolveriam os problemas propostos, pois não conseguiriam. A professora já os havia orientado para que apenas “tentassem” e afirmou que depois lhes ensinaria.

Para Solé (2009), o professor traz uma visão da sala de aula que, muitas vezes, subestima a capacidade dos alunos e julga que não sejam aptos para realizar tais tarefas. Para a autora, “não existe qualquer dúvida sobre o fato de que as expectativas dos professores sobre o rendimento de seus alunos podem chegar a modificar seu rendimento real” (2009, p. 46).

A professora P4 apresentou um comportamento distinto das demais docentes. Apesar de ter participado da elaboração da THA, buscava sempre preparar suas aulas e informar à pesquisadora o que havia trabalhado na aula anterior e o que pretendia trabalhar na seguinte. O planejamento pôde também ser percebido na proposta de tarefas extras feitas pela docente e a modificação da trajetória de acordo com o desenvolvimento dos alunos, parte fundamental de uma THA, foi percebida nas aulas dessa docente.

Foi possível notar que, de acordo com objetivos pontuais que não haviam sido atingidos, a docente realizava modificações na THA, como, por exemplo, inserindo exercícios para possibilitar a sistematização de permutações com repetição de forma satisfatória.

Outra característica, citada por Solé (2009) como própria da perspectiva construtivista, que diferenciou os trabalhos com essa docente, diz respeito à mediação das atividades, que deve variar em qualidade e quantidade. Durante a observação e escuta do áudio das aulas, foi possível perceber que o mesmo questionamento era respondido de formas diferentes, de acordo com as dificuldades apresentadas pelos alunos.

A docente sempre questionava os alunos sobre os procedimentos que estavam utilizando e promovia a socialização e a sistematização destes. Nenhum questionamento ficava sem resposta ou sem discussões coletivas. Intuímos ser esta uma característica da docente, pois, nas aulas observadas, percebemos que os alunos estavam habituados a levantar hipóteses, validar ou refutar seus resultados, sempre com justificativas. A atuação da docente está de acordo com a indicada por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p. 118), que enfatizam que "a representação das soluções encontradas pelos alunos, conjuntamente com a sua discussão coletiva, permitirá criar uma atmosfera de aprendizagem eficaz".

Para o bom desenvolvimento de atividades planejadas, os docentes devem "comunicar-se" com as observações dos alunos, e não apenas com suas dúvidas apresentadas, mas principalmente com as conjecturas que fazem. Um ambiente de aprendizagem, em que ocorre a interação entre o professor e os alunos, propicia o empenho de todos na construção dos conhecimentos.

A proposta da THA busca apresentar aos docentes novas possibilidades de atuação em sala de aula. Diante das possibilidades, o professor faz suas escolhas, optando por conservar suas concepções, como ocorreu com P1 e P3, enriquecendo seus conhecimentos e causando reflexões sobre a sua prática, mesmo que inicialmente tímidas, como percebemos com P2, ou incorporando novos conhecimentos, como foi o caso de P4, que era do grupo de pesquisa.

Portanto, podemos assegurar que não basta o professor ter em mãos uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem que contemple uma perspectiva construtivista, se, em seu desenvolvimento, não agir de maneira condizente com essa perspectiva. De posse da THA, o docente deve instigar seus alunos na medida certa, realizar mediações e intervenções de modo coerente e sistematizar os conhecimentos. Sem motivação, sem envolvimento e empenho por parte dos docentes, é difícil imaginar o sucesso da THA ou do processo de ensino e aprendizagem em qualquer perspectiva.

Podemos acrescentar que o desenvolvimento de uma THA tem como característica principal o planejamento contínuo por parte do docente, realizando adaptações e alterações, situando-a não como uma atividade rígida e estanque, mas como um processo cíclico, em que os novos conhecimentos dos professores e dos alunos contribuem para o processo de ensino e aprendizagem.

Diante de tais considerações e reflexões sobre a pesquisa desenvolvida, indagamos se a THA não seria mais apropriada como uma proposta para formação continuada de professores. Será que nossa postura como pesquisadora deveria ter sido diferenciada e deveríamos ter interferido de forma a orientar o docente no desenvolvimento das atividades, em vez de somente ter observado e participado apenas de momentos pontuais em sala de aula? Ou, ainda, será que trabalhar colaborativamente entre docentes, de forma que possam observar as aulas um do outro e depois propor momentos de discussões e sugestões acerca da prática não seria eficaz, com auxílio da THA?

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD. S. A. *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

ANGIOLIN, A. G. *Trajetórias hipotéticas de aprendizagem sobre funções exponenciais*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — PUC/SP, São Paulo, 2009.

BACHX, A. de C.; POPPE, L. M. B.; TAVARES, R. N. O. *Prelúdio à Análise Combinatória*. São Paulo: Nacional, 1975.

BARBOSA, A. A. *Trajetórias hipotéticas de aprendizagem relacionadas às razões e às funções trigonométricas, visando uma perspectiva construtivista.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — PUC/SP, São Paulo, 2009.

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; NAVARRO-PELAYO, V. R*azonamiento combinatorio*. *Educación Matemática em secundaria.* Madrid: Síntesis, 1996.

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; NAVARRO-PELAYO, V. *Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. Educación Matemática*. Disponível em: <http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm>. Acesso em: 05 nov. 2009.

BATANERO, C.; NAVARRO- PELAYO, V.; GODINO, J. Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, n. 32, p.181-199, 1997. Disponível em: <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Implicitmodel.htm>. Acesso em: 20 jan. 2010.

BOAVIDA, M. A.; PONTE, J. P. *Investigação colaborativa*: potencialidades e problemas, 2002. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/iponte/docs-pt%5CO2-Boavida-Ponte(GTI).pdf . Acesso em: 20 fev. 2010.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação:* uma introdução a teoria e aos métodos. Tradução de Maria J. Álvares, Sara B. dos Santos e Telmo M. Batista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *Resolução CEB Nº 3, de 26/06/1998*. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: MEC/SEF.

_____. Secretaria da Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais* – Ensino Médio (PCNEM) – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 1999.

______. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio*: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

______. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2006.

______. Secretaria de Educação Básica. *Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – Gestar II*. Matemática. Caderno de Teoria e Prática 5: diversidade cultural e meio ambiente: de estratégias de contagem à propriedades geométricas. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

BROUSSEAU, G. “L´analyse de La didactique des mathématiques”. In: ALMOULOUD. S. A. *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

CABRAL JUNIOR, R. S. *Abordagem das noções iniciais de Probabilidade em uma perspectiva construtivista*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — PUC/SP, São Paulo, 2009.

COLL, C. et al. *O construtivismo na sala de aula*. Trad. Claúdia Schilling. São Paulo: Ática, 2009.

COLL, C.; SOLÉ, I. Os professores e a concepção construtivista. In: COLL, C. et al. *O construtivismo na sala de aula*. Trad. Claúdia Schilling. São Paulo: Ática, 2009.

CORREIA, P.F., FERNANDES, J. A.; ALMEIDA, F. Ensino e aprendizagem das operações combinatórias no 12º ano de escolaridade. In: ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA, 2., 2009, Instituto de Educação e Psicologia Universidade do Minho, Braga, Portugal. *Actas...* Disponível em: <http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/9913/1/Actas_IIEncontroProbabilidadesEstatisticaEscola.dpf>. Acesso em: 05 fev.2010.

COSTA, C. A. *As concepções dos professores de matemática sobre o uso de modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — PUC-SP, São Paulo, 2003.

COUTINHO C. Q. S.; MIGUEL, M. I. R. Introdução ao pensamento combinatório. In: PIRES, C. M. C; CURI, E.; CAMPOS, M. M. R. *Ensino Médio. Módulos da 2ª série*. São Paulo: Proem, 2002. Apostila do curso Construindo Sempre Matemática – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da PUC/SP – Secretaria de Estado da Educação de São Paulo. Material do aluno – versão preliminar.

DANTE, L. R. *Matemática*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2009. Volume único.

ESTEVES, I. *Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, PUC-SP, São Paulo, 2001.

FREITAS, A. L. V. *Ensinar e aprender transformações isométricas no ensino médio*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — PUC/SP, São Paulo, 2010.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JÚNIOR, J. R. *Matemática fundamental, uma nova abordagem*: ensino médio. São Paulo: FTD, 2002.

GÓMEZ, P.; LUPIÁÑEZ, J. L. Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de professores de matemáticas de secundaria. PNA, Granada, v. 1, n. 2, p. 79-98, 2007.

HAZZAN, S. *Fundamentos da Matemática elementar*: combinatória e probabilidade. Atual, 2004. v. 5.

JULIANELLI, J. R.; DASSIE, B. A.; LIMA, M. L. A.; SÁ, I. P. *Curso de Análise Combinatória e Probabilidade*: aprendendo com a resolução de problemas. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

LIMA, P. O. *Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções logarítmicas*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — PUC/SP, São Paulo, 2009.

LOPES, J. M. *Raciocínio combinatório por meio de resolução de problemas*. São Paulo: UNESP, s.d. Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxx_cnmac/PDF/706.pdf>. Acesso em: 16 abr. 2010.

LUNA, M. F. A. *Estudo das trajetórias hipotéticas da aprendizagem de Geometria Espacial para o Ensino Médio na perspectiva construtivista*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — PUC/SP, São Paulo, 2009.

MAURI, T. O que faz com que o aluno e a aluna aprendam os conteúdos escolares?. In: COLL, C. et al. *O construtivismo na sala de aula*.Trad. Claúdia Schilling. São Paulo: Ática, 2009.

MELLO, G. N. Diretrizes curriculares para o ensino médio: por uma escola vinculada à vida. *Revista Ibero Americana de Educação*, n. 20, 1999. Disponível em: <http: //www.rieoei.org/rie20a06.htm >. Acesso em: 15 maio 2010.

MESQUITA, M. A. N. *Ensinar e aprender funções polinomiais do 2.o grau, no ensino médio*: construindo trajetórias. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — PUC/SP, São Paulo, 2009.

MIRAS, M. Um ponto de partida para a aprendizagem de novos conteúdos: os conhecimentos prévios. In: COLL, C. et al. *O construtivismo na sala de aula.* Trad. Claúdia Schilling. São Paulo: Ática, 2009.

ONRUBIA, J. Ensinar: criar zonas de desenvolvimento proximal e nelas intervir. In: COLL, C. et al. *O construtivismo na sala de aula*.Trad. Claúdia Schilling. São Paulo: Ática, 2009.

PAIVA, M. *Matemática*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2006. Volume único.

PESSOA, C. A. S. *Quem dança com quem:* o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação, UFPE, Recife, PE, 2009.

PESSOA, C. A. S.; BORBA, R. E. S. R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 1, n. 1, 2010. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/emteia/index.php/emteia/article/view/4/2>. Acesso em: 05 out. 2010.

PINHEIRO, C. A. M. O *ensino de análise combinatória a partir de situações-problema*. 2008. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade do Estado do Pará, Belém, 2000. Disponível em: < http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=149057>. Acesso em: 05 nov. 2009.

PIRES, C. M. C. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. *Educação Matemática Pesquisa*, v.11, p. 6-24, 2009.

PIRES, C. M. C.; TRALDI, A. *Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio*. Projeto de pesquisa apresentado ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática (PROEM PUC/SP), 2007.

ROA, R.; BATANERO, C.; GODINO, J. D. *Estrategias generales y estratégias aritméticas em la resolución de problemas combinatórios*. Educación Matemática. Santillana Distrito Federal, México, 2003. Disponível em: <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/405/40515201.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2010.

ROSENBAUM, L. S. *Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre as funções trigonométricas numa perspectiva construtivista*. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) — PUC-SP, São Paulo, 2010.

SABO, R. D. *Saberes docentes*: A análise combinatória no Ensino Médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, São Paulo, 2010.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria do Estado da Educação. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo*: Matemática. São Paulo: SEE, 2008.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. *Caderno do professor*: Matemática, Ensino Médio – 2a série, volume 3. SEE, 2009a.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. *Caderno do aluno*: Matemática, Ensino Médio – 2a série, volume 3. SEE, 2009b.

SILVA, D. N.; FERNANDES, J. A.; SOARES, A. J. Intuições de alunos de 12.ºano em combinatória: Um estudo exploratório. In: FERNANDES, J. A.; SOUSA, M. V.; RIBEIRO, S. A. (Org.). Ensino e aprendizagem de Probabilidades e Estatística. In: ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA, 1., 2004. Centro de Investigação em Educação, Universidade do Minho, Braga. *Actas…* p. 61-84.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 26, n. 2, p. 114-145, 1995.

SOLÉ, I. Disponibilidade para a aprendizagem e sentido da aprendizagem. In: COLL, C. et al. *O construtivismo na sala de aula*.Trad. Claúdia Schilling. São Paulo: Ática, 2009.

STURM, W. *As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa*. Dissertação (Mestrado) — Unicamp, Campinas, 1999. Disponível em: < ttp://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000224683>. Acesso em: 30 out. 2009.

TONNETTI, A. C. *Trajetórias hipotéticas de aprendizagem em estatística no ensino médio*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — PUC/SP, São Paulo, 2010.

TRALDI JR, A. *Formação de formadores de professores de matemática*: identificação de possibilidades e limites da estratégia de organização de grupos colaborativos.Tese (Doutorado em Educação Matemática) — PUC/SP, São Paulo, 2006.

ZABALA, A. Os enfoques didáticos. In: COLL, C. et al. *O construtivismo na sala de aula*. Trad. Claúdia Schilling. São Paulo: Ática, 2009.

ZAMPIROLO, M. J. C. V. *Projeto escola e cidadania*: de quantos modos? São Paulo. Editora do Brasil, 2000a.

ZAMPIROLO, M. J. C. V. *Projeto escola e cidadania*: arranjando e permutando. São Paulo: Editora do Brasil, 2000b.

ZAMPIROLO, M. J. C. V. *Projeto escola e cidadania*: combinações. São Paulo. Editora do Brasil, 2000c.

ANEXOS

ANEXO A – 2ª Versão da THA

Atividade Diagnóstica

Objetivo: Verificar os conhecimentos prévios, as habilidades e as estratégias dos alunos na resolução de problemas simples que envolvem raciocínio combinatório em situações com poucos elementos.

1) A sorveteria GELINHO oferece cinco sabores de sorvete de massa (chocolate, morango, brigadeiro, abacaxi e pistache), três coberturas (caramelo, chocolate e morango). De quantas maneiras diferentes você poderia escolher seu sorvete com um sabor de massa e uma cobertura? Descreva as maneiras.

2) Na última prova de matemática de 2009, a professora elaborou cinco questões (A, B, C, D, E). Os alunos deveriam responder apenas três. De quantas formas ele poderia ter escolhido essas três questões? Descreva as possíveis escolhas.

3) No campeonato paulista de vôlei de praia feminino, quatro duplas (D1, D2, D3, D4) foram para a semifinal. De quantas maneiras diferentes poderiam ocorrer as duas primeiras colocações (campeão e vice-campeão)? Descreva essas maneiras.

4) Quantos e quais são os anagramas formados pelas palavras a seguir: (lembre-se: anagramas são sequências de letras formadas pelas letras de outra palavra, podendo ou não ter significado).

a) CÉU

b) RICO

c) VIVO

d) OVO

ATIVIDADE 1

Objetivo: Explorar o uso de diferentes representações de enumeração para, com o apoio destas, identificar a multiplicação como estratégia de solução e aplicar, quando possível, na resolução de problemas simples.

Procedimentos: Trabalho em duplas.

Tarefa 01: Montando um lanche.

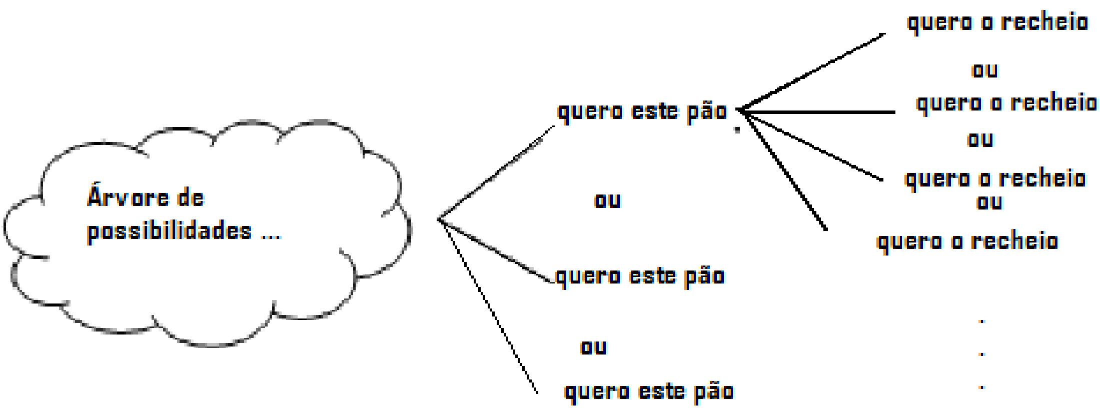
Os sanduíches da padaria Portuguesa são muito famosos. O freguês pode escolher entre três tipos de pães: pão de forma, pão italiano ou baguete. Para o recheio, há quatro opções: queijo, presunto, carne, salame.

Usando as letras F, I e B para representar os tipos de pães e as letras Q, P, C e S para representar os tipos de recheios, descreva quais são:

d) Os lanches diferentes que a padaria oferece no pão de forma? Quantos são?

e) Os diferentes lanches oferecidos pela padaria? Quantos são?

f) Como você pode representar essas opções, usando uma árvore de possibilidades?



2) Joca costuma fazer a primeira refeição do dia na padaria de seu bairro. Ele sempre escolhe uma bebida e um lanche na tabela fixada no alto da parede. Joca quer saber: quantos dias, no máximo, ele pode fazer pedidos diferentes?

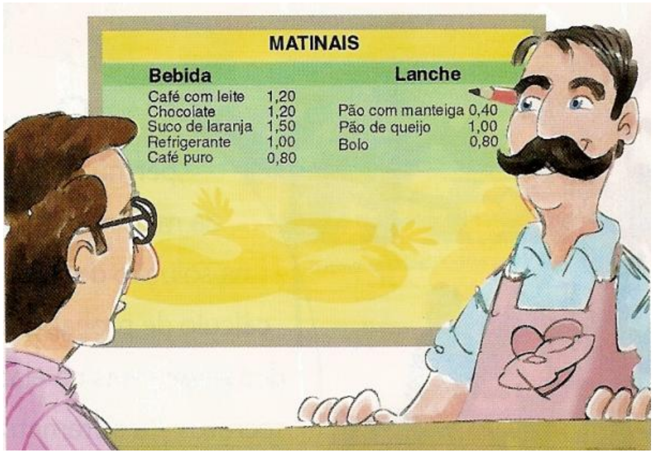
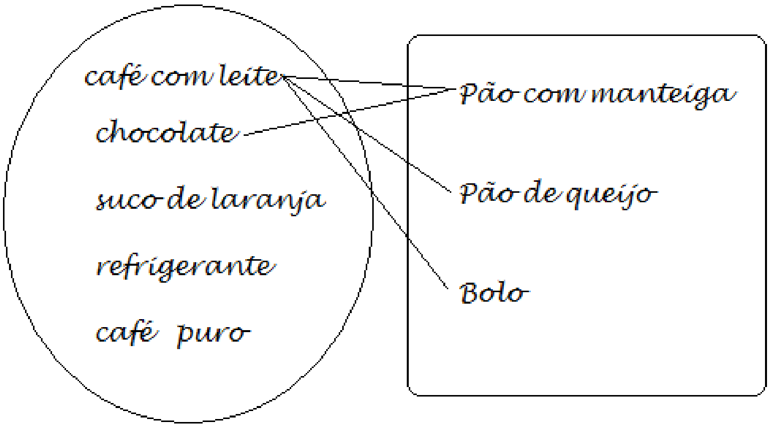


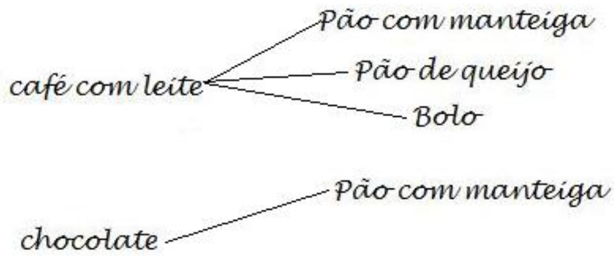
Figura 32 - Imagem retirada de Zampirolo, 2000b, p.2

Três amigos de Joca tentaram ajudá-lo a descobrir esse total, cada um de um jeito diferente, mas, como estavam atrasados para o trabalho, nenhum deles terminou. Ajude Joca, terminando o que cada amigo começou.

e) O primeiro amigo utilizou o Diagrama de Euler-Venn.



f) O segundo amigo escolheu a árvore de possibilidades.



g) E o terceiro optou por uma tabela de dupla entrada (ou contingência).

Lanche / Bebida	Pão com manteiga	Pão de queijo	Bolo
café com leite	café com leite e pão com manteiga		
Chocolate			
Suco de laranja			
Refrigerante			
Café puro			

d) Com a intenção de agradar seus fregueses, o dono da padaria passou a lhes oferecer uma bala ou de hortelã ou de morango para completar o café da manhã. Quantas opções diferentes tem Joca para fazer o pedido com uma bebida, um lanche e uma bala?

e) Que estratégia você utilizou para responder a questão d?

Tarefa 2: Ida e volta

Para chegar um lago que fica em uma área de mata fechada, existem quatro trilhas (A, B, C e D).

Podemos fazer um esquema para melhor visualizar:

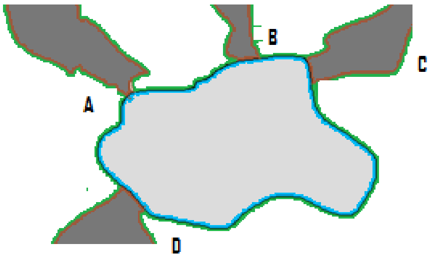


Figura 33- Esquema das trilhas do lago

c) De quantas maneiras podemos ir e voltar do lago? Descreva todas as maneiras possíveis.

d) E se não for possível voltar pela mesma trilha utilizada para chegar ao lago?

Tarefa 3: Escolhendo o que vestir.

Kátia, ao abrir seu armário para escolher o que vestir para ir à escola, encontrou: três calças, duas blusas e três pares de sapatos. Ela tem que escolher uma calça, uma blusa e um par de sapatos. Considerando todas as peças diferentes, quantas são as maneiras diferentes com que ela pode se vestir?

Tarefa 4: Jogo de letras

Numa revista de palavras cruzadas, num determinado passatempo, devem-se formar todas as palavras possíveis, usando as letras de palavras dadas. Para isso, precisamos inicialmente formar todos os anagramas possíveis com essas letras. Quantos anagramas é possível formar com as palavras a seguir? Se necessário, utilize a árvore de possibilidades para ajudá-lo.

(Observe que não estamos interessados em conhecer quais as palavras formadas, com ou sem significado delas. Queremos apenas contar esses anagramas.)

e) RUA
f) LUTA
g) CORSA
h) ESCOLA

Tarefa 5: Sistematização

O uso da árvore de possibilidades e outras representações, como tabela de dupla entrada ou diagrama de Euler-Venn são importantes ferramentas para a enumeração das possibilidades, auxiliando o entendimento do raciocínio envolvido nas situações de Análise Combinatória. Não podemos negar sua eficiência; porém, sua utilização nem sempre é conveniente, como você pode perceber, se construir a árvore de possibilidades para a palavra ESCOLA.

Portanto, precisamos de estratégias mais eficazes ou apropriadas, quando temos um aumento no número de elementos que farão parte de nossos agrupamentos, e é isto que veremos nas próximas atividades.

Como você determinou o número de anagramas para a palavra ESCOLA?

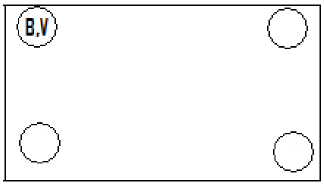
ATIVIDADE 2:

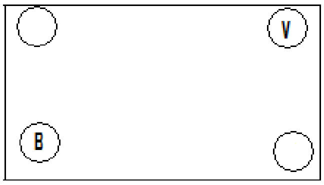
Objetivo: Identificar e utilizar o Princípio Fundamental da Contagem como estratégia de solução, reconhecer e utilizar a divisão como forma de evitar a sobrecontagem de agrupamentos.

Procedimentos: Trabalho em duplas.

Tarefa 1: Bilhar

Dois amigos estavam jogando bilhar e propuseram um desafio: acertar duas bolas (branca e vermelha), com apenas duas tacadas nas caçapas dos cantos da mesa. Supondo que um dos amigos tenha acertado, quantas são as diferentes maneiras que ele teria para colocar essas bolas nas caçapas? Duas das possibilidades são:





Tarefa 2: Campeonato de cartas

1) Carlos, Renata, Fabiano, Pedro, Daniela e Andréia são amigos e participarão de um campeonato de cartas. O campeonato é disputado individualmente. **Quantas e quais** são as possibilidades de ocorrência dos dois primeiros colocados (campeão e vice-campeão)?

2) A segunda etapa do campeonato de cartas será disputado em duplas. **Quais e quantas** são as duplas possíveis de serem formadas com os cinco amigos?

3) Observe as duas questões anteriores. O que as diferencia?

Tarefa 3: Anagramas

5) Sabemos que a palavra RUA possui seis anagramas, que são RUA, RAU, ARU, AUR, URA, UAR. A palavra ASA possui o mesmo número de letras que

a palavra RUA. Você pode afirmar que as duas palavras possuem o mesmo número de anagramas? Justifique.

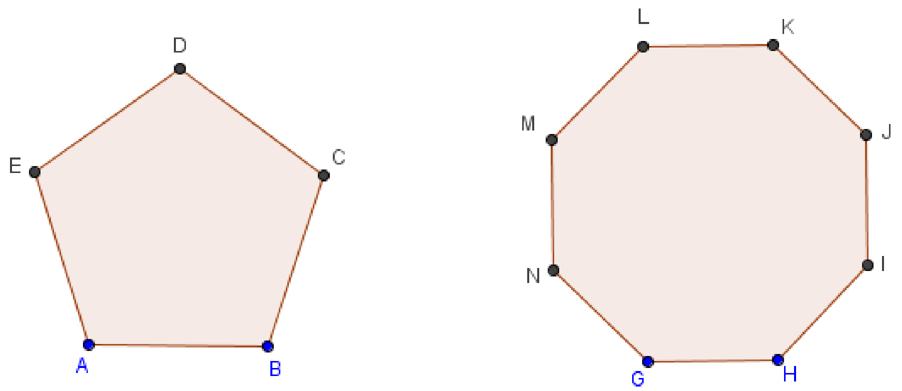
6) O mesmo ocorre com as palavras LUTA, CASA ou BOBO, que possuem o mesmo número de letras. A palavra LUTA possui 24 anagramas. Já as palavras CASA ou BOBO possuem quantos anagramas cada uma?

7) Como você calcularia o número de anagramas de uma palavra que possui letras repetidas, como CASA e BOBO, sem precisar descrever todos os anagramas?

8) Utilize o mesmo raciocínio para determinar o número de anagramas das palavras CORSA, BRASA, ARARA, BACANA, ATACADA.

Tarefa 4 – Formando triângulos

Quantos triângulos podem ser formados tendo seus vértices nos vértices de cada figura?:



Tarefa 5: Números

Utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

a) Quantos números pares de três algarismos podemos formar ?

b) Quantos números ímpares de três algarismos distintos podemos formar?

c) Quantos números de três algarismos todos repetidos podemos formar?

d) Quantos números de três algarismos podemos formar?

ATIVIDADE 3

Objetivo: Sistematizar e formalizar o Princípio Fundamental da Contagem e o uso da divisão para evitar a sobrecontagem.

Professor: busque mediar um debate entre os alunos para elencar as características relevantes, como a importância da ordem ou não e a existência de elementos repetidos. A utilização de exemplos é uma estratégia importante nesse momento.

1) Na resolução de problemas de contagem, várias estratégias podem ser utilizadas. Sua escolha está relacionada à percepção de algumas características do problema. A fundamentação para essas estratégias é o Princípio Fundamental da Contagem, que podemos esquematizar pelo diagrama a seguir[13]:

nº de opções para primeira etapa	×	nº de opções para segunda etapa	×	nº de opções para terceira etapa	×	...	×	nº de opções para enésima etapa

Porém, alguns fatores devem ser considerados para a resolução dos problemas. Vamos descobrir quais são esses fatores ou características que diferenciam os problemas propostos. Converse com seu colega de dupla e faça uma relação das características que são importantes nas situações que resolveu até agora. Anote todas elas para que possamos, juntos, descobrir cada uma delas e sua importância.

Professor: questione e relacione na lousa as características apresentadas pelos alunos. É importante sempre destacar a necessidade de uma leitura criteriosa antes de resolver as situações propostas.

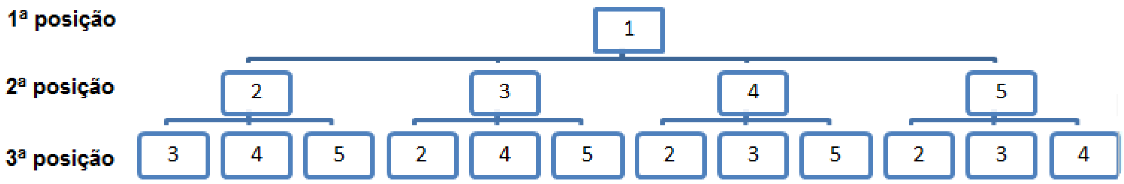
Agora que conhecemos esse princípio, calcule quantas são as centenas diferentes que podemos escrever, utilizando apenas os números 0, 1, 2, 3 e 4? E se não houver algarismos repetidos?

2) Observe a árvore de possibilidades para o problema[14]:

---

[13] Situação adaptada de Coutinho e Miguel, 2002, p. 14
[14] Texto adaptado de São Paulo , 2009b, p. 21

Quantos grupos ordenáveis de três elementos podemos formar com cinco pessoas?



Ao observar a árvore, percebemos que, para cada elemento que ocupar a primeira posição, teremos quatro elementos para ocupar a segunda posição e três elementos para ocupar a terceira posição. Assim, como temos cinco elementos para a primeira posição, o número de grupos ordenáveis nesse caso será igual ao produto $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Agora, se não estivéssemos considerando a ordem das pessoas: por exemplo, vou convidar três dessas cinco pessoas para uma festa. Em quanto ficaria reduzido esse número, se a ordem não é importante, ou seja, o agrupamento "1, 2, 3" é o mesmo que "1, 3, 2" e igual a todos os outros que ocorre a troca de posição dos mesmos participantes? Ou seja, não estamos ordenando as pessoas e apenas formando grupos.

Os 60 grupos ordenáveis ficariam reduzidos a 10 grupos não ordenáveis (resultado de $60 \div 6$), uma vez que cada grupo de três elementos permite a troca de posições de seis maneiras diferentes.

Portanto, teremos $\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = \frac{60}{6} = 10$ grupos não ordenáveis.

Usando esse raciocínio, calcule o número de duplas diferentes que podem ser formadas entre sete amigos.

ATIVIDADE 4

Objetivo: Ressaltar a importância ou não da ordem e mobilizar o Princípio Fundamental da Contagem e o uso da divisão como estratégia de solução para situações em que a ordem dos elementos não diferencia os agrupamentos.

Procedimentos: Trabalho individual.

Tarefa 1: Cinco Amigos

1) Um grupo de cinco amigos (A, B, C, D, E). A seguir, aparecem critérios para agrupá-los. Identifique se cada grupo é ordenado ou não ordenado e calcule o número de agrupamentos possíveis em cada situação.

Para responder os seguintes itens, os alunos podem optar pelo diagrama de árvore, pela contagem direta ou pelo PFC ou divisão para evitar a sobrecontagem. Esperamos que neste momento ocorra uma diminuição no uso da enumeração.

a) Escolher três pessoas para irem a uma festa.
b) Definir os dois primeiros colocados num concurso.
c) Colocar as cinco pessoas em fila.
d) Dar presentes iguais a quatro dessas pessoas.
e) Dar quatro presentes diferentes a quatro dessas pessoas.

Tarefa 2: Ordenado ou não?

1) Analise, em cada caso, se os agrupamentos são ordenados ou não ordenados e calcule o número de agrupamentos possíveis de cada situação.

a) Números de três algarismos, tomados a partir dos algarismos 3, 4, 5, 6 e 7.

b) Códigos de quatro símbolos distintos, escolhidos entre os elementos do conjunto {1, 2, 3, a, b, c}.

c) Grupos de 5 alunos, escolhidos entre os 40 alunos de uma sala, para participarem de um evento.

d) Formas de arrumar seis livros diferentes em uma estante.

e) Misturas obtidas, juntando-se volumes iguais de três líquidos, escolhidos entre seis disponíveis.

Tarefa 3

2) A mega-sena está acumulada!

Ricardo fez um único jogo, escolhendo as seis dezenas marcadas no cartão a seguir:

b) Quantas quinas diferentes Ricardo poderia formar com os números marcados?

b) Quantas quadras diferentes ele poderia formar?

ATIVIDADE 5

Objetivo: Identificar os tipos de agrupamentos, de acordo com as características observadas.

Objetivo específico: Formalizar os conceitos de permutação, arranjo e combinação. Agora que conhecemos importantes características que influenciam na escolha da estratégia de solução das situações que envolvem raciocínio combinatório, iremos identificá-los.

Procedimento: Apresentar inicialmente a tarefa 1, de forma isolada. Após a apresentação e a discussão das respostas dos alunos, proponha as demais tarefas da atividade.

Tarefa 1: PERMUTAÇÕES – ARRANJOS SIMPLES E COMBINAÇÕES

2) Em uma urna colocamos cinco bolas, cada uma com uma vogal escrita. Sortearemos três bolas, sem reposição, e anotaremos sua vogal, ou seja, sortearemos a primeira bola, anotaremos sua vogal; em seguida, sortearemos a segunda, e assim até anotarmos as três vogais. Quais e quantas são as sequências possíveis de formar sorteando as três bolas?

2) De quantas maneiras podemos trocar as posições de três letras já determinadas? Por exemplo, de quantas maneiras diferentes podemos organizar as letras aei ?

3) De quantas maneiras podemos escolher três vogais, se a ordem de escolha não é importante? Por exemplo, <u>aei</u> é a mesma coisa que <u>eia</u> ou <u>iea</u>, etc.

4) Observe as três questões anteriores e seus resultados. Descubra a relação que há entre a questão 3 e as questões 1 e 2.

5) Definindo agrupamentos

a) Na primeira questão, temos uma situação que chamamos de <u>**ARRANJO**</u>. Então, escreva com suas palavras o que é um arranjo. Dê um novo exemplo.

b) Na segunda questão, temos as <u>**PERMUTAÇÃO**</u>. Escreva com suas palavras o que é uma permutação e dê um novo exemplo.

c) E, na terceira questão, temos a situação que denominamos <u>**COMBINAÇÃO**</u>.

d) Como podemos descrever um agrupamento, relacionando-o aos outros?

Tarefa 2: Institucionalizando Permutações

A- Chamaremos de **<u>Permutação</u>** a todos os agrupamentos ordenáveis formados com todos os elementos de um conjunto. Os elementos podem ser todos distintos ou pode haver elementos repetidos.

a) Escreva todas as possibilidades de ordenar as letras abc. Quantos grupos você obteve?

Representaremos o total de agrupamentos por P_3, onde o 3 corresponde à quantidade de elementos do conjunto. Portanto, $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

O fatorial é uma ferramenta útil para simplificar nossos cálculos, então podemos utilizá-lo.

Você sabe o que quer dizer fatorial em Matemática?
Por exemplo, o que significa 3 fatorial?
3 fatorial é indicado por 3! e, significa que estamos considerando o produto $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

2) Agora que sabemos o que é uma permutação, qual é o número de:

f) Permutações de três elementos distintos

g) Permutações de cinco elementos distintos

h) De quantas maneiras oito pessoas podem estar em uma fila?

i) Pintar as quatro listras de uma bandeira com as cores azul, vermelho, verde e amarelo, sem repetir cores.

j) A permutação de r elementos distintos será calculada por:

B) Mas e se contarmos com elementos repetidos?

<u>A - Jogo das senhas</u>

Paulo é o responsável por criar um programa de senhas de um *site*. Para testar seu programa, ele colocou as sequências abaixo para verificar a quantidade de senhas possíveis. Coloque o total de senhas diferentes obtidas para cada agrupamento:

f) 1234

g) 1221

h) 1111

i) Explique que estratégia você usou para resolver o problema.

B- Lembra do caso dos anagramas das palavras ASA, BOBO ou CASA?

Então, nesses casos tínhamos a permutação com elementos repetidos e, no caso da palavra ASA, representaremos por P_3^2, em que o 3 é o número total de letras e o 2 é o número de vezes que a letra A repete. Portanto, $P_3^2 = \frac{3!}{2!}$; logo, teremos que $P_3^2 = \frac{3\times2\times1}{2\times1} = 3$. Sendo assim:

e) Represente e calcule o número de permutações das palavras BOBO e CASA.

f) A permutação de cinco elementos nos quais dois são repetidos será calculada por:

g) Um aluno respondeu da seguinte forma, quando foi perguntado o número de anagramas da palavra CIDADANIA

$$\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(3\cdot2\cdot1)\cdot(2\cdot1)\cdot(2\cdot1)} = 15120$$

Você concorda com a solução desse aluno? Explique.

h) Quantos anagramas existem da palavra MATEMÁTICA?

Tarefa 3: ARRANJOS SIMPLES

Chamaremos de **Arranjo simples** a todos os agrupamentos formados com parte dos elementos de um conjunto em que a ordem é importante.

a) Escreva todas as centenas formadas somente por algarismos ímpares, que não possuam nenhum algarismo repetido. Quantos grupos você obteve? Exemplos: 135, 351, etc.

135	137	139	157	159	179	357	359	379	579
153	173	193	175	195	197	375	395	397	597
351	371	319	571	519	719	573	539	739	795
315	317	391	517	591	791	537	593	793	759
513	713	913	715	915	917	735	935	937	957
531	731	931	751	951	971	753	953	973	975

Obtêm-se 60 grupos.

Representaremos o total de agrupamentos por $A_{5,3}$ em que o 5 corresponde ao total de algarismos ímpares no sistema decimal e 3 corresponde à quantidade de algarismos que compõem uma centena. Portanto,

$$\boldsymbol{A_{5,3} = 5 \times 4 \times 3 = 60.}$$

b) Quantos arranjos simples de quatro elementos podemos formar com as letras de {a, b, c, d, e, f}?

c) De um baralho (52 cartas diferentes), 3 cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas sequências de cartas podem ser obtidas?

d) Quantas são as siglas de três letras diferentes que podemos formar a partir das letras do nosso alfabeto?

e) Um concurso conta com seis participantes. De quantas formas diferentes podemos definir os três primeiros colocados?

Tarefa 4: COMBINAÇÃO SIMPLES

Chamaremos de **Combinação Simples** a todos os agrupamentos não ordenáveis formados com parte dos elementos de um conjunto.

Representaremos a combinação de três elementos de um grupo de seis elementos por $C_{6,3}$, em que seis é o total de elementos e três, o número de elementos nos agrupamentos.

a) Quantas são as possibilidades de escolher três brinquedos em uma prateleira com oito opções diferentes?

b) Na prova de matemática de 2008, a professora elaborou cinco questões, das quais os alunos deveriam responder três. De quantas formas ele poderia ter escolhido essas três questões?

c) Como você determinaria o número de combinações possíveis de oito elementos de um conjunto que possui dez elementos?

d) Com as observações que você fez na tarefa 1 desta atividade, como poderia relacionar combinação com permutação e arranjo? Você poderia escrever uma forma de determinar o número de combinações possíveis a partir do número de arranjos e permutações? Como?

Esperamos que o aluno identifique a relação $n^{\underline{o}}\ de\ combinação = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ arranjos}{n^{\underline{o}}\ de\ permutões}$

ATIVIDADE 6 -

Objetivo: Que o aluno mobilize os conhecimentos desenvolvidos. Ou seja, resolva as situações propostas a partir da identificação das características que determinam cada tipo de agrupamento.

Tarefa: Resolva os problemas a seguir.

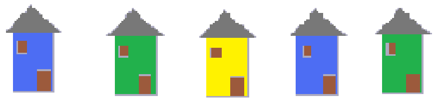
1) Para pintar um conjunto de cinco casas dispõe-se dos seguintes dados:

- Conta-se com três cores diferentes (azul, amarela e verde).
- Cada casa é pintada com apenas uma cor.
- As casas estão em sequência do mesmo lado da rua.
- Deseja-se que duas casas vizinhas não sejam pintadas com a mesma cor.

Calcule de quantos modos as casas podem ser pintadas.

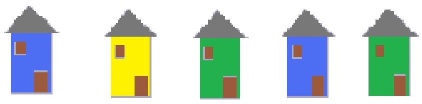
Por exemplo, duas possibilidades são:

Primeira



azul verde amarelo azul verde

Segunda



azul amarelo verde azul verde

2) Quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4? Em ordem crescente, qual seria a posição que ocupará o número 2341? E o número 4213?

3) André, Beto, Carlos e Danilo estão participando de um campeonato de futebol de botão. De quantas maneiras diferentes pode terminar esse campeonato (1º, 2º, 3º e 4º lugares) ?

4) Em um setor de uma fábrica de automóveis trabalham oito estagiários, dos quais três serão promovidos. De quantas formas podem ocorrer essas promoções?

5) Seis amigos de faculdade resolveram fazer um churrasco no final de semana para comemorar os bons resultados durante o semestre letivo. Mas ninguém queria ir ao mercado fazer compras; então, decidiram sortear três deles, escreveram os nomes

em papéis iguais e colocaram em uma caixa para o sorteio. De quantas maneiras diferentes pode ser formado, por sorteio, o trio que irá ao mercado?

6) Fábio comprou um cadeado com senha para colocar em sua bicicleta. A senha desse cadeado é composta de quatro algarismos. Em uma brincadeira com Rodrigo, seu irmão caçula, Fábio o desafiou a descobrir a senha e deu uma dica: “A minha senha termina com o algarismo 5 e não possui números repetidos”.
Sem ter nenhuma ideia a mais sobre a senha de Fábio, Rodrigo aceitou o desafio e começou a testar as possíveis senhas. Supondo que Rodrigo não tenha muita sorte e só acerte na última tentativa possível, quantas senhas no total ele tentará?

7) A vovó Nina possui três quartos em casa. No próximo final de semana irá receber quatro netas para dormir em sua casa. De quantas formas as netas podem escolher os quartos para dormir? (Uma neta pode dormir em cada quarto, todas podem dormir em um único quarto, podem dormir em duplas, etc.)

8) Quatro atores, Juca, Max, Frank e Lucas estão concorrendo aos papéis de Aramis, Porthus e Athos: os três mosqueteiros. De quantas formas diferentes podem ser escolhidos três desses atores para representar esses papéis?

ANEXO B – Questionário Inicial

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Escola Estadual ____

Pesquisa: Professor colaborador da THA de Análise Combinatória

Caro (a) Professor (a),

Esta pesquisa é parte integrante da dissertação de mestrado profissional em Ensino de Matemática do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, intitulada: **"TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM: A ANÁLISE COMBINATÓRIA SOB UMA PERSPECTIVA CONSTRUTIVISTA"** e tem por objetivo traçar um perfil da opinião do professor colaborador sobre o tema.

Agradecemos antecipadamente sua participação e colaboração.

1. Nome ____
2. Formação ____
   (Graduação Plena em Matemática/ Complementação/ Bacharelado)
3. Localização da escola ____________________ D.E. _______________
4. Tempo de magistério____________________________
5. Tempo que leciona nesta Unidade Escolar ___________________
6. Professor: Efetivo ( ) OFA ( )
7. Segmento em que leciona: ( ) E.F. I ( ) E.F.II ( ) E.M.
8. Pós-Graduação cursada e/ou em andamento
   ( ) Extensão
   ( ) Aperfeiçoamento
   ( ) Especialização
   ( ) Mestrado
   ( ) Doutorado
   ( ) Nenhum

9. Quais estratégias ou metodologias de trabalho normalmente utiliza em suas aulas?
10. Participou ou participa de cursos ministrados pela Secretaria da Educação? Quais?
11. Qual (is) livro(s) didático(s) utiliza como apoio para preparar suas aulas?
12. Você utiliza (segue) o material da Proposta Curricular do Estado de São Paulo? Se sim, faz adaptações e/ou alterações nesse material, de acordo com as turmas para as quais leciona?
13. Utiliza outros recursos, além do material da Proposta Curricular do Estado de São Paulo? Quais?
14. Em nossa pesquisa, estamos desenvolvendo o conteúdo Análise Combinatória. Considerando sua experiência e seu conhecimento, como você desenvolve ou desenvolveria esse tema?
15. Quais são as dificuldades que os alunos apresentam ao estudar este assunto?
16. Costuma trabalhar com resolução de problemas para desenvolver os conceitos envolvidos no tema?
17. Você costuma buscar resultados de pesquisas para auxiliá-lo na elaboração de suas aulas?

ANEXO C – Roteiro da entrevista com professores

1. Quais vantagens ou desvantagens você pode perceber com o desenvolvimento da THA?
2. Você considerou o desenvolvimento da THA um trabalho produtivo? Quais itens poderiam ser modificados para um trabalho mais produtivo?
3. Você acredita que esse trabalho possa ser desenvolvido com ajustes necessários em turmas diferentes?
4. Qual a sua impressão sobre a participação e a reação dos alunos durante as atividades?
5. Quais conhecimentos você adquiriu com esta experiência e como eles poderiam contribuir para o seu desenvolvimento profissional?
6. Como o professor poderia elaborar a própria THA?
7. Qual a importância do planejamento e da escolha das atividades?
8. Quais dificuldades você encontrou para desenvolver os conteúdos/atividades em sala de aula com os alunos?
9. Os alunos apresentaram dificuldades para realizar as atividades? Quais?
10. Como as pesquisas, na área da Educação Matemática, podem contribuir para a organização do ensino Análise Combinatória?
11. Como deve ser a atuação do professor de Matemática quanto às atividades de planejamento do ensino de Análise Combinatória, de forma compatível com a teoria proposta?
12. Quais suas expectativas antes da aplicação da THA?
13. O trabalho sob uma perspectiva diferente fez você refletir sobre a sua prática? Você pretende utilizar esta metodologia?
14. Você percebeu alguma mudança tanto no ensino quanto na aprendizagem?
15. Você está de acordo com a metodologia que o pesquisador sugeriu?
16. Quais as possíveis modificações para a elaboração da 3ª versão da THA?
17. Você ficou satisfeito(a) com os resultados?
18. Você acredita que:
    - Os alunos receberam bem a proposta?
    - Demonstraram curiosidade?
    - Desinteresse?
    - Os alunos ficaram desanimados/ desinteressados/ cansados?
19. Você acredita que os alunos participaram ativamente do desenvolvimento das atividades?

20. Você acredita que os alunos apresentaram um bom relacionamento com os colegas?
21. Os alunos empenharam-se em aprender?

ANEXO D – CARTA DE CESSÃO

Carta de Cessão

Eu, ____, portador do RG número _________________, declaro para os devidos fins que concedo os direitos da narrativa a partir das observações e gravações de áudio de minhas aulas e de entrevistas realizadas de forma transcrita e textualizada, para que Luciane Mendonça possa utilizá-la em sua pesquisa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, desenvolvida na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação do Prof. Dr. Armando Traldi Júnior.

Subscrevo a presente.

____