

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**

**PUC/SP**

**Wadames Procópio**

**O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo: sugestões de  
atividades com o uso do Geogebra**

**MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**São Paulo**

**2011**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO**

**PUC/SP**

**Wadames Procópio**

**O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo: sugestões de  
atividades com o uso do Geogebra**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Antônio Carlos Brolezzi**.

**São Paulo**

**2011**

**Banca Examinadora**

---

---

---

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

**Assinatura:** \_\_\_\_\_ **Local e Data:** \_\_\_\_\_

Dedico este trabalho a toda a minha família, inclusive a da fé, pelo incentivo e palavras de otimismo, especialmente ao meu filho Viktor Wadames Procópio, ao bebê que está por vir e a minha amada esposa Tatiane de Oliveira Procópio, pelo apoio durante o tempo de dedicação ao mestrado.

## AGRADECIMENTOS

---

---

Em primeiro lugar a Deus, porque Ele amou o mundo de tal maneira que deu o seu Filho unigênito, Jesus o autor da vida, para que todo aquele que nele crê não pereça, mas tenha a vida eterna..

Ao meu orientador professor Doutor Antônio Carlos Brolezzi, pela paciência, confiança e orientações prestadas para a realização deste trabalho de pesquisa.

Aos professores Doutores Nilson José Machado e Gerson Pastre de Oliveira, pelas sugestões apresentadas no exame de qualificação que deram novos rumos para o aprimoramento e enriquecimento deste trabalho.

À coordenação do programa de Pós-graduação em Educação Matemática da PUC-SP.

Ao corpo docente da Pós-graduação em Educação Matemática da PUC-SP, pela dedicação na ministração das disciplinas, que contribuíram para o meu amadurecimento acadêmico.

À minha linda esposa Tatiane pelo incentivo e compreensão.

Ao meu filho Viktor, pela compreensão de muitas vezes ter deixado de brincar com ele.

À minha irmã Karen e ao meu pai Wilson, pelo carinho, principalmente à minha mãe Isaltina, que sempre acreditou na minha capacidade.

Aos colegas do mestrado, pela colaboração e companheirismo, que de certa forma contribuíram com este trabalho (Miguel, Silvio, André, Marcelo Balduino, Marcelo Boaventura, Sara, Ana Paula, Ana Prieto, etc).

Aos colegas das escolas E.E. Vera Lucia leite da Costa e Etec de Guaianazes, que trabalhei durante o período do curso.

À colega de estudo e de trabalho Adriana Tiago, que muito contribuiu com as leituras e opiniões sobre este trabalho.

Às professoras Rita e Rode, pela leitura do trabalho.

A CAPES, pela concessão da bolsa de estudo, para o ano de 2010.

## RESUMO

---

---

Esta pesquisa tem como perspectiva de investigação, analisar as Situações de Aprendizagem de Geometria e apresentar uma proposta para articular as Situações de Aprendizagem encontradas no Caderno do Professor de Matemática do 4º bimestre da primeira série do Ensino Médio, publicado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (2009). A hipótese de investigação que protagonizou esta pesquisa foi a de que o uso da tecnologia computacional, com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, poderá favorecer a proposta de articulação das Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo (2009), de forma simples e significativa. Tem-se como questão de pesquisa: De que maneira é possível criar uma abordagem dinâmica, com o *software* GeoGebra para o conteúdo de Geometria Plana do Ensino Médio, com base no Currículo do Estado de São Paulo? Este trabalho de pesquisa foi elaborado seguindo as orientações metodológicas de Bardin (1977), sobre a Análise de Conteúdo, que consiste em tratar a informação por meio de um plano específico de análise: Pré-análise, Exploração do material, Tratamento dos resultados, inferências e interpretações. Os Documentos oficiais que compõem esta pesquisa são os PCN+ (2002), as OCEM (2006), o Currículo do Estado de São Paulo (2010) e os Cadernos do Professor de Matemática do Estado de São Paulo (2009). As pesquisas de Miskulin (1999), Baldini (2004), Bagé (2008), Rosa (2009) e Silva (2010) que utilizaram em suas pesquisas *softwares* de Geometria Dinâmica para o enriquecimento do processo de ensino aprendizagem da Geometria, compõem parte da bibliografia desta pesquisa. Este trabalho se apropriou das considerações teóricas de Kenski (2003, 2007) que destacam um novo ritmo que a tecnologia imprime à educação, além de Borba e Penteado (2007) que ressaltam a informática educativa na matemática. Esta pesquisa procurou seguir as indicações do Currículo de Matemática da rede estadual de São Paulo (2010) no trato das ideias fundamentais (proporcionalidade, equivalência, ordem, aproximação) para desenvolvimento dos conteúdos/ temas, com a preocupação de não desviar o foco do assunto, e principalmente mostrar a aplicabilidade do GeoGebra. Ao final deste trabalho observou-se que é possível articular as Situações de Aprendizagem com o uso do *software* GeoGebra de forma simples e significativa.

**Palavras-chave:** Currículo de Matemática, Análise de Conteúdo, Caderno do Professor, Geometria, GeoGebra.

## ABSTRACT

---

---

This research presents the analysis of the learning situations in Geometry's investigation perspective and shows a proposal to articulate the situations of learning found in the Mathematics Teacher's Notebook for the 4<sup>o</sup> two months period of the first grade of the secondary school, published by the Educational State Secretary from the State of São Paulo (2009). The hypothesis of investigation which has guided this survey is that the use of computational technology, with the aid of the software of Dynamic Geometry GeoGebra, could encourage the proposal of articulating the learning situations present in the Mathematics Teacher's Notebook of the Educational State Secretary from the State of São Paulo (2009) in a simple and significant way. The question of research in this paper is: In which way it is possible to create a dynamic approach with the software GeoGebra for the Secondary School content of Plain Geometry based on the State of São Paulo's curriculum? This paper has been elaborated following the methodological orientations of Bardin (1977), about the Analysis of Content, which consists in treat the information by the specific plain of analysis: pre- analysis, exploitation of the material, treatment of the results, inferences and interpretations. The official documents which compose this survey are the PCN+ (2002), the OCEM (2006), the curriculum of the State of São Paulo (2010) and the Mathematics Teacher's Notebook of the State of São Paulo (2009). The surveys of Miskulin (1999), Baldini (2004), Bagé (2008), Rosa (2009) and Silva (2010) which have used Dynamic Geometry software in their surveys for the understanding of the process of learning Geometry compose the bibliography of this survey. This paper has appropriated the theoretic considerations of Kenski (2003, 2007), which highlight a new rhythm that the new technology gives to Education, in addition to Borba and Penteado (2007) that highlight educative software in mathematics. This paper has aimed to follow the indications of Mathematics Curriculum of the State of São Paulo (2010) in the treatment of the fundamental ideas (proportionality, equivalency, order, approximation) to the development of contents/themes with the preoccupation of not digressing from the focus of the subject and mainly to show the applicability of GeoGebra. At the end of this paper it has been observed that it is possible to articulate the learning situations with the use of the GeoGebra software in a simple and significant way.

**Key words:** Mathematics curriculum, content analysis, teacher notebook, Geometry, GeoGebra.

## LISTA DE FIGURAS

---

---

Figura 1- Teorema de Pitágoras, ilustração.....	51
Figura 2- Ângulos em movimento: de adjacente a suplementar.....	65
Figura 3- Tela inicial do <i>software</i> GeoGebra .....	70
Figura 4- Desenho e construção do triângulo isósceles.....	71
Figura 5- Representação gráfica, adaptada de Borba e Penteadó .....	73
Figura 6- Blocos temáticos (Currículo de São Paulo).....	88
Figura 7- Faces do conhecimento geométrico .....	91
Figura 8- Conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental.....	102
Figura 9 -Conteúdos de Matemática do Ensino Médio.....	103
Figura 10-Capa do Caderno do Professor volume 4. ....	104
Figura 11-Sumário do Caderno do Professor .....	108
Figura 12-Exemplo de rampa .....	113
Figura 13-Tangente associada à ideia de rampa .....	114
Figura 14-Retas tangentes .....	114
Figura 15-Ilustração do primeiro exemplo (inclinação de uma rua).....	115
Figura 16-Inclinação da rampa .....	116
Figura 17-Inclinação – ideia de rampa.....	117
Figura 18-Razões trigonométricas no triângulo retângulo .....	118
Figura 19-Noção de seno.....	119
Figura 20-Circunferência de raio 1 m.....	120
Figura 21-Cordas, para exemplificar a solução da atividade 3.....	121
Figura 22-Circunferência com cordas.....	121
Figura 23-tabela com os valores das semicordas.....	122
Figura 24-Representação da circunferência de raio 5m .....	123
Figura 26-Razões trigonométricas – ideias fundamentais.....	124
Figura 27-Representação das semicordas e da distância da reta ao centro da circunferência .....	125
Figura 28-Relações trigonométricas no triângulo retângulo .....	126
Figura 29-Solução da atividade 4 .....	127
Figura 30-Representação do teorema de Pitágoras e as igualdades trigonométricas.....	127
Figura 31-Secante, cossecante e cotangente.....	128
Figura 32-Protocolo de construção da figura 31.....	129
Figura 33-distâncias astronômicas: das cordas ao parsec.....	130

Figura 34-Atividades 5 e 6 e considerações sobre a avaliação. Situação de Aprendizagem 1 .....	131
Figura 35-Rampa e corda. ....	134
Figura 36-Roteiro da Situação de Aprendizagem 2. Cordas e senos. Exemplo ilustrativo .....	135
Figura 37-Atividade 1 e Ciclo trigonométrico.....	136
Figura 38-Atividade 2 – Situação de Aprendizagem 2 .....	137
Figura 39-Atividades 3 e 4. Situação de Aprendizagem 2 .....	137
Figura 40-Atividades 5 e 6 e considerações sobre a avaliação. Situação de Aprendizagem.....	138
Figura 41-Razões trigonométricas no GeoGebra.....	139
Figura 42 Protocolo de construção da Figura 39 .....	140
Figura 43 Ângulos notáveis em polígonos regulares inscritos. Situação de Aprendizagem 3 .....	144
Figura 44 Tabela: polígonos regulares, ângulos central e interno. Situação de Aprendizagem 3.....	145
Figura 45 Polígonos Regulares Inscritos.....	146
Figura 46 Polígonos regulares inscritos na circunferência .....	147
Figura 47 Soma dos ângulos internos de um polígono regular.....	148
Figura 48 Ângulo externo de um polígono regular .....	149
Figura 49 Inscrição de polígono na circunferência .....	150
Figura 50-Inscrição e circunscrição de polígonos na circunferência. Exemplos ilustrativos. Situação de Aprendizagem 3. ....	151
Figura 51-Atividades 4, 5 e 6 e considerações sobre a avaliação. Situação de Aprendizagem 3 .....	152
Figura 52-Polígonos regulares em uma circunferência .....	153
Figura 53-Roteiro para aplicação da Situação de Aprendizagem 4: Dos triângulos retângulos a quaisquer triângulos .....	157
Figura 54-Representação de triângulos com possíveis aplicações do teorema de Pitágoras .....	158
Figura 55-Lei dos Senos. Atividades 2, 3 e 4. Situação de Aprendizagem 4 .....	159
Figura 56-Leis dos Senos Adaptado .....	160
Figura 57-Aplicação do teorema de Pitágoras: Lei dos cossenos .....	161
Figura 58-Exemplos ilustrativos. Atividades 5 e 6. Situação de Aprendizagem 4 .....	162
Figura 59-Atividade 7. Considerações sobre a avaliação. Situação de Aprendizagem 4.....	163
Figura 60-Regra do paralelogramo – Lei dos Cossenos.....	165
Figura 61-Protocolo de construção do paralelogramo .....	166

## LISTA DE QUADROS

---


---

Quadro 1 - Blocos temáticos (PCN +, OCEM) .....	52
Quadro 2 – <i>Softwares</i> disponíveis .....	68
Quadro 3 - Ficha do Caderno do 4º bimestre da 1ª série. Ensino Médio .....	109
Quadro 4 - Descrição detalhada dos conteúdos básicos do 4º bimestre - 1ª série – Caderno do Professor de matemática do Ensino Médio.....	110
Quadro 5- Conteúdos gerais - 4º bimestre - 1ª série do Ensino médio.....	110
Quadro 6- Sugestão ao professor – 1ª Situação de Aprendizagem - 4º bimestre - 1ª série - E. M.....	112
Quadro 7 - Proposta de resolução da atividade 3.....	120
Quadro 8 - Conteúdo programático .....	134
Quadro 9 - Sugestão ao professor. 3ª Situação de Aprendizagem. 4º bimestre. 1ª série. E.M. ....	143
Quadro 10- Sugestão ao professor. 4ª Situação de Aprendizagem. 4º bimestre. 1ª série. E.M. ....	156

## SUMÁRIO

---

---

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>15</b>
<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>19</b>
<b>1 – CONTEXTUALIZAÇÃO</b> .....	<b>19</b>
<b>1.2 - JUSTIFICATIVA</b> .....	<b>23</b>
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>29</b>
<b>2 - METODOLOGIA</b> .....	<b>29</b>
<b>2.1 - PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b> .....	<b>32</b>
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>37</b>
<b>3 - ANÁLISE DO CORPUS QUE COMPÕE A PESQUISA</b> .....	<b>37</b>
<b>3.1 - Revisão bibliográfica - pesquisas relacionadas ao tema</b> .....	<b>37</b>
<b>3.2 - Análises dos documentos oficiais PCN+ (2002) e OCEM (2006)</b> .....	<b>47</b>
<b>3.3 - Aportes teóricos</b> .....	<b>53</b>
<b>3.3.1 - Disseminação da tecnologia (sociedade e educação)</b> .....	<b>53</b>
<b>3.3.2 - Disseminação tecnológica computacional</b> .....	<b>61</b>
<b>3.4 - Softwares</b> .....	<b>67</b>
<b>3.4.1 -  GeoGebra</b> .....	<b>69</b>
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>75</b>
<b>O CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE SÃO PAULO</b> .....	<b>75</b>
<b>4.1 - Idealização do Currículo</b> .....	<b>75</b>
<b>4.2 - Currículo consolidado</b> .....	<b>81</b>
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>97</b>
<b>CADERNOS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE SÃO PAULO</b> 97	
<b>5.1 - Análise geral dos Cadernos do Professor (2009)</b> .....	<b>97</b>

<b>5.2 - Caderno do Professor da primeira série do Ensino Médio (2009).....</b>	<b>104</b>
<b>5.2.1 - Situação de Aprendizagem 1 - rampas, cordas, parsecs – razões para estudar triângulos retângulos .....</b>	<b>111</b>
<b>5.2.1.1 - Análise final da Situação de Aprendizagem 1 .....</b>	<b>131</b>
<b>5.2.2 - Situação de Aprendizagem 2 - dos triângulos à circunferência – vamos dar uma volta? .....</b>	<b>134</b>
<b>5.2.2.1 - Análise final da Situação de Aprendizagem 2 .....</b>	<b>141</b>
<b>5.2.3 - Situação de Aprendizagem 3 - polígonos e circunferências – regularidades na inscrição e na circunscrição .....</b>	<b>143</b>
<b>5.2.3.1 - Análise final da Situação de Aprendizagem 3 .....</b>	<b>154</b>
<b>5.2.4 - Situação de Aprendizagem 4 - a hora e a vez dos triângulos não retângulos .....</b>	<b>155</b>
<b>5.2.4.1 - Análise final da Situação de Aprendizagem 4 .....</b>	<b>166</b>
<b>CAPÍTULO 6 .....</b>	<b>171</b>
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>171</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>177</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>183</b>



## INTRODUÇÃO

---

---

Nesta dissertação é apresentado um estudo sobre o uso dos recursos tecnológicos computacionais como uma ferramenta mediadora das relações de ensino aprendizagem na matemática, uma discussão sobre a inserção e a disseminação tecnológica computacional na sociedade e na educação, uma visão panorâmica do Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, bem como uma análise das possibilidades de uso do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, para o tema Geometria Plana.

Para a escolha de um *software* educacional, as características pedagógicas devem estar vinculadas a metodologia, objetivo a ser alcançado no desenvolvimento de conteúdos e conceitos relacionados ao conhecimento matemático, argumenta (MISKULIN 1999).

Nesse novo tempo de evidência das tecnologias de comunicação e informação, que no Currículo do Estado de São Paulo são apresentadas como possíveis articuladoras de princípios para um currículo comprometido com o seu tempo e com uma escola que também aprende, imprimindo um ritmo sem precedentes:

...Certamente os numerosos recursos tecnológicos disponíveis para utilização em atividades de ensino encontram um ambiente propício para acolhimento no terreno da Matemática: máquinas de calcular, computadores, *softwares* para a construção de gráficos, para as construções em Geometria e para a realização de cálculos estatísticos são muito bem-vindos, bem como o seu uso será crescente, inevitável e desejável, salvo em condições extraordinárias, em razão de extremo mau uso (SÃO PAULO, 2010, p. 33, 34).

A escolha do *software* GeoGebra como recurso pedagógico para o desenvolvimento da presente pesquisa atende a perspectiva de investigação, a metodologia desta pesquisa, a hipótese e a questão de pesquisa:

- Perspectiva de investigação: A luz do Currículo do Estado de São Paulo (2010), analisar as atividades de Geometria, do 4º bimestre da primeira série do Ensino Médio, do Caderno do Professor de Matemática publicado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (2009);
- Metodologia: Análise de Conteúdo, Pré-análise, na qual se escolhem os documentos, se formulam hipóteses e objetivos para a pesquisa; na Exploração do material, na qual se consiste essencialmente na análise do corpus; no tratamento dos resultados, inferências e interpretações;

- Hipótese: O uso da tecnologia computacional, com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, poderá favorecer a proposta de articulação das Situações de Aprendizagem do Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo (2009), de forma simples e significativa;
- Questão de pesquisa: De que maneira é possível criar uma abordagem dinâmica, com o *software* GeoGebra para o conteúdo de Geometria Plana do Ensino Médio, com base no Currículo do Estado de São Paulo?

Pesquisas atestam o potencial de ambientes computacionais, sobretudo no aspecto concernente à construção de conceitos em Geometria: Miskulin (1999), Baldini (2004), Bagé (2008), Rosa (2009) e Silva (2010), que utilizaram os recursos tecnológicos para a exploração de conceitos e ideias matemáticas em seus trabalhos, destacam o caráter positivo dos *softwares* de Geometria Dinâmica, agregaram subsídios para corroborar com a relevância deste trabalho de pesquisa.

Para subsidiar esta pesquisa e as análises foram escolhidos como aportes teóricos as ideias de Borba e Penteado (2007) e Kenski (2003, 2007), ao passo, que o trabalho de pesquisa foi elaborado em três etapas, seguindo as orientações apresentadas na obra de Bardin (1977), sobre a metodologia de Análise de Conteúdo, que consiste em tratar a informação por meio de um plano específico de análise, dividido em seis capítulos:

- **Capítulo 1**, destinado à contextualização e a justificativa da pesquisa, evidencia o Currículo do Estado de São Paulo (2010), a inserção das tecnologias de comunicação e informação no contexto escolar, bem como a motivação para a realização do trabalho de pesquisa; aponta a hipótese, a questão de pesquisa, a perspectiva de investigação e a proposta de trabalho;
- **Capítulo 2**, dedicado à apresentação da metodologia de Análise de Conteúdo (Bardin, 1977), e dos procedimentos metodológicos utilizados para o desenvolvimento da pesquisa;
- **Capítulo 3**, parte do corpus da pesquisa é apresentada neste capítulo: a revisão bibliográfica das pesquisas de Miskulin (1999), Baldini (2004), Bagé (2008), Rosa (2009) e Silva (2010), que se relacionam com a presente pesquisa; análises dos documentos oficiais OCEM (2006) e PCN+ (2002), com destaque às evidências da inserção das tecnologias da informação e comunicação no ensino de Matemática; os

aportes teóricos com destaque a disseminação da tecnologia na sociedade e na educação e a disseminação tecnológica computacional;

- Capítulo 4, Continuação da composição do corpus da pesquisa, estudo panorâmico do Currículo do Estado de São Paulo, com referência ao período de 2007 a 2010, desde a idealização até a consolidação do documento, bem como a sua relação com as tecnologias da informação e comunicação na matemática. Esse estudo do Currículo do Estado de São Paulo (2010) é considerado importante, pois, o documento trouxe novas perspectivas à ação educativa, além de o mesmo compor a base que sustenta este trabalho de pesquisa;
- Capítulo 5, Neste capítulo que também compõe o corpus da pesquisa, apresenta uma visão geral dos Cadernos do Professor de matemática a luz do Currículo (SÃO PAULO, 2010), bem como a exploração das Situações de Aprendizagem do Caderno do Professor de Matemática (2009), volume 4, da primeira série do Ensino Médio;
- **Capítulo 6**, considerações finais e referências bibliográficas.



## CAPÍTULO 1

---

---

Este capítulo apresenta a contextualização e a justificativa da presente pesquisa, apresenta o Currículo do Estado de São Paulo (2010), a inserção das tecnologias de comunicação e informação no contexto escolar, a motivação para a realização deste trabalho.

### 1 – CONTEXTUALIZAÇÃO

É notório que o mundo passou e passa por constante evolução tecnológica e que a utilização das tecnologias afetam todos os campos educacionais. Elas encaminham as instituições para a adoção de uma cultura informática educacional que exige uma reestruturação sensível não apenas das teorias educacionais, mas da própria percepção e ação educativa (KENSKI, 2003).

No que tange aos novos encaminhamentos para a reestruturação dos sistemas educacionais, a rede estadual de ensino do Estado de São Paulo, representada pela Secretaria Estadual da Educação (SEE) propôs, em 2008, um currículo básico para as escolas da rede estadual nos níveis de Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio. O projeto da SEE idealizado em 2008 pretendia apoiar o trabalho realizado nas escolas estaduais e contribuir para a melhoria da qualidade das aprendizagens dos alunos.

A análise do projeto denominado Proposta Curricular do Estado de São Paulo iniciado em 2008 até a sua consolidação em 2010, intitulado de Currículo do Estado de São Paulo, foi importante para o norteamento deste trabalho de pesquisa.

O Currículo do Estado de São Paulo (2010) apresenta os princípios orientadores para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo, contempla algumas das principais características da sociedade do conhecimento e das pressões que o mundo globalizado exerce sobre os jovens cidadãos, propõe princípios norteadores para a prática educativa, a fim de que as escolas possam preparar seus alunos para esse novo tempo.

Nesse novo tempo estão presentes e em evidência as tecnologias de comunicação e informação, que no Currículo do Estado de São Paulo são apresentadas como possíveis articuladoras de princípios para um currículo comprometido com o seu tempo e com uma

escola que também aprende, imprimindo um ritmo sem precedentes:

A tecnologia imprime um ritmo sem precedentes ao acúmulo de conhecimentos e gera profunda transformação quanto às formas de estrutura, organização e distribuição do conhecimento acumulado. Nesse contexto, a capacidade de aprender terá de ser trabalhada não apenas nos alunos, mas na própria escola, como instituição educativa. Isso muda radicalmente a concepção da escola: de instituição que ensina para instituição que também aprende a ensinar. Nessa escola, as interações entre os responsáveis pela aprendizagem dos alunos têm caráter de ações formadoras, mesmo que os envolvidos não se dêem conta disso (SÃO PAULO, 2010, p. 10).

Esse novo ritmo gerado pela tecnologia, de certa forma revela a responsabilidade de toda a equipe escolar responsável pelo processo de ensino aprendizagem, gestores como formadores de professores e a responsabilidade dos docentes, entre si e com o grupo gestor, na problematização e na significação dos conhecimentos sobre sua prática.

A Análise do Currículo do Estado de São Paulo (2010) possibilita a compreensão dessa concepção, que parte do princípio de que ninguém é detentor de um conhecimento absoluto, o conhecimento coletivo é maior que soma dos conhecimentos individuais, além de ser qualitativamente diferente. O documento afirma que esse é o ponto de partida para o trabalho colaborativo<sup>1</sup>, para a formação de uma “comunidade aprendente”, a vantagem que permeia essa concepção é facilitada pela tecnologia que viabiliza a prática desse ideal.

“O conceito de colaboração incentiva as iniciativas e produções coletivas em processos de aprendizagem e além deles, mas não visa, em princípio, produzir qualquer homogeneização” (OLIVEIRA, 2007, p.115).

Kenski (2003), *apud* Oliveira (2007), ilumina o entendimento sobre o trabalho colaborativo citado no Currículo do Estado de São Paulo (2010), entende-se pelo desenvolvimento de trabalhos no âmbito coletivo, ou seja, a atividade de um complementa o trabalho de outros. Todos dependem de todos para a realização das atividades, exigindo aprendizados complexos de interação permanente, respeito ao pensamento mútuo, superação das diferenças e busca de resultados que possam beneficiar a todos envolvidos no trabalho.

---

<sup>1</sup> Ferreira (2003), em sua tese de doutorado intitulada *Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática: uma experiência de trabalho colaborativo*, Traz uma contribuição importante para o presente trabalho: Na colaboração, cada indivíduo participa da maioria das decisões: escolher a meta, definir as estratégias, definir as tarefas, avaliar o resultado; e o faz consciente de que é algo realmente importante para ele, algo que tanto beneficia o grupo como um todo, quanto a ele diretamente. A colaboração envolve um grau significativo de parceria voluntária que a distingue de um relacionamento de dominação e submissão. “Os motivos para colaborar podem ser mais ou menos abertos, variando do prazer intrínseco pelo apoio mútuo para trabalhar junto a meios de favorecer as carreiras dos indivíduos” (HALL E WALLACE, 1993, p. 105 *apud* FERREIRA, 2003, p. 82).

Para a efetivação do trabalho colaborativo básico curricular, há um segundo conjunto de documentos, com orientações para a gestão do Currículo na escola. Chamado de Caderno do Gestor, destinado aos professores coordenadores, diretores, professores coordenadores das oficinas pedagógicas e supervisores. O material não trata da gestão curricular em geral, mas serve como um documento de apoio ao trabalho do gestor, de tal forma que o mesmo exerça uma liderança eficaz que estimule e oriente a implementação do Currículo nas unidades de ensino do Estado de São Paulo.

Completa o conjunto de documentos, os materiais dirigidos especialmente aos professores e aos alunos, os Cadernos do Professor e do Aluno, organizados por disciplina/série (ano) /bimestre.

Nesses cadernos, são apresentadas Situações de Aprendizagem para orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos disciplinares específicos e a aprendizagem dos alunos. De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (2010):

Esses conteúdos, habilidades e competências são organizadas por série/ano e acompanhados de orientações para a gestão da aprendizagem em sala de aula e para a avaliação e a recuperação. Oferecem também sugestões de métodos e estratégias de trabalho para as aulas, experimentações, projetos coletivos, atividades extraclases e estudos interdisciplinares (SÃO PAULO, 2010 p. 8).

Os cadernos apresentam uma série de atividades que os alunos poderão realizar durante as aulas ou extraclasse, ao passo que o material não irá interpor as estratégias preestabelecidas pelo professor, o mesmo oferece uma facilidade na exploração dos conceitos que serão aprendidos nas atividades sugeridas. O Currículo do Estado de São Paulo (2010) não sugere em hipótese alguma o abandono do livro didático, os alunos devem ser estimulados a ler todos os tipos de livros, o documento aponta que a leitura é fundamental para a construção de uma visão crítica da realidade, constituindo uma preocupação constante por parte do professor.

No tocante aos Cadernos do Professor de matemática, ele está a serviço do Currículo, há um diálogo de professor para professor, que é apresentado como um material de apoio.

Os temas no Caderno do Professor de Matemática encontram-se de uma maneira especialmente significativa do ponto de vista de seu valor formativo, propicia uma articulação entre os diversos temas, de modo que se auxiliem mutuamente, ao mesmo tempo em que propiciem interfaces amigáveis com as outras disciplinas.

Referente aos temas no Caderno do Professor de matemática, o Currículo do Estado de São Paulo (2010) descreve que:

(...) Além do papel articulador, os temas escolhidos também têm sua relevância para ilustrar possibilidades metodológicas alternativas ao tratamento tradicional dos conteúdos, apresentar uma abordagem criativa e, sempre que possível, favorecer o uso da tecnologia, da modelagem matemática, de materiais concretos no tratamento do conteúdo do bimestre. (SÃO PAULO, 2010, p. 52).

Tratar os conteúdos apresentados no Caderno do Professor de Matemática com uma abordagem criativa é o objetivo do presente trabalho de pesquisa. Para tanto, a hipótese que protagonizou esta pesquisa foi a de que o uso da tecnologia computacional, com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, poderá favorecer a proposta de articulação das Situações de Aprendizagem do Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo (2009), de forma simples e significativa<sup>2</sup>. De acordo com Kenski (2003) a utilização das tecnologias tem afetado todos os campos educacionais e encaminha as instituições para a adoção de uma cultura informática educacional, exigindo das mesmas uma reestruturação não apenas das teorias educacionais, mas da própria percepção e ação educativa.

O material elaborado pela equipe da Secretaria Estadual da Educação tem como premissa a reorganização dos temas a serem trabalhos pelos professores em sala de aula, a proposta é de que os professores façam inferências nos temas e conteúdos apresentados no Currículo, pois, o mesmo é flexível e sensível à percepção dos agentes envolvidos no processo de ensino aprendizagem.

Os conteúdos disciplinares de Matemática, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, estão organizados no Currículo do Estado de São Paulo (2010) em três grandes blocos temáticos: NÚMEROS, GEOMETRIA<sup>3</sup> e RELAÇÕES.

---

<sup>2</sup> David Ausubel define aprendizagem significativa como um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especialmente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo. A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos ou proposições relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz de uma forma não arbitrária. (Ausubel *apud* Moreira, 2006).

<sup>3</sup> Por que Aprender Geometria? Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. "A Geometria está por toda parte", desde antes de Cristo, mas é preciso conseguir enxergá-la... mesmo não querendo, lidamos em nosso cotidiano com as ideias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume), simetria: seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente

Para a articulação das situações de aprendizagens do Caderno do Professor de Matemática foi escolhido o bloco temático da Geometria, ao passo que o Currículo do Estado de São Paulo (2010) apresenta a Geometria, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, com um aspecto peculiar, o conhecimento geométrico que apresenta quatro faces, relacionadas permanentemente na caracterização do espaço: a percepção, a concepção, a construção e a representação (MACHADO, 1995). Para a articulação das quatro faces, uma das possibilidades é a utilização de materiais concretos como, por exemplo, o Tangram, ou utilizar um *software* de Geometria Dinâmica. Para esta pesquisa o *software* GeoGebra foi o eleito para a articulação das quatro faces.

À medida que há interlocução do Currículo do Estado de São Paulo (2010), com o conteúdo de Geometria, com o Caderno do Professor de Matemática e a proposta de abordagem das Situações de Aprendizagens do Caderno do Professor de Matemática com o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, surge a seguinte pergunta: De que maneira é possível criar uma abordagem dinâmica, com o *software* GeoGebra para o conteúdo de Geometria Plana do Ensino Médio, com base no Currículo do Estado de São Paulo?

## 1.2 - JUSTIFICATIVA

A motivação que justifica a trajetória desta pesquisa tem como referência, aspectos relacionados à experiência profissional do professor pesquisador bem como a sua vida acadêmica.

---

estamos envolvidos com a Geometria. Pesquisas psicológicas indicam que a aprendizagem geométrica é necessária ao desenvolvimento da criança, pois inúmeras situações escolares requerem percepção espacial, tanto em Matemática (por exemplo: algoritmos, medições, valor posicional, séries, seqüências...) como na Leitura e Escrita. A Geometria é um excelente apoio as outras disciplinas: como interpretar um mapa, sem o auxílio da Geometria? E um gráfico estatístico? Como compreender conceitos de medida sem ideias geométricas? A história das civilizações está repleta de exemplos ilustrando o papel fundamental que a Geometria (que é carregada de imagens) teve na conquista de conhecimentos artísticos, científicos e, em especial, matemáticos. A imagem desempenha importante papel na aprendizagem e é por isso que a rerepresentação de tabelas, fórmulas, enunciados, etc., sempre recebem uma interpretação mais fácil com o apoio geométrico.

A Geometria pode esclarecer situações abstratas, facilitando a comunicação da ideia matemática. Einstein tinha o hábito de geometrizar suas ideias: dizia que facilitava a comunicação delas e a evolução de seu pensamento; em 1921, ele escreveu: "Atribuo especial importância à visão que tenho da Geometria, porque sem ela eu não teria sido capaz de formular a teoria da relatividade". A Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a Matemática possui: ela se interliga com a Aritmética e com a Álgebra porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela Geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz. (LORENZATO, 1995, p. 5, 6, 7).

A percepção da relevância da utilização da tecnologia computacional como uma ferramenta de estratégias pedagógicas no ensino da Matemática, se deu em 2000 com a participação em um projeto de reforço para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental II em uma Escola Estadual em Itaquaquecetuba-SP.

Na ocasião o projeto tinha como perspectiva a utilização da sala ambiente de informática e seus objetivos eram o aprimoramento do raciocínio lógico dos alunos e a tentativa de minimizar as dificuldades apresentadas em atividades que envolvessem problemas com frações e os números decimais. Para tanto foram utilizados dois *softwares* com interfaces bem amigáveis: “jogo dos bambus<sup>4</sup>” e o “fracionando<sup>5</sup>”.

As participações em capacitações oferecidas pela Secretaria Estadual de Educação por meio da Diretoria Regional de Ensino de Itaquaquecetuba-SP ajudaram a enxergar novas estratégias de ensino e aprendizagem com o uso do computador e *softwares* educacionais.

Em 2006 ao participar da Especialização em Educação Matemática para Professores de Matemática do Ensino Médio na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, também proporcionou o conhecimento de novos *softwares* (*Winplot*, *GrafMat* e *Cabri Géomètre Plus II*)<sup>6</sup>. Na conclusão da especialização foi apresentada uma monografia intitulada: “A homotetia na ampliação e redução de triângulos”. Foi um trabalho realizado

---

<sup>4</sup> O Jogo dos bambus apresentava em sua interface bambus dispostos em forma de figuras geométricas que a partir delas movimentava-se ou retirava-se alguns bambus para formar uma nova figura geométrica.

<sup>5</sup> Fracionando apresentava em sua interface diferentes situações com jogos para a solução de problemas com frações: conversão de porcentagem para fração ou para decimal, e vice versa. Um exemplo é pegar os balões de forma que as frações estejam em ordem crescente, etc.

<sup>6</sup> O Winplot é um programa da categoria dos *softwares* livres. Ele tem a vantagem de ser simples, utiliza pouca memória, mas por outro lado dispõe de vários recursos que o tornam atraente e úteis para os diversos níveis de ensino aprendizagem. Possui uma versão em Português, aumentando ainda mais a sua acessibilidade. De acordo com o seu nome, o Winplot é um programa para plotar gráficos de funções Matemática de duas e três dimensões, de uma ou duas variáveis, utilizando o Windows. Além disso, executa uma série de outros comandos. É possível fazer o download do Winplot em: <http://math.exeter.edu/rparris> ou <http://www.baixaki.com.br/download/winplot.htm>. (Acesso em: agosto de 2011).

*GrafMat* é um software não livre - permite experimentar e avaliar. Com ele é possível plotar gráficos de equações matemáticas: cartesianas, polar, paramétrica, etc. Suporta grande quantidade de gráficos na mesma janela. Suas opções de cálculo incluem diferenciação simbólica, desenho de linhas tangentes e integração numérica. Oferece ajuda on-line e arquivos de demonstração. Disponível em: <http://www.baixaki.com.br/download/graphmatica.htm#nossaop>. (Acesso em: agosto de 2011).

*Cabri Géomètre Plus II* é um *software* que permite construir todas as figuras da geometria elementar que podem ser traçadas com a ajuda de uma régua e de um compasso eletrônicos. O software não é livre - permite experimentar e avaliar. Sendo a interface de menus de construção em linguagem clássica da Geometria. Uma vez construídas, as figuras podem ser movimentadas, pois as propriedades que lhes foram atribuídas serão conservadas. Pode ser encontrado em: <http://www.cabri.com/> ou <http://www.cabri.com/download-cabri-2-plus.html>. (Acesso em: agosto de 2011).

com alunos da segunda série do Ensino Médio em uma escola Estadual no município de Itaquaquecetuba-SP, como recurso pedagógico utilizou-se o *software Cabri Géomètre Plus II*.

Após a especialização, tornou-se maior o desejo de buscar mais conhecimento sobre o Ensino da Matemática com o uso das tecnologias computacionais. Em 2009 o ingresso no Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da PUC-SP se concretizou, a fim de satisfazer essa busca por novos aprendizados, sob a orientação do prof<sup>o</sup>. Dr. Antônio Carlos Brolezzi.

Durante o mestrado a participação em eventos dentro e fora do programa de pós-graduação da PUC-SP e as conversas com o orientador deixaram claro e evidente o rumo a ser trilhado: o Ensino da Matemática com o uso da tecnologia.

A inserção da tecnologia como uma ferramenta pedagógica no ensino da matemática pode ser observada nos mais variados trabalhos acadêmicos no Brasil e em outros países.

Nos Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM)<sup>7</sup>: 26 a 30 de junho de 2011, Recife-PE, é possível verificar que os trabalhos produzidos para apresentação, com eixo na tecnologia da informação e comunicação, passaram de cem, vinte e dois trabalhos foram produzidos com o uso do recurso tecnológico do *software GeoGebra*. Desses vinte e dois trabalhos, dois abordaram o conteúdo de Função e Geometria, um abordou Trigonometria, seis abordaram Funções, um abordou Estatística e Probabilidade, dois abordaram a Formação de Professores com o uso do GeoGebra e dez abordaram a Geometria, os assuntos evidenciados foram: Homotetia, Geometria Plana, Fractal, Cônicas, Construções Geométricas, e a Geometria na formação docente.

Essa inserção da tecnologia também pode ser observada nos trabalhos de Miskulin (1999), Baldini (2004), Bagé (2008), Rosa (2009) e Silva (2010), nas obras de Kenski (2003, 2010), Borba e Penteadó (2007), nos documentos oficiais: As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino médio (2006), e no Currículo do Estado de São Paulo (2010).

A tese de Miskulin abordou concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores na Educação e na sociedade, apresentou reflexões sobre as tendências da Educação Matemática inter-relacionada às novas tecnologias, explicitou os pressupostos teórico-metodológicos da Linguagem Computacional Logo (Bidimensional e

---

<sup>7</sup> Os Anais da XIII CIAEM – Conferência Interamericana de Educação Matemática estão disponíveis através do link: [www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM](http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM). (Acesso em: agosto de 2011).

Tridimensional). Descreveu alguns aspectos pedagógicos e matemáticos relacionados à aplicabilidade do Logo Tridimensional no processo de construção de conceitos geométricos. Os sujeitos da pesquisa foram dois alunos da 8ª Série/9º ano do Ensino Fundamental II de uma escola particular de Campinas-SP.

Baldini em sua dissertação propôs uma engenharia didática, em ambiente de Geometria Dinâmica, com o objetivo de verificar se o *software Cabri Géomètre II* contribui para a construção de conceitos de Geometria (área e perímetro). A sequência didática foi aplicada a alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Apucarana – Paraná.

Bagé em sua dissertação pesquisou as possíveis contribuições que um curso de formação continuada, com a utilização da tecnologia, traz à prática do professor no ensino da Geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental I. Sua questão de pesquisa é: Em que medida uma oficina, com a utilização dos recursos da tecnologia, poderá contribuir para a prática dos professores das séries iniciais, no ensino dos conceitos básicos da Geometria? Ela elaborou uma proposta de oficina com dez atividades que utilizavam os *softwares Building Perspective* e *Cabri-Géomètre*, com a participação de trinta professores que lecionam na 4ª série do ensino fundamental. Sua proposta baseou-se nos pressupostos teóricos do desenvolvimento do pensamento geométrico do modelo Van Hiele, para a elaboração das atividades e a formação de professores com o uso da tecnologia.

O objetivo da dissertação de Rosa foi de apresentar um estudo do panorama das teses e dissertações em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo no período de 1994 a 2007. Trabalhos que fizeram uso de ambientes computacionais como ferramenta no contexto da Geometria foram evidenciados, de modo a permitir que estudos posteriores tenham uma base consolidada de informações da qual possam prosseguir suas pesquisas.

A dissertação de Silva insere-se no âmbito do ensino e aprendizagem da Geometria, em particular das Transformações Geométricas com uma abordagem específica na transformação isométrica Simetria Axial. Consiste em uma investigação sobre os conceitos desse tipo de isometria através do uso do erro, numa abordagem reconstrutiva a partir de estratégias pedagógicas com uso de tecnologias. O desenvolvimento ocorreu em duas etapas, a primeira realizada com uma sequência de atividades aplicadas no ambiente estático “papel e lápis” e a segunda com uma sequência de atividades construídas por intermédio do *software*

de Geometria Dinâmica GeoGebra. Os sujeitos da pesquisa foram alunos da 5ª série/6º ano do Ensino Fundamental II.

Os trabalhos acima citados corroboram com as afirmações encontradas nos documentos oficiais em relação ao uso da tecnologia para o enriquecimento do ensino da matemática e do conteúdo de Geometria.

Na análise das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), há argumentos relevantes para o uso de recursos tecnológicos no aprendizado da Geometria. O documento destaca os programas que dispõem de instrumentos virtuais e com o menu de construção em linguagem clássica da Geometria, com eles a estrutura de uma figura pode ser movimentada, que as propriedades geométricas dos elementos da figura serão preservadas, a ponto de favorecer a riqueza das imagens mentais associadas às mesmas.

O Currículo do Estado de São Paulo (2010) de Matemática deixa evidente o papel da tecnologia e seu uso nesse cenário de alteração de cultura. O documento destaca que as tecnologias da informação contribuem para uma mudança na produção, na organização, no acesso e na disseminação do conhecimento, contribuindo para a melhoria da qualidade no ensino.

Por um lado, certamente os numerosos recursos tecnológicos disponíveis para utilização em atividades de ensino encontram um ambiente propício para acolhimento no terreno da Matemática: máquinas de calcular, computadores, *softwares* para a construção de gráficos, para as construções em Geometria e para a realização de cálculos estatísticos são muito bem-vindos, bem como o seu uso será crescente, inevitável e desejável, salvo em condições extraordinárias, em razão de extremo mau uso (SÃO PAULO, 2010, p. 33, 34).

Por outro lado, o documento diz que no âmbito da tecnologia o novo sempre fascina, e há de se ter cuidado com o interesse por algo apenas por ser novidade. Os recursos tecnológicos podem entrar e sair do cenário do ensino rapidamente, justamente pela sua condição efêmera, assumindo a condição de meio. Os meios são importantes, assim afirma o documento, e na presente pesquisa são apresentados trabalhos que evidenciam a importância dos recursos tecnológicos para o ensino da Matemática, em particular da Geometria.

Segundo o Currículo do Estado de São Paulo (2010): “Quando sabemos para onde queremos ir, o caminho a seguir não pode ser ditado pelos equipamentos, pelos instrumentos, por mais sofisticados que sejam ou pareçam.”

A presente pesquisa apresenta um caminho bem definido a ser seguido, que é o de

contribuir com o ensino da Matemática em particular com o conteúdo de Geometria Plana, apresentando uma proposta para articular as situações de aprendizagens encontradas no Caderno do Professor de Matemática da primeira série do Ensino Médio do Estado de São Paulo, com o uso do *software* GeoGebra como uma ferramenta de estratégia de ensino.

Portanto, após a leitura de pesquisas relacionadas ao tema em conjunto com as experiências profissionais e acadêmicas do presente pesquisador sobre a inserção da tecnologia como estratégia pedagógica de ensino, tem-se como hipótese: o uso da tecnologia computacional, com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra poderá favorecer a proposta de articulação das Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo, de forma simples e significativa.

À medida que a presente pesquisa tem como perspectiva de investigação a luz do Currículo do Estado de São Paulo (2010), analisar as Situações de Aprendizagem de Geometria, do 4º bimestre da primeira série do Ensino Médio, do Caderno do Professor de Matemática publicado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (2009), busca-se responder: De que maneira é possível criar uma abordagem dinâmica, com o *software* GeoGebra para o conteúdo de Geometria Plana do Ensino Médio, com base no Currículo do Estado de São Paulo?

Para subsidiar esta pesquisa e as análises foram escolhidos como aportes teóricos as ideias de Borba e Penteadó (2007) e Kenski (2003, 2007) e o referencial metodológico de Bardin (1977) sobre Análise de Conteúdo.

A seguir serão apresentados o referencial e os procedimentos metodológicos.

## CAPÍTULO 2

---



---

O presente capítulo é dedicado à apresentação da metodologia de Análise de Conteúdo Bardin (1977), e dos procedimentos metodológicos utilizados para o desenvolvimento da pesquisa.

### 2 - METODOLOGIA

A presente pesquisa pode ser classificada como qualitativa<sup>8</sup>, pois o próprio pesquisador se constitui como instrumento principal na pesquisa, por meio da interação com a realidade e os dados que foram coletados.

O Caderno do Professor de Matemática da primeira série do Ensino Médio (2009), publicado pela Secretaria Estadual de Educação, do Programa São Paulo Faz Escola, onde são encontradas as Situações de Aprendizagem referentes ao conteúdo de Geometria Plana que serão analisadas, faz parte do cotidiano do pesquisador, professor de uma escola pública no município de Itaquaquecetuba-SP.

No que tange à metodologia usada para responder a indagação da presente pesquisa, foi realizado um estudo do tipo documental baseado nas recomendações apresentadas na obra de Bardin (1977) sobre a Análise de Conteúdo.

Para a autora, a Análise de Conteúdo não é formada por apenas um método, mas de maneira geral, os métodos da Análise de Conteúdo correspondem aos seguintes objetivos:

A ultrapassagem da incerteza: o que eu julgo ver na mensagem estará lá

---

<sup>8</sup> Borba (2004) Um conceito sobre a pesquisa qualitativa, segundo (GARNICA, 2004, p. 86) *apud* (BORBA, 2004, p. 1): (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re) configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

...Os procedimentos utilizados em uma pesquisa moldam o tipo de pergunta que é feito, a interrogação de pesquisa e a visão de conhecimento também constituem e definem os procedimentos. Dessa forma, quando falo de pesquisa qualitativa, estou falando de uma forma de conhecer o mundo que se materializa fundamentalmente através dos procedimentos conhecidos como qualitativos, que entende que o conhecimento não é isento de valores, de intenção e da história de vida do pesquisador, e muito menos das condições sócio-políticas do momento. Como já dizia Paulo Freire: *a escolha da pergunta de pesquisa já é em si um ato embebido de subjetividade.*

efetivamente contido, podendo esta “visão” muito pessoal, ser partilhada por outros? Em outras palavras, será a minha leitura válida e generalizável? O enriquecimento da leitura: se um olhar imediato, espontâneo, é fecundo, não poderá uma leitura atenta, aumentar a produtividade e a pertinência? Pela descoberta de conteúdos e de estruturas que confirmam ou não, ou se procura demonstrar a propósito das mensagens, ou pelo esclarecimento de elementos de significações susceptíveis para conduzir a uma descrição de mecanismos de que a priori não detínhamos a compreensão. (BARDIN, 1977, p. 29)

As incertezas que permeavam os pensamentos no início deste trabalho foram se desvencilhando, enquanto os documentos analisados mostraram que a visão de se trabalhar conteúdos matemáticos com recursos tecnológicos não retratava só um aspecto pessoal do pesquisador envolvido neste trabalho, mas uma crescente tendência na inserção da tecnologia como uma ferramenta de estratégias pedagógicas no ensino da matemática.

A leitura atenta dos documentos oficiais, o Currículo do Estado de São Paulo (2010), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), os PCN+ (2002), os trabalhos de Kenski (2003, 2007), Borba e Penteadó (2007), as pesquisas de Miskulin (1999), Baldini (2004), Bagé (2008), Rosa (2009) e Silva (2010) contribuíram para o enriquecimento, o aumento da produtividade e da pertinência da presente pesquisa, solidificando a estrutura do trabalho que foi desenvolvido.

Bardin (1977) destaca em sua obra que a Análise de Conteúdo é um método de certa forma empírico, o seu desenvolvimento pleno dependerá da experiência do pesquisador na prática e o tempo dedicado à investigação, a área de concentração da pesquisa, o tipo de interpretação que se tem como objetivo, etc. De maneira geral, este trabalho tem motivação em questões empíricas, o tempo e a dedicação à investigação foram suficientes para que o seu desenvolvimento acontecesse satisfatoriamente, apesar do pesquisador ser um principiante nesta seara, o produto final deste trabalho não foi comprometido.

A autora após a apresentação dos objetivos de ultrapassagem das incertezas, enriquecimento da leitura e das questões empíricas, discorre sobre a metodologia propriamente dita: “A Análise de Conteúdo aparece como um conjunto de técnicas de análise das comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição dos conteúdos das mensagens”. Os saberes deduzidos dos conteúdos podem ser de natureza psicológica, sociológica, histórica, econômica, entre outras áreas. Ela completa a definição citada anteriormente, colocando em evidência a finalidade (implícita ou explícita) de qualquer Análise de Conteúdo. “A intenção da Análise de Conteúdo é a Inferência de conhecimentos relativos às condições de produção (ou, eventualmente, de recepção), inferência esta que

recorre a indicadores quantitativos ou não” (BARDIN, 1977, p. 38).

Segundo Bardin (1977) o pesquisador é uma espécie de arqueólogo, pois procura encontrar vestígios nas mensagens dos documentos para evidenciar os dados dos fenômenos de seu objeto de estudo; o pesquisador também pode ser tal qual um detetive, trabalhando com índices cuidadosamente, pondo em evidência os procedimentos mais ou menos complexos.

Os procedimentos podem ser separados em etapas: em primeiro lugar a descrição (a enumeração das características dos fatos, resumida após tratamento), em segundo lugar a inferência, que é o procedimento intermediário, que nos permite fazer a passagem, explícita e controlada da descrição para a interpretação, que é a terceira e última etapa (a significação concedida a estas características).

Essas inferências (ou deduções lógicas) segundo a autora podem auxiliar a responder a dois tipos de problemas: “O que é que conduziu a um determinado enunciado? Quais as consequências que determinado enunciado vai provavelmente provocar”? (BARDIN, 1977, p. 39).

No caso particular desta pesquisa, esses dois tipos de problemas poderão ajudar na confirmação ou na refutação da hipótese de pesquisa: o uso da tecnologia computacional, com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, poderá favorecer a proposta de articulação das Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo (2009), de forma simples e significativa. Contribuindo também para a elucidação da questão de pesquisa: De que maneira é possível criar uma abordagem dinâmica, com o *software* GeoGebra para o conteúdo de Geometria Plana do Ensino Médio, com base no Currículo do Estado de São Paulo? A presente pesquisa tem como perspectiva de investigação a luz do Currículo do Estado de São Paulo (2010), analisar as Situações de Aprendizagem de Geometria, do 4º bimestre da primeira série do Ensino Médio, do Caderno do Professor de Matemática publicado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (2009).

De acordo com Bardin (1977) a organização do método de Análise de Conteúdo prioriza três pólos cronológicos:

- A pré-análise, que é a fase de organização, corresponde a um período de intuições, mas, tem por objetivo tornar operacionais e sistematizar as ideias iniciais. Esta fase

possui três tópicos: a escolha dos documentos que serão submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final. Relaciona especialmente, ao conjunto de documentos selecionados para serem analisados. Junior (2010) denomina o corpus<sup>9</sup> da pesquisa.

- Exploração do material, que é a administração sistemática das decisões tomadas na pré-análise. Esta fase é longa e trabalhosa, consiste essencialmente de operações de codificação (tratar o material), por recorte, agregação, enumeração, permite atingir uma representação do conteúdo, ou da sua expressão, a ponto de esclarecer acerca das características do texto ao pesquisador.
- O tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação constituem a última etapa da análise, os resultados brutos são tratados nesta fase de maneira significativa e validados. Para um maior rigor os resultados poderão ser submetidos a provas estatísticas, assim como a testes de validação. Com os resultados significativos e confiáveis à sua disposição, o pesquisador, pode então, propor inferências e realizar interpretações a propósito dos objetivos pré-determinados, ou que falem a respeito a outras descobertas inesperadas. Os resultados obtidos, a confrontação sistemática com o material e o tipo de inferências alcançadas, podem servir de base para outra análise em torno de novas dimensões teóricas ou práticas e técnicas diferentes.
- De acordo com Junior (2010) é importante atentar para o fato de que as três fases acima citadas não são estagnadas; são articuladas e, muitas vezes, há necessidade de se retornar a organização preliminar para incluir um novo documento, que doravante possa melhorar a compreensão do assunto pesquisado.

## 2.1 - PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste tópico, os procedimentos metodológicos utilizados são apresentados no intuito de esclarecer a linha de trabalho a fim de responder a questão de pesquisa.

O método da Análise de Conteúdo, segundo Bardin (1977) consiste em tratar a informação por meio de um plano específico de análise. Na pré-análise, se escolhem os

---

<sup>9</sup> Corpus: 1. Coletânea acerca de um mesmo assunto. 2. Conjunto de documentos que servem de base para a descrição ou o estudo de um fenômeno. Fonte: <http://www.priberam.pt/dlpo/default.aspx?pal=corpus>. (Acesso em: agosto de 2011).

documentos, se formulam hipóteses e objetivos para a pesquisa e na exploração do material, está a análise do corpus; o tratamento dos resultados, inferências e interpretações.

A seguir é apresentado o plano de análise onde foram eleitas algumas categorias para as fases da Análise de Conteúdo da presente pesquisa, seguindo os preceitos de Bardin (1977).

- Pré-análise

**Leitura flutuante** – é o primeiro passo dado na tentativa de encontrar subsídio para a pesquisa, consiste em estabelecer um contato com os documentos que supostamente serão analisados. Para tanto, foi realizado uma busca em textos que deixaram aparentemente impressões, orientações e informações relevantes sobre o tema. Neste caso em particular foi realizada uma varredura no banco de teses da Capes, no banco de teses da PUC-SP, procurando por palavras-chave relacionadas com o objeto de estudo da presente pesquisa. Foi realizado um levantamento de artigos e pesquisas no *Google*, bem como a busca de algumas literaturas indicadas por parte do orientador e de alguns professores do programa de pós-graduação da PUC-SP.

**Escolha dos documentos** – O universo de documentos de análise pode ser determinado a priori: quando o objetivo é determinado, e, por conseguinte, convém escolher o universo de documentos suscetíveis a fornecer informações sobre o problema levantado.

A presente pesquisa tem como perspectiva de investigação analisar as Situações de Aprendizagem de Geometria, do 4º bimestre da primeira série do Ensino Médio, do Caderno do Professor de Matemática publicado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (2009). O trabalho foi realizado sob a luz da leitura do Currículo do Estado de São Paulo (2010), sem os quais não há como avaliar os materiais dos presentes nos cadernos.

O conhecimento geométrico está posto, nestes materiais, segundo quatro faces, que se relacionam permanentemente na caracterização do espaço: a percepção, a concepção, a construção e a representação (MACHADO, 1995). Enfatiza-se que o objetivo deste trabalho de pesquisa é propor uma articulação das Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo, com auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra. Para tanto, o universo de documentos apresentados a seguir são importantíssimos na constituição do corpus do presente trabalho, os mesmos têm uma representatividade significativa, pela caracterização de uma homogeneidade em torno do

tema, adequando-se enquanto fonte de informação de modo a corresponderem ao objetivo que suscita a análise da atual pesquisa. São eles:

O Currículo do Estado de São Paulo (2010), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) e os PCN+ (2002) que apontam os recursos tecnológicos como grandes aliados para o ensino da matemática (em particular da Geometria); os trabalhos de Kenski (2003, 2007) que destacam um novo ritmo que a tecnologia imprime à educação, Borba e Penteadó (2007) ressaltam a informática educativa na matemática; as pesquisas de Miskulin (1999), Baldini (2004), Bagé (2008), Rosa (2009) e Silva (2010) que utilizaram em suas pesquisas *softwares* de Geometria Dinâmica para o enriquecimento do processo de ensino aprendizagem da Geometria; bem como os Cadernos do Professor de Matemática publicados pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (2009).

**Formulação de hipóteses e dos objetivos** – hipótese é uma afirmação temporária que é proposta e pode ser verificada (confirmada ou refutada). Trata-se de uma suposição cuja origem é a intuição e que permanece em suspenso enquanto não é provada. O objetivo é a finalidade geral do que é proposto. Ressalta-se que a hipótese / objetivo de pesquisa deste trabalho são: o uso da tecnologia computacional, com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, poderá favorecer a proposta de articulação das situações de aprendizagens presentes no Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo, de forma simples e significativa / propor uma articulação das situações de aprendizagens presentes no Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo, a luz do Currículo do Estado de São Paulo (2010), com auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra.

- Exploração do material

Nesta fase a exploração dos materiais preparados na pré-análise, consistiu essencialmente na análise dos documentos que compõem o corpus da pesquisa, em função de regras previamente estabelecidas.

A exploração do material para compor o corpus da pesquisa seguiu as seguintes regras: em primeiro lugar foi realizada uma revisão bibliográfica das pesquisas relacionadas ao objetivo da atual pesquisa; em segundo lugar foi feita uma análise dos documentos oficiais apontando aspectos relevantes ao uso da tecnologia no ensino da matemática; em terceiro lugar o desenvolvimento do referencial teórico criando subsídios para a inserção da tecnologia no ensino da matemática e por último análise dos Cadernos do Professor de matemática, onde

se encontram as Situações de Aprendizagem que foram articuladas com o uso do *software* GeoGebra.

Portanto, a análise do corpus é apresentada em três capítulos. No terceiro capítulo, são expostos: a revisão bibliográfica e a análise dos documentos oficiais OCEM (2006) e PCN+ (2002), bem como os aportes teóricos. O quarto capítulo é dedicado para a análise do Currículo do Estado de São Paulo (2010), merece atenção especial por se tratar de um documento novo, que compõe parte da base que ajudou a solidificar esta pesquisa. Por fim, no quinto capítulo toda a atenção é voltada à análise dos Cadernos do Professor de Matemática (2009), a fim de se debruçar sobre as Situações de Aprendizagem que representam o vínculo dessa análise com a questão de pesquisa.

- Tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação

Nesta última fase da Análise do Conteúdo foi feita uma reflexão sobre a hipótese de pesquisa, conseqüentemente sobre a questão de pesquisa: De que maneira é possível criar uma abordagem dinâmica, com o *software* GeoGebra para o conteúdo de Geometria Plana do Ensino Médio, com base no Currículo do Estado de São Paulo? Em uma ligação dos resultados obtidos com o escopo teórico, permite-se avançar para conclusões que levem ao avanço da pesquisa, realizando inferências e interpretações sobre as Situações de Aprendizagem apresentadas no Caderno do Professor.

No próximo capítulo será apresentado o corpus da pesquisa: a revisão bibliográfica das pesquisas relacionadas ao tema do presente trabalho, análises dos documentos oficiais OCEM (2006) e PCN+ (2002), e os aportes teóricos para a construção desta pesquisa.



## CAPÍTULO 3

---

---

Neste capítulo, será apresentada parte do corpus da pesquisa: a revisão bibliográfica das pesquisas de Miskulin (1999), Baldini (2004), Bagé (2008), Rosa (2009) e Silva (2010), relacionadas ao tema do presente trabalho; análises dos documentos oficiais OCEM (2006) e PCN+ (2002), evidenciando a inserção das tecnologias da informação e comunicação no ensino de matemática; os aportes teóricos destacando a disseminação da tecnologia na sociedade e na educação e a disseminação tecnológica computacional.

### 3 - ANÁLISE DO CORPUS QUE COMPÕE A PESQUISA

A análise do corpus representa a segunda fase da Análise de Conteúdo descrita por Bardin (2007), que é a Exploração do material selecionado na primeira fase da Pré-análise. Consiste essencialmente em operações de codificação (tratar o material), por recorte, agregação, enumeração, permite atingir uma representação do conteúdo ou da sua expressão, a ponto de esclarecer acerca das características do texto ao pesquisador. Aqui a análise do corpus apresenta-se em três capítulos. No atual capítulo, são expostos: a revisão bibliográfica, e a análise dos documentos oficiais OCEM (2006) e PCN+ (2002), bem como os aportes teóricos. O quarto capítulo: será dedicado à análise do Currículo do Estado de São Paulo (2010). Por fim, no quinto capítulo toda a atenção será voltada à análise dos Cadernos do Professor de Matemática 2009, a fim de se debruçar sobre as Situações de Aprendizagem que representa um vínculo dessa análise com a questão de pesquisa.

#### 3.1 - Revisão bibliográfica - pesquisas relacionadas ao tema

Foi realizada uma investigação nos bancos de dados da Capes, nos *sites* de algumas universidades e no *Google*, com o objetivo de encontrar alguns trabalhos de pesquisas sobre o uso da tecnologia como recurso pedagógico para o ensino da Matemática, que se aproximassem da questão e do objetivo do presente trabalho de pesquisa. Os trabalhos selecionados foram aqueles que utilizaram os recursos da tecnologia computacional, como suporte e a Geometria Dinâmica. Esses trabalhos constituíram-se relevantes para a presente pesquisa, pois, os mesmos contribuíram para o processo de ensino aprendizagem da Geometria com o uso de *softwares* de Geometria Dinâmica. Como resultados desse

levantamento bibliográfico, a seguir são apresentados cinco trabalhos que de certa forma contribuíram para a relevância da presente pesquisa: a tese de Miskulin (1999), as dissertações de Baldini (2004), Bagé (2008), Rosa (2009) e Silva (2010).

Miskulin (1999) em sua pesquisa intitulada: “Concepções Teórico-Metodológicas Sobre A Introdução e a Utilização de Computadores no Processo Ensino/Aprendizagem da Geometria”, discorre em seu trabalho sobre a introdução e a disseminação de computadores na Educação e na Sociedade, com o objetivo de propiciar aos pesquisadores da área uma possível reflexão sobre alguns aspectos do “estado da arte” da informática educacional. A autora diz que, além disso, procurou relacionar tais reflexões aos aspectos epistemológico, científico e axiológico da construção do conhecimento, em contextos práticos de resolução de problemas, dois foram os sujeitos que cursavam a 8ª Série do Ensino Fundamental de uma escola particular de Campinas, envolvidos na pesquisa.

Em um primeiro momento Miskulin (1999), apresentou a descrição de uma análise crítica sobre ambientes computacionais e alguns *softwares* que na ocasião estavam em evidência e que poderiam ser utilizados no Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior. Na concepção da autora as escolhas dos recursos tecnológicos devem estar vinculadas a uma filosofia educacional em que se acredita e se postula, a uma metodologia educacional e ainda aos objetivos que se quer alcançar no desenvolvimento de assuntos relacionados a diferentes áreas do conhecimento.

Em outro momento a autora enfatiza aspectos teórico-metodológicos sobre a Internet, como um dos possíveis ambientes de aprendizagem, também apresenta uma pesquisa que investiga como os computadores foram utilizados em algumas escolas da rede pública do Ensino Fundamental e Médio de Albuquerque, Novo México, USA.

A autora realiza também, um delineamento sobre as Reflexões das Tendências da Informática na Educação Matemática, elucidando algumas das dimensões sobre a inter-relação entre a Educação Matemática e as novas tecnologias. Ressalta que o objetivo de elaborar um estudo com esse enfoque consiste em fornecer elementos para que se possam esboçar algumas considerações quanto à situação que permeia o campo da Educação Matemática e da Informática que, segundo a concepção da pesquisadora, poderia ser redimensionado, com o objetivo de transcender e ultrapassar os grandes desafios que se impõem com o advento das novas tecnologias.

Ela apresentou ainda os Pressupostos Teórico-Methodológicos da Linguagem Computacional Logo – Geometria da Tartaruga e enfatizou as possibilidades didático-cognitivas desse ambiente no processo de exploração e construção de conceitos geométricos. Além disso, houve a investigação de alguns teóricos e educadores que trabalhavam com esse ambiente computacional, com o objetivo de elucidar os elementos e fatores importantes no processo de construção do conhecimento, em contextos práticos de resolução de problemas.

Nas considerações finais do Estudo de Caso realizado e de toda a pesquisa, a autora relata que se pretende oferecer aos professores e pesquisadores da área algumas concepções teórico-metodológicas visando uma possível reflexão e redimensionamento a respeito das estratégias de ensino e métodos de trabalhos adequados aos avanços tecnológicos que perpassam a Educação e possibilite dessa forma, ao ser em formação, uma Educação condizente com os anseios e desenvolvimento da sociedade.

Miskulin (1999) constatou que o problema que permeou toda a parte teórica de sua pesquisa foi respondido, ou seja, foi possível resgatar as possibilidades didático-cognitivas do Logo Tridimensional na exploração pedagógica de conceitos geométricos. O uso do *software* Logo propiciou subsídios teórico-metodológicos que pudessem realizar uma intervenção ativa com os sujeitos pesquisados. A autora usou como interlocutor nesse processo a Linguagem Computacional Logo, através da Geometria da Tartaruga que, pela arquitetura Matemática em que foi criada, e com sua filosofia subjacente, mostrou ser um ambiente educacional poderoso e instigante para a exploração de conceitos geométricos, que possibilitou aos sujeitos pesquisados uma aprendizagem construtiva e significativa.

A autora acredita que é importante enfatizar que as linhas de pesquisa em Educação Matemática necessitam de inovações e abordagens que visem à introdução e a utilização de nova tecnologia no processo ensino/aprendizagem, contribuindo, desse modo, para uma possível adequação da Educação Matemática aos avanços tecnológicos, cada vez mais presentes na sociedade.

Em sua pesquisa: “Construção do Conceito de Área e Perímetro: Uma Sequência Didática com Auxílio de *Software* de Geometria Dinâmica”, Baldini (2004) propôs uma engenharia didática seguindo a metodologia, inspirada na “Engenharia Didática” e fundamentada em Artigue (1988), em ambiente de Geometria Dinâmica, com o objetivo de verificar se o *software Cabri Géomètre II* contribui para a construção de conceitos de Geometria (área e perímetro). O suporte teórico é fundamentado na “Teoria de Situações

Didáticas” de Guy Brousseau e em outros aspectos da didática francesa, entre eles: contrato didático, transposição didática e transposição informática.

A sequência didática foi aplicada a alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Apucarana – Paraná.

Baldini (2004) destaca que com o desenvolvimento das novas tecnologias e dos computadores, a informática está cada vez mais presente na vida de todo cidadão. Dessa forma, grandes transformações ocorreram no comportamento da sociedade, e que uma parte considerável da população tem acesso a recursos informáticos e vê-se cada vez mais a informática ocupando maior espaço no nosso cotidiano.

Para a autora os ambientes informatizados, oferecem melhores condições para o desenvolvimento de uma aprendizagem construtivista da Geometria, são aqueles construídos dentro dos princípios da "Geometria Dinâmica". As manifestações de Geometria Dinâmica são antigas, mas o conceito só foi explicitado a partir da criação de *software* como o *Cabri-Géomètre II* ou *Geometer Sketchpad*, segundo Bellemain (2000) *apud* Baldini (2004): “A Geometria Dinâmica tem por objetivo fornecer representações dos objetos e relações geométricas que permitem ultrapassar as limitações dos desenhos geométricos no ambiente papel-lápis e facilitam a visualização de propriedades geométricas” (p. 202).

Em suas considerações finais Baldini (2004) destaca que pela observação e análise das atividades da sequência didática realizada pelos alunos, constatou-se que o *Cabri-Géomètre II* muito contribui para a construção dos conceitos de “área e perímetro”. O *software* proporcionou aos alunos a oportunidade de movimento dos vértices da figura, sem alterar suas propriedades e o uso das cores promoveu a visualização e compreensão de pontos importantes da Geometria, como a superfície de uma figura. As atividades favoreceram a compreensão de que os conceitos de área e de perímetro correspondem a objetos geométricos distintos, a área associada à superfície e o perímetro ao contorno. Isso foi constatado nas atividades realizadas no computador em que se movimentava algum vértice da figura e modificava o valor do perímetro, e era mantido constante o número que expressava a área da referida figura, ou vice-versa.

Ela considera que nesse caso, os alunos responderam satisfatoriamente que área e perímetro não variam necessariamente no mesmo sentido, que superfícies de mesma área podem ter perímetros distintos e vice-versa.

Baldini (2004) faz a seguinte observação: há necessidade de mais estudo que envolva a transposição informática de conteúdos específicos, nos quais a observação, a manipulação e a visualização de objetos, proporcionados por *software* de Geometria Dinâmica, por exemplo, contribuam para a construção de conhecimentos matemáticos e de outros campos da ciência, como a física, a química e a biologia.

A autora destacou que algumas de suas sequências didáticas privilegiaram o uso das medidas, porém, cabem novos estudos desses e de outros conceitos com maior ênfase no campo geométrico.

Com o título “Proposta para a prática do professor do ensino fundamental I de noções básicas de Geometria com o uso de Tecnologias”, a dissertação de Bagé (2008) teve como objetivo verificar quais as possíveis contribuições que um curso de formação continuada, com a utilização da tecnologia, traz para a prática do professor no ensino da Geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental I. A questão de pesquisa foi: em que medida uma oficina, com a utilização dos recursos da tecnologia, poderá contribuir para a prática dos professores das séries iniciais no ensino dos conceitos básicos da Geometria? Ela elaborou uma proposta de oficina com dez atividades utilizando os *softwares Building Perspective* e *Cabri-Géomètre*, participaram da oficina trinta professores que lecionam na 4ª série do Ensino Fundamental. Sua proposta baseou-se nos pressupostos teóricos do desenvolvimento do pensamento geométrico do modelo Van Hiele, para a elaboração das atividades, e a formação de professores com o uso da tecnologia.

A metodologia utilizada em sua pesquisa é denominada “*Design Experiments*” ou “*Design Research*”. Segundo Collins et al. (2004) *apud* Bagé (2008, p. 38), este termo foi introduzido em 1992 por Ann Brown e Allan Collins justificado como um meio para a realização de avaliação formativa para testar e aperfeiçoar modelos educacionais baseados em princípios derivados de investigação prévia.

Ao finalizar a pesquisa Bagé afirma que a oficina com a utilização dos recursos de tecnologia contribuiu, mesmo que timidamente, para a prática dos professores, no sentido de perceberem a importância do ensino da Geometria nas séries iniciais e as possibilidades que a tecnologia oferece para que isto ocorra.

A autora afirma que o *software Cabri-Géomètre* foi um dos responsáveis para o sucesso da oficina, na medida em que facilitou o entendimento de alguns conceitos

desenvolvidos no decorrer da mesma e possibilitou aos professores expressar suas dúvidas e rever os conteúdos geométricos.

Segundo Bagé a aplicação da oficina no ambiente da escola foi em alguns momentos comprometida por causa dos fatores técnicos que dificultaram o seu desenvolvimento. Para que haja uma efetiva utilização da Sala Ambiente de Informática é importante que os órgãos superiores considerem estes fatores e disponibilizem recursos materiais para manutenção técnica, além de suporte técnico por meio de profissionais de informática que orientem os professores e os acompanhem nas atividades com os recursos tecnológicos.

A dissertação de Rosa (2009) intitulada “Ambientes computacionais no contexto da Geometria: Panorama das teses e dissertações do Programa de Educação Matemática da PUC-SP de 1994 a 2007” tem como objetivo apresentar um estudo panorâmico das produções da PUC-SP. Foram evidenciados trabalhos que fizeram uso de ambientes computacionais como ferramenta no contexto da Geometria, de modo a permitir que estudos posteriores tenham uma base consolidada de informações da qual possam prosseguir suas pesquisas.

Com a elaboração desse estudo Rosa buscou responder a seguinte questão: “O que vem sendo privilegiado sobre o tema da linha de pesquisa Tecnologias da Informação e Educação Matemática e quais tendências apresentam as teses e dissertações no contexto da Geometria do período de 1994 a 2007 no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP?” A metodologia que a autora utilizou para a elaboração da sua pesquisa foi o Estado da Arte que teve como base principalmente os trabalhos de D’Ambrósio (1993), Fiorentini (1994), Ferreira (2002) e Pinto (2009).

Para responder a questão norteadora de sua pesquisa, Rosa realizou uma busca no banco de dissertações e teses *on-line* da instituição por meio dos títulos, resumos, linha de pesquisa e palavras-chave, selecionou aquelas que utilizaram tecnologia no contexto da Geometria. A autora encontrou cinquenta e quatro (54) dissertações e duas (02) teses de doutorado, dessas, trinta e uma (31) dissertações de Mestrado e uma (01) tese de Doutorado, no contexto da Geometria. A apreciação dos trabalhos selecionados foi constituída de um fichamento constituído por: título, nome do autor, ano de defesa, orientador do autor, linha de pesquisa, sujeitos da pesquisa, palavras-chave, objetivo, questões de pesquisa, referências teóricas, metodologia, considerações do autor e o ambiente computacional utilizado.

O estudo de Rosa mostrou que vinte e sete (27) trabalhos dos trinta e dois (32)

analisados, privilegiaram uso do ambiente computacional *Cabri Géomètre*. Mostrou também que o objeto matemático Transformações Geométricas foi identificado em quinze (15) trabalhos, oito (08) foram relativos à Argumentação e Prova; na Geometria Euclidiana Plana, quatro (04) trabalhos; na Geometria Espacial, três (03) e para Geometria não Euclidiana e Transformações Lineares foram identificados um (01) trabalho para cada objeto.

Em suas considerações finais a autora relata que o propósito inicial da pesquisa foi de analisar o efeito causado nos sujeitos das pesquisas, em relação ao uso de ambientes computacionais como ferramenta auxiliadora no ensino da Geometria, não foi possível identificar em algumas pesquisas quais os impactos causados pelo uso desses ambientes, pois não foi explicitado por seus autores. Porém, no que foi observado em relação à utilização de ambientes computacionais, o mesmo não garante a efetivação do aprendizado matemático (geométrico). O Ambiente Computacional pode ser algo motivador, mas não é dele o papel e a responsabilidade do ensinar e aprender, e sim dos professores e alunos.

Com o título: “O Uso Reconstutivo do Erro na Aprendizagem de Simetria Axial: Uma Abordagem a Partir de Estratégias Pedagógicas Com Uso de Tecnologias”, a dissertação de Silva (2010) insere-se no âmbito do ensino e aprendizagem da Geometria, em particular as Transformações Geométricas com uma abordagem específica na transformação isométrica Simetria Axial. A investigação reside nos conceitos desse tipo de isometria através do uso do erro numa abordagem reconstitutiva a partir de estratégias pedagógicas com uso de tecnologias. O desenvolvimento ocorreu em duas etapas, a primeira realizada com uma sequência de atividades realizadas no ambiente estático “papel e lápis” e a segunda com uma sequência de atividades construídas por intermédio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra.

Os sujeitos da pesquisa de Silva foram alunos de uma classe de sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual localizada na Grande São Paulo, na cidade de Guarulhos. No total, entre as diversas sessões realizadas, foram 30 estudantes.

Para coleta, análise e interpretação dos dados, o autor utilizou a Teoria das Situações Didáticas desenvolvidas por Guy Brousseau (1987), buscou verificar quais conhecimentos foram mobilizados pelos estudantes durante a investigação.

Segundo o autor foram apresentados alguns conceitos relativos à simetria axial e outros foram recuperados da estrutura cognitiva dos estudantes a partir das atividades com uso

de ferramentas e interfaces tradicionais, como lápis, papel e compasso.

Silva (2010) apresenta uma síntese de algumas dificuldades que surgiram no ambiente lápis, papel e compasso, que puderam ser mapeadas:

- Manipulação de ferramentas: as dificuldades representaram autênticos obstáculos à correta consecução das tarefas e, por consequência, à consolidação dos conceitos de simetria axial pelos estudantes;
- Mobilização de conhecimentos prévios: boa parte dos sujeitos não conseguiu recuperar conceitos já estudados e que deveriam fazer parte de sua estrutura de conhecimentos.

De acordo com o autor a primeira atividade concorreu para resgatar conceitos e trabalhar inicialmente alguns pressupostos necessários à compreensão do tema em estudo, apareceram os erros, encarados como ocorrências aproveitáveis à aprendizagem e utilizados em seu aspecto reconstrutivo, quando da apresentação do segundo instrumento. Os comentários dos estudantes mostraram que, ao conseguir tomar as tarefas que tinham diante de si, consolidaram conceitos antes difusos ou mesmo não entendidos. Os erros não foram, portanto, certificados em ânimo de permanência, como definitivos, mas analisados e utilizados ao longo da estratégia, de forma reconstrutiva.

Em função da complementaridade dos elementos usados na estratégia pedagógica, Silva (2010) destacou que os estudantes puderam compreender e formular, ora verbalmente, ora através da escrita, diversos elementos que permitiram transformar o conhecimento implícito em conhecimento explícito (formulação). Destacou também que na discussão em duplas com o Ambiente de Geometria Dinâmica e nos discursos dirigidos ao pesquisador, os alunos puderam superar a validação empírica obtida anteriormente, refinar a formulação, discutindo e refutar conjecturas, de modo a consolidar as ideias adquiridas (validação).

Ao finalizar as suas considerações o autor relata que foi possível eleger o momento correto para formalizar o saber adquirido e reforçar, reposicionar o status do saber matemático (institucionalização). Além disso, ao usarem instrumentos concretos, os alunos se mostraram mais participativos e interessados, talvez por saírem das rotineiras aulas expositivas. Porém, isso não garantiu isenção de erros. A realização de construções e as dúvidas ocorridas permitem afirmar, em conjunto com os argumentos da estratégia utilizada, que o método de construção por instrumentos no ambiente estático deve ser realizado primeiramente, para

depois permitir a continuidade em direção às construções no ambiente informatizado.

O autor relata que a comparação entre resultados obtidos no caderno e no computador apresentou novos significados para os alunos quanto ao uso da régua, do compasso e de outros instrumentos e perceberam que não se limitavam a um simples treinamento para memorização e posterior repetição.

Por fim o autor argumenta que não foi possível recuperar os eventuais erros que ocorreram no Ambiente de Geometria Dinâmica em continuidade à estratégia de uso reconstrutivo, pois demandaria uma terceira fase, não comportada por sua investigação, deixa assim, tal cometimento como sugestão para pesquisas futuras.

Após as análises desses cinco trabalhos de pesquisa foi possível afirmar que há pontos em comum entre eles: a importância dada ao ensino de Geometria, a mediação com os recursos do Ambiente de Geometria Dinâmica, para o desenvolvimento das pesquisas com sujeitos oriundos do Ensino Fundamental e Médio, a Formação continuada de Professores, as possibilidades do uso das Tecnologias Informatizadas no desenvolvimento de conceitos geométricos, e de um modo geral as tecnologias a serviço da educação.

A investigação realizada nessa revisão contribuiu com o presente trabalho de pesquisa, no sentido de identificar indícios de que os temas relacionados ao uso de *softwares* de Geometria Dinâmica como um recurso pedagógico já foram explorados anteriormente.

Os ambientes de Geometria Dinâmica são importantes meios para a utilização de uma estratégia de ensino no âmbito da Educação Matemática, no sentido de favorecer o avanço do conhecimento que insere a hipótese da atual pesquisa: o uso da tecnologia computacional, com o auxílio de um *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, poderá favorecer a proposta de articulação das Situações de Aprendizagem do Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo, de forma simples e significativa.

Os trabalhos selecionados utilizaram *softwares* de Geometria Dinâmica que corroboraram para o aprimoramento do conhecimento matemático da Geometria dos sujeitos envolvidos nas pesquisas, ressaltando aspectos considerados por esta pesquisa relevantes, destacando: a visualização, construção, manipulação dinâmica, experimentação, intervenção, formalização de conceitos, etc., como uma articulação no Ambiente de Geometria Dinâmica. Tais aspectos também são apresentados no Currículo do Estado de São Paulo (2010), apresentando quatro faces para o conhecimento Geométrico, que se relacionam

permanentemente na caracterização do espaço: a percepção, a concepção, a construção e a representação (MACHADO, 1995). Para a articulação dessas quatro faces, uma das possibilidades é a utilização de materiais concretos como, por exemplo, o Tangram, ou utilizar um *software* de Geometria Dinâmica.

O *software* de Geometria Dinâmica tido como uma das opções no Currículo do Estado de São Paulo (2010) para a articulação dos aspectos do conhecimento Geométrico foi utilizado em pesquisas anteriores, com bons resultados, ainda tímidos, conforme Bagé (2008): “a oficina com a utilização dos recursos de tecnologia contribuiu, mesmo que timidamente, para a prática dos professores, no sentido de perceberem a importância do ensino da Geometria nas séries iniciais e as possibilidades que a tecnologia oferece para que isto ocorra”.

Esse depoimento de Bagé (2008) reforça o que Rosa (2009) disse em sua investigação, que o ambiente computacional pode ser algo motivador, mas não é dele o papel e a responsabilidade do ensinar e aprender, e sim dos professores e alunos.

O argumento de Rosa (2009) vai de encontro com as ideias de Kenski (2003, 2007), Oliveira (2002, 2007), Borba e Penteadó (2007) e Miskulin (1999, 2010), pois concordam que o ambiente informatizado por mais interessante e rico que possa parecer, por si só não contribui efetivamente para a geração de conhecimento, o professor como mediador do conhecimento aparece nesse cenário em posição fundamental.

Oliveira (2007) contribui com essa visão quando diz que “a figura do aluno é outra. Surge a possibilidade de o aprendiz engajar-se no processo como elemento ativo, crítico e autônomo. Não mais um assimilador passivo de conteúdos”... (OLIVEIRA, 2007, p. 103).

Esta pesquisa tem por base esses pressupostos, para não realizar um trabalho descolado da realidade em que se insere esta investigação, cuja perspectiva de investigação a luz do Currículo do Estado de São Paulo (2010), é analisar as atividades de Geometria, do 4º bimestre da primeira série do Ensino Médio, do Caderno do Professor de Matemática publicado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (2009), busca-se responder: De que maneira é possível criar uma abordagem dinâmica, com o *software* GeoGebra para o conteúdo de Geometria Plana do Ensino Médio, com base no Currículo do Estado de São Paulo?

### 3.2 - Análises dos documentos oficiais PCN+ (2002) e OCEM (2006)

A intenção nesta etapa de trabalho é realizar uma síntese dos documentos oficiais PCN+ Ensino médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006); e analisar como tais documentos apontam a inserção dos recursos tecnológicos da informática no ensino da Matemática, em particular da Geometria, no contexto educacional da escola pública.

Baldini (2004) que se preocupou em pesquisar a contribuição dos recursos tecnológicos no ensino da Geometria Plana, apontou em sua pesquisa que acaloradas discussões acontecem sobre o papel da educação em relação aos avanços tecnológicos, que ao longo do tempo têm modificado os modelos da nossa sociedade, com o uso das tecnologias. A informática está cada vez mais presente na vida de todo cidadão, de certa forma grandes transformações ocorrem no comportamento da sociedade.

Verificou-se nas análises iniciais dos documentos oficiais, que o objetivo desses materiais é contribuir para o sucesso da educação, estabelecer um diálogo na comunidade escolar e repensar sobre a prática do professores.

Esses documentos têm por premissa dar qualidade ao ensino básico, servindo como subsídio para as escolas, de maneira tal que as mesmas propiciem aos alunos condições indispensáveis para o enfrentamento das questões sociais do mundo moderno, de tal forma que os alunos se tornem cidadãos democratizados e culturais efetivamente.

Em uma análise particular dos PCN+ (2002), as diretrizes e parâmetros que organizam o Ensino Médio mostram a Matemática integrando a mesma área do conhecimento que a Biologia, a Física e a Química. Essas disciplinas de acordo com o documento são ciências que têm em comum a investigação da natureza e dos desenvolvimentos tecnológicos, compartilham linguagens para a representação e sistematização do conhecimento de fenômenos ou processos naturais e tecnológicos, com a definição da área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. As disciplinas dessa área compõem a cultura científica e tecnológica que, como toda cultura humana, é resultado e instrumento da evolução social e econômica, na atualidade e ao longo da história.

A Matemática segundo os PCN+ (2002) tem apresentado um papel importante ao servir outras áreas do conhecimento para dar sentido e entendimento a alguns objetos de

estudo, além de ter o seu significado em si mesmo dentro da sua área de concentração. Ela é presença certa e marcante na formação do aluno como cidadão, contribuindo para que este se torne uma pessoa consciente e autônoma, em uma sociedade capitalista e competitiva de um mundo globalizado.

No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional (PCN+, 2002 p. 108).

Machado (2001) se refere ao Ensino Médio e diz que é importante lembrar que, a área da ciência e tecnologia deve estar a serviço do ser humano. A educação não pode ter no centro de suas ações somente questões abalizadas no desenvolvimento econômico. É necessário ter uma visão do cidadão como um todo, que será preparado de certa forma nesse nível de ensino para o mercado de trabalho, para dar continuidade aos estudos e para viver em sociedade.

Os PCN+ (2002) destacam que o objetivo da escola é preparar o aluno para um aprendizado permanente e prepará-lo para a vida. Ao passo que são apontadas as competências a serem perseguidas durante essa etapa da escolaridade básica, não diminuindo o mérito de todas as competências apresentadas no documento, mas, aqui neste trabalho serão destacadas algumas que estão ligadas à inserção da tecnologia no ensino da Matemática.

- Acompanhar criticamente o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, tomando contato com os avanços das novas tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento para se posicionar frente às questões de nossa atualidade.
- Utilizar o conhecimento matemático como apoio para compreender e julgar as aplicações tecnológicas dos diferentes campos científicos.
- Perceber o papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia e a complexa relação entre ciência e tecnologia ao longo da história, entre outros.

Segundo os PCN+ (2002) cada escola e grupo de professores devem propor um trabalho pedagógico que permita o desenvolvimento das competências almeçadas. Bagé (2008) diz que o desenvolvimento pode ser potencializado por esse cenário de inserção tecnológica na educação, o uso dos recursos tecnológicos disponíveis no ambiente escolar pode trazer resultados satisfatórios para o processo de ensino-aprendizagem. É um desafio para o professor, mas a articulação da prática pedagógica com o uso das tecnologias de informação e comunicação pode propiciar um avanço no desenvolvimento das competências

desejadas.

Os PCN+ (2002) também sinalizam a importância de se fazer uma análise dos recursos de ensino e dos métodos de abordagem para o desenvolvimento do conhecimento do aluno, o cuidado com o tempo de ensino e de aprendizagem e dos espaços para que isso ocorra. Para isso, os temas selecionados devem ter relevância científica e cultural. Isso significa que, além das justificativas relativas às aplicações e à linguagem, sua importância está em seu potencial explicativo, que permite ao aluno conhecer o mundo e desenvolver sentidos estéticos e éticos em relação a fatos e questões do mundo.

As OCEM (2006), é um documento criado pela Secretaria de Educação Básica, por intermédio do Departamento de Política do Ensino Médio, tem como viés a apresentação de um conjunto de reflexões que alimente a prática docente. A proposta inicial para a formação do documento foi desenvolvida a partir da necessidade expressa em encontros e debates com os gestores das Secretarias Estaduais de Educação e aqueles que, nas universidades pesquisavam e discutiam questões relativas ao ensino de diferentes disciplinas.

O documento deixou claro que foram retomadas discussões sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, não só no sentido de aprofundar a compreensão sobre pontos que mereciam esclarecimentos. As discussões tinham como diretriz apontar e desenvolver indicativos que pudessem oferecer alternativas didático-pedagógicas para a organização do trabalho pedagógico, a fim de atender às necessidades e às expectativas das escolas e dos professores na estruturação do Currículo para o ensino médio.

De acordo com Machado:

O objetivo da educação em todos os níveis é a construção da plena cidadania, entendida justamente como a elaboração de instrumentos de articulação entre projetos individuais e coletivos. A especificidade do ensino médio está associada à natureza dos instrumentos que podem estar disponíveis nessa faixa etária (MACHADO, 2001, p. 160).

Neste sentido apontado por Machado (2001) na citação anterior, as OCEM (2006) foram elaboradas para contribuir com a articulação entre a prática pedagógica docente e as disciplinas das áreas do conhecimento. O documento elaborado para o Ensino Médio foi fruto de discussões e contribuições dos diferentes segmentos envolvidos com o trabalho educacional, um material que apresenta e discute questões relacionadas ao Currículo escolar.

No que tange a inserção da tecnologia no ensino da Matemática as OCEM (2006)

sinalizam para o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na sociedade atual.

Segundo as OCEM (2006) é fato que a tecnologia está no dia a dia da sociedade, e de certa forma exige indivíduos com certa capacidade para bem usá-la.

Seguindo essa linha de uso da tecnologia, a mesma pode ser inserida nesse cenário como um recurso que pode subsidiar o processo de ensino aprendizagem na área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. O documento ressalta que há dois aspectos importantes quanto ao uso da tecnologia no ensino da Matemática: a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, considerando o primeiro aspecto, a Matemática para a Tecnologia, deve pensar na formação que capacita para o uso, por exemplo: calculadoras e planilhas eletrônicas. No trabalho com calculadoras, é preciso saber informar, via teclado, as instruções de execução de operações e funções, e isso exige conhecimentos matemáticos.

Sobre as planilhas eletrônicas, o documento ressalta que são programas de computador que servem para manipular tabelas cujas células podem ser relacionadas por expressões matemáticas. Para tanto, é preciso conhecimento matemático com maiores exigências para executar as operações e as funções que são definidas sobre as células de uma tabela em que se faz uso de notação para matrizes. Assim, é importante conhecer bem a notação matemática usada para expressar diferentes conceitos, em particular o conceito de função. Ao passo que, o desenvolvimento de planilhas mais complexas requer raciocínio típico dos problemas que exigem um processo de solução em diferentes estágios.

O segundo aspecto apontado pelas OCEM (2006) é a Tecnologia para a Matemática. Existem programas de computador (*softwares*) nos quais é possível explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, propiciar a experimentação, testar hipóteses, esboçar conjecturas e criar estratégias para resolver problemas.

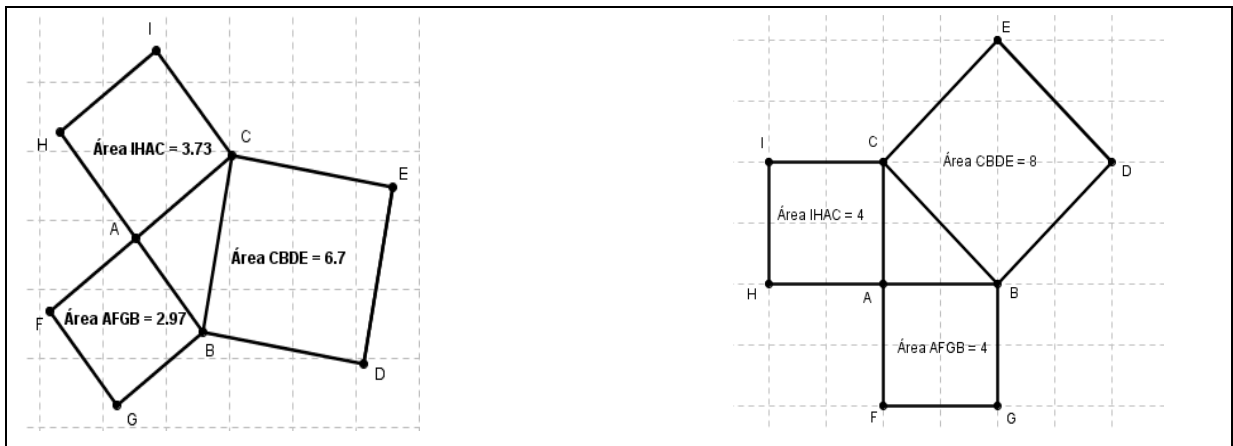
As OCEM (2006) destacam algumas características desses programas: a) conter certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento; b) oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica, geométrica; c) possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macroconstruções; d)

permitir a manipulação dos objetos que estão na tela.

Especificamente para a Geometria, há programas que dispõem de régua e compasso virtuais e com menu de construção em linguagem clássica da Geometria – reta perpendicular, ponto médio, mediatriz, bissetriz, etc. Feita uma construção, pode-se aplicar movimento a seus elementos, que serão preservadas as relações geométricas impostas à figura. Por esta especificidade tais programas são considerados programas de Geometria Dinâmica OCEM (2006).

Para as OCEM (2006), esses programas de Geometria Dinâmica também enriquecem as imagens mentais associadas às propriedades geométricas. Para explicar o enriquecimento das imagens mentais o documento apresenta um exemplo que utiliza o Teorema de Pitágoras: a partir de um triângulo retângulo e dos quadrados construídos sobre seus lados, pode-se construir uma família de “paralelogramos em movimento” que, conservando a área, explica por que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas construídas sobre os catetos.

A Figura 1 abaixo ilustra o exemplo do Teorema de Pitágoras.



**Figura 1. Teorema de Pitágoras, ilustração. Elaborada pelo autor com o GeoGebra**

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio destacam que em ambientes de Geometria Dinâmica também se pode estudar: modelação geométrica, as funções, as equações e as desigualdades da Geometria Analítica (retas, círculos, cônicas, superfícies), coordenadas cartesianas com coordenadas polares, entre outros.

De acordo com as OCEM (2006) o estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas,

reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Possibilita também estudos sobre os teoremas e argumentações dedutivas, que no documento são apresentados em dois aspectos: a Geometria que leva à Trigonometria e a Geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes.

Finalizando esta síntese sobre os PCN+ (2002) e OCEM (2006), abaixo é apresentado um quadro com os conteúdos básicos em blocos temáticos para o ensino da Matemática no Ensino Médio.

PCN+ (2002)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Álgebra: números e funções;</li> <li>• Geometria e medidas;</li> <li>• Análise de dados.</li> </ul>
OCEM (2006)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Números e operações;</li> <li>• Funções;</li> <li>• Geometria;</li> <li>• Análise de dados e probabilidade.</li> </ul>

**Quadro 1 - Blocos temáticos (PCN +, OCEM). Elaborado pelo autor**

Para uma perspectiva de sucesso no uso dos recursos tecnológicos no processo de ensino aprendizagem em Matemática, a escolha dos recursos torna-se um fator determinante. As pesquisas como as de Miskulin (1999), Baldini (2004), Bagé (2008), Rosa (2009) e Silva (2010), que utilizaram os recursos tecnológicos para a exploração de conceitos e ideias matemáticas em seus trabalhos, destacam o caráter positivo dos *softwares* de Geometria Dinâmica. Diante dessas situações, o professor deve estar preparado para as mais variadas surpresas, pois tais recursos abrem a possibilidade de apresentação de diversas soluções para um mesmo problema. Isto indica que as formas de pensar dos alunos podem ser bem distintas, abrindo um leque de discussões para diversos temas.

### 3.3 - Aportes teóricos

Neste momento serão descritas algumas considerações teóricas que balizaram a elaboração da presente pesquisa. Considerando o uso da Tecnologia de um modo geral e o Ambiente Computacional como uma ferramenta pedagógica relevante, na ótica deste trabalho. Esse balizamento será feito à luz das considerações de Kenski (2003, 2007), Borba e Penteadó (2007) e outros, sobre a inserção da tecnologia na sociedade e na educação, buscando também algumas considerações presentes nas OCEM (2006) e no Currículo do Estado de São Paulo (2010).

#### 3.3.1 - Disseminação da tecnologia (sociedade e educação)

Para iniciar o discurso em torno deste tema, será apresentado o significado de técnica e tecnologia, de tal forma que não gere ambiguidade em torno do assunto.

Segundo Heidegger (1972) *apud* Critelli (2002, p. 84) a técnica é, essencialmente, uma modificação *sui generis*<sup>10</sup> do fazer ou do agir humano. Nas palavras do filósofo:

Se pensarmos a técnica a partir da palavra grega *téchne* e de seu contexto, técnica significa: ter conhecimentos na produção. *Téchne* designa uma modalidade de saber. Produzir quer dizer: conduzir à sua manifestação, tornar acessível e disponível algo que, antes disso, ainda não estava aí como presente. Este produzir vale dizer o elemento próprio da técnica, realiza-se de maneira singular, em meio o Ocidente europeu, através do desenvolvimento das modernas ciências matemáticas da natureza. Seu traço básico é o elemento técnico, que pela primeira vez apareceu, em sua forma nova e própria, através da física moderna. Pela técnica moderna é descerrada a energia oculta na natureza, o que se descerra é transformado, o que se transforma é reforçado, o que se reforça é armazenado, o que se armazena é distribuído. As maneiras pelas quais a energia da natureza é assegurada são controladas. O controle, por sua vez, também deve ser assegurado.

De acordo com Oliveira (2007) este pensamento sobre a técnica a partir da palavra *téchne* remonta aos registros da civilização grega que se pode entender em um primeiro momento, como a coleção de fazeres com vistas à obtenção de resultados específicos, ou seja, produzir para obter algo que, por alguma razão, a natureza não fizera. Para os gregos, as

---

<sup>10</sup> O termo *Sui generis*, de origem Latim, significa, literalmente, "de seu próprio gênero", ou seja, "único em seu gênero". Usa-se como adjetivo para indicar que algo é único, peculiar: uma atividade *sui generis*, uma proposta *sui generis*, um comportamento *sui generis*.

atividades humanas, de forma geral, podiam ser vistas como técnicas mais relevantes, aquelas que proporcionavam a contemplação à feitura de algo para o seu bem estar.

Ortega y Gasset (1963) diz que a técnica é intrínseca a vida humana, os atos técnicos são específicos do homem, que definem uma reforma imposta à natureza, é a reação enérgica contra a natureza ou circunstância que leva a criar entre esta e o homem uma nova natureza posta sobre a anterior. Dessa forma, a técnica não é o que o homem faz para satisfazer suas necessidades, se assim fosse, valeria este conceito também para os animais em uma visão restrita ao repertório dos atos biológicos dos mesmos. Neste sentido não é o homem que se adapta ao meio, é o meio que se adapta ao homem, que o faz necessário e indigente, reforma em sentido tal que as necessidades ficam, na eminência de serem possivelmente anuladas por deixar de ser problema para a sua satisfação.

Alguns significados sobre a palavra tecnologia são apresentados a seguir: (a) <sup>11</sup> a palavra tecnologia provém de uma junção do termo tecno, do grego techné, que é saber fazer, e logia, do grego Logus, razão. Portanto, tecnologia significa a razão do saber fazer. (b) <sup>12</sup> Estudo dos processos técnicos de determinado ramo da produção industrial ou de vários ramos.

Oliveira (2007), Rosa (2009) e Silva (2010) também contribuem para a argumentação sobre o significado da palavra em questão: A palavra “tecnologia” com origem no grego, da junção dos termos, ofício e estudo, remete ao conhecimento da profissão, do ofício. São os métodos, as práticas, os conhecimentos usados para melhorar, mudar, incorporar características ao que existe ou inventar algo, conforme a necessidade do ser humano, de modo a facilitar sua vida, englobando, portanto, os pensamentos relativos à técnica, em um contexto de aprofundamento teórico-prático que afeta o modo de vida das pessoas e a própria estrutura da sociedade em uma época.

Segundo Oliveira (2007) é possível se defrontar com algumas pessoas no cotidiano e com algumas publicações de cunho variadas, atribuindo igual significado às palavras de etimologia comum. Como no caso específico das palavras “técnica” e “tecnologia”, as quais possuem uma raiz comum, que pode ser encontrada no verbo grego *tictēin*, cujo significado envolve criar, produzir, conceber, dar à luz.

---

<sup>11</sup> <http://revistas.ua.pt/index.php/prismacom/article/viewFile/681/pdf>. (Acesso em: agosto de 2011).

<sup>12</sup> <http://pt.scribd.com/doc/4776000/Dicionario-de-Filosofia-Nicola-Abbagnano>. (Acesso em: agosto de 2011).

Castells (1999) ressalta segundo alguns historiadores que houve pelo menos duas revoluções industriais: uma no início do século XVIII, nas três primeiras décadas marcadas por novas tecnologias como a máquina a vapor; e outra, cem anos mais tarde aproximadamente, destacando nessa segunda revolução o desenvolvimento da eletricidade.

A partir deste episódio citado por Castells é possível precisar que os avanços tecnológicos tiveram um início significativo no cotidiano dos seres humanos, ao passo que o fim não é possível enxergar, devido às constantes inovações tecnológicas que surgem em uma velocidade incontestável.

Esta discussão sobre técnica e tecnologia é completada por Kenski (2007), uma vez que suas considerações resumem todas as vozes ouvidas neste discurso:

Segundo o Dicionário de Filosofia de Nicola Abbagnano (1982, p. 906), a tecnologia é “o estudo dos processos técnicos de um determinado ramo de produção industrial ou de mais ramos”. Já a técnica, no mesmo dicionário, “compreende todo o conjunto de regras aptas a dirigir eficazmente uma atividade qualquer. A técnica, neste sentido, não se distingue nem da arte nem da ciência nem de qualquer processo ou operação para conseguir um efeito qualquer, e o seu campo estende-se tanto quanto o das atividades humanas (ABBAGNANO 1982, p. 906 *apud* KENSKI, 2007, p. 24, 25).

A tecnologia e o seu desenvolvimento estão ligados diretamente com o próprio desenvolvimento intelectual do ser humano. Kenski (2003) afirma que ela está em todo lugar, a sociedade vive praticamente mergulhada nesse ambiente tecnológico. Fala-se em tecnologia, pensa-se em tecnologia, vive-se, de modo tão intenso que às vezes ela é tratada como um ente sobrenatural.

O simples fato de a mesma estar intimamente ligada ao modo de vida da sociedade atual mostra em muitas ocasiões que os avanços da tecnologia só são percebidos nas máquinas sofisticadas, na TV de LED, nos vídeos games de última geração, nos aparelhos eletrônicos em geral, nos computadores, etc., enquanto que alguns aspectos tecnológicos passam despercebidos.

O olhar do senso comum na maioria dos casos enxerga as tecnologias nestes materiais, e até mesmo pensam nas tecnologias dos filmes de ficção científica, onde aparecem cenas em que as máquinas dominam o homem, ou tentam exterminá-lo. Por exemplo, o filme *Exterminador do Futuro*, é um exemplo clássico da evolução da tecnologia contra o modo de vida do ser humano, a máquina em uma busca incessante para dominar o seu criador.

Segundo Kenski (2003) esta é uma visão redutora sobre o que é a tecnologia, como

algo negativo, ameaçador e perigoso, as pessoas ficam apreensivas com a possibilidade de que esses fenômenos irreais se tornem realidade. A autora argumenta que é importante lembrar que a tecnologia faz parte da vida humana, a evolução tecnológica está na mesma linha da evolução humana (raciocínio).

A própria autora cita os tempos remotos em que os homens eram desprovidos de força física, e tinham que enfrentar diversas situações onde colocavam suas vidas em risco, contra animais mais fortes que eles. O homem se utilizou de instrumentos que poderiam deixá-lo em vantagem frente a esses animais fisicamente mais fortes, a necessidade de sobrevivência fez com que o homem criasse técnicas para caçar e para se defender, para isso, o homem utilizou materiais que estavam a sua disposição, transformando-os em ferramentas a partir de ossos de animais mortos, paus e pedras.

Kenski (2003, 2007) destaca que com o aprimoramento do raciocínio do ser humano tem garantido um processo crescente de inovações tecnológicas. A tecnologia está impregnada na sociedade atual, nas construções das residências e prédios, nos meios de transporte que são utilizados, a tecnologia faz parte da civilização humana. Há situações em que a tecnologia é empregada para salvar literalmente vidas, marca-passos e válvulas para ajudar o funcionamento do coração, além dos instrumentos cirúrgicos com câmeras computadorizadas e o laser que diminuem os traumas nas cirurgias, nos olhos, as lentes de contatos, etc., são exemplos de uso da tecnologia em prol da vida.

Nos dias atuais é comum falar em acessar a internet, efetuar uma ligação de um telefone móvel, usar *skype*, *facebook*, *twitter*, etc. Estas tecnologias não são encaradas na atualidade como uma questão de status, mas sim uma questão de comunicação rápida e imediata. O homem da cidade e muitas vezes o homem do campo não se vêem sem alguns destes recursos tecnológicos, principalmente para quem vive na zona urbana, ficar sem a internet é o fim do mundo.

Segundo Kenski (2003) o mundo passou e passa por constante evolução tecnológica e que a utilização das tecnologias afeta todos os campos educacionais. Elas encaminham as instituições para a adoção de uma cultura informática educacional que exige uma reestruturação sensível não apenas das teorias educacionais, mas da própria percepção e ação educativa.

De acordo com Borba e Penteadó (2007) o tema educação e informática é discutido há

décadas no Brasil e em outros países. Os autores ainda relembram o receio em torno da utilização da informática pelos alunos, acreditava-se que os alunos só iriam apertar teclas com a introdução dos computadores nas redes de ensino, e só iriam obedecer às orientações dadas pela máquina. No entanto, com o passar do tempo esta visão redutora da utilização dos ambientes computacionais perderam força, novas perspectivas foram criadas para o uso do computador como uma ferramenta pedagógica. De acordo com o referencial teórico usado neste trabalho, os ambientes computacionais são considerados relevantes meios pedagógicos para o processo de ensino aprendizagem.

A evolução foi tal que o primeiro computador pesava aproximadamente 30 toneladas. Atualmente existem computadores que cabem na palma da mão de uma pessoa. O computador, no início de sua criação, tinha fins militares, e o seu desenvolvimento ajudou muito as forças armadas em montar suas estratégias de guerra, na espionagem, e no desenvolvimento do material bélico com programas e *softwares* sofisticados, capazes de fazer as mais diferentes simulações de guerra (ataque e defesa). Kenski (2007) fala que “assim como na guerra, a tecnologia também é essencial para a educação. Ou melhor, educação e tecnologia são indissociáveis” (p. 43).

Borba e Penteadó (2007) relatam que inicialmente era comum a argumentação de que o computador fosse realizar a linha de raciocínio do aluno, e que iria comprometer o desenvolvimento de sua inteligência.

Muitas destas manifestações a favor ou contra ao uso dos computadores nas escolas partiram muitas vezes dos próprios educadores. Segundo Borba e Penteadó (2007), existiam opiniões de professores que diziam: se meu aluno usar a calculadora, como ele vai aprender a fazer conta? Se meu aluno apertar um botão e o gráfico aparecer na tela do computador como este aluno vai aprender a fazer uma construção gráfica?

Borba e Penteadó (2007) respondem as essas perguntas:

...Sobre essas perguntas seria melhor reformulá-las dentro do contexto do uso do lápis e papel. Perguntamos: será que o aluno deveria evitar o uso intensivo de lápis e papel para que não fique dependente dessas mídias? Em geral, as pessoas ficam perplexas diante de tal questão. “Como assim?” parece que não consideram o lápis e o papel como tecnologias, da mesma forma que o fazem com o computador. Para elas, o conhecimento produzido quando o lápis e o papel estão disponíveis não causa dependência. É como se a caneta, por exemplo, fosse “transparente” para os que advogam essa posição. Para nós, entretanto sempre há uma dada mídia envolvida na produção de conhecimento... (BORBA e PENTEADO, 2007, p. 12-13).

Assim como na sociedade, na educação a inovação da tecnologia também tem

avançado consideravelmente. Neste sentido Eco (1996) argumenta que a sociedade caminha para uma liberdade na qual a criatividade coexistirá com a interpretação as inovações tecnológicas. Além disso, não se deve dizer que uma coisa velha será substituída por outra coisa nova.

...Nós temos ambas, graças a Deus. *Zapear* a televisão é um tipo de atividade que não tem nada a ver com assistir um filme...

...Até agora eu tenho tentado mostrar que a chegada de dispositivos tecnológicos novos não necessariamente faz as tecnologias prévias obsoletas. O carro anda mais rápido que a bicicleta, mas os carros não tornaram as bicicletas obsoletas e nenhuma melhoria tecnológica pode fazer uma nova bicicleta melhor do que as anteriores. A ideia de que uma tecnologia nova extingue as anteriores é muito simplista... (ECO, 1996, s/paginação).

Seguindo a linha de raciocínio de Umberto Eco o giz e a lousa, foram considerados também, como recursos tecnológicos em uma dada época. Estas mídias romperam fronteiras, e tiveram o auge de inovação tecnológica na ministração das aulas, onde a linguagem oral predominava. Mas nenhum professor deixou de falar, para só escrever na lousa, existe uma articulação entre essas mídias.

Os professores não desapareceram com a chegada dos computadores na escola. Baldini (2004) destaca em seu trabalho que uma parte considerável da sociedade tem acesso a recursos informáticos, de tal forma que cada vez mais a informática vem ocupando maior espaço no cotidiano da sociedade. Nos ambientes escolares, existem grandes esforços por parte dos educadores para que a informática esteja cada vez mais frequente nas práticas pedagógicas. Mesmo que a inserção da tecnologia tenha começado há algumas décadas na educação, esta não reagiu ainda de forma satisfatória aos estímulos da inserção da tecnologia. Moran<sup>13</sup> destaca que “as tecnologias chegaram à escola, mas estas sempre privilegiaram mais o controle a modernização da infraestrutura e a gestão do que a mudança”.

Lévy (1993) discorre:

...É certo que a escola é uma instituição que há cinco mil anos se baseia no falar/ditar do mestre, na escrita manuscrita do aluno e, há quatro séculos, em um uso moderado da impressão. Uma verdadeira integração da informática (como do audiovisual) supõe, portanto o abandono de um hábito antropológico mais que milenar o que não pode ser feito em alguns anos (LÉVY, 1993, p. 4).

Mesmo com toda a inovação da tecnologia e os recursos da informática disponíveis para a educação, os professores não irão abandonar suas aulas expositivas e explicativas com

<sup>13</sup> Moran. J. M. “A integração das tecnologias na educação”. Disponível em: <http://www.eca.usp.br/prof/moran/integracao.htm>. (Acesso em: agosto de 2011).

as mídias ditas tradicionais e usar o computador a todo o momento, indiscriminadamente.

Lévy (1993) levanta uma questão importante, não dá para mudar as práticas pedagógicas dos professores de uma hora para outra. Kenski (2007) concorda com Levy acrescentando que realmente não se trata de um passe de mágica, a inovação das tecnologias passa por um processo de assimilação no uso de seus recursos e também no seu aperfeiçoamento.

Os documentos oficiais PCN+ (2002) e OCEM (2006) abarcam neste mar de possibilidades a inserção da tecnologia na educação, destacando a importância da utilização diversificada das novas mídias a favor de um ensino de qualidade:

Também é importante e necessária a diversificação de materiais ou recursos didáticos: dos livros didáticos aos vídeos e filmes, uso do computador, jornais, revistas, livros de divulgação e ficção científica e diferentes formas de literatura, manuais técnicos, assim como peças teatrais e música dão maior abrangência ao conhecimento, possibilitam a integração de diferentes saberes, motivam, instigam e favorecem o debate sobre assuntos do mundo contemporâneo. O uso do computador no ensino é particularmente importante nos dias de hoje (PCN+, 2002, p. 109).

[...] A Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática (OCEM, 2006, p. 87).

A relevância de tais ambientes computacionais também pode ser percebida no Currículo do Estado de São Paulo (2010). Um documento oficial que de um modo geral vislumbra a inserção da tecnologia na rede de ensino como um dos possíveis recursos para melhoria da qualidade do processo de ensino aprendizagem.

O documento apresenta princípios orientadores para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo para a prática educativa. A fim de que as escolas possam preparar seus alunos para um novo tempo, onde as tecnologias de informação e comunicação estão em evidência. Neste sentido o Currículo do Estado de São Paulo apresenta os recursos tecnológicos como um possível articulador de princípios para um currículo comprometido com o seu tempo e com uma escola que também aprende, imprimindo um ritmo sem precedentes:

A tecnologia imprime um ritmo sem precedentes ao acúmulo de conhecimentos e gera profunda transformação quanto às formas de estrutura, organização e distribuição do conhecimento acumulado. Nesse contexto, a capacidade de aprender terá de ser trabalhada não apenas nos alunos, mas na própria escola, como instituição educativa. Isso muda radicalmente a concepção da escola: de instituição que ensina para instituição que também aprende a ensinar. Nessa escola, as interações entre os responsáveis pela aprendizagem dos alunos têm caráter de ações

formadoras, mesmo que os envolvidos não se dêem conta disso (SÃO PAULO, 2010, p. 10).

Kenski, (2003) concorda com a visão que neste contexto novos processos de ensino mediados pelas tecnologias vão além da relação entre ensinar e aprender. O conhecimento gerado da interação e comunicação entre todos os envolvidos no processo de ensino aprendizagem têm como premissa a formação de um aluno, autônomo, crítico, consciente da sua responsabilidade individual e social, enfim, um novo cidadão para uma nova sociedade.

Kenski (2003, 2007), Oliveira (2002), Borba e Penteadó (2007) e Miskulin (2010) concordam com a ideia de que, o ambiente informatizado por mais interessante e rico que possa parecer, por si só não contribui efetivamente para a geração de conhecimento, o professor como mediador do conhecimento aparece nesse cenário em posição fundamental.

O professor é quem dá o “*start*”, é o professor quem avalia o desenvolvimento matemático do aluno com a utilização da ferramenta informatizada como mediadora do processo de ensino aprendizagem, ele avalia as possíveis mudanças de estratégias, para a geração de novos conhecimentos.

Algumas interpretações dos relatos de Oliveira (2002), Kenski (2003, 2007) e Borba e Penteadó (2007) aprofundam ainda mais o entendimento de que o professor é uma peça fundamental para o processo de ensino aprendizagem, com o computador como uma ferramenta pedagógica de mediação, o centro das atenções são os alunos. Estes por sua vez devem ser motivados, desafiados, intrigados, curiosos, com uma expectativa tal, que deixará o professor em alguns momentos sem saída, por efetuar questionamentos que acontecerão no decorrer do processo de ensino.

O aluno como um agente participativo do processo de ensino aprendizagem é muito relevante, mas a responsabilidade e o papel decisivo do professor são incontestáveis. Por este motivo que a substituição do professor pela máquina, por mais que se fale em inteligência artificial, nunca poderá acontecer. A capacidade que o professor tem de avaliar e tomar decisões rápidas, com uma turma de quarenta alunos, que é o caso das escolas públicas, dificilmente será substituída por uma máquina.

### 3.3.2 - Disseminação tecnológica computacional

Esse texto disseminação tecnológica computacional tem como perspectivas agregar mais subsídios teóricos para corroborar com a relevância deste trabalho de pesquisa, que tem por hipótese: o uso da tecnologia computacional, com o auxílio de um *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, poderá favorecer a proposta de articulação das Situações de Aprendizagem do Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo (2009), de forma simples e significativa. Assim como, as considerações tecidas anteriormente sobre a inserção da tecnologia na sociedade e na educação, aqui será dado ênfase ao uso de ambiente de Geometria Dinâmica, buscando vislumbrar aspectos das representações dinâmicas e estáticas, atrelado ao que está posto nas OCEM (2006) e no Currículo do Estado de São Paulo (2010).

O ponto de partida dessa discussão é o Currículo do Estado de São Paulo (2010) Matemática e suas Tecnologias, o documento evidencia o papel da tecnologia nesse cenário de mudança de cultura quanto ao seu uso. Ressalta a contribuição das tecnologias da informação para uma mudança na produção, na organização, no acesso e na disseminação do conhecimento, que contribui para a melhoria da qualidade no ensino.

...Certamente os numerosos recursos tecnológicos disponíveis para utilização em atividades de ensino encontram um ambiente propício para acolhimento no terreno da Matemática: máquinas de calcular, computadores, *softwares* para a construção de gráficos, para as construções em Geometria e para a realização de cálculos estatísticos são muito bem-vindos, bem como o seu uso será crescente, inevitável e desejável, salvo em condições extraordinárias, em razão de extremo mau uso (SÃO PAULO, 2010, p. 33, 34).

Os computadores ainda segundo o Currículo de São Paulo, atualmente são considerados equipamentos importantíssimos para os jornalistas e escritores, principalmente na edição de textos e acesso às informações advindas da internet. Mas, uma ressalva é apresentada no âmbito da Matemática, é possível vislumbrar naturais e promissoras possibilidades de assimilação, consciente dos inúmeros recursos que as tecnologias informáticas podem oferecer para a Educação Matemática.

Miskulin (1999) considera positiva a disseminação da tecnologia computacional nas escolas, pois uma nova lógica se estabelece entre os sujeitos que participam do processo de ensino aprendizagem. Lógica esta, que influencia a concepção de mundo dos sujeitos, modificando os modos de pensar, seus sistemas de valores e suas crenças, os impulsionando a trilhar novos caminhos nas diversas dimensões de seu pleno desenvolvimento como cidadãos.

Esta visão de Miskulin (1999) é verificável também na redação das OCEM (2006), onde são encontrados argumentos de que a tecnologia está no cotidiano dos cidadãos, de tal maneira que exige indivíduos com certa capacidade para bem usá-la.

Nesta dimensão de uso da tecnologia no cenário da Matemática como um recurso que facilite o processo de ensino aprendizagem, há dois aspectos relevantes quanto ao uso dos recursos tecnológicos na Matemática. A Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), considerando o primeiro aspecto, a Matemática para a Tecnologia, deve-se pensar na formação que capacita para o uso, por exemplo: calculadoras e planilhas eletrônicas. No trabalho com calculadoras, é preciso saber informar, via teclado, as instruções de execução de operações e funções, e isso exige conhecimentos matemáticos. As planilhas eletrônicas são programas de computador que servem para manipular tabelas cujas células podem ser relacionadas por expressões matemáticas, é preciso conhecimento matemático mais apurado para executar as operações e as funções que são definidas sobre as células de uma tabela em que se faz uso de notação para matrizes.

O segundo aspecto apontado pela OCEM (2006) é a Tecnologia para a Matemática. Existem programas de computador (*softwares*) nos quais é possível explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, propiciar a experimentação, testar hipóteses, esboçar conjecturas, criar estratégias para resolver problemas, entre outros.

As OCEM (2006) destacam algumas características desses programas: a) conter certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento; b) oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático– numérica, algébrica, geométrica; c) possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macroconstruções; d) permitir a manipulação dos objetos que estão na tela.

No Currículo do Estado de São Paulo (2010) os *softwares* de Geometria Dinâmica estão na linha de ferramentas que possibilitam a articulação das quatro faces para o conhecimento Geométrico, que se relacionam permanentemente na caracterização do espaço: a percepção, a concepção, a construção e a representação (MACHADO, 1995).

No que tange ao ensino de Geometria as OCEM (2006) relatam: há *softwares* que possuem régua e compasso virtuais, com menu de construção em linguagem clássica da

Geometria, reta perpendicular, ponto médio, mediatriz, bissetriz, etc. Ao realizar uma construção, pode-se aplicar movimento a seus elementos, que serão preservadas as relações geométricas impostas à figura. Por esta especificidade tais programas são considerados *softwares* de Geometria Dinâmica, que enriquecem as imagens mentais associadas às propriedades geométricas.

Para Gravina (2009) os ambientes de Geometria Dinâmica disponibilizam ferramentas interativas que “incorporam sistemas dinâmicos de representação” de objetos que podem ser trabalhados na tela do computador e podem ser manipulados, objetos abstratos respondem às elaborações e construções mentais do indivíduo.

Gravina (2009) considera que o papel primordial dos sistemas de representação, é: “ser instrumento que dá suporte aos pensamentos, mais especificamente aos processos cognitivos que produzem conhecimento matemático”.

A versatilidade do ambiente dá fluidez aos processos mentais e suporta formas de pensar que ultrapassam as do discurso oral ou escrito, ou do desenho estático. As simulações e as explorações exteriorizam a atividade intelectual que antecede o controle e a exposição racional (GRAVINA, 2001, p. 36)

Os ambientes de Geometria Dinâmica segundo Gravina (2001) são instrumentos que servem como meios das ações mentais e dos experimentos de pensamento. Com tais ambientes tecnológicos as dificuldades do indivíduo frente ao saber do objeto de construção podem ser superadas, pela versatilidade em potencial dos ambientes de Geometria Dinâmica que oferecem formas de pensar e visualizar o objeto não somente empiricamente e dedutivamente, como na representação estática do ambiente do lápis e do papel.

Scheffer (2010) contribui com a discussão, apresentando a utilização de mídias como a dobradura e o *software* dinâmico no contexto da Geometria na formação continuada de professores, em um laboratório de ensino de Matemática. Seu trabalho teve como objetivo estudar polígonos, seus elementos, medidas, ângulos, cálculo de áreas e construções que iam desde a régua e o compasso, passando pelas dobraduras e chegando à tela do computador.

De acordo com o relato de Scheffer (2010), o trabalho com dobradura na confecção de brinquedos, móveis, etc., assim como o ambiente dinâmico, favorece a discussão e a exploração de propriedades dos polígonos, bem como a visualização dos objetos na tela do computador que possibilita a oportunidade de observar, usar e estabelecer relações espaciais. A autora relata que o exercício de observação, descrição, representação e análise encontradas

e destacadas, favorece a formação de imagens, o que fundamenta o pensamento geométrico.

Para o desenvolvimento das atividades no laboratório de informática, Scheffer (2010) utilizou o *software Geometricks*, conforme Rosa (2010), nesse *software* não é possível a introdução de nenhuma nova ferramenta, ele possui uma específica para a construção de fractais e este aplicativo não é gratuito. A autora diz que com a utilização do *software* de Geometria Dinâmica, o ensino de Geometria pôde adquirir características mais dinâmicas, contando assim com diferentes visualizações para os objetos geométricos na tela do computador.

Miskulin (1999) argumenta em relação à escolha de um *software* educacional que há características pedagógicas a ser consideradas, para a utilização do mesmo no laboratório de informática, a escolha deve estar vinculada à metodologia que será usada, ao objetivo a ser alcançado no desenvolvimento de conteúdos e conceitos relacionados ao conhecimento matemático.

A escolha do *software* GeoGebra como recurso pedagógico para o desenvolvimento da presente pesquisa atende a perspectiva de investigação, a metodologia desta pesquisa, a hipótese e a questão de pesquisa:

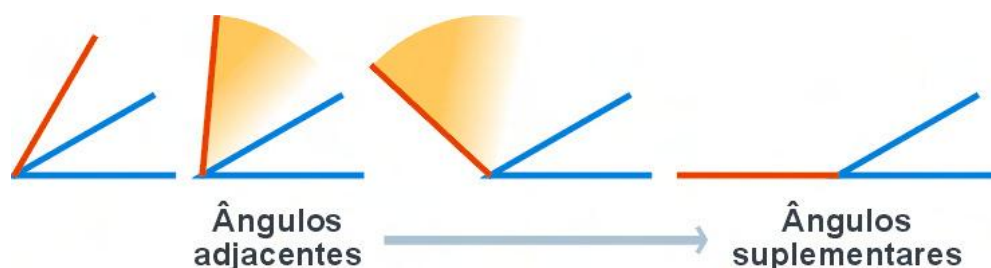
- Perspectiva de investigação: A luz do Currículo do Estado de São Paulo (2010), analisar as atividades de Geometria, do 4º bimestre da primeira série do Ensino Médio, do Caderno do Professor de Matemática publicado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (2009);
- Metodologia: Análise de Conteúdo, Pré-análise, na qual se escolhem os documentos, se formulam hipóteses e objetivos para a pesquisa; na Exploração do material, na qual se consiste essencialmente na análise do corpus; no tratamento dos resultados, inferências e interpretações;
- Hipótese: O uso da tecnologia computacional, com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, poderá favorecer a proposta de articulação das Situações de Aprendizagem do Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo (2009), de forma simples e significativa;
- Questão de pesquisa: De que maneira é possível criar uma abordagem dinâmica, com o *software* GeoGebra para o conteúdo de Geometria Plana do Ensino Médio, com base

no Currículo do Estado de São Paulo?

Esse discurso de certa forma redundante em torno da tecnologia computacional e seus recursos, não caracteriza de maneira alguma que a presente pesquisa tenha a intenção de criar um “libelo” a favor de uma pseudo “revolução” da informatização na escola pública do Estado de São Paulo, mas, sim um fundamento sólido que viabilize as possibilidades de uso pedagógico do *software* GeoGebra, a partir das Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática, que estão a serviço do Currículo do Estado de São Paulo (2010).

No entanto, Gravina (2001) diz que, mesmo antes da disseminação da tecnologia computacional, a literatura registra abordagens dinâmicas dos objetos geométricos, parecidas com as abordagens atuais com a utilização dos recursos da tecnologia informática. Ela cita em seu trabalho ZYKOVA,<sup>14</sup> contrapondo-se à prática usual de tratamento estático dos desenhos, responsável pela constituição de imagens prototípicas (modelo), disse que para ter habilidade para operar com conceitos era necessário experiência visual qualitativamente diversificada. Em discussão com os alunos sobre os conceitos de ângulos adjacentes e ângulos suplementares, o segundo conceito é tratado como caso particular do primeiro, mediante a visualização do movimento do lado de um dos ângulos adjacentes, até que os dois ângulos tornam-se suplementares.

Na Figura 2 é possível observar o trabalho ZYKOVA contrapondo-se à prática usual de tratamento estático dos desenhos.



**Figura 2 - Ângulos em movimento: de adjacente a suplementar.**

**Fonte: (GRAVINA, 2001, p. 86)**

<sup>14</sup> ZYKOVA, V. I. Operating with concepts when solving geometry problems, em Kilpatrick, J, e Wirzup, I. Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, vol 1, Scholl Mathematics Study Group, Stanford University e Survey of Recent East European Mathematical Literature, University of Chicago, 1969, p. 149, 188. Trabalho originalmente publicado em 1950 nos Proceedings of the Academy of Pedagogical Sciences of the RSFR, vol. 28. Na descrição do trabalho de ZYKOVA foram feitos ajustes entre a linguagem utilizada em seu artigo e a utilizada neste Capítulo. O texto original é transcrito no Apêndice III (GRAVINA, 2001, p. 73).

A abordagem dinâmica realizada na Figura 2 mesmo com a representação estática, mostrou o quanto é importante a forma diversificada de conceber o conceito de um objeto geométrico.

Nessa linha tênue entre representação estática e dinâmica com auxílio do *software*, há diversas opiniões sobre a relevância de uma representação ou outra, como é expressa nos relatos de Borba e Penteadó (2007): “há algumas décadas existiam muitas posições contrárias ao uso do computador como um recurso pedagógico educacional, segundo os autores era corriqueiro ouvir que o computador só servia para agilizar os cálculos”.

Os relatos de Lauro (2007) destacam que nos últimos anos muito se tem investigado sobre o ensino Geometria com o uso do computador para levar a uma aprendizagem significativa. A utilização do computador como uma ferramenta mediadora auxilia o processo de ensino/aprendizagem, facilitando e melhorando a execução de trabalhos. É um instrumento que constrói objetos rapidamente e com perfeição, possibilitando o estabelecimento de conjecturas, despertando a criatividade, estimulando a curiosidade em conhecer, em descobrir. Segundo a autora:

A partir de um projeto pedagógico bem elaborado e com *softwares* bem selecionados, os computadores podem ser instrumentos muito valiosos para os professores. Atualmente, existem alguns *softwares* que permitem construir todas as figuras da Geometria elementar que podem ser traçadas com a régua e o compasso...

... permite construir e explorar objetos geométricos interativamente, e, uma vez construídas, as figuras podem ser movimentadas conservando as propriedades que lhes haviam sido atribuídas. Essa possibilidade de deformação permite o acesso rápido e contínuo a diferentes casos, constituindo-se numa ferramenta muito rica para a validação experimental de fatos geométricos... (LAURO, 2007, p. 18).

Como ressaltou Lauro (2007) os computadores como um meio e não um fim para o processo de ensino e aprendizagem são bem vindos, assim como os *softwares* de Geometria Dinâmica que possibilitam fazer a articulação entre as quatro faces para conceber o conhecimento no ensino de Geometria. Tais faces são abordadas no Currículo do Estado de São Paulo (2010), oriundas das ideias de Machado (1995) como uma polarização entre as atividades preparatórias:

Percepção: à observação e à manipulação direta de objetos materiais, a caracterização das formas mais frequentes através de atividades empíricas.

Construção: de objetos em sentido físico, através de massas, varetas, ou papéis, por exemplo.

Representação: de objetos, através de desenhos, onde as propriedades costumam ser parcialmente concretizadas.

Concepção: a sistematização do conhecimento geométrico que se seguirá, onde predominarão as definições precisas, o enunciado cuidadoso das propriedades, o encadeamento de preposições nas demonstrações formais ou informais de certos resultados, que são os teoremas (MACHADO 1995, p 51, 54).

Nos Cadernos do Professor de Matemática são apresentados, “sempre que possível materiais disponíveis (textos, *softwares*, *sites* e vídeos, entre outros)”, em sintonia com a forma de abordagem do Currículo do Estado de São Paulo, que podem ser utilizados pelo professor para o enriquecimento de suas aulas (SÃO PAULO, 2009, p. 8).

Durante a fase de análise do conteúdo do Caderno do Professor de Matemática do primeiro ano do ensino médio, do quarto bimestre, não foi encontrada nenhuma sugestão de uso dos *softwares* de Geometria Dinâmica como recurso pedagógico para as Situações de Aprendizagem apresentadas nesse material. Ao passo, que o Currículo do Estado de São Paulo (2010) reconhece os numerosos recursos tecnológicos disponíveis para utilização em atividades de ensino da Matemática, tais como: máquinas de calcular, computadores, *softwares* para a construção de gráficos, para as construções em Geometria e para a realização de cálculos estatísticos, etc. O presente trabalho de pesquisa reconhece esta seara como um terreno propício para o acolhimento de sugestões de atividades com o uso do GeoGebra, vislumbra com simpatia a possibilidade de trabalho produtivo nesse ambiente.

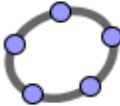
### **3.4 - Softwares**

Existem alguns tipos de programas disponíveis no mercado que podem ser encontrados facilmente na internet, alguns com mais ou menos recursos, depende da utilidade que será exigida do *software*. No quadro 2 é possível ter uma noção da disponibilidade e da variedade de *softwares* que podem ser utilizados, por professores, pesquisadores, alunos e afins, como recurso pedagógico para as mais diferenciadas estratégias de ensino.

<b>Gráficos</b>	
	<b>Winplot</b> - é um utilitário no desenho de gráficos, consegue desenhar e animar curvas e superfícies. (Software livre)
	<b>GrafEq</b> - é um <i>software</i> que permite efetuar gráficos de equações e de inequações. ( <i>Software</i> não é livre - permite experimentar/avaliar)
	<b>GrafMat</b> - é um <i>software</i> que permite efetuar gráficos de funções. ( <i>Software</i> não é livre - permite experimentar/avaliar)
	<b>GeoGebra</b> - é um <i>software</i> de matemática dinâmica para utilizar em ambiente de sala de aula, que reúne <b>Geometria</b> , <b>álgebra</b> e cálculo.
<b>Geometria</b>	
	<b>Cinderella</b> - é uma ferramenta geométrica interativa. ( <i>Software</i> não é livre - permite experimentar/avaliar)
	<b>Cabri -Géomètre</b> - é um <i>software</i> que permite construir todas as figuras da Geometria elementar que podem ser traçadas com a ajuda de uma régua e de um compasso... ( <i>Software</i> não é livre - permite experimentar/avaliar)
	<b>O Geometer's Sketchpad</b> - é um <i>software</i> para Geometria Euclidiana (e não só). ( <i>Software</i> não é livre - permite experimentar/avaliar)
	<b>Tess</b> - Translações, simetrias... ( <i>Software</i> não é livre - permite experimentar/avaliar)
	<b>3D SecBuilder</b> - Escolhe um sólido e marca três pontos para definir uma seção.
	<b>WinGeom</b> - Escolhe um sólido e marca três pontos para definir uma seção.
<b>Ferramentas para produzir materiais</b>	
	<b>HotPotatoes</b> - inclui seis aplicações, permite criar fichas de múltipla escolha interativa, resposta curta, palavras cruzadas, preencher espaços... Útil para Professores ( <i>Software</i> não é livre, mas pode ser usado para fins educacionais)
	<b>Edilim</b> - É uma aplicação que permite criar vários tipos de atividades interativas ( <i>Software</i> livre)
	<b>QuizFaber</b> - É uma aplicação que permite criar vários tipos de atividades interativas ( <i>Software</i> livre)
	<b>Jcllic</b> - É um programa de autoria, de uso livre, desenvolvido numa plataforma Java, que serve para construir vários tipos de exercícios multimídia: puzzles, associações, exercícios com texto, crucigramas e sopas de letras, permitindo uma integração com som e imagem.

### Quadro 2 – Softwares disponíveis.

Fonte: [http://rpedu.pintoricardo.com/Software\\_util.php](http://rpedu.pintoricardo.com/Software_util.php). (Acesso em: agosto de 2011)



### 3.4.1 - GeoGebra<sup>15</sup>

O GeoGebra é um *software* de Matemática dinâmica que junta Geometria, álgebra e cálculo. Foi desenvolvido principalmente para o ensino e aprendizagem da Matemática, por Markus Hohenwarter, na universidade americana Florida Atlantic University.

Por um lado, o GeoGebra é um sistema de Geometria Dinâmica que permite construir vários objetos: pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas, gráficos representativos de funções e curvas parametrizadas, os quais podem depois ser modificados dinamicamente.

Por outro lado, equações e coordenadas podem ser introduzidas diretamente com o teclado. O GeoGebra tem a vantagem de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos. Permite determinar derivadas e integrais de funções e oferece um conjunto de comandos próprios da análise matemática, para identificar pontos singulares de uma função, como raízes ou extremos.

O GeoGebra fornece três diferentes vistas dos objetos matemáticos: na Janela Gráfica, na Janela Algébrica ou na numérica e na Folha de Cálculo. Elas permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente (ex., pontos, gráficos de funções), algebricamente (ex, coordenadas de pontos, equações) e nas células da folha de cálculo. Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados.

---

<sup>15</sup> Ajuda: GeoGebra Manual Oficial da Versão 3.2 . Disponível em: [http://www.GeoGebra.org/help/docupt\\_PT.pdf](http://www.GeoGebra.org/help/docupt_PT.pdf). (Acesso em: agosto de 2011).  
Ajuda: GeoGebra 3.0. Disponível em: <http://www.passeiospelamatematica.net/manual%20GeoGebra.pdf>. (Acesso em: agosto de 2011).



**Figura 3. Tela inicial do software GeoGebra.**

Fonte: [http://www.geogebra.org/help/docupt\\_PT.pdf](http://www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf) (Acesso em: agosto de 2011)

A visualização da Figura 3 permite vislumbrar a dimensão das possibilidades de uso de um *software* dessa magnitude. Como já foi relatado no quadro 2, existem outros tipos de *softwares* disponíveis. Cada um, com as suas características, distintas ou semelhantes. Bongiovanni (2006) concorda com autores citados anteriormente sobre as vantagens desses *softwares* em relação à construção com régua e compasso em papel. O autor defende a linha de pensamento de que com esses recursos tecnológicos inúmeros exemplos de propriedades geométricas podem ser estudadas, melhor na Geometria Dinâmica do que no ensino sem o computador.

Bongiovanni (2006) tem como pressuposto que a Geometria Dinâmica pode contribuir e estabelecer uma importante diferença entre desenhar e construir:

**Desenhar** é reproduzir a imagem mental que temos de um objeto geométrico. É uma das representações de um objeto geométrico teórico. **Construir** é utilizar as propriedades do objeto geométrico para obter a sua representação. A construção, quando realizada num software de geometria dinâmica, preserva quando do deslocamento de um de seus pontos, as propriedades ligadas ao objeto geométrico que representa. Podemos dizer que, nesse caso, a construção é um desenho dinâmico que não perde as suas propriedades quando do deslocamento de seus pontos de base. A construção vai além do simples traçado empírico controlado apenas pela visualização. (BONGIOVANNI, 2006, p. 6).

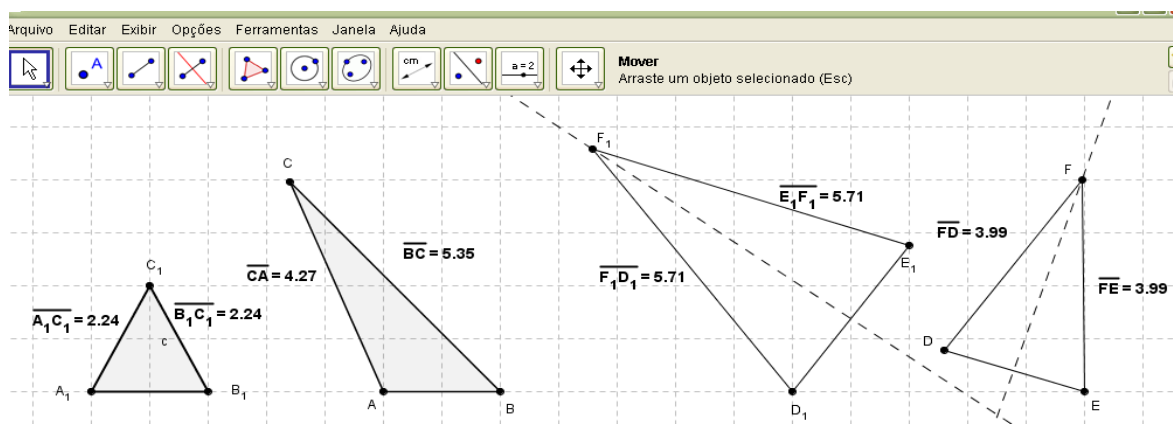
O autor completa, a manipulação de um representante de um objeto geométrico construído em ambiente de Geometria Dinâmica pode contribuir para uma melhor compreensão do objeto teórico. Um exemplo é para mostrar a diferença entre (traçar) e construir.

Desenhar um representante geométrico chamado triângulo isósceles com o *software* GeoGebra: uma opção prática é usar a ferramenta polígono, clicar na janela gráfica, criando um ponto (A), crie mais ponto (B) e clicando de volta sobre o ponto (A), está pronto o triângulo ABC, a seguir é necessário medir dois lados do triângulo, com a ferramenta de medir distâncias, movimentar os vértices do triângulo até obter duas medidas iguais para formar o triângulo Isósceles. Quando se movimenta um dos vértices novamente, o triângulo perde a propriedade de ser isósceles.

Para construir um representante do objeto geométrico teórico chamado triângulo isósceles, cria-se inicialmente um segmento DE, em seguida a mediatriz de DE. Colocar um ponto E pertencente à mediatriz criando os segmentos DE e EF. Ao movimentar os vértices do triângulo as medidas CE e DE serão preservadas e não perderá a propriedade de ser isósceles.

Bongiovanni (2006) destaca que os desenhos não permitem descobrir as propriedades das figuras, ao passo que as construções são relevantes para conjecturar sobre as propriedades das figuras. A verificação de casos particulares pode contribuir para propriedades gerais dos objetos geométricos.

A Figura 4 propicia a visualização do triângulo isósceles desenhado e construído.



**Figura 4. Desenho e construção do triângulo isósceles. Elaborado pelo autor**

Esse exemplo da Figura 4 é de certa forma, fácil de desenvolver, o professor não precisa ser um grande conhecedor do *software*, com pouco conhecimento o exercício é realizado rapidamente. Borba e Penteadó (2007) chamam à atenção para que tais situações não deixem o professor em uma “zona de conforto”, onde quase tudo que está a sua volta é conhecido, previsível e controlável.

Para Borba e Penteadó (2007) o professor precisa se movimentar, transitar em territórios desafiadores, de uma forma consciente, esses territórios são chamados pelos autores de “Zona de Risco, na qual é preciso avaliar constantemente a consequência das ações propostas”.

Na teoria, o professor para o desenvolvimento de um determinado conteúdo em sala de aula, tradicionalmente prepara a sua aula, pensa em quais são os pontos relevantes que merecem um aprofundamento, propõe discussões sobre determinado assunto, e instiga os alunos a participarem da construção do conhecimento em torno de um assunto.

No ambiente informatizado teoricamente não é diferente, os alunos são os mesmos, o diferencial que pode ocorrer nesse ambiente são os alunos que tem um conhecimento mais aprofundado sobre o funcionamento da máquina, pelo simples fato de estar conectado ao mundo da informática.

Oliveira (2007) resalta que a figura do aluno é outra frente ao novo cenário tecnológico. As possibilidades de o aprendiz engajar-se no processo como elemento ativo, crítico e autônomo pode ser potencializado nesse novo cenário. O aluno não é mais um assimilador passivo de conteúdos.

Nesse novo cenário onde as conexões do mundo virtual estão mais ativas, as relações professor aluno estão mais abertas, via *twitter*, *facebook*, *skype*, etc., os aprendizes se tornaram mais questionadores, não aceitam qualquer resposta do professor, como por exemplo: “foi Deus quem quis assim”. No ambiente computacional as dúvidas surgem em todos os momentos.

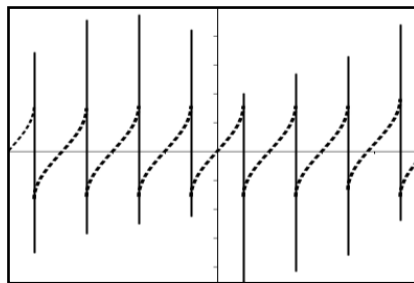
Borba e Penteadó (2007) relatam que por mais experiência que o professor tenha na utilização de ambientes computacionais com o auxílio dos diversos *softwares* existentes, é possível que ao manusear a máquina uma tecla apertada em combinação com outras, apresente situações não esperadas e programadas pelo professor, às vezes para se descobrir o que aconteceu, não é tão rápido.

Os autores relatam que diferentemente do que algumas pessoas acreditavam ou acreditam o computador não dá todas as respostas de forma direta e explícita, algumas vezes não possível de antemão entender as respostas que aparecem na tela. É necessário entender as relações que são estabelecidas pelo *software* em questão, em uma sala de aula, um acontecimento desse tipo pode constituir um ambiente de aprendizagem para todos

(professor/aluno).

Diante do exposto pelos autores quando o professor entra nessa zona de risco, a expansão das ideias matemáticas serão necessárias na utilização de um ambiente computacional, além de sempre estar pensando em novas estratégias de trabalho com os alunos. O desafio é constante, quanto mais se mergulha neste mundo informatizado, maior é o risco de se deparar com situações matemáticas que não lhes são familiares.

Borba e Penteadó (2007) citam um exemplo de um grupo de alunos, ao desenvolver uma atividade de funções trigonométricas num *software* gráfico, os alunos concluíram que a função tangente tem o seguinte formato da Figura 5:



**Figura 5. Representação gráfica, adaptada de Borba e Penteadó**  
**Fonte: (BORBA e PENTEADO, 2007, p. 58)**

Segundo os autores a conclusão que os alunos chegaram é que a imagem da Figura (5) corresponde ao gráfico da função tangente, a professora é chamada para verificar o resultado, e observa que não é assim, na Matemática que ela ensinou.

Borba e Penteadó (2007) comentam que a professora ficou surpresa ao ver a imagem na tela. Ela não espera por isso. O que estaria acontecendo? Isso nunca havia acontecido antes. A professora ficou paralisada por certo tempo, com os seguintes pensamentos: como dizer que a máquina errou? Mas a máquina não erra. Não posso dizer para os alunos que eles estão errados, sem ter uma explicação para isso. Mas também não posso deixar que acreditem que o gráfico da imagem é a função tangente. Não posso simplesmente admitir, de maneira apressada, que a tecnologia está possibilitando novas formas de pensar o gráfico da tangente.

Os autores relatam que a professora sabe que a imagem fornecida pelo computador tem um poder muito grande de convencimento, para descartá-la é preciso uma discussão apurada sobre o assunto. Ao fazer uma análise do gráfico com a classe, eles percebem que não faz sentido um segmento vertical passando na coordenada  $x = \pi/2$ , pois a função não está definida neste valor. Segundo os autores a dúvida continuava entre os alunos e a professora, a

professora propõe uma investigação detalhada para a classe tentar entender o que estava acontecendo com a imagem originada pelo computador.

... A professora telefona para sua colega que é mais experiente no uso desses *softwares* e relata o acontecido. A colega lhe dá a explicação, esse tipo de ocorrência se dá por conta da configuração do *software*. Ele está configurado para plotar os pontos e conectá-los por segmentos de retas. A colega chama a atenção para o fato que o computador trabalha com valores discretos e, assim, conecta um ponto  $(x, y)$  do gráfico da tangente com  $x$  na vizinhança de  $\pi/2$  pela esquerda com um ponto  $(x, y)$  do gráfico da tangente com  $x$  na vizinhança de  $\pi/2$  pela direita.

Embora não muito segura, a professora trouxe essa explicação para a classe e procurou explorar situações para comparar gráficos em que os pontos estavam plotados com ou sem conexão entre eles. A partir desta discussão eles percebem que muitas surpresas podem surgir devido à configuração da máquina. Na verdade, a configuração da máquina e a própria estrutura do *software*, podem favorecer o surgimento de situações imprevisíveis.

Diante de tudo isso, Borba e Penteado (2007), entendem que o professor é desafiado constantemente a rever e ampliar seus conhecimentos. Quanto mais ele se insere no mundo da informática, mais ele corre o risco de se deparar com situações matemáticas que não lhe são familiares. Os autores salientam que os desafios não são exclusivamente da informática, pode ocorrer em qualquer área do conhecimento.

Ressalta-se que a proposta desta pesquisa é fazer sugestões de atividades com uso do *software* GeoGebra, para as Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática. Não fica aqui caracterizado que o produto final deste trabalho irá colocar o professor em uma “zona de conforto”, mas permitirá fazer interpretações e inferências a tal ponto que as possibilidades de mediação de uso do Ambiente de Geometria Dinâmica possam enriquecer a articulação das quatro faces relacionadas ao conhecimento geométrico, em especial o conteúdo de Geometria Plana do quarto bimestre do primeiro ano do Ensino Médio, a luz do Currículo do Estado de São Paulo (2010).

O próximo capítulo será destinado ao estudo do Currículo do Estado de São Paulo, desde a sua idealização em 2007, a sua implementação como proposta curricular em 2008, até a consolidação em 2010. É importante esse estudo, pois, tal Currículo compõe a base que sustenta este trabalho de pesquisa.

## CAPÍTULO 4

### O CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE SÃO PAULO

---

---

Continuando a composição do corpus da pesquisa, este capítulo será destinado ao estudo panorâmico do Currículo do Estado de São Paulo, com referência ao período de 2007 a 2010, desde a idealização até a consolidação do documento, bem como a sua relação com as tecnologias da informação e comunicação na Matemática. Esse estudo do Currículo do Estado de São Paulo (2010) é considerado importante, pois, o documento trouxe novas perspectivas à ação educativa, além de o mesmo compor a base que sustenta este trabalho de pesquisa.

#### 4.1 - Idealização do Currículo

Neste momento é realizada uma análise para melhor compreensão do significado do Currículo paulista no processo educacional, é necessário conhecer os caminhos pelos quais percorreram seus estudos desde a sua idealização.

D' Ambrosio (1996) define Currículo como uma estratégia para a ação educativa (p. 68).

Neste sentido as ações governamentais, visando algumas estratégias para a melhoria da qualidade do ensino no Estado de São Paulo, criaram o programa São Paulo faz Escola<sup>16</sup> em 2007, pensando na implantação de um Currículo único para todas as mais de 5.000 escolas da rede pública estadual, com a perspectiva de que todos os alunos da rede estadual recebessem o mesmo material didático e seguissem o mesmo plano de aula.

O Programa São Paulo Faz Escola, desenvolvido pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo, teve como responsável pela organização da elaboração da proposta curricular no ano de 2007, a Secretária da Educação Prof<sup>a</sup>. Maria Helena Guimarães de Castro e Maria Inês Fini como coordenadora geral do projeto.

É importante lembrar que a própria Lei de Diretrizes e Bases que organiza a educação

---

<sup>16</sup> Criado para apoiar os processos que consolidam o Currículo no Estado de São Paulo. Pode ser acessado pelo site: <http://www.rededosaber.sp.gov.br/portais/spfe2009/HOME/tabid/1208/Default.aspx>. Acesso em: agosto de 2011.

nacional, nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996, em seu Artigo 10º, delegou aos estados autonomia para a elaboração de suas propostas. Entre as suas determinações podem ser destacadas que: os estados incumbir-se-ão de elaborar e executar políticas e planos educacionais, em consonância com as diretrizes e planos nacionais de educação, integrando e coordenando as suas ações e a de seus municípios.

Afirma também a Lei de Diretrizes e Bases (LDB), no Art. 12, que os estabelecimentos de ensino, respeitadas as normas comuns e as do seu sistema de ensino, terão a incumbência de: elaborar e executar sua proposta pedagógica, entre outras decisões.

No entanto, segundo São Paulo (2008) a criação da lei relatada no Art. 12, que deu autonomia às escolas para que definissem seus próprios projetos pedagógicos, foi um passo importante, porém essa tática descentralizada mostrou-se ineficiente ao longo do tempo.

São Paulo (2008) argumenta que por esse motivo, foi proposta uma ação integrada e articulada, com o objetivo de organizar melhor o sistema educacional de São Paulo, a fim de dar subsídios aos profissionais que integram a rede, com foco na qualidade, com uma base curricular comum para toda a rede de ensino estadual.

Uma das primeiras ações para a elaboração da Proposta Curricular do Estado De São Paulo partiu de estudos dos resultados do SAEB<sup>17</sup>, Prova Brasil<sup>18</sup>, do Enem, que integram o PDE<sup>19</sup>, e de outras avaliações realizadas em 2007. Depois a Secretaria de Estado da Educação pediu aos professores, coordenadores e diretores que enviassem relatos de boas experiências de aprendizagem na rede pública de ensino.

A nova Proposta Curricular nasceu atrelada ao Sistema de Avaliação do Estado. O Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – Saresp – é uma avaliação externa da Educação Básica, realizada desde 1996 pela Secretaria de Estado da Educação. O Saresp de 2007 e 2008 apresentou inovações e o exame passou a ser base das ações de gestão da Secretaria da Educação.

---

<sup>17</sup> Sistema de Avaliação da Educação Básica.

<sup>18</sup> Realizada a cada dois anos, avalia as habilidades em Língua Portuguesa (foco na leitura) e em Matemática (foco na resolução de problemas).

<sup>19</sup> PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação. Disponível em: [http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=209&Itemid=86](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=209&Itemid=86) (Acesso em: agosto de 2011).

De acordo com São Paulo (2008), o projeto visava propor um Currículo para os níveis de ensino Fundamental – Ciclo II e Médio, que apoiasse o trabalho realizado nas escolas estaduais e que contribuísse para a melhoria da qualidade das aprendizagens dos alunos.

De acordo com os pressupostos de Sacristán (2000):

As reformas curriculares nos sistemas desenvolvidos educativos obedecem pretensamente à lógica de que através delas se realiza uma melhor adequação entre os currículos e as finalidades da instituição escolar, ou a de que com elas se pode dar uma resposta mais adequada à melhora das oportunidades dos alunos e dos grupos sociais (SACRISTÁN, 2000, p. 18).

Nessa perspectiva São Paulo (2008) buscou realizar uma melhor adequação entre os currículos e as finalidades da instituição escolar, na tentativa de atingir adequadamente à melhora na qualidade de ensino. Com uma educação à altura dos desafios contemporâneos, com um Currículo comprometido com o seu tempo, com uma escola que também aprende, o currículo como espaço de cultura, as competências como referência, com prioridade a competência da leitura e da escrita, articulando as competências para aprender e desenvolver uma articulação com o mundo do trabalho.

Na busca de uma melhor adequação do Currículo, São Paulo (2008) relata que também procurou cumprir seu dever de garantir a todos uma base comum de conhecimentos e competências, para que as escolas funcionem de fato como uma rede. Apresentando nesse documento base os princípios orientadores para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo. Abordando algumas das principais características da sociedade do conhecimento e das pressões exercidas sobre os jovens cidadãos, propondo princípios orientadores para a prática educativa, a fim de que as escolas possam se tornar aptas a preparar seus alunos para esse novo tempo. Priorizando a competência de leitura e escrita, esta proposta define a escola como espaço de cultura e de articulação de competências e conteúdos disciplinares.

Segundo São Paulo (2008), foi emitido um segundo documento de orientações para a Gestão do Currículo na Escola, dirigido especialmente às unidades escolares e aos gestores que as lideram e apóiam: diretores, assistentes técnico-pedagógicos, professores coordenadores e supervisores. Esse documento não trata da gestão curricular em geral, mas tem a finalidade específica de apoiar o gestor para que seja um líder e animador da implementação desta Proposta Curricular nas escolas públicas estaduais de São Paulo.

Por fim, São Paulo (2008) relata que para completar a Proposta Curricular foi elaborado por diversos especialistas das áreas do conhecimento um conjunto de documentos dirigidos especialmente aos professores. Esses documentos foram chamados de Cadernos do Professor.

No início do ano de 2008, foi colocada em prática a nova Proposta Curricular, para atender à necessidade de organização do ensino em todo o Estado. Como parte preliminar da implementação da Proposta Curricular, a Secretaria do Estado elaborou um material denominado *Jornal do Aluno*, com orientação de estudos para toda a rede estadual paulista. Durante 42 dias, os alunos fizeram uso desse material com características interdisciplinares, como parte de uma recuperação pontual em português e Matemática. Neste mesmo ano o Caderno do Professor foi distribuído para todo o corpo docente da rede pública de ensino. Foram quatro volumes no ano, um por bimestre, para todas as disciplinas. O material foi elaborado com sequências didáticas e sugestões de trabalho, nas quais o professor pôde se basear para que desenvolvesse o conteúdo previsto.

Em 2009, como parte do aperfeiçoamento e evolução da Proposta Curricular, foi desenvolvido um material complementar ao Caderno do Professor, o Caderno do Aluno, específico por disciplinas e por bimestres foi entregue aos estudantes de todas as séries. É um material que tem a referência pessoal do aluno. Nele, o aluno pode registrar anotações, resolver exercícios e desenvolver as habilidades do Currículo com a coordenação e mediação do professor. No mesmo ano de acordo com o *site* do Programa São Paulo Faz Escola, o Saresp foi elaborado com base na Proposta Curricular do Estado de São Paulo. A participação na avaliação foi recorde: ao todo, 77% dos 2,5 milhões de alunos da rede pública estadual realizaram o exame. Escolas municipais e particulares também participaram.

São Paulo (2008) destacou que apesar de o Currículo ter sido apresentado e discutido em toda a rede, ele está em constante evolução e aperfeiçoamento. Mais do que simples orientação, a elaboração da Proposta Curricular e de todo o material que a integra tem um foco definido: a qualidade da educação.

No que diz respeito à discussão sobre a implementação da Proposta Curricular, Oddi (2009) realizou uma pesquisa intitulada: *Percepções de Professores do Ensino médio sobre o Projeto “São Paulo Faz Escola”*: Um Estudo em duas Escolas de uma Cidade da Grande São Paulo, a pesquisa foi localizada no banco de teses da PUC-SP.

O trabalho de Oddi (2009) teve por objetivo investigar o que revelam professores do Ensino Médio a respeito da implementação da Proposta Curricular inserida no projeto “São Paulo faz escola”. Os sujeitos da pesquisas foram cinco professores de Matemática do Ensino médio, de duas escolas públicas da Grande São Paulo. A metodologia de pesquisa utilizada foi a abordagem qualitativa usando entrevista semiestruturada como instrumento de coleta de dados. Para a compreensão do discurso dos professores sobre a implementação da Proposta Curricular, o autor analisou os dados seguindo o procedimento da Análise de Conteúdo, conforme preconiza Franco (2008).

Questões norteadoras do trabalho Oddi (2009):

- O que revelam os professores a respeito da proposta curricular de São Paulo no que se refere a sua implementação?
- O professor revela em seu discurso se alterou sua maneira de abordar os conteúdos de Matemática tendo em vista a proposta? Em caso afirmativo, o que revelam a respeito dessas mudanças em suas práticas?
- Quais foram os dilemas e dificuldades identificados pelos professores na implementação da proposta?

O autor relatou que a questão sobre a implementação da Proposta “São Paulo faz escola” teve boa aceitação do material, embora naquele instante não houvesse indícios claros em relação à apropriação do projeto.

Oddi (2009) destacou o sentimento de surpresa dos professores, ao iniciar o ano letivo de 2008 com um novo projeto que sinalizava para um novo currículo no Ensino Médio, que o material foi apresentado em uma semana, os professores consideraram pouco tempo para realizar discussões mais detalhadas entre os pares, a fim de sanar quaisquer dúvidas.

O autor aponta que um dos professores mostrou-se crítico em relação à implementação da Proposta no Ensino Fundamental e Médio, a proposta deveria começar pelas séries iniciais do Ensino Fundamental I, para que a aquisição de habilidades e competências se iniciassem efetivamente, nesse nível de ensino.

No que diz respeito às dúvidas relativas ao Projeto “São Paulo faz escola”, todos os entrevistados foram unânimes em apontar que a HTPC<sup>20</sup> foi um momento para que as

---

<sup>20</sup> Hora de trabalho pedagógico coletivo.

discussões ocorressem, possibilitando trocas de experiências. No entanto, outros caminhos foram utilizados para sanar dúvidas em relação a esse projeto, como por meio de conversas informais no corredor, pesquisas em livros didáticos, apostilas e via internet.

Em relação ao material utilizado no Projeto, um professor mostrou-se crítico no que concerne a existência de erros tanto no Jornal quanto no Caderno do Professor.

Segundo Oddi (2009) uma professora acentuou que o material elaborado ajudou na aplicação de exercícios mais contextualizados, enfatizou que esse aspecto acaba por auxiliar a prática pedagógica do professor. Por outro lado, um professor sentiu-se angustiado, pois essa inovação, provocada pelo advento do material enviado para ser aplicado, modificou totalmente a sua maneira de atuar em sala de aula. Nesse sentido, para ele o material acabou tirando um pouco do seu entusiasmo criativo.

O autor destaca que os professores relataram que os alunos não tinham domínio básico para desenvolver as atividades propostas no jornal e o material se apresentava com muitos exercícios. Constatou-se também que o tempo em números de aulas, para o desenvolvimento das 30 aulas propostas pelo Jornal foi insuficiente principalmente no período noturno, em que a grade horária disponibiliza apenas quatro aulas de Matemática por semana.

O atraso no encaminhamento do material do professor recebeu uma das críticas feitas pelos entrevistados. Outro aspecto negativo destacado pelos professores foi que em 2008 não houve material para os alunos. O número de alunos por sala também foi colocado com uma dificuldade na execução da proposta.

Uma professora se mostrou insatisfeita, pois com a chegada desse novo modo de enxergar o currículo, a ordem dos conteúdos foi alterada e isso acabou prejudicando o andamento das aulas.

O autor conclui relatando que após o período de implementação do projeto e com a participação dos professores no sentido de realizar acertos no Caderno do Professor, é importante pesquisar quais as melhorias na aprendizagem dos alunos que esse material pode prover. Quais são, afinal, os aspectos positivos de se trabalhar com um material comum para todos os alunos da rede? Lembramos que não podemos nos esquecer das especificidades de cada região, de cada cidade, de cada bairro, de cada unidade escolar da rede pública estadual.

As vozes ouvidas na pesquisa de Oddi (2009): *Percepções de Professores do Ensino*

*médio sobre o Projeto “São Paulo Faz Escola”*: Um Estudo em duas Escolas de uma Cidade da Grande São Paulo, vêm de encontro com o que Sacristán (2000) entende sobre ideia de currículo.

O currículo é uma práxis antes que um objeto estático emanado de um modelo coerente de pensar a educação ou as aprendizagens necessárias das crianças e dos jovens, que tampouco se esgota na parte explícita do projeto de socialização cultural nas escolas. É uma prática, expressão, da função socializadora e cultural que determinada instituição tem, que reagrupa em torno dele uma série de subsistemas ou práticas diversas, entre as quais se encontra a prática pedagógica desenvolvida em instituições escolares que comumente chamamos ensino (SACRISTÁN, 2000, p. 15, 16).

Seguindo os pressupostos de Sacristán (2000) atentando às vozes dos professores, que expressaram em parte suas experiências vividas na implementação da Proposta Curricular, que foi baseada num plano construído e ordenado em conexão com determinados princípios, e a realização dos mesmos, seu valor se concretiza na expressão da prática dos docentes que executam o trabalho pedagógico.

De acordo com Sacristán é uma prática na qual se estabelece um diálogo, entre agentes sociais, elementos técnicos, alunos que reagem frente a ele, professores que o modelam. Os diálogos estabelecidos com professores e especialistas durante a implantação do currículo, com críticas e sugestões de complementação ganharam significado dentro de uma prática de reestruturação do mesmo.

Em contrapartida, a Secretaria Estadual de Educação de São Paulo, considerou que foram bons os resultados da implantação da Proposta Curricular no Estado de São Paulo, avaliados pelo Saresp, pelas devolutivas do corpo docente das escolas e na voz da comunidade escolar, o Currículo da rede pública estadual está consolidado em 2010.

#### **4.2 - Currículo consolidado**

Neste tópico é apresentada uma análise da versão definitiva dos textos-base do Currículo da Secretaria da Educação para o Ensino Fundamental – Ciclo II e o Ensino Médio da rede pública do Estado de São Paulo. Bem como os aspectos tecnológicos ligados ao ensino e a Geometria.

De acordo com o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (2010), apresenta os novos encaminhamentos para a reestruturação dos sistemas educacionais, a rede estadual de ensino do Estado de São Paulo, representada pela Secretaria Estadual da Educação (SEE)

propôs, em 2008, um currículo básico para as escolas da rede estadual nos níveis de Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio. O projeto da SEE idealizado em 2008 pretendia apoiar o trabalho realizado nas escolas estaduais e contribuir para a melhoria da qualidade das aprendizagens dos alunos.

Em suas reflexões sobre a reestruturação dos sistemas educacionais Miskulin (1999) ressalta que as políticas que estabelecem de certa forma novos encaminhamentos para os estabelecimentos de ensino, devem criar mecanismos que possam oferecer uma educação de qualidade a todos, condizente com o desenvolvimento da Ciência e da Tecnologia. Ao passo, que os planos de ação e diretrizes para uma possível reestruturação de funcionamento dos sistemas educacionais devam ser traçados com vistas, conseqüentemente, nos Currículos das universidades e escolas, com referência e a adequação à realidade brasileira, em um contexto globalizante.

No documento são apresentados os princípios orientadores para uma escola capaz de promover as competências indispensáveis ao enfrentamento dos desafios sociais, culturais e profissionais do mundo contemporâneo. Contemplando algumas das principais características da sociedade do conhecimento, das pressões que o mundo globalizado exerce sobre os jovens cidadãos, propondo princípios orientadores para a prática educativa, a fim de que as escolas possam preparar seus alunos para esse novo tempo.

Nesse novo tempo estão presentes e em evidência as tecnologias de comunicação e informação, que no Currículo do Estado de São Paulo são apresentadas como possíveis articuladoras de princípios para um currículo comprometido com o seu tempo e com uma escola que também aprende, imprimindo um ritmo sem precedentes:

A tecnologia imprime um ritmo sem precedentes ao acúmulo de conhecimentos e gera profunda transformação quanto às formas de estrutura, organização e distribuição do conhecimento acumulado. Nesse contexto, a capacidade de aprender terá de ser trabalhada não apenas nos alunos, mas na própria escola, como instituição educativa. Isso muda radicalmente a concepção da escola: de instituição que ensina para instituição que também aprende a ensinar. Nessa escola, as interações entre os responsáveis pela aprendizagem dos alunos têm caráter de ações formadoras, mesmo que os envolvidos não se dêem conta disso (SÃO PAULO, 2010, p. 10).

Esse novo ritmo gerado pela tecnologia segundo o documento, de certa forma revela a responsabilidade de toda a equipe escolar responsável pelo processo de ensino aprendizagem, gestores como formadores de professores e a responsabilidade dos docentes, entre si e com o grupo gestor, na problematização e na significação dos conhecimentos sobre sua prática.

Analisando o Currículo do Estado de São Paulo (2010) é possível perceber que essa concepção parte do princípio de que ninguém é detentor de um conhecimento absoluto e de que o conhecimento coletivo é maior que soma dos conhecimentos individuais, além de ser qualitativamente diferente. O documento afirma que esse é o ponto de partida para o trabalho colaborativo, para a formação de uma “comunidade aprendente”, a vantagem que permeia essa concepção é facilitada pela tecnologia que viabiliza a prática desse ideal.

Com a preocupação de viabilizar a gestão dos processos de interação na comunidade escolar visando à ação coletiva, o Caderno do Gestor destinado aos professores coordenadores, diretores, professores coordenadores das oficinas pedagógicas e supervisores, anunciado anteriormente, continua como parte integrante do Currículo consolidado, não trata da gestão curricular em geral, mas serve como um documento de apoio ao trabalho dos gestores. Seguindo em continuidade mantiveram-se os documentos dirigidos especialmente aos professores e aos alunos: os Cadernos do Professor e do Aluno, organizados por disciplina/série (ano) /bimestre.

Nesses cadernos, são apresentadas Situações de Aprendizagem para orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos disciplinares específicos e a aprendizagem dos alunos. De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (2010):

Esses conteúdos, habilidades e competências são organizadas por série/ano e acompanhados de orientações para a gestão da aprendizagem em sala de aula e para a avaliação e a recuperação. Oferecem também sugestões de métodos e estratégias de trabalho para as aulas, experimentações, projetos coletivos, atividades extraclasse e estudos interdisciplinares (SÃO PAULO, 2010, p. 8).

Os Cadernos apresentam uma série de atividades que os alunos poderão realizar durante as aulas ou extraclasse. O material não irá interpor as estratégias preestabelecidas pelo professor, pois oferece uma facilidade na exploração dos conceitos que serão apreendidos nas atividades sugeridas. Segundo o documento em hipótese alguma é sugerido aos professores o abandono do livro didático, os alunos devem ser estimulados a ler todos os tipos de livros, o documento aponta que a leitura é fundamental para a construção de uma visão crítica da realidade, esta questão deve constituir uma preocupação constante por parte do professor.

No documento encontra-se a afirmação de que “um currículo que promove competências tem o compromisso de articular as disciplinas e as atividades escolares com aquilo que se espera que os alunos aprendam ao longo dos anos” (SÃO PAULO, 2010, p. 12). Competências que caracterizam modos de ser, de raciocinar e de interagir, que podem ser

depreendidos das ações e das tomadas de decisão em contextos de problemas, de tarefas ou de atividades.

Nesse sentido o documento aponta que a atuação do professor, os conteúdos, as metodologias disciplinares e a aprendizagem requerida dos alunos são aspectos indissociáveis. Assim, o Currículo é um conglomerado cultural organizado de forma peculiar (SACRISTÁN, 2000), que compõem um sistema ou rede cujas partes têm características e funções específicas que se complementam para formar um todo. Criando toda uma atividade social, política e técnica variada, o Currículo se compromete em formar crianças e jovens para que se tornem adultos preparados para exercer suas responsabilidades (trabalho, família, autonomia etc.) e para atuar em uma sociedade que depende deles, em sentido particular, contribuindo para determinar seu significado real.

O documento destaca que nessa relação currículo, professor, aluno, as novas tecnologias da informação promoveram uma mudança na produção, na organização, no acesso e na disseminação do conhecimento. A escola, sobretudo hoje, já não é a única detentora de informação e conhecimento, mas cabe a ela preparar o aluno para viver em uma sociedade em que a informação é disseminada em grande velocidade.

Seguindo esta linha de raciocínio Kenski (2007) pergunta: será essa a função da escola na atualidade? Segundo a autora em um mundo em constante evolução, a escola precisa ser mais que uma mera assimilação certificada de saberes, mais do que preparar consumidores, ou criar um curso de treinamento para uso das tecnologias.

O Currículo de São Paulo (2010) complementa essa linha de raciocínio, quando destaca que essa preparação não exige maior quantidade de ensino (ou de conteúdos), mas sim melhor qualidade na aprendizagem. O documento deixa claro que não há apologia ao abandono dos conteúdos, os mesmos são tão importantes, que a eles foi dedicado o trabalho de elaboração do Currículo do ensino oficial do Estado de São Paulo.

Kesnki (2007) destaca que a ideia é formar pessoas flexíveis suficientes para assumir diferentes papéis na sociedade; que tenham consciência da velocidade das mudanças que envolvem as profissões por causa dos avanços tecnológicos. “Enfim, garantir aos alunos-cidadãos a formação e a aquisição de novas habilidades, atitudes e valores, para que possam viver e conviver em uma sociedade em permanente processo de transformação” (p. 64).

Oliveira e Fernandes (2010) mencionam que a utilização da tecnologia da informação

e comunicação integrada à prática dos docentes, em uma sinergia em torno da construção do conhecimento dos alunos, possibilita a elaboração de novas formas de pensar e fazer Matemática.

A forma de conceber a Matemática inspirada em valores e práticas de ensinos integradas às tecnologias visando à construção do conhecimento no Currículo do Estado de São Paulo é apresentada descolada do que comumente é visto em outros documentos oficiais. A Matemática é apresentada como uma área específica de ensino, Matemática e suas tecnologias. A concepção dessa área do conhecimento dentro do Currículo do Estado de São Paulo, não está vinculada à área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, como é o caso de outros dois documentos oficiais utilizados por esta pesquisa, PCN+ (2002) e OCEM (2006).

Segundo o Currículo, três são as razões principais da opção pela constituição de uma área do conhecimento específica para a Matemática:

- Em primeiro lugar, a incorporação da Matemática tanto pela área de Ciências da Natureza quanto pela área de Linguagens e Códigos pode elidir o fato de que, mesmo tendo as características de uma linguagem e sendo especialmente importante e adequada para a expressão científica, a Matemática apresenta um universo próprio muito rico de ideias e objetos específicos, como os números e as operações, as formas geométricas, as relações entre tais temas, sobretudo as métricas. Tais ideias e objetos são fundamentais para a expressão pessoal, a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos, incluindo-se as chamadas Ciências Humanas;
- Uma segunda razão para a apresentação da Matemática como uma área do conhecimento é o fato de que uma parte importante da especificidade da Matemática resulta esmaecida quando ela se agrega tanto às linguagens em sentido amplo quanto às ciências da natureza. Machado (1990) diz que a Matemática compõe com a língua materna um par fundamental, mas complementar: é impossível reduzir um dos sistemas simbólicos ao outro. Naturalmente, existem diferenças fundamentais entre os significados da precisão na Língua e na Matemática e os alunos devem ser conduzidos a apreciar a beleza presente tanto na exatidão dos cálculos quanto no rigor expressivo do texto poético, por exemplo;
- Uma terceira razão para o tratamento da Matemática como área específica é a

possibilidade de tal opção facilitar a incorporação crítica dos inúmeros recursos tecnológicos atualmente existentes para a representação de dados e o tratamento das informações disponíveis, na busca da transformação de informação em conhecimento.

Segundo Sacristán (2000):

O currículo além de ser um conglomerado cultural organizado de forma peculiar que permite análises de múltiplos pontos de vista, cria toda uma atividade social, política e técnica variada, quadro que lhe dá um sentido particular, o campo definido dentro do sistema curricular supõe um conjunto de atividades de produção de materiais, de divisão de competências, de fontes de ideias incidindo nas formas e formatos curriculares, uma determinada organização sociopolítica que lhe empresta um sentido particular, contribuindo para determinar seu significado real (SACRISTÁN, 2000, p 50).

Dentro dessa ótica o Currículo de São Paulo (2010) pressupõe que o objetivo principal de um currículo é mapear o vasto território do conhecimento, recobrando-o por meio de disciplinas e articulando-as de tal modo que o mapa assim elaborado constitua um permanente convite a viagens, não representando apenas uma delimitação rígida de fronteiras entre os diversos territórios disciplinares.

Entre as “viagens no mundo do conhecimento”, um novo currículo de acordo com o documento, deve estar especialmente atento à incorporação crítica dos inúmeros recursos tecnológicos disponíveis para a representação de dados e o tratamento das informações, na busca da transformação de informação em conhecimento.

Para que as “viagens na área do conhecimento na Matemática” não se percam em uma rede de informações dos conteúdos estudados na escola, prioriza-se três eixos complementares de competência a partir das ideias formuladas para o Enem<sup>21</sup>, para completar a construção do conhecimento, quando se constitui o movimento contextualizar/abstrair/contextualizar /abstrair (SÃO PAULO, 2010):

- o eixo expressão/compreensão: a capacidade de expressão do eu, por meio das diversas linguagens e a capacidade de compreensão do outro, do não eu, do que me complementa, o que inclui desde a leitura de um texto, de uma tabela, de um gráfico, até a compreensão de fenômenos históricos, sociais, econômicos, naturais, etc.;
- o eixo argumentação/decisão: a capacidade de argumentação, de análise e de

---

<sup>21</sup> Exame Nacional do Ensino Médio.

articulação das informações e relações disponíveis, com vista a viabilização da comunicação, da ação comum, a construção de consensos e a capacidade de elaboração de sínteses de leituras e de argumentações, com o objetivo de fomentar a tomada de decisões, a proposição e a realização de ações efetivas;

- o eixo contextualização/abstração: a capacidade de contextualização dos conteúdos estudados na escola, de enraizamento na realidade imediata, nos universos de significações – sobretudo no mundo da Matemática, e a capacidade de abstração, de imaginação, de consideração de novas perspectivas, de virtualidades, de potencialidades para se conceber o que ainda não existe.

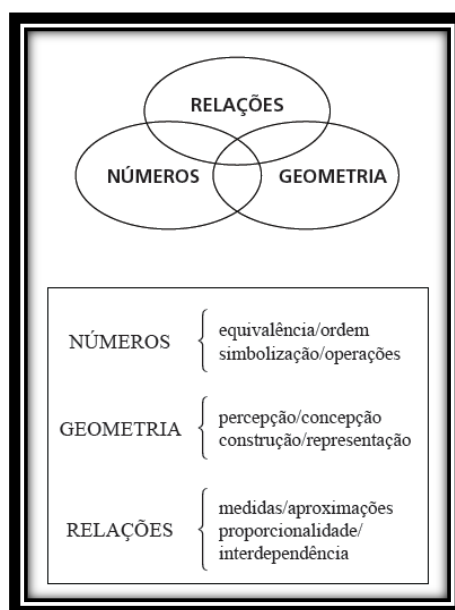
Conforme o Currículo, a estratégia básica para mobilizar os conteúdos, com vista no desenvolvimento das competências, será a identificação e a exploração das ideias fundamentais de cada tema, estratégia tal, que foi utilizada na construção dos Cadernos do Professor. Essas ideias fundamentais são:

- Equivalência ou de igualdade naquilo que vale, está presente nas classificações, nas sistematizações, na elaboração de sínteses, mas também quando se estudam as frações, as equações, as áreas ou os volumes de figuras planas ou espaciais, entre muitos outros temas;
- Ordem, de organização sequencial, tem nos números naturais sua referência básica, mas pode ser generalizada quando se pensa em hierarquias segundo outros critérios, como a ordem alfabética;
- Proporcionalidade, que se encontra presente tanto no raciocínio analógico, em comparações tais como “O Sol está para o dia assim como a Lua está para a noite”;
- Aproximação, a de realização de cálculos aproximados. Longe de ser o lugar por excelência da exatidão, da precisão absoluta, a Matemática não sobrevive nos contextos práticos, nos cálculos do dia a dia sem uma compreensão mais nítida da importância das aproximações.

Além das ideias fundamentais que foram mencionadas acima, o documento relata que os conteúdos que devem ser estudados, sobretudo na área de Matemática, presentes em outros documentos, dão destaque a alguns temas que têm sido rotulados como “Tratamento da Informação”: porcentagens, médias, tabelas, gráficos de diferentes tipos, etc. O Currículo reconhece a importância de tal destaque, mas é necessário evidenciar o fato de que todos os conteúdos estudados na escola básica, em todas as disciplinas, podem ser classificados como

“Tratamento da Informação”. Vale destacar que o Tratamento da Informação, com vista na transformação da informação em conhecimento, é a meta comum de todas as disciplinas escolares e, em cada disciplina, de todos os conteúdos a serem ensinados.

Os conteúdos disciplinares de Matemática, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, no Currículo do Estado de São Paulo (2010) de Matemática estão organizados em três grandes blocos temáticos: NÚMEROS, GEOMETRIA e RELAÇÕES.



**Figura 6. Blocos temáticos (Currículo de São Paulo).**  
**Fonte: (SÃO PAULO, 2010, p. 39)**

- Os NÚMEROS envolvem as noções de contagem, medida e representação simbólica, tanto de grandezas efetivamente existentes quanto de outras imaginadas a partir das primeiras, incluindo-se a representação algébrica das operações fundamentais sobre elas. Duas ideias fundamentais na constituição da noção de número são as de equivalência e de ordem;
- A GEOMETRIA diz respeito diretamente à percepção de formas e de relações entre elementos de figuras planas e espaciais; à construção e à representação de formas geométricas, existentes ou imaginadas, e à elaboração de concepções de espaço que sirvam de suporte para a compreensão do mundo físico que nos cerca;
- As RELAÇÕES, consideradas como um bloco temático incluem a noção de medida, com a fecundidade e a riqueza da ideia de aproximação; as relações métricas em geral; e as relações de interdependência, como as de proporcionalidade ou as associadas à ideia de função.

O documento apresenta algumas considerações orientadoras sobre o processo de

ensino aprendizagem dos conteúdos básicos de Matemática. Para esta pesquisa o foco das considerações será direcionado ao ensino da Geometria, que será articulado com o uso da tecnologia computacional.

De acordo com o Currículo (SÃO PAULO, 2010) em Geometria, no Ensino Fundamental, a preocupação inicial é o reconhecimento, a representação e a classificação das formas planas e espaciais, preferencialmente trabalhadas em contextos concretos com os alunos de 5ª série/6º ano e 6ª série/7º ano. Certa ênfase na construção de raciocínios lógicos, de deduções simples de resultados a partir de outros anteriormente conhecidos poderá ser a tônica dos trabalhos na 7ª série/8º ano e na 8ª série/9º ano. É importante segundo o documento, que se atente para a necessidade de incorporar a Geometria ao trabalho em todas as séries/anos da grade escolar, cabe ao professor a busca de um equilíbrio no tratamento dos conteúdos fundamentais nos diversos bimestres.

Os pressupostos apresentados no documento consideram que a Geometria deve ser tratada, ao longo de todos os anos, em abordagem espiralada, o que significa dizer que os grandes temas pode aparecer tanto nas séries/anos do Ensino Fundamental quanto nas do Ensino Médio, com uma observação na diferença na escala do tratamento dada ao tema.

O documento também considera que há um farto número de recursos tecnológicos que estão à disposição para o ensino da Matemática de um modo geral, mas particularmente para a Geometria, é possível encontrar ambientes digitais riquíssimos para trabalhar os conceitos geométricos, entre os quais o Currículo de São Paulo, (2010), destaca os *softwares* para a construção de gráficos, as construções em Geometria, etc. O documento aponta que o uso das tecnologias da informação e comunicação é crescente, inevitável e desejável, salvo em condições extraordinárias, em razão de extremo mau uso.

Bagé (2008) vê com bons olhos a presença das tecnologias nas escolas do Estado de São Paulo, com a instalação da Sala Ambiente de Informática e a incorporação dos recursos tecnológicos na prática do professor, a influência é positiva no processo ensino aprendizagem, mas também um grande desafio.

Nos Cadernos do Professor de Matemática são apresentados, sempre que possível material disponível (textos, *softwares*, *sites* e vídeos, entre outros), em sintonia com a forma de abordagem do Currículo do Estado de São Paulo, que podem ser utilizados pelo professor para o enriquecimento de suas aulas. Neste material em cada bimestre, o tema principal foi

dividido em oito unidades, para a exploração dessas, foram escolhidas, em cada bimestre, quatro Situações de Aprendizagem, que constituem quatro centros de interesse a serem desenvolvidos com os alunos.

Segundo Lauro (2007) a utilização da informática com o uso de *softwares* de Geometria Dinâmica como uma ferramenta mediadora de recursos no processo de ensino/aprendizagem, facilita e melhora a execução de alguns trabalhos. É um instrumento que constrói objetos rapidamente e com perfeição, possibilitando o estabelecimento de conjecturas, despertando a criatividade, estimulando a curiosidade em conhecer, em descobrir. Nas palavras da autora:

... permite construir e explorar objetos geométricos interativamente, e, uma vez construídas, as figuras podem ser movimentadas conservando as propriedades que lhes haviam sido atribuídas. Essa possibilidade de deformação permite o acesso rápido e contínuo a diferentes casos, constituindo-se numa ferramenta muito rica para a validação experimental de fatos geométricos... (LAURO, 2007, p. 18).

Essa argumentação realizada por Lauro (2007) está presente na argumentação dos textos das OCEM (2006): existem programas de computador (*softwares*) nos quais é possível explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, propiciar a experimentação, testar hipóteses, esboçar conjecturas e criar estratégias para resolver problemas.

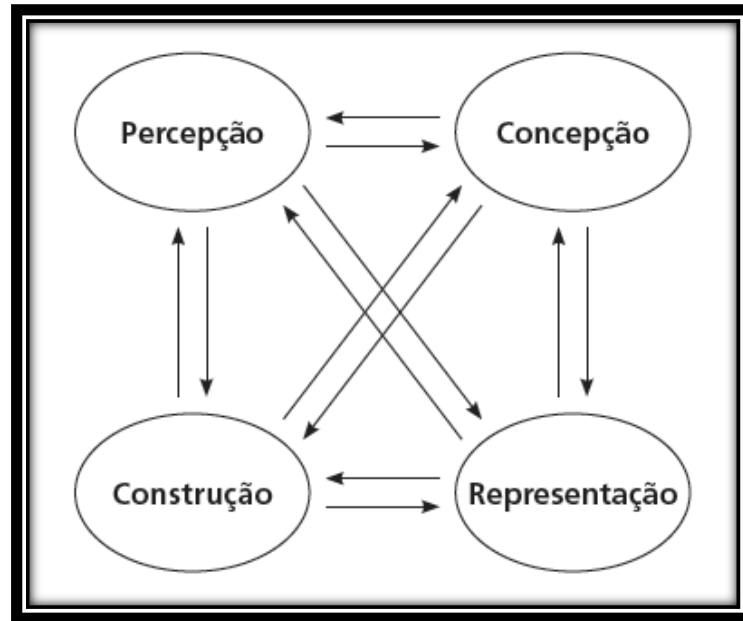
Como ressaltou Lauro (2007) os ambientes informáticos como um meio e não fim para o processo de ensino e aprendizagem são bem vindos, assim como os *softwares* de Geometria Dinâmica que possibilitam fazer a articulação entre as quatro faces para conceber o conhecimento no ensino de Geometria. Tais faces são abordadas no Currículo do Estado de São Paulo (2010), oriundas das ideias de Machado (1995) como uma polarização entre as atividades preparatórias:

Percepção: à observação e à manipulação direta de objetos materiais, a caracterização das formas mais frequentes através de atividades empíricas.

Construção: de objetos em sentido físico, através de massas, varetas, ou papéis, por exemplo.

Representação: de objetos, através de desenhos, onde as propriedades costumam ser parcialmente concretizadas.

Concepção: a sistematização do conhecimento geométrico que se seguirá, onde predominarão as definições precisas, o enunciado cuidadoso das propriedades, o encadeamento de preposições nas demonstrações formais ou informais de certos resultados, que são os teoremas (MACHADO 1995, p 51, 54).



**Figura 7. Faces do conhecimento geométrico.**  
**Fonte: (SÃO PAULO, 2010 p. 42)**

A perspectiva de Machado (1995) sobre o ensino de Geometria está presente nas perspectivas do Currículo de São Paulo (2010):

Continuamente, percebemos para construir ou quando construímos, para representar ou quando representamos; concebemos o que pretendemos construir, com a mediação das representações; ou construímos uma representação (como uma planta ou uma maquete) para facilitar a percepção. E mesmo as concepções mais inovadoras têm como referência percepções ou construções já realizadas, renovando seus pressupostos ou transcendendo seus limites.

Alimentando-se mutuamente, percepções, construções, representações e concepções são como átomos em uma estrutura molecular, que não pode ser subdividida sem que se destruam as propriedades fundamentais da substância correspondente. Isoladamente, qualquer uma das faces desse tetraedro tem um significado muito restrito; a sua força está no mútuo apoio que essas faces se propiciam. Em situações de ensino, é muito importante, portanto, a busca de uma alimentação mútua entre tais aspectos do conhecimento geométrico por meio de atividades integradoras (SÃO PAULO, 2010, p. 42)

Machado (1995) tece algumas considerações no que tange a essas quatro faces que ele chama de “o tetraedro”: percepção, construção, representação e concepção. No ensino de Geometria, alguns desvios devem ser evitados, a respeito do tratamento isolado de qualquer uma das faces, como costuma acontecer com a representação. O autor também aponta que são poucos professores que primam de modo consciente o desenvolvimento nos alunos da capacidade de representar. Ao passo, que em todos os níveis de ensino, o ensino de Geometria necessita de Situações de Aprendizagem que favoreçam a articulação harmoniosa das quatro faces que compõem a construção do conhecimento geométrico.

Em relação às tarefas específicas relacionadas com o conteúdo matemático: Números, Geometria, Relações, o documento ressalta que devem ser apresentadas por ideias fundamentais presentes em todos os conteúdos: equivalência, ordem, proporcionalidade, medida, aproximação, problematização, otimização, entre outras, construindo uma ponte que conduza dos conteúdos às competências pessoais:

- capacidade de expressão, que pode ser avaliada por meio da produção de registros, de relatórios, de trabalhos orais e/ou escritos etc.;
- capacidade de compreensão, de elaboração de resumos, de sínteses, de mapas, da explicação de algoritmos etc.;
- capacidade de argumentação, de construção de análises, justificativas de procedimentos, demonstrações etc.;
- capacidade propositiva, de ir além dos diagnósticos e intervir na realidade de modo responsável e solidário;
- capacidade de contextualizar, de estabelecer relações entre os conceitos e teorias estudados e as situações que lhes dão vida e consistência;
- capacidade de abstrair, de imaginar situações fictícias, de projetar situações ainda não existentes.

Na organização das grades curriculares (série/ano por bimestre): conteúdos associados às habilidades, o documento apresenta um quadro de conteúdos (série/ano por bimestre) para o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio. Reitera que a lista dos conteúdos curriculares de Matemática apresentada não se distancia substancialmente dos programas usualmente oferecidos em outros currículos, nos livros didáticos ou nos diversos sistemas de ensino.

De acordo com o que é apresentada no Currículo, a lista de conteúdos não é rígida e inflexível, o que se pretende é que ela propicie uma articulação consistente, entre as inúmeras formas possíveis, de trabalhar os diversos temas, com destaque dos objetivos maiores que fundamentam o presente Currículo: a busca de uma formação voltada para as competências pessoais, uma abordagem dos conteúdos que valorize a cultura e o mundo do trabalho, uma caracterização da escola como uma organização viva, que busca o ensino, mas que também aprende com as circunstâncias.

#### 4.2.1 - Lista de conteúdos<sup>22</sup> e habilidades de Matemática

Nesta etapa de apresentação das listas de conteúdos, serão apresentados os conteúdos onde se encontra o bloco temático de Geometria que é de interesse da presente pesquisa.

##### 5ª série/6º ano do Ensino Fundamental – 3º Bimestre

- **Conteúdos** - Geometria/Relações e Formas geométricas: Formas planas; Formas espaciais. Perímetro e área: Unidades de medida; Perímetro de uma figura plana; Cálculo de área por composição e decomposição; Problemas envolvendo área e perímetro de figuras planas.
- **Habilidade:** Saber identificar e classificar formas planas e espaciais em contextos concretos e por meio de suas representações em desenhos e em malhas; Saber planificar figuras espaciais e identificar figuras espaciais a partir de suas planificações; Compreender a noção de área e perímetro de uma figura, sabendo calculá-los por meio de recursos de; contagem e de decomposição de figuras; Compreender a ideia de simetria, sabendo reconhecê-la em construções geométricas e artísticas, bem como utilizá-la em construções geométricas elementares.

##### 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental – 2º Bimestre

- **Conteúdos** – Geometria: Geometria; Ângulos; Polígonos; Circunferência; Simetrias; Construções geométricas; Poliedros.
- **Habilidade:** Compreender a ideia de medida de um ângulo (em grau), sabendo operar; com medidas de ângulos e usar instrumentos geométricos para construir e medir; ângulos; Compreender e identificar simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia; Saber calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estender tal cálculo para polígonos de n lados; Saber aplicar os; conhecimentos sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo e de um polígono em situações práticas; Saber identificar elementos de poliedros e classificar os poliedros segundo diversos pontos de vista; Saber planificar e representar (em vistas) figuras espaciais.

---

<sup>22</sup> Lista completa em anexo I.

### 7ª série/8º ano do Ensino Fundamental – 4º Bimestre

- **Conteúdos** – Geometria: Geometria; Teorema de Tales; Teorema de Pitágoras; Área de polígonos; Volume do prisma.
- **Habilidades:** • Reconhecer e aplicar o teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, na solução de problemas em diferentes contextos; Compreender o significado do teorema de Pitágoras, utilizando-o na solução de problemas em diferentes contextos; • Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares; Saber identificar prismas em diferentes contextos, bem como saber construí-los e calcular seus volumes.

### 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental – 3º e 4º Bimestres

- **Conteúdos, 3º bimestre** - Geometria/Relações - Proporcionalidade na Geometria: O conceito de semelhança; Semelhança de triângulos; Razões trigonométricas. **4º Bimestre** - Geometria/Números - Corpos redondos: O número  $p$ , a circunferência, o círculo e suas partes, área do círculo; Volume e área do cilindro – Probabilidade: Problemas de contagem e introdução; à probabilidade.
- **Habilidades 3º bimestre:** Saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes; Saber identificar triângulos semelhantes e resolver situações-problema envolvendo semelhança de triângulos; Compreender e saber aplicar as relações métricas dos triângulos retângulos, particularmente o teorema de Pitágoras, na resolução de problemas em diferentes contextos; Compreender o significado das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e saber utilizá-las para resolver problemas em diferentes contextos. **4º Bimestre:** Conhecer a circunferência, seus principais elementos, suas características e suas partes; Compreender o significado do  $p$  como uma razão e sua utilização no cálculo do perímetro e da área da circunferência; Saber calcular de modo compreensivo a área e o volume de um cilindro; Saber resolver problemas envolvendo processos de contagem – princípio multiplicativo; Saber resolver problemas que envolvam ideias simples sobre probabilidade

### 1ª série do Ensino Médio – 4º Bimestre

- **Conteúdos** - Geometria/Relações - Geometria-Trigonometria: Razões trigonométricas nos triângulos retângulos; Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies; Resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.
- **Habilidades:** Saber usar de modo sistemático relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos; Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos; Saber construir polígonos regulares e reconhecer suas propriedades fundamentais; Saber aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies; Saber inscrever e circunscrever polígonos regulares em circunferências dadas.

### 2ª série do Ensino Médio – 4º Bimestre

- **Conteúdos** – Geometria - Geometria métrica espacial: Elementos de Geometria de posição; Poliedros, prismas e pirâmides; Cilindros, cones e esferas.
- **Habilidades:** Compreender os fatos fundamentais relativos ao modo geométrico de organização do conhecimento (conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas); Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-as em diferentes contextos; Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como a pirâmide e o cone, utilizando-as em diferentes contextos; Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) da esfera e de suas partes, utilizando-as em diferentes contextos; Compreender as propriedades da esfera e de suas partes, relacionando-as com os significados dos fusos, das latitudes e das longitudes terrestres.

### 3ª série do Ensino Médio – 1º Bimestre

- **Conteúdos** - Geometria/Relações - Geometria analítica: Pontos (distância, ponto médio e alinhamento de três pontos); Reta (equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares); Ponto e reta (distância); Circunferência (equação); Reta e circunferência (posições relativas); Cônicas (noções, equações, aplicações).

- **Habilidades:** Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações; Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas; Compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares; Saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares; Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas.

De acordo com o exposto acima, as habilidades a serem demonstradas pelos alunos em cada tema, viabilizam uma explicitação um pouco maior das relações existentes entre a lista de conteúdos apresentados para cada bimestre e as ideias fundamentais presentes neles. Tais habilidades traduzem de modo operacional, as ações que os alunos devem ser capazes de realizar, ao final de cada bimestre, após serem apresentados aos conteúdos curriculares listados (SÃO PAULO, 2009).

O documento ainda destaca que é preciso estar atento ao fato de que tais habilidades também não são um fim em si mesmo; elas constituem apenas indicadores de que a exploração das ideias fundamentais, no caminho que leva das disciplinas as competências, estaria realizada de modo fecundo.

No capítulo a seguir, será apresentada a análise geral dos Cadernos do Professor de Matemática, bem como uma análise específica do Caderno do Professor do quarto bimestre da primeira série do Ensino Médio.

## CAPÍTULO 5

### CADERNOS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE SÃO PAULO

---

---

Este capítulo, que também compõe o corpus da pesquisa apresenta uma visão geral dos Cadernos do Professor de Matemática, a luz do Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (2010), bem como a exploração das Situações de Aprendizagem do Caderno do Professor de Matemática, volume 4 de 2009, da primeira série do Ensino Médio.

#### **5.1 - Análise geral dos Cadernos do Professor (2009)**

A gênese dos Cadernos do Professor, do Aluno e do Gestor, está no Currículo do Estado de São Paulo, os dois primeiros representam um conjunto de documentos dirigidos especialmente aos professores e aos alunos, organizados por disciplina/série (ano)/bimestre. Neles, são apresentadas Situações de Aprendizagem para orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos disciplinares específicos e a aprendizagem dos alunos.

De acordo com o que está exposto no Currículo do Estado de São Paulo (2010), nesses materiais são apresentados: conteúdos, habilidades e competências, que são organizados por série/ano e acompanhados de orientações para a gestão da aprendizagem em sala de aula, para a avaliação e a recuperação, oferece também sugestões de métodos e estratégias de trabalho para as aulas, experimentações, projetos coletivos, atividade extraclasse e estudos interdisciplinares.

O documento destaca que a estratégia básica para mobilizar os conteúdos e o desenvolvimento das competências, é a identificação e a exploração das ideias fundamentais (Aproximação, Proporcionalidade, Ordem, Equivalência, etc.) de cada tema. Ele ainda destaca que é possível abordar muitos assuntos sem a devida atenção às ideias fundamentais, ou escolher alguns assuntos como pretexto para a apresentação da riqueza e da fecundidade das ideias fundamentais. De modo geral, a escolha de alguns assuntos, foi a estratégia utilizada na construção dos Cadernos do Professor.

Aponta que com esses materiais de apoio destinados aos professores, buscou-se apresentar cada tema de uma maneira especialmente significativa do ponto de vista de seu valor formativo, para construir uma articulação entre os diversos temas, de modo que se

auxiliem mutuamente, ao mesmo tempo em que propiciem interfaces amigáveis com as outras disciplinas.

É importante destacar que o Caderno do Aluno é uma conversa com o Caderno do Professor (professor e aluno). Destaca-se que o Caderno do Professor é uma conversa com o Currículo e está a serviço do mesmo, é uma conversa entre professores.

Nos Cadernos do Professor de Matemática “sempre que possível são apresentados materiais disponíveis (textos, *softwares*, *sites* e vídeos, entre outros)”, em sintonia com a forma de abordagem do Currículo do Estado de São Paulo, que podem ser utilizados pelo professor para o enriquecimento de suas aulas (SÃO PAULO, 2009, p. 8). Constatou-se que dos vinte oito Cadernos do Professor publicados, somente seis efetivamente recomendam o uso de alguns *softwares* para o desenvolvimento das Situações de Aprendizagem.

Nesses Cadernos em cada bimestre, o tema principal foi dividido em oito unidades. Para a exploração das oito unidades, que podem corresponder a oito semanas de trabalho letivo, de acordo com o número de aulas disponíveis por semana, o professor poderá explorar cada assunto com maior ou menor aprofundamento e escolher uma escala adequada para o tratamento do mesmo. Em cada bimestre foram escolhidas quatro Situações de Aprendizagem, que ilustram a forma de abordagem sugerida, que instrumentam o professor para a sua ação em sala de aula, que constituem quatro centros de interesse a serem desenvolvidos com os alunos, (SÃO PAULO, 2009; 2010).

No documento (SÃO PAULO, 2009) ressalta que é importante que o professor tente completar as oito unidades temáticas, pois, juntas elas compõem um panorama do conteúdo do bimestre, de tal forma que uma unidade contribui para a compreensão de outras.

Os temas que compõem o conteúdo disciplinar de cada bimestre, de acordo com que está destacado nos Cadernos do Professor, não se afastam de certa forma, do que geralmente é ensinado em outros estabelecimentos de ensino (público ou privado), também não estão longe do que é apresentado nos livros didáticos. As inovações referem-se à forma de abordagem dos conteúdos ao longo de cada um dos bimestres, busca-se evidenciar os princípios norteadores do Currículo oficial do Estado de São Paulo, que estão ligados a contextualização dos conteúdos, as competências relacionadas com a leitura e a escrita Matemática, bem como os elementos culturais internos e externos à Matemática.

Esses materiais que são regidos pelo Currículo oficial de São Paulo, foram constituídos para ajudar o professor a construir a identidade de suas aulas, permitem que o mesmo possa agir com autonomia em relação aos conteúdos que deverão ser ensinados, para favorecer a mobilização dos conteúdos, metodologias e saberes próprios da Matemática. Por meio desses materiais, visa-se também o desenvolvimento das competências e habilidades que o aluno necessitará para fazer a leitura crítica do mundo, de modo a questioná-lo para melhor compreendê-lo, inferir questões e compartilhar ideias, sem ignorar a complexidade da sociedade em que está inserido.

Logo de início, nos Cadernos do Ensino Fundamental II e Ensino Médio são apresentadas respectivamente duas cartas com as palavras do Secretário da Educação do Estado de São Paulo, em exercício no referido ano, Paulo Renato Souza e Maria Inês Fini, Coordenadora Geral Projeto São Paulo Faz Escola, além do sumário que contém informações sobre a organização do material.

Caras professoras e caros professores,

Este exemplar do Caderno do Professor completa o trabalho que fizemos de revisão para o aprimoramento da Proposta Curricular de 5<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup> séries do Ensino Fundamental – Ciclo II e do Ensino Médio do Estado de São Paulo.

Graças às análises e sugestões de todos os professores pudemos finalmente completar um dos muitos recursos criados para apoiar o trabalho em sala de aula.

O conjunto dos Cadernos do Professor constitui a base estrutural das aprendizagens fundamentais a serem desenvolvidas pelos alunos.

A riqueza, a complementaridade e a marca de cada um de vocês nessa elaboração foram decisivas para que, a partir desse currículo, seja possível promover as aprendizagens de todos os alunos.

Bom trabalho! (SÃO PAULO, 2009, p. 3).

A carta escrita por Souza *apud* Cadernos do Professor (SÃO PAULO, 2009) destaca que a gestão do Currículo passou por um aprimoramento relevante, com as sugestões dos professores sobre estratégias bem sucedidas, e até mesmo em relatos contrários a implementação da então Proposta Curricular em 2008. As vozes dos professores foram ouvidas em reuniões nas escolas, diretorias regionais de ensino, pelo canal de comunicação do Programa São Paulo Faz Escola, e por pesquisas acadêmicas, como a pesquisa de Oddi (2009).

Caros (as) professores (as),

Este volume dos Cadernos do Professor completa o conjunto de documentos de apoio ao trabalho de gestão do currículo em sala de aula enviados aos professores em 2009.

Com esses documentos, a Secretaria espera apoiar seus professores para que a organização dos trabalhos em sala de aula seja mais eficiente. Mesmo reconhecendo a existência de classes heterogêneas e numerosas, com alunos em diferentes estágios de aprendizagem, confiamos na capacidade de nossos professores em lidar com as diferenças e a partir delas estimular o crescimento coletivo e a cooperação entre eles.

A estruturação deste volume dos Cadernos procurou mais uma vez favorecer a harmonia entre o que é necessário aprender e a maneira mais adequada, significativa e motivadora de ensinar aos alunos.

Reiteramos nossa confiança no trabalho dos professores e mais uma vez ressaltamos o grande significado de sua participação na construção dos conhecimentos dos alunos (SÃO PAULO, 2009, p. 5).

Nessa carta a coordenadora geral do “Projeto São Paulo Faz Escola”, Fini *apud* Cadernos do Professor (SÃO PAULO, 2009), enfatiza questões referentes à organização do material, bem como a participação do professor na reestruturação dos mesmos e a responsabilidade no desenvolvimento do material durante as aulas.

Também são apresentados em todos os Cadernos do Professor (SÃO PAULO, 2009):

- Uma ficha com o tema estruturador e os conteúdos que serão trabalhados durante cada bimestre;
- Orientações gerais sobre os Cadernos em cada bimestre: os temas escolhidos para compor o conteúdo disciplinar; as inovações pretendidas referentes à forma de abordagem; os princípios norteadores do processo de aprendizagem, com destaque na contextualização dos conteúdos, nas competências pessoais envolvidas, especialmente aquelas relacionadas à leitura e à escrita Matemática, bem como os elementos culturais referentes à Matemática; os conteúdos básicos do bimestre e uma visão geral das quatro Situações de Aprendizagem e o que será tratado em cada uma delas;
- Considerações sobre a avaliação ao final das Situações de Aprendizagem, com a expectativa de que os alunos tenham compreendido as principais características dos temas desenvolvidos em cada Situação de Aprendizagem. Os documentos ressaltam que a avaliação da aprendizagem dos alunos em relação aos conteúdos estudados poderá ser feita pela aplicação de atividades similares às propostas ao longo da Situação de Aprendizagem. Ressalta ainda, que os livros didáticos em geral, trazem uma grande variedade de problemas que envolvem as unidades trabalhadas nos cadernos, que também pode ser proposta aos alunos para avaliar sua aprendizagem. As expectativas mínimas de aprendizagem em relação aos conteúdos trabalhados durante cada bimestre estão relacionadas às competências e habilidades que os alunos adquiriram durante o processo de ensino aprendizagem;

- Orientações para Recuperação<sup>23</sup>: destaca que a avaliação de aprendizagem deve ser um processo contínuo, realizado ao longo de cada bimestre. Durante a realização das atividades, o professor deve estar atento para eventuais dificuldades dos alunos. Essa observação é fundamental para que o professor consiga propor, ao longo do processo, atividades de recuperação, que ajudem o aluno a acompanhar melhor o curso e obter sucesso na realização das atividades. O processo de refacção de exercícios, provas e atividades é um recurso que pode ser utilizado durante o bimestre e constitui uma forma de recuperação contínua que ajuda o aluno a se apropriar dos conceitos estudados. Para isso, é necessário que o professor dedique um tempo de sua aula para a discussão dos erros mais frequentes, para dar subsídios aos alunos para a realização da refacção. Além disso, o professor pode lançar mão de uma aula expositiva com o intuito de sistematizar os conceitos e procedimentos estudados e ajudar o aluno a organizar o seu conhecimento em relação aos conteúdos estudados em cada bimestre;
- Indicações de recursos<sup>24</sup> para ampliar a perspectiva do professor e do aluno para a compreensão do tema com indicação de: livros, revistas, artigos, *softwares* e *sites*;
- Considerações finais, com ênfase nas inter-relações entre os diversos conteúdos/temas abordados em cada bimestre, que foram contemplados nas propostas das Situações de Aprendizagem, de acordo com cada bloco temático. Na medida do possível, os conteúdos devem ser trabalhados de maneira aplicada e desafiadora, uma boa metodologia para isso é explorar situações-problema contextualizadas com significado, e que exijam reflexão crítica por parte do aluno. Nos Cadernos do Professor a seguir não constam tais considerações finais: 6<sup>a</sup>/7<sup>o</sup> série/ano volumes 3 e 4, 7<sup>a</sup>/8<sup>o</sup> série/ano volumes 1 e 4, 8<sup>a</sup>/9<sup>o</sup> série/ano volumes 1 e 4, do Ensino Fundamental II; 1<sup>a</sup> série volume 4 e 2<sup>a</sup> série volumes 2 e 4, do Ensino Médio;
- Conteúdos de Matemática por série/bimestre do Ensino Fundamental e Ensino Médio, que são apresentados em grades curriculares com os conteúdos de Matemática, de todas as séries do Ensino Fundamental e Médio, com um sombreado para destacar os conteúdos dos bimestres de todas as séries que diretamente estão relacionados com os conteúdos de outros bimestres/séries.

---

<sup>23</sup> Em anexo II Orientações para Recuperação completa.

<sup>24</sup> Indicações de recursos em anexo II.

Para uma ideia mais nítida das múltiplas inter-relações entre os diversos conteúdos que são trabalhados nos Cadernos do Professor, a seguir, serão apresentadas as grades curriculares com os conteúdos de Matemática de todas as séries do Ensino Fundamental e Médio, com um sombreado para destacar os conteúdos dos bimestres de todas as séries que diretamente estão relacionados com os conteúdos de outros bimestres/séries do bloco temático de Geometria, o qual foi escolhido para fazer parte da presente pesquisa.

<b>C</b> ONTEÚDOS DE MATEMÁTICA POR SÉRIE/BIMESTRE DO ENSINO FUNDAMENTAL				
	<b>5ª série</b>	<b>6ª série</b>	<b>7ª série</b>	<b>8ª série</b>
<b>1ª bimestre</b>	<b>NÚMEROS NATURAIS</b> - Múltiplos e divisores. - Números primos. - Operações. - Introdução às potências. <b>FRAÇÕES</b> - Representação. - Comparação e ordenação. - Operações.	<b>NÚMEROS NATURAIS</b> - Sistemas de numeração na Antiguidade. - O sistema posicional decimal. <b>NÚMEROS INTEIROS</b> - Representação. - Operações. <b>NÚMEROS RACIONAIS</b> - Representação fracionária e decimal. - Operações com decimais e frações.	<b>NÚMEROS RACIONAIS</b> - Transformação de decimais finitos em fração. - Dízimas periódicas e fração geratriz. <b>POTENCIAÇÃO</b> - Propriedades para expoentes inteiros. - Problemas de contagem. <b>TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO</b> - A linguagem das potências.	<b>NÚMEROS REAIS</b> - Conjuntos numéricos. - Números irracionais. - Potenciação e radiciação em $\mathbb{R}$ . - Notação científica.
<b>2ª bimestre</b>	<b>NÚMEROS DECIMAIS</b> - Representação. - Transformação em fração decimal. - Operações. <b>SISTEMAS DE MEDIDA</b> - Comprimento, massa e capacidade. - Sistema métrico decimal.	<b>GEOMETRIA</b> - Ângulos. - Polígonos. - Circunferência. - Simetrias. - Construções geométricas. - Poliedros.	<b>EXPRESSÕES ALGÉBRICAS</b> - Equivalências e transformações de expressões algébricas. - Produtos notáveis. - Fatoração algébrica.	<b>ÁLGEBRA</b> - Equações de 2ª grau: resolução e problemas. - Noções básicas sobre funções; a ideia de interdependência. - A ideia de variação. - Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1ª e 2ª graus.
<b>3ª bimestre</b>	<b>GEOMETRIA/MEDIDAS</b> - Formas planas e espaciais. - Noção de perímetro e área de figuras planas. - Cálculo de área por composição e decomposição.	<b>NÚMEROS/ PROPORCIONALIDADE</b> - Proporcionalidade direta e inversa. - Razões, proporções, porcentagem. - Razões constantes na geometria: $\pi$ . <b>TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO</b> - Gráficos de setores. - Noções de probabilidade.	<b>ÁLGEBRA/EQUAÇÕES</b> - Equações de 1ª grau. - Sistemas de equações e resolução de problemas. - Inequações de 1ª grau. - Sistemas de coordenadas (plano cartesiano).	<b>GEOMETRIA/MEDIDAS</b> - Proporcionalidade, noção de semelhança. - Relações métricas em triângulos retângulos. - Razões trigonométricas.
<b>4ª bimestre</b>	<b>TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO</b> - Leitura e construção de gráficos e tabelas. - Média aritmética. - Problemas de contagem.	<b>ÁLGEBRA</b> - Uso de letras para representar um valor desconhecido. - Conceito de equação. - Resolução de equações. - Equações e problemas.	<b>GEOMETRIA/MEDIDAS</b> - Teoremas de Tales e Pitágoras: apresentação e aplicações. - Área de polígonos. - Volume do prisma.	<b>GEOMETRIA/MEDIDAS</b> - O número $\pi$ ; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo. - Volume e área do cilindro. <b>TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO</b> - Contagem indireta e probabilidade.

Figura 8 - Conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental. 8ª/9º série/ano. Volume 4. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 48)

<b>C</b> ONTEÚDOS DE MATEMÁTICA POR SÉRIE/BIMESTRE DO ENSINO MÉDIO			
	<b>1ª série</b>	<b>2ª série</b>	<b>3ª série</b>
<b>1ª bimestre</b>	<b>NÚMEROS E SEQUÊNCIAS</b> - Conjuntos numéricos. - Regularidades numéricas: sequências. - Progressões aritméticas; progressões geométricas.	<b>TRIGONOMETRIA</b> - Fenômenos periódicos. - Funções trigonométricas. - Equações e inequações. - Adição de arcos.	<b>GEOMETRIA ANALÍTICA</b> - Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos. - Reta: equação e estudo dos coeficientes, problemas lineares. - Ponto e reta: distância. - Circunferência: equação. - Reta e circunferência: posições relativas. - Cônicas: noções e aplicações.
<b>2ª bimestre</b>	<b>FUNÇÕES</b> - Relação entre duas grandezas. - Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado. - Função de 1ª grau. - Função de 2ª grau.	<b>MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES</b> - Matrizes: significado como tabelas, características e operações. - A noção de determinante de uma matriz quadrada. - Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento.	<b>EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E NÚMEROS COMPLEXOS</b> - Equações polinomiais. - Números complexos: operações e representação geométrica. - Teorema sobre as raízes de uma equação polinomial. - Relações de Girard.
<b>3ª bimestre</b>	<b>FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA</b> - Crescimento exponencial. - Função exponencial: equações e inequações. - Logaritmos: definição e propriedades. - Função logarítmica: equações e inequações.	<b>ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE</b> - Raciocínio combinatório: princípios multiplicativo e aditivo. - Probabilidade simples. - Casos de agrupamentos: arranjos, combinações e permutações. - Probabilidade da reunião e/ou da intersecção de eventos. - Probabilidade condicional. - Distribuição Binomial de probabilidades: o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.	<b>ESTUDO DAS FUNÇÕES</b> - Qualidades das funções. - Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais. - Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação. - Composição: translações e reflexões. - Inversão.
<b>4ª bimestre</b>	<b>GEOMETRIA/ TRIGONOMETRIA</b> - Razões trigonométricas nos triângulos retângulos. - Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies. - Resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.	<b>GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL</b> - Elementos de geometria de posição. - Poliedros, prismas e pirâmides. - Cilindros, cones e esferas.	<b>ESTATÍSTICA</b> - Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos. - Medidas de tendência central: média, mediana e moda. - Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão. - Elementos de amostragem.

Figura 9 - Conteúdos de Matemática do Ensino Médio. 1ª série. Volume 1.  
 Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 48)

## 5.2 - Caderno do Professor da primeira série do Ensino Médio (2009)

Neste tópico, será feita a exploração das Situações de Aprendizagem presentes no volume 4 do Caderno do Professor, com o objetivo de contribuir com o ensino da Matemática em particular com o conteúdo de Geometria Plana, que neste volume apresenta uma relação com a Trigonometria, expressa no estudo das razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente de um ângulo. Tais razões foram estudadas na 8ª/9ª série/ano do Ensino Fundamental. Trata-se, agora, de uma consolidação de tais ideias, com sua contextualização em diferentes situações práticas e a extensão de seu significado para ângulos maiores do que  $90^\circ$ , no estudo das regularidades na inscrição e na circunscrição de polígonos, nas Leis dos Senos e Cossenos (SÃO PAULO, 2009).

É apresentada na Figura 10, a capa do Caderno do Professor de Matemática, volume 4 de 2009, da primeira série do Ensino Médio.



**Figura 10 - Capa do Caderno do Professor volume 4.  
1ª série do Ensino Médio  
Fonte: (SÃO PAULO, 2009)**

As OCEM (2006) destacam que o estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, bem como saber usar diferentes

unidades de medida.

Possibilitar também estudos sobre os teoremas e argumentações dedutivas, que nas OCEM (2006) são apresentados em dois aspectos: a Geometria que leva à Trigonometria e a Geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes. O primeiro aspecto, aqui apontado, compõe o conteúdo básico do 4º bimestre da 1ª série do Ensino Médio, que é a relação entre a Geometria e a Trigonometria, expressa no estudo das razões trigonométricas.

De acordo com os PCN+ (2002), o ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no Ensino Médio aconteça um aprofundamento dessas ideias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, para analisar o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares.

Ainda segundo as OCEM (2006):

O trabalho de representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundado e sistematizado nesta etapa de escolarização. Alguns conceitos estudados no ensino fundamental devem ser consolidados, como, por exemplo, as ideias de congruência, semelhança e proporcionalidade, o Teorema de Tales e suas aplicações, as relações métricas e trigonométricas nos triângulos (retângulos e quaisquer) e o Teorema de Pitágoras (OCEM, 2006, p. 75-76).

Para tanto, serão apresentadas propostas para articular as Situações de Aprendizagem encontradas no Caderno do Professor, com o uso do *software* GeoGebra como uma ferramenta pedagógica enriquecedora para o ensino da Matemática.

No que tange a inserção da tecnologia no ensino da Matemática as OCEM (2006) sinalizam para o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na sociedade atual.

Para a presente pesquisa o uso do *software* GeoGebra como um recurso tecnológico, pode ser inserido nesse cenário para subsidiar o processo de ensino aprendizagem na área da Matemática e suas Tecnologias.

As OCEM (2006) ressaltam que há dois aspectos importantes quanto ao uso da tecnologia no ensino da Matemática: a Matemática como ferramenta para entender a

tecnologia e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), o primeiro aspecto, a Matemática para a Tecnologia, deve-se pensar na formação que capacita para o uso, por exemplo: calculadoras e planilhas eletrônicas. No trabalho com calculadoras, é preciso saber informar, via teclado, as instruções de execução de operações e funções, e isso exige conhecimentos matemáticos.

Sobre as planilhas eletrônicas, o documento ressalta que são programas de computador que servem para manipular tabelas cujas células podem ser relacionadas por expressões matemáticas. Para tanto, é preciso conhecimento matemático com maiores exigências para executar as operações e as funções que são definidas sobre as células de uma tabela em que se faz uso de notação para matrizes. Assim, é importante conhecer bem a notação matemática usada para expressar diferentes conceitos, em particular o conceito de função. Em contrapartida, o desenvolvimento de planilhas mais complexas requer raciocínio típico dos problemas que exigem um processo de solução em diferentes estágios.

O segundo aspecto apontado pelas OCEM (2006), a Tecnologia para a Matemática, mostra que existem programas de computador (*softwares*) nos quais é possível explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, propiciar a experimentação, testar hipóteses, esboçar conjecturas e criar estratégias para resolver problemas.

As OCEM (2006) destacam algumas características desses programas: a) conter certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento; b) oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica, geométrica; c) possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macroconstruções; d) permitir a manipulação dos objetos que estão na tela.

Especificamente para a Geometria, há programas que dispõem de régua e compasso virtuais e com menu de construção em linguagem clássica da Geometria – reta perpendicular, ponto médio, mediatriz, bissetriz, etc. Feita uma construção, pode-se aplicar movimento a seus elementos, que as relações geométricas impostas à figura serão preservadas. Por esta especificidade tais programas são considerados programas de Geometria Dinâmica (OCEM, 2006).

Segundo o Currículo do Estado de São Paulo (2010), os *softwares* de Geometria Dinâmica estão na linha de ferramentas que possibilitam a articulação das quatro faces para o

conhecimento Geométrico, que se relacionam permanentemente na caracterização do espaço: a percepção, a concepção, a construção e a representação (MACHADO, 1995).

A perspectiva de Machado (1995) sobre o ensino de Geometria está presente nas perspectivas do Currículo de São Paulo (2010):

Continuamente, percebemos para construir ou quando construímos, para representar ou quando representamos; concebemos o que pretendemos construir, com a mediação das representações; ou construímos uma representação (como uma planta ou uma maquete) para facilitar a percepção. E mesmo as concepções mais inovadoras têm como referência percepções ou construções já realizadas, renovando seus pressupostos ou transcendendo seus limites.

Alimentando-se mutuamente, percepções, construções, representações e concepções são como átomos em uma estrutura molecular, que não pode ser subdividida sem que se destruam as propriedades fundamentais da substância correspondente. Isoladamente, qualquer uma das faces desse tetraedro tem um significado muito restrito; a sua força está no mútuo apoio que essas faces se propiciam. Em situações de ensino, é muito importante, portanto, a busca de uma alimentação mútua entre tais aspectos do conhecimento geométrico por meio de atividades integradoras (SÃO PAULO, 2010, p. 42)

Para as OCEM (2006), esses programas de Geometria Dinâmica também enriquecem as imagens mentais associadas às propriedades geométricas. Neste sentido, o *software* GeoGebra será usado para fazer as inferências nas Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática da primeira série do Ensino Médio (2009), de modo a propiciar a articulação das quatro faces do conhecimento Geométrico, que se enquadra no segundo aspecto apontado pelas OCEM (2006): a Tecnologia para a Matemática. Portanto, com esse *software* será possível explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, propiciar a experimentação, testar hipóteses, esboçar conjecturas e criar estratégias para resolver problemas que surgirão da análise deste material.

A perspectiva de uso da tecnologia para o ensino de Matemática presente na atual pesquisa é compartilhada com a visão apresentada no Currículo de São Paulo, (2010):

...certamente os numerosos recursos tecnológicos disponíveis para utilização em atividades de ensino encontram um ambiente propício para acolhimento no terreno da Matemática: máquinas de calcular, computadores, *softwares* para a construção de gráficos, para as construções em Geometria e para a realização de cálculos estatísticos são muito bem-vindos, bem como o seu uso será crescente, inevitável e desejável... (SÃO PAULO, 2010, p. 33, 34).

Esta pesquisa entende e concorda com os preceitos indicados no Currículo de São Paulo (2010), sobre a inserção da tecnologia como uma possível ferramenta pedagógica para o ensino da Matemática, tem-se como hipótese de pesquisa: o uso da tecnologia computacional, com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, poderá

favorecer a proposta de articulação das Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo, de forma simples e significativa.

À medida que a presente pesquisa tem como perspectiva de investigação, a luz do Currículo do Estado de São Paulo (2010), analisar as Situações de Aprendizagem de Geometria, do 4º bimestre da primeira série do Ensino Médio, do Caderno do Professor de Matemática publicado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (2009), busca-se responder: De que maneira é possível criar uma abordagem dinâmica, com o *software* GeoGebra para o conteúdo de Geometria Plana do Ensino Médio, com base no Currículo do Estado de São Paulo?

A Figura 11 apresenta o sumário do Caderno do Professor, relativo ao quarto bimestre de 2009 da primeira série do Ensino Médio.

<b>SUMÁRIO</b>	
<b>São Paulo faz escola – Uma Proposta Curricular para o Estado</b>	<b>5</b>
<b>Ficha do Caderno</b>	<b>7</b>
<b>Orientação geral sobre os Cadernos</b>	<b>8</b>
<b>Situações de Aprendizagem</b>	<b>11</b>
Situação de Aprendizagem 1 – Rampas, cordas, parsecs – razões para estudar triângulos retângulos	11
Situação de Aprendizagem 2 – Dos triângulos à circunferência – vamos dar uma volta?	21
Situação de Aprendizagem 3 – Polígonos e circunferências – regularidades na inscrição e na circunscrição	30
Situação de Aprendizagem 4 – A hora e a vez dos triângulos não retângulos	37
<b>Orientações para Recuperação</b>	<b>45</b>
<b>Recursos para ampliar a perspectiva do professor e do aluno para a compreensão do tema</b>	<b>47</b>
<b>Conteúdos de Matemática por série/bimestre do Ensino Médio</b>	<b>48</b>

**Figura 11 – Sumário do Caderno do Professor Volume 4. 1ª série. Ensino Médio**  
**Fonte: (SÃO PAULO, 2009)**

O sumário apresentado na Figura 11 fornece uma visão panorâmica do conteúdo do Caderno Professor, volume 4 da primeira série do Ensino Médio, fornece informações referentes as quatro Situações de Aprendizagem que serão trabalhadas ao longo do bimestre com os alunos, entre outros dados.

O quadro abaixo apresenta a ficha do Caderno do Professor, com o tema estruturador e os conteúdos que serão trabalhados durante o quarto bimestre.

<b>FICHA DO CADERNO</b>	
<b>Geometria e trigonometria: razões de uma relação cordial</b>	
<b>Nome da disciplina:</b> Matemática	
<b>Área:</b> Matemática	
<b>Etapa da educação básica:</b> Ensino Médio	
<b>Série:</b> 1 <sup>a</sup>	
<b>Volume:</b> 4	
<b>Temas e conteúdos:</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tangente, seno, secante: origem, significado, contextos</li> <li>• Razões complementares: cosseno, cotangente, cossecante</li> <li>• Relações simples entre as razões trigonométricas</li> <li>• Extensões do significado das razões para ângulos maiores do que 90°</li> <li>• Polígonos regulares: ângulos internos, externos, inscrição e circunscrição</li> <li>• Lei dos Senos e Lei dos Cossenos</li> </ul>	

**Quadro 3 - Ficha do Caderno do 4º bimestre da 1ª série. Ensino Médio**

**Fonte: (SÃO PAULO, 2009, p. 7)**

No quadro abaixo, é apresentada a descrição detalhada dos conteúdos básicos do quarto bimestre da primeira série que compõem o material do Professor de Matemática do Ensino Médio.

O conteúdo básico do 4º bimestre da 1ª série do Ensino Médio é a relação entre a Geometria e a Trigonometria, expressa no estudo das razões trigonométricas. Tais razões, como o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo, já foram apresentadas aos alunos na 8ª série do Ensino Fundamental (3º bimestre). Trata-se, agora, de uma consolidação de tais ideias, com sua contextualização em diferentes situações práticas e a extensão de seu significado para ângulos maiores do que 90°. As razões trigonométricas voltarão a ser estudadas na 2ª série do Ensino Médio (1º bimestre), quando será dada ênfase a periodicidade das funções trigonométricas, e serão novamente exploradas na 3ª série, inseridas no estudo geral das funções.

Para a reapresentação e consolidação da tangente de um ângulo agudo, tomamos como ideia base a inclinação de uma rampa. Aqui e em muitos outros lugares do Currículo, a associação da inclinação de uma reta com a proporcionalidade nas razões entre os catetos de triângulos retângulos semelhantes e, conseqüentemente, com a tangente de um ângulo, parece fundamental. O estudo das funções do tipo  $f(x) = ax + b$ , e o da equação da reta, na Geometria Analítica, são apenas dois exemplos mais visíveis.

Das rampas, passamos às cordas, no cálculo de distâncias astronômicas: as tabelas de cordas, “que

existem desde Hiparco de Nicéia (século II a.C.), são testemunhas do interesse que as razões entre um dos catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo despertavam. Tais tabelas nos fazem cair nos braços das funções seno e secante de um ângulo. Com a tangente, o seno e a secante, teremos em mãos as seis razões fundamentais, uma vez que as outras três (cosseno, cossecante e cotangente) não passam das três primeiras aplicadas ao ângulo complementar do ângulo dado: cosseno de  $\alpha$  = seno do complementar de  $\alpha$ , e assim por diante.

Após a representação/consolidação das seis razões trigonométricas fundamentais para os ângulos agudos, será feita uma extensão natural de tais noções para ângulos maiores do que  $90^\circ$ , com a correspondente redução do cálculo do seno, cosseno, tangente, etc. de um ângulo maior do que  $90^\circ$  aos valores já conhecidos das razões correspondentes nos ângulos agudos.

Uma situação interessante, nessa articulação entre a Geometria e a Trigonometria que está sendo levada a cabo no presente bimestre, é o estudo das regularidades na inscrição e na circunscrição de polígonos, que será feito a seguir.

Completará o bimestre a apresentação de duas relações especialmente importantes entre lados e ângulos de triângulos, que valem inclusive em triângulos não retângulos: a da proporcionalidade entre lados e senos, que é a Lei dos Senos, e a generalização do teorema de Pitágoras, que é a Lei dos Cossenos.

**Quadro 4 - Descrição detalhada dos conteúdos básicos do 4º bimestre - 1ª série – Caderno do Professor de Matemática do Ensino Médio.  
Adaptado de (SÃO PAULO, 2009, p 9)**

A partir da descrição detalhada dos conteúdos básicos do 4º bimestre para a primeira série do Ensino Médio no quadro 4, é apresentada no Caderno do Professor uma sugestão para a distribuição das unidades do bimestre que irá proporcionar uma visão sobre a organização dos conteúdos, conforme o quadro 5.

Unidade 1 – Tangente, seno, secante: origem, significado, contextos.

Unidade 2 – Razões complementares: cosseno, cotangente, cossecante. Relações simples entre as razões trigonométricas.

Unidade 3 – Extensões do significado das razões para ângulos maiores do que  $90^\circ$ .

Unidade 4 – Como reduzir ângulos maiores do que  $90^\circ$  a menores do que  $90^\circ$ .

Unidade 5 – Polígonos regulares: ângulos internos e externos.

Unidade 6 – Inscricção e circunscricção de polígonos regulares.

Unidade 7 – A proporcionalidade lado/seno: Lei dos Senos.

Unidade 8 – Uma generalização do teorema de Pitágoras: Lei dos Cossenos.

**Quadro 5 - Conteúdos gerais - 4º bimestre - 1ª série do Ensino médio.  
Fonte: (SÃO PAULO, 2009, p. 10)**

As orientações contidas no Caderno do Professor destacam que o quadro 5, coloca os conteúdos organizados em oito unidades de extensões aproximadamente iguais, que podem corresponder a oito semanas de trabalho letivo.

O documento destaca que o professor explorará os conteúdos de acordo com o número de aulas disponíveis por semana, cada assunto com maior ou menor aprofundamento, ao passo que o professor poderá escolher uma escala adequada para o tratamento dos conteúdos contidos no material para cada bimestre.

O Caderno do Professor apresenta quatro Situações de Aprendizagem, que de certa forma ilustram as abordagens dos conteúdos. O objetivo dessas ilustrações é propiciar ao professor instrumentos para a ação em sala de aula.

As Situações de Aprendizagem são:

- Situação de Aprendizagem 1 - rampas, cordas, parsecs – razões para estudar triângulos retângulos;
- Situação de Aprendizagem 2 - dos triângulos à circunferência – vamos dar uma volta?
- Situação de Aprendizagem 3 - polígonos e circunferências – regularidades na inscrição e na circunscrição;
- Situação de Aprendizagem 4 - a hora e a vez dos triângulos não retângulos.

A seguir serão apresentadas as quatro Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor. No decorrer de cada apresentação serão realizadas algumas inferências consideradas significativas para o presente trabalho de pesquisa, que busca proporcionar um enriquecimento das Situações de Aprendizagem para o ensino dos conteúdos. Com a perspectiva de possibilidade de uso do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra como recurso pedagógico.

### **5.2.1 - Situação de Aprendizagem 1 - rampas, cordas, parsecs – razões para estudar triângulos retângulos**

Segundo o relato presente no Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009) o objetivo principal desta Situação de Aprendizagem é a consolidação das noções de tangente, seno e secante de um ângulo agudo. Para a tangente será apresentada a ideia da inclinação de uma rampa; para o seno e a secante, a razão entre cordas e raios de um arco de circunferência, uma situação usual no cálculo de distâncias astronômicas.

De acordo com o que é exposto no Caderno do Professor, com esta Situação de Aprendizagem, os alunos deverão compreender a existência da constância das razões entre os

lados correspondentes de triângulos retângulos semelhantes e a importância de dar nomes especiais a tais razões, o que dará origem aos senos, às tangentes e às secantes, por exemplo. O documento destaca também que as capacidades de expressão e de compreensão de fenômenos naturais de diversos tipos, bem como a de enfrentar situações-problema em diferentes contextos, serão bastante ampliadas, ao longo desta Situação de Aprendizagem.

O quadro 6 é apresentado no Caderno como sugestão ao Professor.

Tempo previsto: 2 semanas.

Conteúdos e temas: significado da tangente, do seno e da secante de um ângulo agudo, apresentado em contextos significativos; significado do cosseno, da cotangente e da cossecante; relações simples entre as seis razões trigonométricas.

Competências e habilidades: expressar e compreender fenômenos naturais de diversos tipos; enfrentar situações-problema envolvendo as razões trigonométricas em diferentes contextos.

Estratégias: articulação das noções sobre razões trigonométricas já estudadas em séries anteriores; exemplos ilustrativos da utilização de tais razões em diferentes contextos; exercícios exemplares sobre as razões trigonométricas.

**Quadro 6 - sugestão ao professor – 1ª Situação de Aprendizagem - 4º bimestre - 1ª série - Ensino médio. Fonte: (SÃO PAULO, 2009, p. 11)**

O quadro 6 sugere que o professor utilize duas semanas nesta etapa. No entanto, o documento ressalta que fica a critério do professor, a ampliação ou a redução do tempo sugerido, em função de interesses ou características específicas de sua turma.

Roteiro para aplicação da Situação de Aprendizagem 1, presente no Caderno do Professor de Matemática, volume 4, primeira série do Ensino Médio.

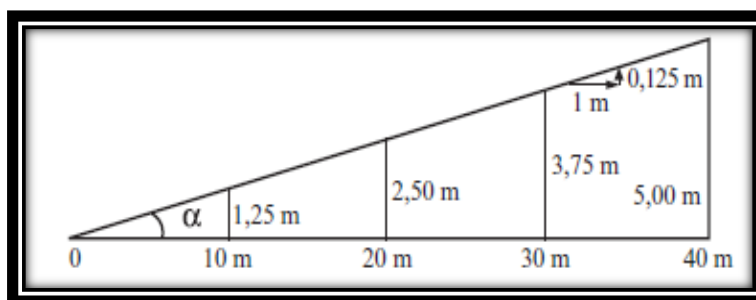
A estratégia a ser utilizada, como está proposta no Caderno do Professor, será a seguinte:

- As ideias fundamentais referentes às razões trigonométricas (tangente, seno, secante) serão apresentadas, para buscar uma articulação com o que já foi estudado sobre as mesmas em séries anteriores;
- Exemplos ilustrativos servirão para a contextualização e a articulação do que se apresenta;
- Exercícios exemplares serão propostos como modelos, para que, com base neles, o professor possa estender a lista, praticar e aprofundar o que considerar necessário, criar seus próprios exercícios, ou recorrer aos exercícios que se encontram nos livros didáticos sobre o tema.

Na Situação de Aprendizagem 1 o documento ressalta que a caracterizar a inclinação de uma rampa, seja a entrada de uma garagem, uma rua íngreme ou uma ladeira acentuada, busca-se relacionar as distâncias percorridas horizontalmente e verticalmente, em cada trecho, ou, mais especificamente, costuma-se registrar quanto é possível se elevar verticalmente para cada unidade que é percorrida horizontalmente.

### Rampas e a tangente

É apresentado no Caderno do Professor da primeira série do Ensino Médio volume 4 um exemplo ilustrativo. Na rampa representada na Figura 12, observa-se que a cada 10 m percorridos na horizontal, as elevações são sempre iguais a 1,25 m (SÃO PAULO, 2009).



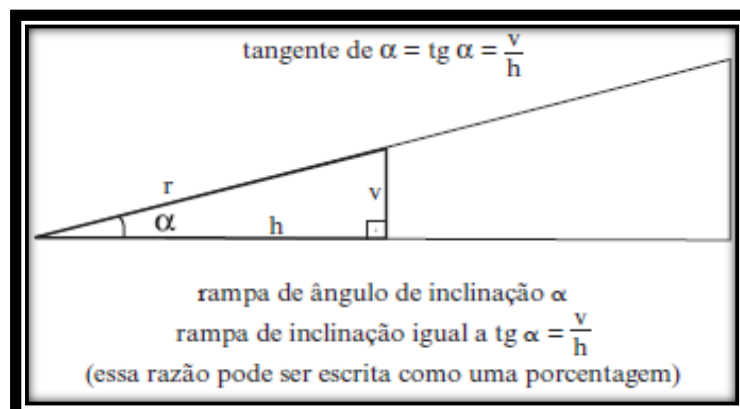
**Figura 12 – Exemplo de rampa. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 12)**

O documento destaca ainda que para caracterizar a rampa da Figura 12, pode-se escrever de modo inteiramente equivalente, as diversas sentenças indicadas a seguir:

- “A cada 10 m percorridos na horizontal, sobe-se verticalmente 1,25 m;”
- “A cada metro percorrido horizontalmente, a elevação vertical é de 0,125 m;”
- “A cada 100 m percorridos horizontalmente, sobe-se verticalmente 12,5 m;”
- “A inclinação da rampa é de 12,5%;”
- “O ângulo  $\alpha$  de inclinação da rampa é tal que sua tangente vale 0,125” (em uma figura em escala, o ângulo  $\alpha$  seria de aproximadamente  $7^\circ$ ).

De acordo com os autores do Caderno do Professor para caracterizar uma rampa determinada por um ângulo  $\alpha$  com a horizontal, pode-se construir um triângulo retângulo que a represente, com o ângulo  $\alpha$ , conforme indicado na Figura 13. Determina-se assim a razão entre o cateto vertical e o cateto horizontal, ou seja, entre o cateto que está na frente do ângulo  $\alpha$  e o cateto que é um dos lados de  $\alpha$ . Não importa o tamanho do triângulo desenhado: para

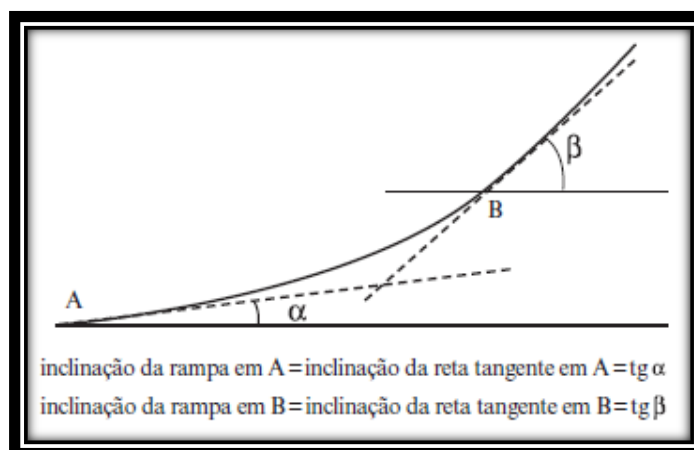
cada ângulo  $\alpha$ , tal razão entre os catetos é uma constante característica do ângulo, e é chamada de tangente de  $\alpha$ .



**Figura 13 - Tangente associada à ideia de rampa. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p 12)**

De acordo com o Caderno do Professor algumas observações são relevantes sobre as afirmações anteriores (SÃO PAULO, 2009):

- O nome “tangente de  $\alpha$ ” está associado ao fato de que, quando a rampa não é plana, ou seja, quando seu contorno não é uma reta, mas sim uma curva, então é possível obter a medida de inclinação por meio da reta tangente (quer dizer, que toca suavemente) a curva citada;



**Figura 14 – Retas tangentes. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 13)**

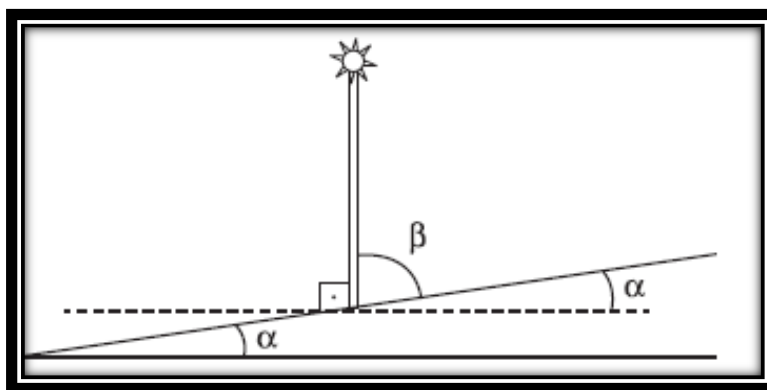
- Nas ruas e estradas, as rampas devem obedecer a certas recomendações, não podem ser muito íngremes. O Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes (DNIT), por exemplo, regulamenta as inclinações máximas em estradas, que variam de 5% a 9%, e isso depende de certas características, como o volume de tráfego. Inclinações maiores somente existem em condições excepcionais. Existem, de fato, algumas ruas com inclinações superiores a 10%, mas constituem exceções. Na Nova

Zelândia, encontra-se a rua mais inclinada do mundo: seu ângulo  $\alpha$  de inclinação é tal que  $\text{tg } \alpha = 0,35$ , ou seja, a inclinação é de 35%, o que corresponde a um valor de  $\alpha$  próximo de  $19^\circ$ .

- Algumas vezes, se diz que “uma rampa de inclinação 0,01 significa que, a cada 100 m que se percorre na rampa, há uma elevação verticalmente 1 m”. Rigorosamente, pode-se dizer que “a cada 100 m que se percorre horizontalmente, a elevação vertical corresponde a 1 m”. Para pequenos ângulos de inclinação, a diferença entre os valores de  $r$  e de  $h$  (ver Figura 13 anterior) não é significativa. Por exemplo, para se calcular o valor de  $r$  para  $h = 100$  e  $v = 1$ , se obtém  $r \cong 100,005$ , ou seja, para pequenas inclinações, tanto faz, na prática, se considerar o percurso na horizontal ou na rampa.

Para fixar a ideia de rampa são propostas no Caderno do Professor duas atividades exemplares como modelos.

**Primeira atividade proposta:** Para calcular a inclinação  $\alpha$  de uma rua, pode-se observar o ângulo  $\beta$  formado pelo poste (vertical) com o leito da rua. Se tal ângulo for igual a  $84^\circ$ , qual será a inclinação da rua?



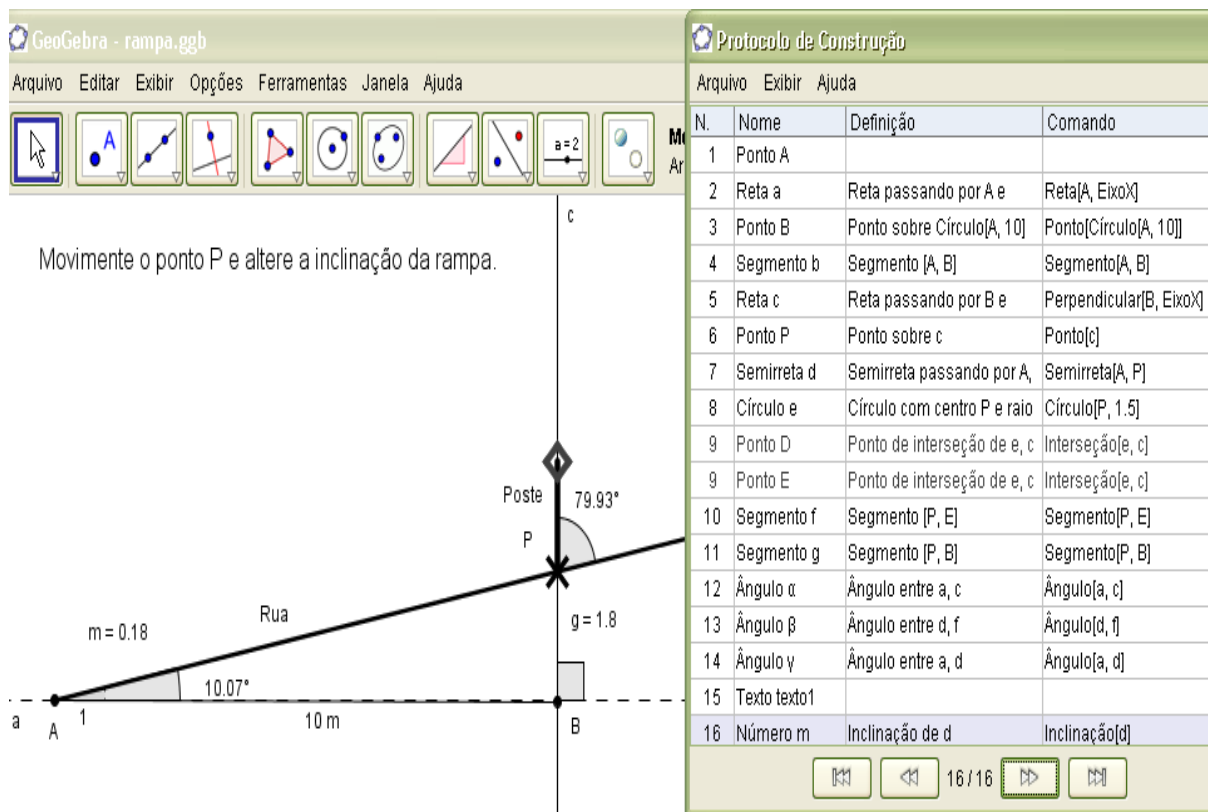
**Figura 15 – Ilustração do primeiro exemplo (inclinação de uma rua).**  
**Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 13)**

A partir da leitura do texto e da visualização da Figura 15 é apresentada a seguinte solução para a atividade em questão: verifica-se que  $\beta + \alpha = 90^\circ$ ; logo,  $\alpha = 6^\circ$ . Na consulta de uma tabela de tangentes, ou com o uso de uma calculadora, encontra-se:  $\text{tg } 6^\circ \cong 0,105$ , ou seja, a inclinação da rampa é 0,105 ou, ainda, 10,5%. Isso significa que, a cada 100 m que é percorrido horizontalmente, a elevação vertical é de cerca de 10,5 m. Em outras palavras, a cada metro percorrido horizontalmente, sobe-se cerca de 10,5 cm.

**Segunda atividade proposta:** Ao lado de uma rua, na forma de uma rampa de inclinação 10%, foi construída uma escada para pedestres. O trecho da rua em que a escada foi construída tem 80 m de comprimento, medidos horizontalmente. Se os degraus da escada devem ser iguais, tendo uma altura de, no máximo, 16 cm, quantos degraus, no mínimo deverá ter a escada?

De acordo com a solução apresentada no caderno, a inclinação da rampa é de 10%, então, a 80 m horizontais correspondem 8 m, ou seja, 800 cm de subida, na vertical. Se cada degrau deve ter no máximo 16 cm de altura, deve-se ter, no mínimo,  $800/16 = 50$  degraus.

Para trabalhar a ideia de rampa fica como sugestão o desenvolvimento de dois exemplos com o uso do *software* GeoGebra apresentados nas Figuras 16 e 17.



**Figura 16 – Inclinação da rampa. Adaptado de**  
<http://www.geogebra.org/en/upload/files/Cadu/inclinacao.html> (Acesso em: agosto de 2011)

O exemplo da Figura 16 que representa a inclinação da rampa (rua) de uma forma dinâmica, com o uso do *software* GeoGebra, pode auxiliar na interpretação da inclinação da rampa. Com a manipulação do ponto (P), onde se localiza o poste, será possível constatar a relação entre o índice de inclinação (m), a altura da rampa (g) e deslocamento na horizontal

determinado pelo segmento AB. A Figura 17 complementa a ideia de rampa, com o foco na razão e na proporção dos segmentos (lados dos triângulos).

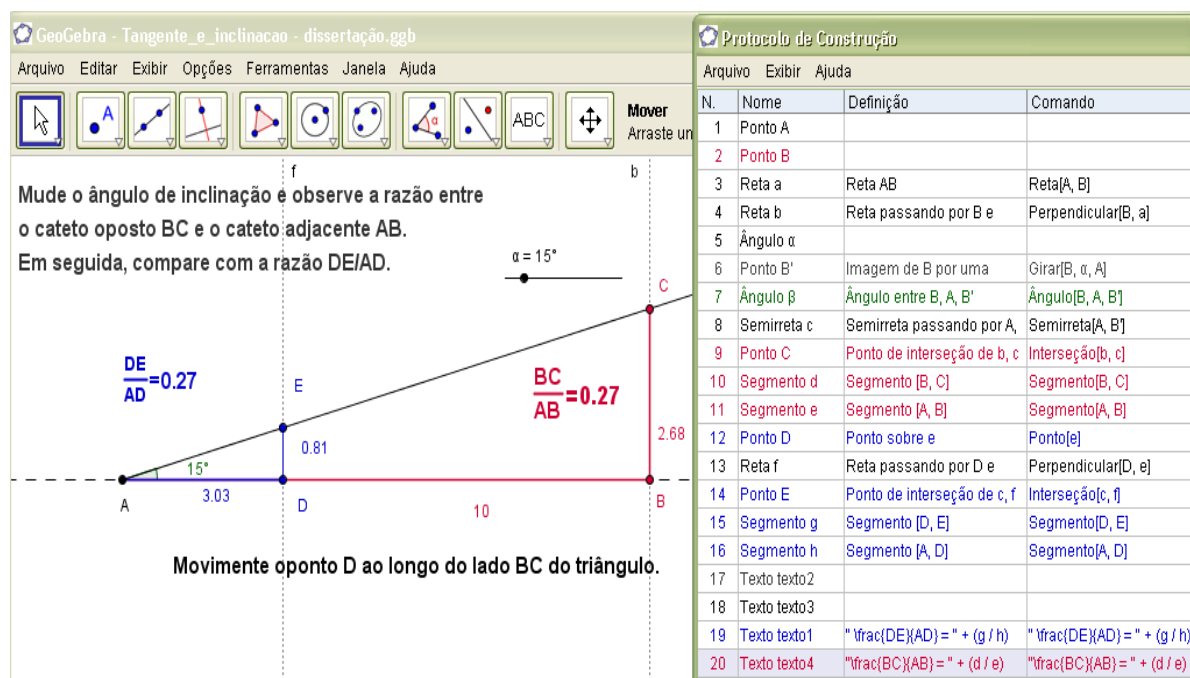


Figura 17 – Inclinação – ideia de rampa. Adaptado de

<http://www.geogebra.org/en/upload/index.php?PHPSESSID=xjzoulvjiou&direction=0&order=&directory=Cadu> (Acesso em: agosto de 2011).

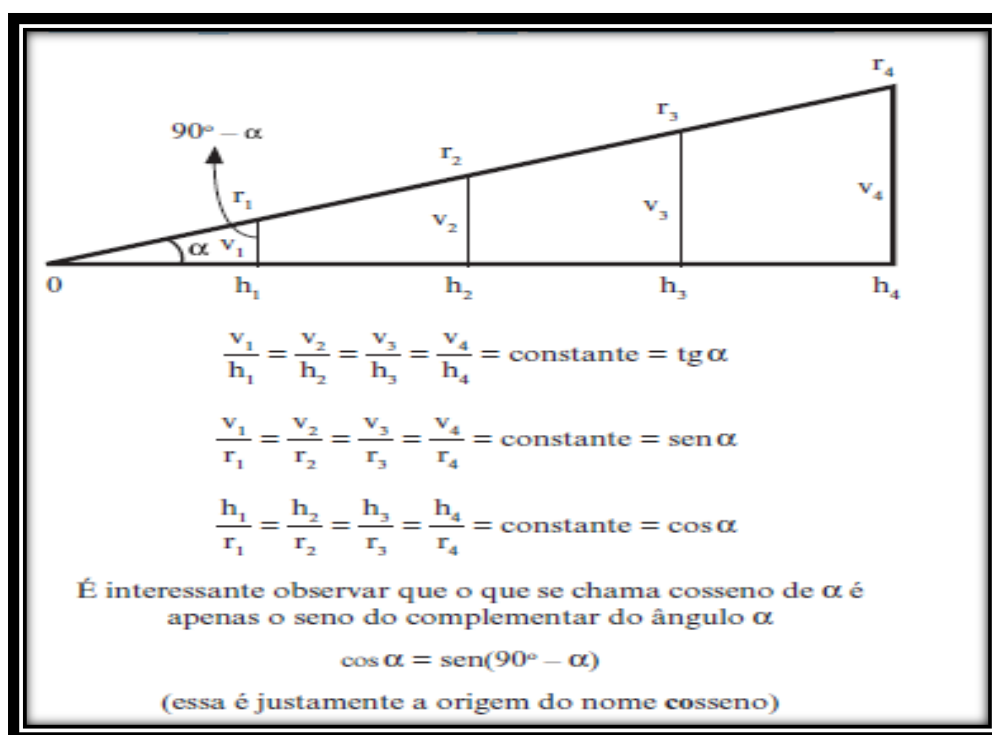
Com esse exemplo da Figura 17 será possível articular algumas noções sobre a razão trigonométrica no triângulo retângulo (tangente), bem como a proporcionalidade entre os lados dos triângulos retângulos, que foram estudadas no Ensino Fundamental II. Com a utilização do *software* GeoGebra será possível de uma forma dinâmica, perceber a regularidade entre as razões dos segmentos do objeto ao movimentar o cursor responsável pelo ângulo ( $\alpha$ ) de inclinação da rampa e do ponto (D).

Com o objetivo de auxiliar o professor na construção do objeto de estudo das Figuras 16 e 17, foram apresentados dois protocolos de construção com os passos necessários para a execução das atividades.

### Cordas e senos

Para trabalhar a ideia fundamental referente à razão trigonométrica seno é apresentada, no Caderno do Professor volume 4 da primeira série do Ensino Médio, uma articulação com o que já foi estudado na 8º/9º série/ano. Os autores do Caderno chamam a atenção ao fato

notável de que, em certa rampa determinada pelo ângulo  $\alpha$ , conforme é apresentado na Figura 18, não somente a razão entre o cateto oposto a  $\alpha$  e o cateto que lhe serve de lado (tangente de  $\alpha$ ), mas também as razões entre o cateto oposto a  $\alpha$  e a hipotenusa e entre o cateto situado ao lado (adjacente) de  $\alpha$  e a hipotenusa, são também constantes características do ângulo  $\alpha$ , conhecidas como seno de  $\alpha$  e cosseno de  $\alpha$ , respectivamente.



**Figura 18 – Razões trigonométricas no triângulo retângulo.**  
 Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 14)

No Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009) é apresentada uma recuperação histórica, sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo. O autor destaca que o interesse por tais triângulos encaixados, que deram origem as razões seno, cosseno e tangente e a todos os estudos de Trigonometria, nasceu historicamente, no entanto, de cálculos astronômicos relacionados com a posição e o movimento das estrelas. Imaginava-se que os astros, no céu, descreviam arcos de circunferências, e a observação de seus percursos, aliada as razões constantes em triângulos, como os anteriormente referidos, possibilitava a estimativa de distâncias entre corpos celestes e entre nós e eles. Com tais intenções, Hiparco de Nicéia construiu no século II a.C., uma tabela de cordas, que daria origem à noção de seno. Sinteticamente, tais tabelas forneciam os valores das razões  $\frac{c}{R}$  entre o comprimento  $c$  de cordas traçadas em uma circunferência e o raio  $R$  da circunferência, uma vez que existe uma proporcionalidade entre tais valores, de acordo com o que se observa na Figura 19.

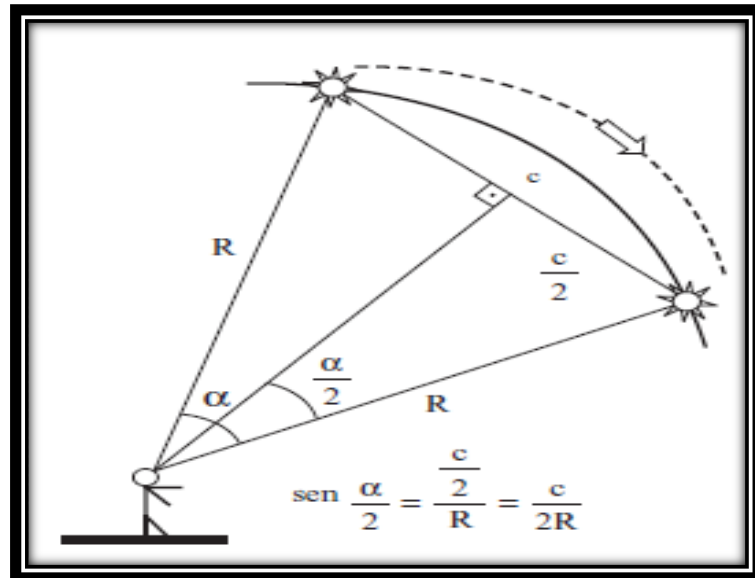


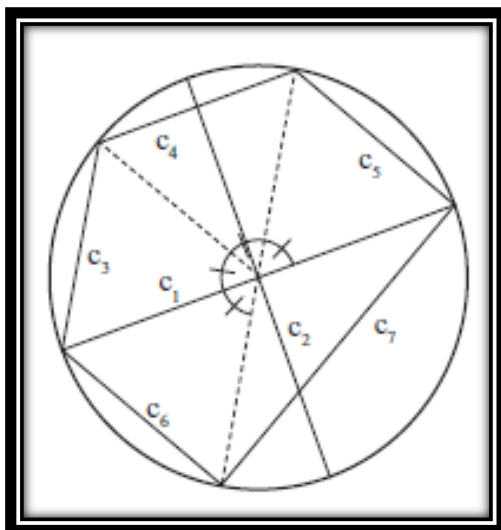
Figura 19 – Noção de seno. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 14)

Ainda segundo o documento, na verdade, a razão  $\frac{c}{R}$  não coincide com o que hoje é conhecido como seno, mas a razão entre a metade da corda e a distância  $R$  corresponde precisamente ao seno do ângulo  $\frac{\alpha}{2}$ , igual a metade do ângulo, segundo o qual, um observador veria, da Terra, o arco descrito pelo astro, conforme representação na Figura 19.

Ptolomeu utilizou tabelas de cordas, em período posterior a Hiparco, e a elas dedicou um capítulo de seu conhecido livro *Almagesto* (150 d.C.). Matemáticos hindus, como Aryabhata (476 - 550) e Bhaskara (1150) também se dedicaram a essas tabelas. Consta que o próprio nome “seno” teria origem em tais tabelas: a palavra árabe para significar “corda” seria *jiba*, e, como somente são registradas as consoantes, as tabelas trariam apenas *jb*, o que teria levado alguns tradutores a confundir tal registro com a palavra *jaib*, de mesmas consoantes, e que significa “golfo, enseada” (em latim, *sinus*) (SÃO PAULO, 2009).

O Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009) apresenta a **atividade 3** como proposta para trabalhar a ideia de seno: “em uma circunferência de raio 1 m, podemos traçar cordas de todos os tamanhos possíveis entre 0 e 2 m. Algumas dessas cordas, de comprimento  $c_1$  a  $c_7$  estão representadas na Figura 20. Os quatro ângulos indicados têm medida de  $60^\circ$ ” (p. 15).

De acordo com a proposta da atividade 3, a seguir, são apresentadas cinco questões elaboradas pelos autores do Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009):



**Figura 20 - Circunferência de raio 1 m.**  
**Fonte: (SÃO PAULO, 2009, p. 15)**

**Primeira questão:** Calcule o comprimento de cada uma das cordas. A solução apresentada no Caderno do Professor está no quadro (7) abaixo.

As cordas de comprimentos  $C_1$  e  $C_2$  são diâmetros da circunferência dada; temos, então:  $C_1 = 2$  m e  $C_2 = 2$  m.

As cordas de comprimentos  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  e  $C_6$  são lados de triângulos equiláteros em que um dos lados é igual ao raio; logo,  $C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 1$  m.

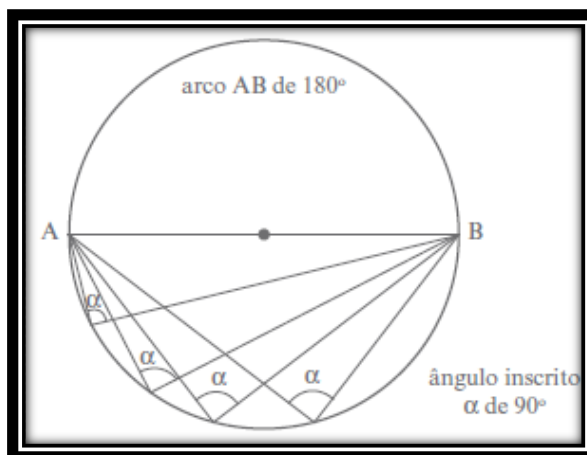
Para calcular o comprimento  $C_7$  lembrando que todo ângulo inscrito em uma semicircunferência mede  $90^\circ$ , podemos usar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de lados  $C_1$ ,  $C_6$  e  $C_7$ :  $(C_1)^2 = (C_6)^2 + (C_7)^2$ , de onde obtemos  $C_7 = \sqrt{3}$  m  $\cong 1,73$  m. Note que o conjunto dos pontos de onde se vê uma corda dada em uma circunferência qualquer sob um ângulo de  $90^\circ$  forma uma semicircunferência que tem a referida corda como diâmetro.

**Quadro 7 – Proposta de resolução da atividade 3**  
**Fonte: (SÃO PAULO, 2009, p. 15)**

O professor para enriquecer esta atividade com o uso do *software* GeoGebra, poderá junto com seus alunos no ambiente computacional reproduzir a Figura 21, analisar as propriedades e as características das figuras planas inscritas em uma circunferência.

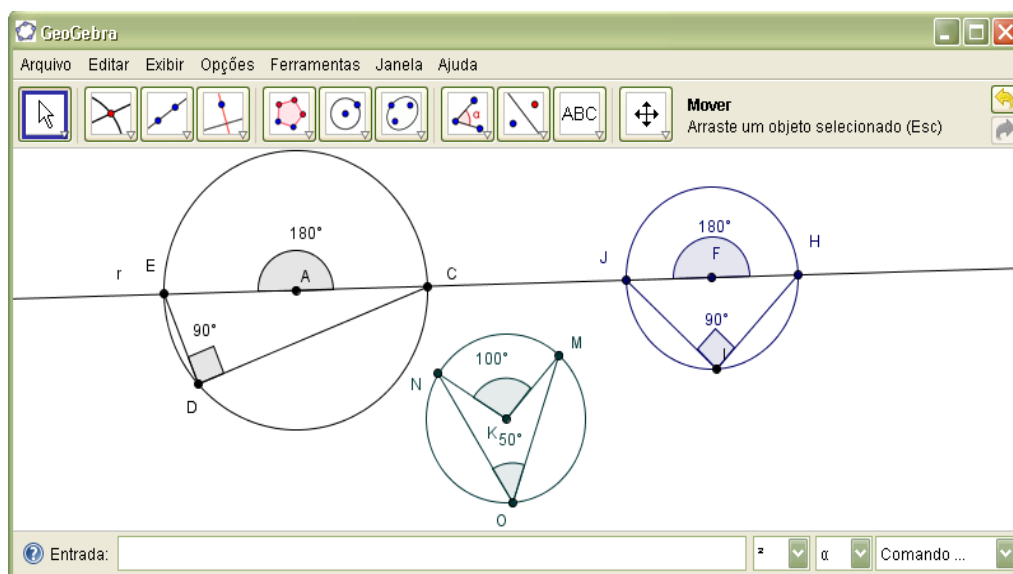
A manipulação do objeto, com o *software* GeoGebra os alunos poderão construir, perceber e representar para formalizar uma concepção sobre as cordas.

A Figura 21 a seguir apresenta uma ilustração para a explicação do professor durante a aula, que está presente no Caderno do Professor.



**Figura 21 – Cordas, para exemplificar a solução da atividade 3**  
**Fonte: (SÃO PAULO, 2009, p. 15)**

A reprodução da Figura 21, tal como está na lousa ou no caderno do aluno, não permitirá a manipulação do objeto sem que o mesmo perca as suas características, nesse momento a utilização do *software GeoGebra* poderá ser uma boa saída, observe as circunferências na Figura 22.



**Figura 22 - Circunferência com cordas. Elaborado pelo autor.**

Segundo OCEM (2006), a tecnologia usada para entender a Matemática se apresenta como um recurso para favorecer a aprendizagem dos conteúdos de uma forma dinâmica, pois, com o *software* os alunos poderão explorar e construir diferentes conceitos matemáticos. Nesse simples exemplo os alunos poderão fazer experimentos, testar as suas hipóteses, esboçar conjecturas, pensar em estratégias para resolver o problema, com a manipulação do objeto por meio do recurso tecnológico.

Os alunos poderão também aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental II sobre as ideias relacionadas à circunferência, elementos de uma circunferência: centro, raio, diâmetro e corda, compreender as propriedades de segmentos internos e ângulos na circunferência, e que o conjunto dos pontos de onde se vê uma corda dada em uma circunferência qualquer sob um ângulo de  $90^\circ$ , forma uma semicircunferência que tem a referida corda como diâmetro, os alunos poderão conjecturar e tentar provar as conjecturas com o recurso do *software*.

A realização de atividades em ambientes computacionais pode proporcionar a professores e alunos momentos de grandes experiências.

**Segunda questão:** Calcule a razão entre a semicorda e o raio em cada caso e faça uma tabela com os valores da semicorda e da razão anteriormente referida. Indique também na tabela os ângulos centrais correspondentes a cada corda e os ângulos dos quais tais razões são os senos.

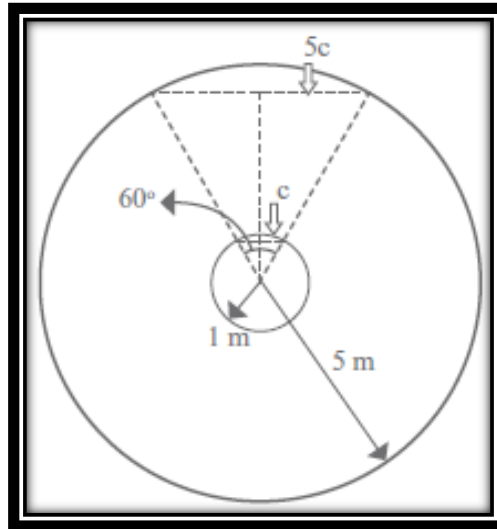
Resolução apresentada no Caderno do Professor: como o raio da circunferência é igual a 1, o valor da razão entre o comprimento da semicorda e o raio é igual ao comprimento de cada semicorda. Tem-se, portanto, a tabela a seguir:

<i>cordas</i>	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$
<i>semicordas</i>	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
<i>razão semicorda / raio</i>	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
<i>ângulo central correspondente</i>	$180^\circ$	$180^\circ$	$60^\circ$	$60^\circ$	$60^\circ$	$60^\circ$	$120^\circ$
<i>ângulo cujo seno é a razão calculada acima</i>	$90^\circ$	$90^\circ$	$30^\circ$	$30^\circ$	$30^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$

**Figura 23 – tabela com os valores das semicordas.**  
Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 16)

**Terceira questão:** Explique como você poderia utilizar a tabela que construiu para calcular o comprimento de uma corda correspondente a um ângulo central de  $60^\circ$  em uma circunferência de raio 5 m.

Solução sugerida pelos autores do Caderno: se o raio da circunferência é igual a 5 m, então a corda é proporcionalmente maior do que a correspondente ao raio de 1 m, vista a partir do mesmo ângulo central, que é  $60^\circ$ . A Figura 24 pode ajudar a compreender o que se afirma:



**Figura 24 – Representação da circunferência de raio 5m.**  
Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 16)

**Quarta questão:** calcule o raio de uma circunferência na qual uma corda de 100 m corresponde a um ângulo central de  $60^\circ$ . A solução é apresentada na Figura 25.

*Analogamente, se a corda tiver comprimento 100 m, sendo o ângulo central  $60^\circ$ , então teremos a proporção:  $\frac{c_3}{100} = \frac{1}{R}$ .*

*Logo,  $R = \frac{100}{c_3} = \frac{100}{1,0} = 100$  m.*

*Lembrando que  $\text{sen } 30^\circ = 0,5$ , também poderíamos escrever:*

$$\text{sen } 30^\circ = 0,5 = \frac{c_3}{2} = \frac{50}{R}.$$

*Daí seguiria, naturalmente, que:*

$$R = \frac{50}{\frac{c_3}{2}} = \frac{100}{c_3} = 100 \text{ m.}$$

**Figura 25 – Solução da questão 4, atividade 3.** Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 16)

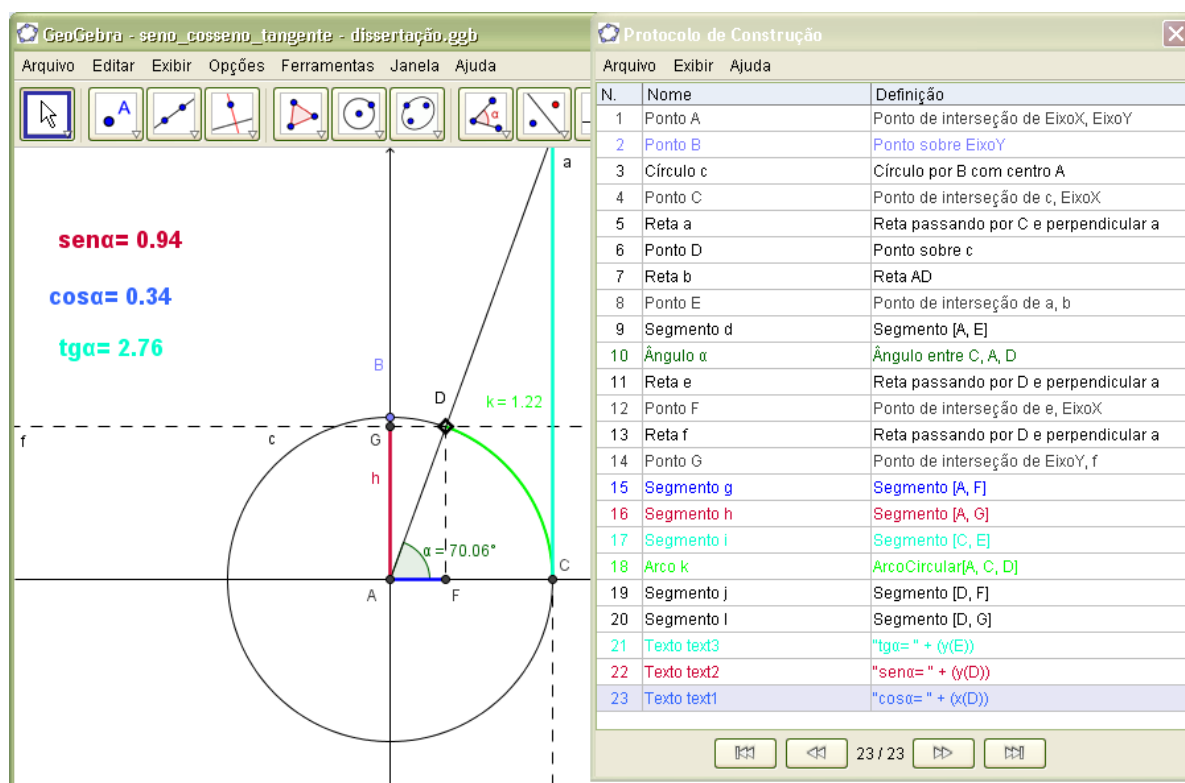
**Quinta questão:** calcule o raio de uma circunferência na qual uma corda de 100 m corresponde a um ângulo central de  $6^\circ$ .

Segundo o Caderno (SÃO PAULO, 2009) se a corda tiver 100 m, o ângulo central igual a  $6^\circ$ , ao resolver de modo análogo ao que foi feito acima, observa-se que:  $\text{sen } 3^\circ = \frac{50}{R}$ . Logo,  $R = \frac{50}{\text{sen } 3^\circ}$ .

Com a determinação do valor do seno de  $3^\circ$  em uma tabela de senos, ou em uma calculadora, obtêm-se o valor aproximado 0,052.

Concluindo, então, que **R** é aproximadamente 962 m.

O professor poderá usar o recurso tecnológico para recuperar algumas ideias fundamentais referentes às razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) que foram estudadas no Ensino Fundamental II. Um exemplo disso pode ser observado na Figura 26.



**Figura 26 – Razões trigonométricas – ideias fundamentais. Elaborado pelo autor**

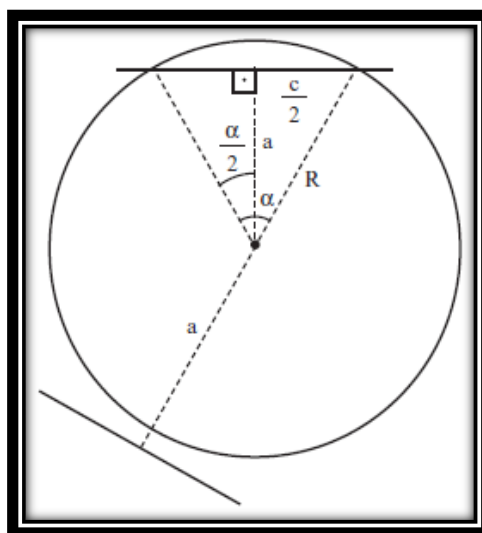
Na Figura 26, são apresentadas as três razões trigonométricas, as mesmas estão representadas em cores diferentes, com a manipulação do ponto (D), será possível perceber a variação nos respectivos valores do seno, cosseno e da tangente, numericamente e, geometricamente por meio dos segmentos em destaque no ciclo. Neste exemplo, também é possível visualizar a variação do arco de circunferência representado na cor verde com a letra (k).

Para ajudar a construção do objeto na própria Figura 26 é apresentado o protocolo de construção das razões trigonométricas.

### Secante

Para a abordagem da ideia fundamental secante de um ângulo os autores do Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009) discorrem que a palavra “secante” origina-se em *secare*, que, em latim, quer dizer “cortar”. Para verificar se determinada reta corta ou não uma circunferência dada, basta calcular a distância (**a**) do centro da circunferência até a reta e comparar com o raio (**R**). Se a distância for maior do que o raio (**R**), a reta não é secante à circunferência; se tiver  $a < R$ , a reta é secante.

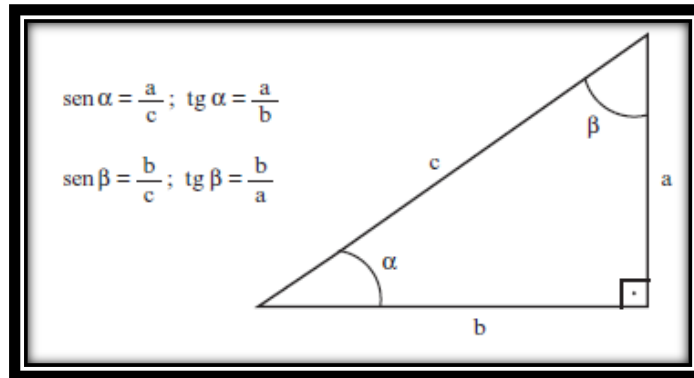
Ainda de acordo com o Caderno, para determinar entre várias retas quais são secantes à circunferência, basta calcular os valores correspondentes de **a** e dividi-los por **R**. Quando a razão  $\frac{a}{R}$  for menor do que 1, a reta será secante à circunferência. Também se pode, naturalmente, calcular os valores da razão  $\frac{R}{a}$ , se ela for maior que 1, a reta será secante.



**Figura 27 – Representação das semicordas e da distância da reta ao centro da circunferência.**  
**Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 17)**

As razões entre a semicorda  $\frac{c}{2}$  e o raio **R** constituem uma **tabela de senos** do ângulo  $\frac{\alpha}{2}$ . Por possibilitar a identificação das retas secantes à circunferência, as razões  $\frac{R}{a}$  constituíam outra tabela, chamada **tabela de secantes** do ângulo  $\frac{\alpha}{2}$ .

Os autores do Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009), propõem a **atividade 4** como um aprofundamento das ideias fundamentais a partir da Figura 28. O triângulo retângulo de hipotenusa **c**, o ângulo  $\alpha$  é oposto ao cateto **a** e o ângulo  $\beta$  é oposto ao cateto **b**. É sabido que a razão  $\frac{a}{b}$  é a tangente de  $\alpha$ , a razão  $\frac{a}{c}$  é o seno  $\alpha$  e, analogamente, a razão  $\frac{b}{a}$  é a  $\text{tg } \beta$  e a razão  $\frac{b}{c}$  é o seno de  $\beta$ , conforme é apresentado na Figura 28.



**Figura 28 – Relações trigonométricas no triângulo retângulo.**  
**Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 17)**

Das considerações anteriores sobre as retas secantes às circunferências, de acordo com o que está exposto no Caderno, pode-se concluir que o que se chama de **secante** de  $\alpha$  é a razão  $\frac{c}{b}$  e é representada por **sec**  $\alpha$ ; analogamente, **sec**  $\beta = \frac{c}{a}$ . Assim, como se convencionou chamar o **seno** do complementar de  $\alpha$  de **co seno** de  $\alpha$ , representa-se por **cos**  $\alpha$  o **sen** ( $90^\circ - \alpha$ ), também se convencionou chamar:

- a tangente do complementar de  $\alpha$  de cotangente de  $\alpha$ , representa-se por **cotg**  $\alpha$ ;
- a secante do complementar de  $\alpha$  de cossecante de  $\alpha$ , representa-se por **cossec**  $\alpha$ .

Com base no que foi dito acima, é proposta no Caderno do Professor (SÃO PAULO 2009) que se mostrem nesta atividade as questões a seguir:

- a)**  $\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta$ ; **b)**  $\text{sen } \beta = \text{cos } \alpha$ ; **c)**  $\text{cossec } \beta = \text{sec } \alpha$ ; **d)**  $\text{tg } \alpha = \text{cotg } \beta$ ; **e)**  $\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$ ;
- f)**  $\text{cossec } \beta = \frac{1}{\text{sen } \beta}$ ; **g)**  $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$ ; **h)**  $\text{cotg } \alpha = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha}$ ; **i)**  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ ; **j)**  $1 + \text{tg}^2 \alpha = \text{sec}^2 \alpha$ ;
- k)**  $1 + \text{cotg}^2 \alpha = \text{cossec}^2 \alpha$ .

Na Figura 29 estão as soluções que foram propostas no Caderno do Professor.

*Respostas:*

a) e d) As igualdades são uma consequência imediata da definição do cosseno, da cossecante e da cotangente como seno, respectivamente, o seno, a secante e a tangente do ângulo complementar.

e) e f) Como a secante é a razão hipotenusa/cateto adjacente, segue que  $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$  e, analogamente,  $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$ .

g) e h) A observação direta mostra-nos que  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$ .

Analogamente,

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

i) Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo de catetos  $a$  e  $b$  e de hipotenusa  $c$ , obtemos:  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Dividindo os dois membros da igualdade por  $c^2$ , obtemos:

$$1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2, \text{ ou seja, } 1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha.$$

j) Efetuando as operações indicadas no primeiro membro, temos:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{b^2 + a^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = \sec^2 \alpha.$$

k) Analogamente ao que foi feito em j),

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

Figura 29 – Solução da atividade 4. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 18)

Destaca-se que é possível representar o teorema de Pitágoras e as igualdades apresentadas nos itens (i) e (j) em uma só figura:

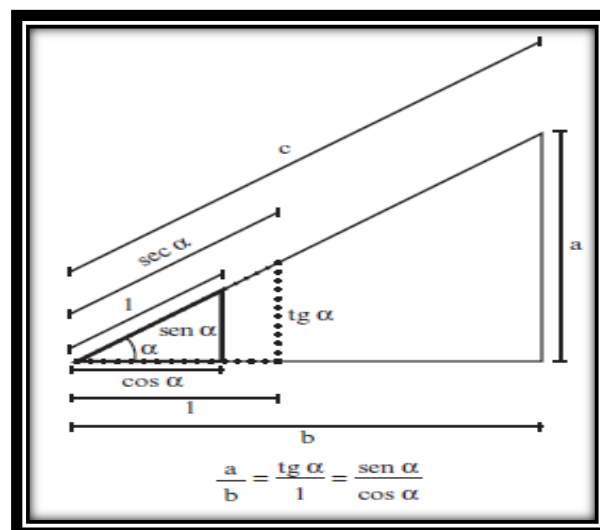
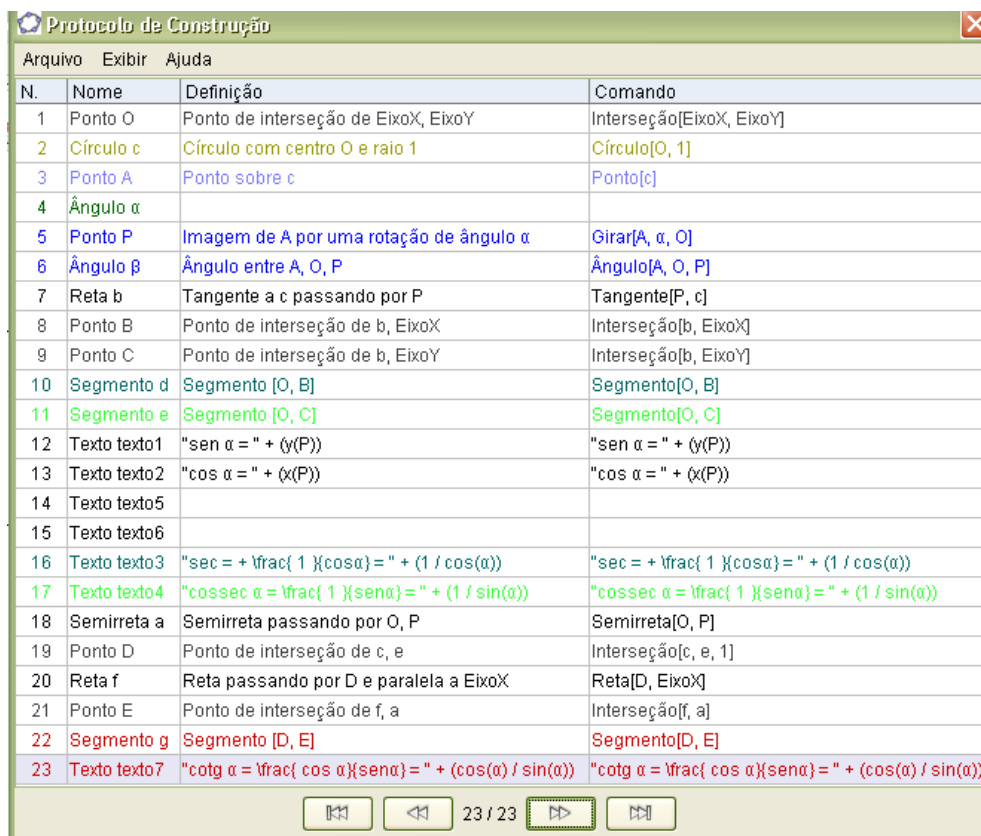


Figura 30 – Representação do teorema de Pitágoras e as igualdades trigonométricas. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 19)





N.	Nome	Definição	Comando
1	Ponto O	Ponto de interseção de EixoX, EixoY	Interseção[EixoX, EixoY]
2	Círculo c	Círculo com centro O e raio 1	Círculo[O, 1]
3	Ponto A	Ponto sobre c	Ponto[c]
4	Ângulo $\alpha$		
5	Ponto P	Imagem de A por uma rotação de ângulo $\alpha$	Girar[A, $\alpha$ , O]
6	Ângulo $\beta$	Ângulo entre A, O, P	Ângulo[A, O, P]
7	Reta b	Tangente a c passando por P	Tangente[P, c]
8	Ponto B	Ponto de interseção de b, EixoX	Interseção[b, EixoX]
9	Ponto C	Ponto de interseção de b, EixoY	Interseção[b, EixoY]
10	Segmento d	Segmento [O, B]	Segmento[O, B]
11	Segmento e	Segmento [O, C]	Segmento[O, C]
12	Texto texto1	"sen $\alpha$ = " + (y(P))	"sen $\alpha$ = " + (y(P))
13	Texto texto2	"cos $\alpha$ = " + (x(P))	"cos $\alpha$ = " + (x(P))
14	Texto texto5		
15	Texto texto6		
16	Texto texto3	"sec = + $\frac{1}{\cos \alpha}$ = " + (1 / cos( $\alpha$ ))	"sec = + $\frac{1}{\cos \alpha}$ = " + (1 / cos( $\alpha$ ))
17	Texto texto4	"cosec $\alpha$ = $\frac{1}{\sin \alpha}$ = " + (1 / sin( $\alpha$ ))	"cosec $\alpha$ = $\frac{1}{\sin \alpha}$ = " + (1 / sin( $\alpha$ ))
18	Semirreta a	Semirreta passando por O, P	Semirreta[O, P]
19	Ponto D	Ponto de interseção de c, e	Interseção[c, e, 1]
20	Reta f	Reta passando por D e paralela a EixoX	Reta[D, EixoX]
21	Ponto E	Ponto de interseção de f, a	Interseção[f, a]
22	Segmento g	Segmento [D, E]	Segmento[D, E]
23	Texto texto7	"cotg $\alpha$ = $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ = " + (cos( $\alpha$ ) / sin( $\alpha$ ))	"cotg $\alpha$ = $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ = " + (cos( $\alpha$ ) / sin( $\alpha$ ))

Figura 32 – Protocolo de construção da figura 31

O Caderno do Professor com a perspectiva de despertar ainda mais o interesse no estudo dos conteúdos apresentados na Situação de Aprendizagem 1, optou por abordar um assunto específico da Astronomia, as distâncias inacessíveis, utilizou o método relacionado às noções fundamentais da Geometria, como a semelhança de triângulos e proporcionalidade; que neste caso, consiste em observar um objeto a partir de dois pontos diferentes, com a determinação da distância do objeto através do uso da trigonometria, com a realização de uma triangulação.

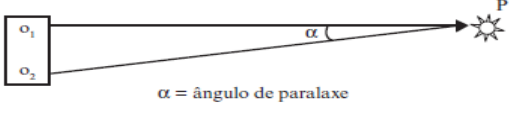
O documento aponta que o objeto, ao ser visto de pontos diferentes, parecerá mudar de posição em relação às coisas que estão ainda mais distantes e que compõem o fundo sobre o qual o objeto está projetado, constituindo um deslocamento angular, chamado de *paralaxe*, é um ângulo de um triângulo e a distância entre os dois pontos de observação, bem como a distância ao objeto, são lados do mesmo triângulo. Relações trigonométricas básicas entre os lados de um triângulo e os seus ângulos são então usadas para calcular todos os elementos do triângulo <sup>25</sup>.

<sup>25</sup> <http://www.if.ufrgs.br/oei/stars/parallax/stprop.htm>. Informações complementares sobre o assunto. (Acesso em: ago. de 2011).

A Figura 33 complementa o assunto e apresenta um exemplo ilustrativo.

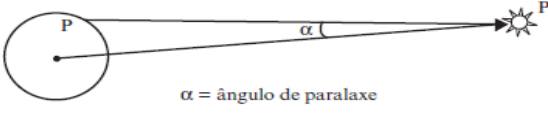
**Distâncias astronômicas: das cordas ao parsec**

Quando observamos um ponto **P** fechando os olhos alternadamente, temos uma visão um pouco diferente. Aparentemente, o ponto muda de posição e essa mudança pode ser medida por um ângulo chamado de paralaxe.



$\alpha = \text{ângulo de paralaxe}$

Analogamente, quando olhamos para o Sol a partir de um ponto **P** da superfície da Terra, temos uma visão ligeiramente diferente da que teríamos se estivéssemos no centro **C** da Terra. Tal efeito é chamado de paralaxe, e também se mede por um ângulo, conforme a figura a seguir:




$\alpha = \text{ângulo de paralaxe}$

O ângulo de paralaxe é muito utilizado em trabalhos científicos de Astronomia para a medida de distâncias entre os corpos celestes. A ideia básica é a seguinte:

- ▶ As observações astronômicas são comumente feitas tendo o Sol como referência. Ao se observar uma estrela **E** vista da Terra **T** e do Sol **S**, haverá uma diferença angular (paralaxe) entre as duas observações.
- ▶ Quanto maior for o efeito de paralaxe, mais próxima estará a estrela e, quanto menor o ângulo de paralaxe, mais distante estará a estrela.
- ▶ Convenciona-se que a unidade para distâncias interestelares é a distância que corresponde a um ângulo de paralaxe de  $1''$  ( $\frac{1}{60}$  do minuto, ou seja,  $\frac{1}{3600}$  do grau).

▶ Tal unidade de distância é chamada **parsec** (uma contração das palavras *para-laxe* e *second*). A figura a seguir representa essa afirmação:



distância  $TS = 150$  milhões de km (distância da Terra ao Sol)  
se ângulo  $\alpha = 1''$ , então a distância  $SE$  será 1 parsec  
(a figura não está em escala)

Para calcular 1 parsec em km, basta notar que:

$$\text{tg } \alpha = \frac{ST}{SE} \text{ e, em consequência, } SE = \frac{ST}{\text{tg } \alpha}.$$

Sabemos que a distância aproximada (média anual) da Terra ao Sol é de 150 milhões de km. Obtendo-se o valor da tangente de  $1''$  em uma tabela de tangentes ou em uma calculadora, encontramos:  $\text{tg } 1'' = 0,000004848$ .

$$\text{Logo, } SE = \frac{150 \cdot 10^6}{0,000004848} \cong 3,09 \cdot 10^{13} \text{ km,}$$

ou seja, **1 parsec  $\cong 3,09 \cdot 10^{13}$  km.**

**Exemplo ilustrativo**

Quando observada da Terra, a estrela Alfa Centauri, que é a mais próxima do Sistema Solar, apresenta um ângulo de paralaxe de  $0,75''$ . Como é menor do que  $1''$ , tal ângulo mostra que a distância de Alfa Centauri até o Sol é maior do que 1 parsec. De fato, obtendo a tangente de  $0,75''$  em uma calculadora, obtemos:  $\text{tg } 0,75'' = 0,000003636$ . Logo, a distância  $SE$  é igual a:  $SE = \frac{150 \cdot 10^6}{0,000003636} \cong 4,13 \cdot 10^{13} \text{ km} = 1,34 \text{ parsec.}$

**Figura 33- distâncias astronômicas: das cordas ao parsec.**

Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 19 e 20)

Para a finalização da Situação de Aprendizagem 1, na Figura 34 são apresentadas as atividades 5 e 6, para o aprofundamento do assunto apresentado anteriormente na Figura 33 e ainda são tecidas algumas considerações relevantes sobre a avaliação.

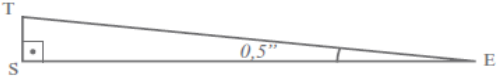
<p><b>Atividade 5</b></p> <p>a) Se uma estrela está a 10 parsec do Sol, o ângulo de paralaxe é maior ou menor do que 1''?</p> <p><i>Pela definição de parsec, quanto menor o ângulo de paralaxe, maior a distância entre o Sol e a estrela. Logo, se a distância entre o Sol e a estrela é de 10 parsec, o ângulo de paralaxe é bem menor do que 1'' (no caso, o ângulo será cerca de 10 vezes menor, ou seja, 0,1'').</i></p> <p>b) A distância da Terra ao Sol é conhecida como Unidade Astronômica, e é representada por UA. A quantas UA corresponde 1 parsec?</p> <hr/> <p><i>Temos: <math>\operatorname{tg} 1'' \cong 0,000004848 = \frac{1UA}{1\text{parsec}}</math></i>  <i>Logo, <math>\frac{1\text{parsec}}{1UA} \cong 206270</math>, ou seja, 1 parsec <math>\cong 206270</math> UA.</i></p> <p>c) Uma unidade muito utilizada para medir grandes distâncias é o ano-luz, que é igual à distância percorrida pela luz em 1 ano. A quantos anos-luz corresponde 1 parsec? (Velocidade da luz no vácuo: 300 000 km/s.)</p> <p><i>Calculando a distância <math>d</math> percorrida pela luz em um ano, obtemos, aproximadamente:</i>  <i><math>d = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 300000 = 9,46 \cdot 10^{12}</math> km.</i>  <i>Logo, sendo o parsec igual a <math>3,09 \cdot 10^{13}</math>, concluímos que 1 parsec <math>\cong 3,26</math> anos-luz.</i></p> <p><b>Atividade 6</b></p> <p>Uma estrela vista da Terra apresenta um ângulo de paralaxe de 0,5''. Calcule:</p> <p>a) a distância da estrela ao Sol em UA.</p> <p><i>Temos: <math>\operatorname{tg} 0,5'' = 0,000002424 = \frac{1UA}{1SE}</math></i>  <i>Logo, <math>SE = \frac{1}{0,000002424} = 412\,541</math> UA.</i></p>	<p>b) a distância da estrela à Terra em parsec.</p> <p><i>Notamos que, como o ângulo de paralaxe é muito pequeno, a tangente e o seno têm aproximadamente o mesmo valor, ou seja, o cateto SE e a hipotenusa TE são aproximadamente iguais. De fato, se fôssemos calcular o valor de TE, obteríamos:</i></p>  <p><math>TE^2 = SE^2 + ST^2</math>  <math>TE = \sqrt{412\,541^2 + 1} \cong 412\,541</math> UA.</p> <p><i>Notamos que tal distância corresponde a cerca de 2 parsec.</i></p> <p><b>Considerações sobre a avaliação</b></p> <p>Ao final deste percurso, a expectativa é que as razões trigonométricas fundamentais (senos, cossenos, tangentes, secantes, cossecantes, cotangentes) tenham sido revistas, uma vez que uma apresentação inicial delas já teria ocorrido, especialmente no 3º bimestre da 8ª série. Optou-se por uma reapresentação das razões em novos contextos, com destaque para as distâncias interestelares, como pretexto para animar a retomada de tais conteúdos, deixando-se ao professor a tarefa de preencher as lacunas quase inevitavelmente existentes em algumas turmas, em alguns casos apresentando pela primeira vez as razões trigonométricas. Com base nesta retomada, vamos cuidar, na Situação de Aprendizagem seguinte, da ampliação do significado das razões, estendendo-as para ângulos maiores do que 90°. É muito importante, portanto, que os alunos tenham assimilado o significado das razões trigonométricas, tendo apreendido as relações mais simples entre elas, como a de que <math>\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)</math>, <math>\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}</math>, <math>\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1</math>, entre outras.</p>
---	--

Figura 34 – Atividades 5 e 6 e considerações sobre a avaliação. Situação de Aprendizagem 1. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 20 e 21)

### 5.2.1.1 - Análise final da Situação de Aprendizagem 1

Para o desenvolvimento e consolidação dos conteúdos apresentados na Situação de Aprendizagem 1, foram propostas seis atividades, que objetivaram o estudo das razões trigonométricas, seno, cosseno, tangente, cossecante e cotangente. Para tanto, o Caderno do

Professor (SÃO PAULO, 2009) fez uso de situações que envolvessem o cotidiano dos alunos e professores, (caminhar por ruas íngremes, subir e descer escadas, a observação de estrelas, etc.) o que justifica a condução dos enunciados utilizados no transcorrer das atividades propostas, na tentativa de tornar o estudo mais interessante e significativo.

Dessa forma, o documento apresentou a Geometria nas atividades propostas, como uma ferramenta para a consolidação das ideias fundamentais referentes às razões trigonométricas. O Currículo de Matemática (SÃO PAULO, 2010) relata:

A GEOMETRIA diz respeito diretamente à percepção de formas e de relações entre elementos de figuras planas e espaciais; à construção e à representação de formas geométricas, existentes ou imaginadas, e à elaboração de concepções de espaço que sirvam de suporte para a compreensão do mundo físico que nos cerca. (SÃO PAULO, 2010, p. 39).

O Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009) fez uso deste suporte apresentado no Currículo de São Paulo (2010), afirmando que a compreensão e a existência das razões entre os lados correspondentes de triângulos retângulos semelhantes são importantes para a caracterização das razões trigonométricas.

De acordo com o documento os conteúdos abordados na Situação de Aprendizagem 1 não se afastam do que comumente é apresentado nos livros didáticos. No entanto, segundo Arbach (2002), não se encontra em geral nos livros didáticos, propostas que proporcionem um ensino da Geometria diferenciado, mas sim uma redução a cálculos algébricos entre elementos de figuras, apresentação de propriedades sem as devidas demonstrações, além de elaborações teóricas que não levam em conta a participação efetiva dos alunos na produção do saber escolar.

No entanto, a Situação de Aprendizagem 1, aborda de forma enriquecedora os aspectos da Geometria Plana que levam à Trigonometria. Segundo as OCEM (2006), o estudo da Geometria pode possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida.

Para Bardin (1977), é importante saber “O que é que conduziu a um determinado enunciado? Quais as consequências que determinado enunciado vai provavelmente provocar”. Na Situação de Aprendizagem 1, os enunciados foram criados para uma representação das razões trigonométricas em contextos diferenciados, como por exemplo, as distâncias

interestelares, na tentativa de tornar o estudo mais interessante. Como consequência, espera-se que os enunciados possam propiciar a compreensão de fenômenos naturais e enfrentamento de situações-problema em contextos variados. Também, como consequência o Caderno do Professor deixou uma lacuna quanto à inserção da tecnologia no desenvolvimento da Situação de Aprendizagem 1, abrindo uma janela para as inferências que para o trabalho de pesquisa atual são relevantes.

As inferências realizadas deram um destaque diferenciado ao desenvolvimento das atividades propostas. Assim como Oliveira e Fernandes (2010) usaram os recursos digitais, como um meio pedagógico “inovador”, com o uso do *software* GeoGebra, com a preocupação de que a introdução de elementos relativos às tecnologias não ocorresse de forma descolada, esta também foi a preocupação no desenvolvimento da presente pesquisa. Para tanto esse trabalho baseou nos pressupostos do Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (2010), que apresenta uma articulação entre os diversos conteúdos do currículo, que favorece uma aproximação entre os variados assuntos, de modo a promover uma espécie de “interdisciplinaridade interna” da própria Matemática.

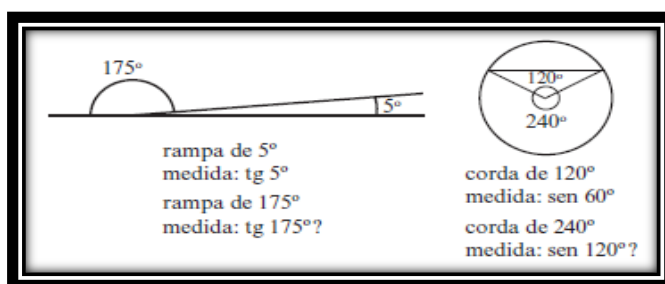
Dessa forma a intenção foi de trabalhar as atividades presentes na Situação de Aprendizagem 1 com o *software* GeoGebra, a luz do Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (2010), dando ênfase às relações de proporcionalidade da figuras geométricas planas, com a perspectiva de articular o conhecimento geométrico por meio das quatro faces, que se relacionam permanentemente na caracterização do espaço: a percepção, a concepção, a construção e a representação (MACHADO, 1995). Portanto, mediante as inferências realizadas, pode-se considerar que parcialmente está confirmada a hipótese de pesquisa: o uso da tecnologia computacional, com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, poderá favorecer a proposta de articulação das Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo, de forma simples e significativa.

A seguir será apresentada a Situação de Aprendizagem 2, uma extensão dos conteúdos abordados na Situação de Aprendizagem 1.

### 5.2.2 - Situação de Aprendizagem 2 - dos triângulos à circunferência – vamos dar uma volta?

O Caderno do Professor de Matemática (SÃO PAULO, 2009) destaca que na Situação de Aprendizagem 1, foi abordado o significado das razões trigonométricas fundamentais relacionadas a ângulos agudos, com referência básica no triângulo retângulo e nas seis razões fundamentais (seno, cosseno, tangente, etc.) que representavam a relação entre dois dos lados do triângulo e os ângulos para os quais se calcula o seno, cosseno, tangente, etc.

O Caderno aponta que é possível, no entanto, seja nas medidas das rampas, seja nas razões entre cordas e raios, associar razões características a ângulos maiores ou iguais à  $90^\circ$ . A mesma corda que corresponde a um ângulo de  $120^\circ$  na circunferência também corresponde a um ângulo de  $240^\circ$ , e uma rampa de  $5^\circ$  também poderia ser caracterizada pelo ângulo de  $175^\circ$ .



**Figura 35 – rampa e corda.**  
Fonte: (SÃO PAULO, 2009, p. 21)

O documento ressalta que faz sentido e é interessante falar de seno, cosseno, tangente, etc. de ângulos de qualquer medida. Com o desenvolvimento da presente Situação de Aprendizagem isso será comprovado.

O quadro abaixo apresenta o conteúdo programático para o desenvolvimento da Situação de Aprendizagem 2, como sugestão ao professor.

**Tempo previsto:** 2 semanas.

**Conteúdos e temas:** extensão das noções de seno, cosseno e tangente do ângulo reto; significado de seno, cosseno e tangente de um ângulo maior do que  $90^\circ$ ; as razões trigonométricas na circunferência: ângulos e arcos.

**Competências e habilidades:** estender o uso da linguagem trigonométrica para fenômenos envolvendo ângulos maiores do que  $90^\circ$ ; sintetizar e generalizar resultados já conhecidos.

**Estratégias:** arquitetar analogias que permitam uma extensão natural dos significados das razões trigonométricas; explorar razões trigonométricas em diversos exemplos e atividades.

**Quadro 8 - Conteúdo programático.** Fonte: (SÃO PAULO, 2009, p. 22)

Nesta etapa de exploração das razões trigonométricas o Caderno do Professor, sugere para o professor a utilização de duas semanas. No entanto, o tempo a ser dedicado a mesma depende do rendimento e do desenvolvimento da etapa anterior, exigindo, eventualmente, um pouco mais de dedicação. O autor ainda ressalta que a primeira e a segunda Situações de Aprendizagem, em conjunto, não devam ultrapassar 5 semanas.

O roteiro para aplicação da Situação de Aprendizagem 2, de acordo com o documento que apresenta as extensões dos significados das razões trigonométricas que serão realizadas por analogia com o estudo anterior referente aos ângulos agudos de um triângulo retângulo. A seguir serão apresentados os exemplos ilustrativos e os exercícios exemplares utilizados para a exploração por parte do professor da Situação de Aprendizagem, conforme a observação das Figuras 36 a 40.

**Dando uma volta com as cordas e os senos**

Já vimos que as primeiras tabelas de senos de ângulos eram, na verdade, tabelas de cordas de uma circunferência, ou, mais precisamente, tabelas de razões entre semicordas e raios. A própria origem da palavra “seno” situa-se, como se sabe, na palavra *jiba*, que significa “corda” em árabe.

Escolhendo-se o raio igual a 1 e representando os ângulos no sentido anti-horário, a partir da horizontal, a medida da semicorda vertical (PA) é o seno do ângulo  $\alpha$  ( $\alpha$  é a metade do ângulo central correspondente à corda inteira). Para ângulos agudos, é imediata a observação de que os senos variam entre 0 e 1 (Figura 1).

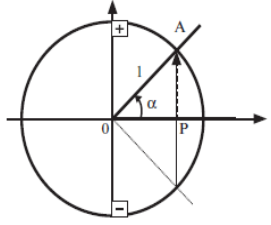


Figura 1

$0 < \alpha < 90^\circ$   
 $\text{sen } \alpha = \frac{PA}{1} = PA$   
 $0 < PA < 1$

Um modo natural de estender as definições de seno de  $\alpha$  quando  $\alpha$  é um ângulo entre  $90^\circ$  e  $180^\circ$  (Figura 2) é o seguinte: chamamos de seno de  $\alpha$  a medida da semicorda vertical (PA). Também neste caso, as medidas das semicordas (senos) situam-se entre 0 e 1.

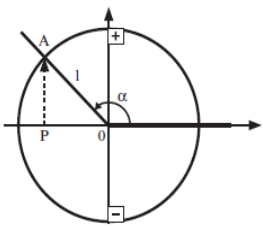


Figura 2

$90^\circ < \alpha < 180^\circ$   
 $\text{sen } \alpha = \frac{PA}{1} = PA$   
 $0 < PA < 1$

Para um ângulo  $\alpha$  entre  $180^\circ$  e  $270^\circ$  ou então entre  $270^\circ$  e  $360^\circ$  definiremos, analogamente, o seno como a medida da semicorda vertical (PA), agora orientada em sentido contrário ao do eixo y. Por isso, nesses casos, indicaremos a medida da semicorda como sendo negativa (Figuras 3 e 4).

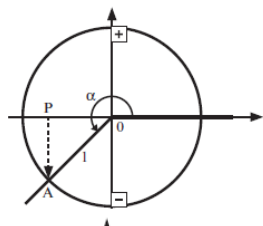


Figura 3

$180^\circ < \alpha < 270^\circ$   
 $\text{sen } \alpha = \frac{PA}{1} = PA$   
 $-1 < PA < 0$

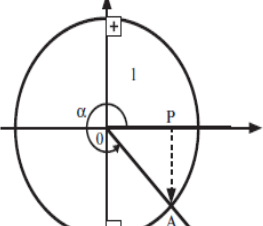


Figura 4

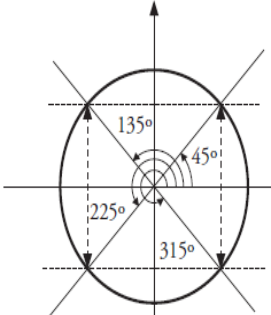
$270^\circ < \alpha < 360^\circ$   
 $\text{sen } \alpha = \frac{PA}{1} = PA$   
 $-1 < PA < 0$

Com base nas informações anteriores, vamos observar um exemplo e resolver alguns exercícios simples.

**Exemplo ilustrativo**

Com referência à circunferência de raio igual a 1 representada a seguir, vamos calcular o valor do  $\text{sen } 45^\circ$  e, com ele, completar a tabela com os valores do seno de cada um dos ângulos indicados.

Como  $\text{sen } 45^\circ = \text{cos } 45^\circ$  segue que  $\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

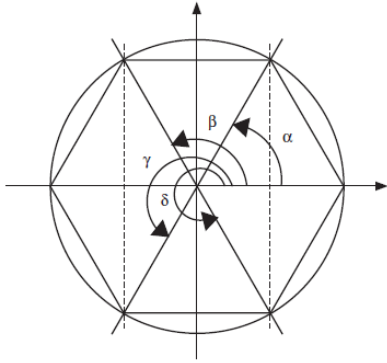


ângulo	seno
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$135^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$225^\circ$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$315^\circ$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Figura 36 – Roteiro da Situação de Aprendizagem 2. Cordas e senos. Exemplo ilustrativo. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 22 e 23)**

**Atividade 1**

Considere o hexágono regular de lado igual a 1 representado a seguir. Lembrando que  $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$ , calcule o seno dos ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  indicados na figura.



Os ângulos indicados são:

$\alpha = 60^\circ$

$\beta = 120^\circ$

$\gamma = 240^\circ$

$\delta = 300^\circ$

Como  $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$  e  $\text{sen}^2 30^\circ + \text{cos}^2 30^\circ = 1$ ,

$\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo:  $\text{sen } 60^\circ = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen } 120^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen } 240^\circ = -\text{sen } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen } 300^\circ = -\text{sen } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Cossenos de ângulos maiores que 90°**

De modo análogo, podemos estender a definição de cosseno para ângulos maiores do que 90°. A sequência de imagens ao lado realiza tal extensão, que é resumida da seguinte forma:

- ▶ para ângulos entre 0 e 90°, o seno e o cosseno são positivos;
- ▶ para ângulos entre 90° e 180°, o seno é positivo e o cosseno é negativo;
- ▶ para ângulos entre 180° e 270°, o seno é negativo e o cosseno é negativo;
- ▶ para ângulos entre 270° e 360°, o seno é negativo e o cosseno é positivo;

em todos os casos, para a determinação do valor absoluto do seno ou do cosseno, recorreremos ao triângulo OPA, de hipotenusa 1.

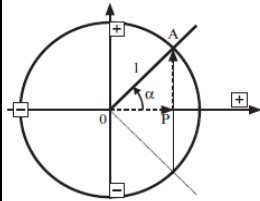


Figura I

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$   
 $\text{sen } \alpha = \frac{PA}{1} = PA$   
 $\text{cos } \alpha = \frac{OP}{1} = OP$   
 $0 < PA < 1$   
 $0 < OP < 1$

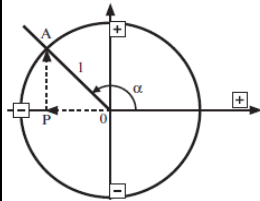


Figura II

$90^\circ < \alpha < 180^\circ$   
 $\text{sen } \alpha = \frac{PA}{1} = PA$   
 $\text{cos } \alpha = \frac{OP}{1} = OP$   
 $0 < PA < 1$   
 $-1 < OP < 0$

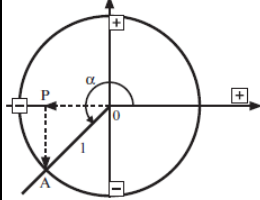


Figura III

$180^\circ < \alpha < 270^\circ$   
 $\text{sen } \alpha = \frac{PA}{1} = PA$   
 $\text{cos } \alpha = \frac{OP}{1} = OP$   
 $-1 < PA < 0$   
 $-1 < OP < 0$

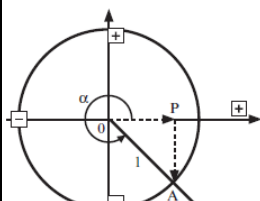


Figura IV

$270^\circ < \alpha < 360^\circ$   
 $\text{sen } \alpha = \frac{PA}{1} = PA$   
 $\text{cos } \alpha = \frac{OP}{1} = OP$   
 $-1 < PA < 0$   
 $0 < OP < 1$

**Senos e cossenos dos ângulos que limitam os quadrantes**

Convencionando-se, então, que o segmento orientado PA representa o seno do ângulo  $\alpha$ , parece natural considerar os casos-limite, em que o triângulo retângulo OPA deixa de existir, o que acontece, por exemplo, quando  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\alpha = 270^\circ$  ou  $\alpha = 360^\circ$ . Nesses casos, temos:

- ▶ para  $\alpha = 0$ , o triângulo retângulo OPA “fecha-se” e temos  $PA = 0$  e  $OP = 1$ , ou seja,  $\text{sen } 0^\circ = 0$  e  $\text{cos } 0^\circ = 1$ .
- ▶ quando  $\alpha$  se aproxima de 90°, o segmento PA aproxima-se do raio, ou seja, de 1, e o segmento OP aproxima-se de 0 (Figura I). Para  $\alpha = 90^\circ$ , convencionamos que  $\text{sen } 90^\circ = 1$  e  $\text{cos } 90^\circ = 0$ .

quando  $\alpha$  passa de 90° e se aproxima de 180°, então  $\alpha$  segmento PA aproxima-se de 0 e o segmento OP aproxima-se do raio, que é 1. Temos (Figura II):  $\text{sen } 180^\circ = 0$  e  $\text{cos } 180^\circ = -1$ .

quando  $\alpha$  passa de 180° e se aproxima de 270°, então o segmento PA aproxima-se do raio, em sentido oposto ao do eixo, ou seja, tem medida -1, enquanto o segmento OP aproxima-se de 0. Temos (Figura III):  $\text{sen } 270^\circ = -1$  e  $\text{cos } 270^\circ = 0$ ;

quando  $\alpha$  passa de 270° e se aproxima de 360°, o segmento PA aproxima-se de 0 e o segmento OP aproxima-se de 1. Temos (Figura IV):  $\text{sen } 360^\circ = 0$  e  $\text{cos } 360^\circ = 1$ .

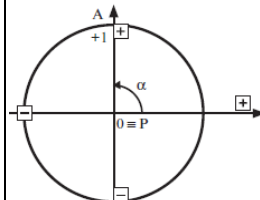


Figura I

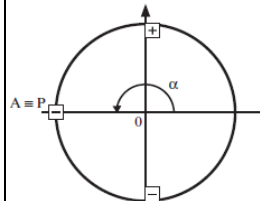


Figura II

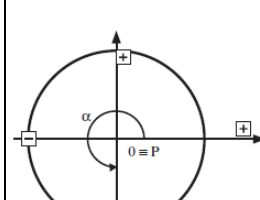


Figura III

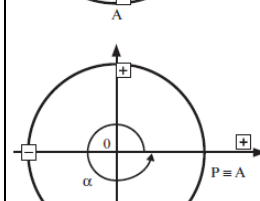


Figura IV

A tabela a seguir resume as informações anteriores:

$\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$				
$\text{sen } \alpha$	0	+	1	+	0	-	-1	-	0
$\text{cos } \alpha$	1	+	0	-	-1	-	0	+	1

**Figura 37 – Atividade 1 e Ciclo trigonométrico. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 23 -26)**

$\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$				
$\text{sen } \alpha$	0	+	1	+	0	-	-1	-	0
$\text{cos } \alpha$	1	+	0	-	-1	-	0	+	1
$\text{tg } \alpha$	0	+	não existe	-	0	+	não existe	-	0
$\text{sec } \alpha$	1	+	não existe	-	-1	-	não existe	+	1
$\text{cotg } \alpha$	não existe	+	0	-	não existe	+	0	-	não existe
$\text{cossec } \alpha$	não existe	+	1	+	não existe	-	-1	-	não existe

**Atividade 2**

Construa uma tabela com os valores das seis razões trigonométricas (sen, cos, tg, cotg, sec, cossec) para os ângulos de  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ , indicando também os sinais das razões nos intervalos compreendidos entre tais valores.

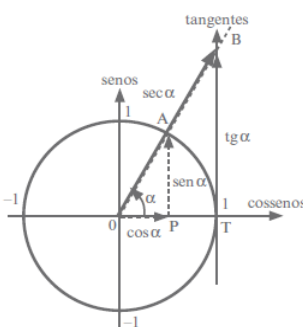
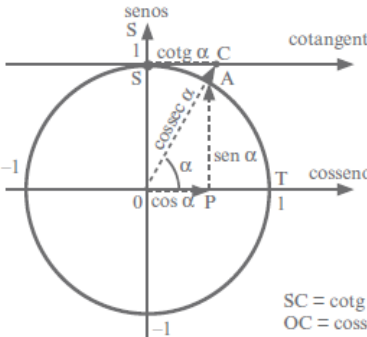
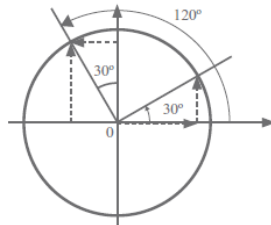
Basta lembrar que:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \quad \text{cotg } \alpha = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha} \quad \text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

Naturalmente, nos pontos em que os denominadores são nulos, a razão correspondente não existe.

**Figura 38 – Atividade 2 – Situação de Aprendizagem 2. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p.26)**

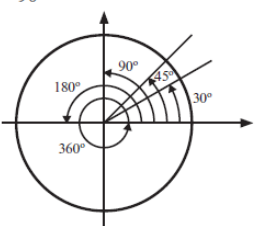
<p><b>Atividade 3</b></p> <p>Construindo-se uma circunferência de raio 1 com centro no sistema de coordenadas, podemos representar geometricamente todas as razões trigonométricas. Já vimos que o seno e o cosseno de um ângulo <math>\alpha</math>, medido a partir do eixo x em sentido anti-horário, são, respectivamente, a ordenada e a abscissa do ponto A da circunferência que corresponde ao ângulo <math>\alpha</math>. Identifique na circunferência citada o segmento orientado que representa:</p> <p>a) a tangente de <math>\alpha</math>    b) a secante de <math>\alpha</math></p> <p>Vamos mostrar que o segmento TB representa a tangente de <math>\alpha</math> e que o segmento OB representa a secante de <math>\alpha</math>.</p>  <p>De fato, da semelhança dos triângulos OPA e OTB, resulta: <math>\frac{OP}{OT} = \frac{PA}{TB} = \frac{OA}{OB}</math></p> <p>Como <math>OA = OT = 1</math>, <math>OP = \text{cos } \alpha</math> e <math>PA = \text{sen } \alpha</math>, segue que: <math>\frac{\text{cos } \alpha}{1} = \frac{\text{sen } \alpha}{TB} = \frac{1}{OB}</math>.</p> <p>Logo,</p> $TB = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \text{tg } \alpha \quad OB = \frac{1}{\text{cos } \alpha} = \text{sec } \alpha$	<p>1. Em consequência do resultado anterior, aplicando-se o teorema de Pitágoras aos triângulos OPA e OTB, obtemos:</p> $\text{cos}^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$ $1 + \text{tg}^2 \alpha = \text{sec}^2 \alpha$ <p>2. Lembrando que <math>\text{cotg } \alpha = \text{tg } (90^\circ - \alpha)</math> e <math>\text{cossec } \alpha = \text{sec } (90^\circ - \alpha)</math>, podemos representar, analogamente ao que foi feito anteriormente, a secante e a cossecante em uma figura similar, traçando-se a reta tangente ao ponto (0; 1), como mostra a figura a seguir.</p>  <p>SC = cotg <math>\alpha</math> OC = cossec <math>\alpha</math></p> <p><b>Atividade 4</b></p> <p>Conhecendo os valores do <math>\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}</math>, e do <math>\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}</math>, calcule o seno e o cosseno dos ângulos <math>\alpha</math> indicados a seguir:</p> <p>a) <math>120^\circ</math>                      c) <math>210^\circ</math>                      e) <math>300^\circ</math> b) <math>150^\circ</math>                      d) <math>240^\circ</math>                      f) <math>330^\circ</math></p> <p>Comparando os segmentos orientados que representam o seno e o cosseno dos ângulos citados, podemos concluir que:</p> <p>a) <math>\text{sen } 120^\circ = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}</math></p>	 <p>Um procedimento análogo, nos itens seguintes, conduziria às respostas a seguir. Busque também fazer uma figura representando cada item.</p> <p>b) <math>\text{sen } 150^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}</math> <math>\text{cos } 150^\circ = -\text{cos } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}</math></p> <p>c) <math>\text{sen } 210^\circ = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2}</math> <math>\text{cos } 210^\circ = -\text{cos } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}</math></p> <p>d) <math>\text{sen } 240^\circ = -\text{cos } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}</math> <math>\text{cos } 240^\circ = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2}</math></p> <p>e) <math>\text{sen } 300^\circ = -\text{cos } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}</math> <math>\text{cos } 300^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}</math></p> <p>f) <math>\text{sen } 330^\circ = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2}</math> <math>\text{cos } 330^\circ = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}</math></p>
---	---	--

**Figura 39 – Atividades 3 e 4. Situação de Aprendizagem 2. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 26 e 27)**

**Atividade 5**

Em uma circunferência de raio 1 m, um ponto P percorre um arco s correspondente a um ângulo central  $\alpha$ . Calcule os valores de s e do seno de  $\alpha$  nos casos indicados a seguir:

a)  $\alpha = 360^\circ$                       d)  $\alpha = 45^\circ$   
 b)  $\alpha = 180^\circ$                       e)  $\alpha = 30^\circ$   
 c)  $\alpha = 90^\circ$



a) Se o ponto P percorreu um arco correspondente ao ângulo central de  $360^\circ$ , então ele percorreu a circunferência inteira, cujo comprimento é  $2\pi$  metros. Logo,  $s = 2\pi$  metros. Sendo  $\alpha = 360^\circ$ , já vimos que  $\text{sen } 360^\circ = 0$ .

b) Se o ponto P percorreu um arco correspondente a  $180^\circ$ , então ele percorreu  $\frac{180}{360}$ , ou seja, a metade da circunferência, o que equivale a  $\pi$  metros. Sendo  $\alpha = 180^\circ$ , já vimos que  $\text{sen } 180^\circ = 0$ .

c) Se o ponto P percorreu um arco correspondente a  $90^\circ$ , então ele percorreu  $\frac{90}{360}$ , ou seja, um quarto da circunferência, o que equivale a  $\frac{\pi}{2}$  metros. Sendo  $\alpha = 90^\circ$ , já vimos que  $\text{sen } 90^\circ = 1$ .

d) Se o ponto P percorreu um arco correspondente a  $45^\circ$ , então ele percorreu  $\frac{45}{360}$ , ou seja, um oitavo da circunferência, o que equivale a  $\frac{\pi}{8}$  metros. Sendo  $\alpha = 45^\circ$ , já vimos que  $\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

e) Se o ponto P percorreu um arco correspondente a  $30^\circ$ , então ele percorreu  $\frac{30}{360}$ , ou seja,  $\frac{1}{12}$  da circunferência, o que equivale a  $\frac{\pi}{12}$  metros. Sendo  $\alpha = 30^\circ$ , já vimos que  $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$ .

Podemos generalizar os resultados da atividade 5 da seguinte maneira:

► Em uma circunferência de raio 1, os arcos correspondentes a  $360^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $22,5^\circ$  têm comprimentos iguais a, respectivamente,  $2\pi$ ,  $\pi$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{\pi}{8}$  medidos na mesma unidade do raio.

► De modo geral, existe uma proporcionalidade direta entre a medida do arco e a medida do ângulo central correspondente: se o ângulo central dobrar, o comprimento do arco também dobrará, e assim por diante.

► Desse fato decorre que, sendo o ângulo central  $\alpha$ , medido em graus, correspondente a um arco de comprimento s, vale a proporção,  $\frac{s}{\alpha} = \frac{2\pi R}{360}$  ou seja,  $s = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R$

**Atividade 6**

Em uma circunferência de raio R, a um ângulo central de medida  $\alpha$  em graus corresponde um arco de comprimento s e uma corda de comprimento c. Complete a tabela a seguir:

$\alpha$	s	c
$180^\circ$	$\pi R$	$2R$
$120^\circ$	$\frac{2\pi R}{3}$	$R\sqrt{3}$
$90^\circ$	$\frac{\pi R}{2}$	$R\sqrt{2}$
$60^\circ$	$\frac{\pi R}{3}$	$R$
$30^\circ$	$\frac{\pi R}{6}$	$0,52R$
$10^\circ$	$\frac{\pi R}{18}$	$0,17R$
$0^\circ$	0	0

As relações entre  $\alpha$ , s e c decorrem das seguintes expressões, já conhecidas:

$\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \frac{c}{2R} = \frac{c}{2R}$ , ou seja,  $c = 2R \cdot \text{sen } \frac{\alpha}{2}$

$\frac{s}{\alpha} = \frac{2\pi R}{360^\circ}$ , ou seja,  $s = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi R$

Para  $\alpha = 180^\circ$ , temos:  $c = 2R \cdot \text{sen } 90^\circ = 2R$  e  $s = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R = \pi R$

Para  $\alpha = 120^\circ$ , temos:  $c = 2R \cdot \text{sen } 60^\circ = R\sqrt{3}$  e  $s = \frac{1}{3} \cdot 2\pi R = \frac{2\pi R}{3}$

Para  $\alpha = 90^\circ$ , temos:  $c = 2R \cdot \text{sen } 45^\circ = R\sqrt{2}$  e  $s = \frac{1}{4} \cdot 2\pi R = \frac{\pi R}{2}$

Para  $\alpha = 60^\circ$ , temos:  $c = 2R \cdot \text{sen } 30^\circ = R$  e  $s = \frac{1}{6} \cdot 2\pi R = \frac{\pi R}{3}$

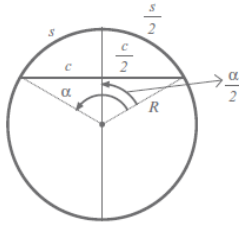
Para  $\alpha = 30^\circ$ , temos:  $c = 2R \cdot \text{sen } 15^\circ$  e  $s = \frac{1}{12} \cdot 2\pi R = \frac{\pi R}{6}$

(consultando uma tabela de senos, ou usando uma calculadora, obtemos:  $c \cong 0,52R$ .)

Para  $\alpha = 10^\circ$ , temos:  $c = 2R \cdot \text{sen } 5^\circ$  e  $s = \frac{1}{36} \cdot 2\pi R = \frac{\pi R}{18}$

(consultando uma tabela de senos ou usando uma calculadora, obtemos:  $c \cong 0,17R$ )

Para  $\alpha = 0^\circ$ , temos:  $c = 2R \cdot \text{sen } 0^\circ = 0$  e  $s = 0$



Para cada um dos valores de  $\alpha$ , é interessante sugerir aos alunos que façam uma figura e observem as relações geométricas entre as cordas e os arcos, imaginando os possíveis polígonos regulares cujos lados correspondem às cordas calculadas, quando for o caso.

**Considerações sobre a avaliação**

Ao final desta Situação de Aprendizagem, praticamente retomamos as ideias iniciais do bimestre, em que as associações entre ângulos e cordas de circunferências serviram de motivação para as primeiras tabelas de senos. Avançamos um pouco, no entanto, e agora já podemos falar de senos, cossenos e tangentes de ângulos maiores do que  $90^\circ$ , ou seja, aprendemos a completar uma volta na circunferência. É interessante para o professor destacar o fato de que, completada a primeira volta, outras voltas poderão ser dadas e é possível calcularmos as razões trigonométricas para ângulos maiores do que  $360^\circ$  de modo análogo ao que foi feito na extensão dos ângulos agudos para ângulos maiores do que  $90^\circ$ . É imprescindível, no entanto, que os alunos tenham assimilado com naturalidade o fato de que as razões trigonométricas podem ser calculadas de modo significativo para ângulos de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . Para tanto, é preciso que sejam conhecidos os valores das razões para ângulos notáveis, como  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ , e que se saiba reduzir o cálculo das razões para um ângulo  $\alpha$  qualquer ao cálculo das razões para um ângulo agudo, por meio de relações simples como, por exemplo,  $\text{sen } (180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$ .

Figura 40 – Atividades 5 e 6 e considerações sobre a avaliação. Situação de Aprendizagem 2.

Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 27 – 30)

O estudo das razões trigonométricas proposto nesta unidade abre possibilidades para o professor usar o *software* GeoGebra de muitas maneiras enriquecedoras. A Figura 41 mostra um exemplo de como isso é possível com o uso do *software*.

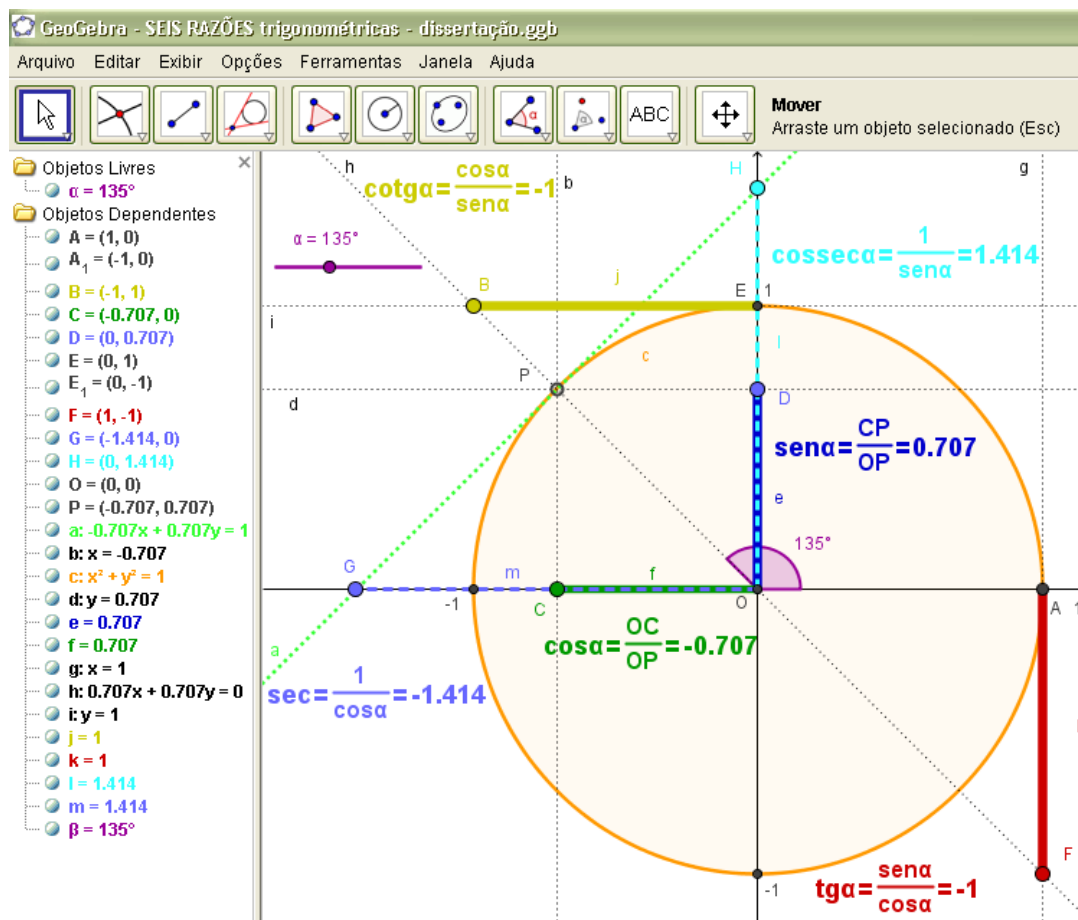


Figura 41 – Razões trigonométricas no GeoGebra. Elaborado pelo autor

Com este exemplo da Figura 41, o professor pode pensar em duas estratégias básicas, de acordo com o tempo que o mesmo tenha para o desenvolvimento da atividade com os alunos na sala ambiente de informática. O professor pode propiciar um momento para que os alunos construam a figura e façam as suas conjecturas e um segundo momento pra prová-las, posteriormente abrir um espaço para discussão das interpretações. A outra estratégia seria o professor levar a atividade construída para a sala ambiente de informática, para que os alunos manipulassem a figura já construída com o *software* GeoGebra, aqui também os alunos fariam as suas conjecturas e tentariam prová-las, e se possível abrir espaço para discussão dos achados.

Este exemplo da Figura 41 pode ser usado para o desenvolvimento de todo o conteúdo programado na Situação de Aprendizagem 2: a extensão das noções de seno, cosseno e

tangente do ângulo reto; significado de seno, cosseno e tangente de um ângulo maior do que  $90^\circ$ ; as razões trigonométricas na circunferência: ângulos e arcos.

O professor poderá acrescentar ou retirar elementos durante o processo de estudo dos temas. Por exemplo, se o professor for analisar a ideia do seno, ele poderá esconder os outros elementos e deixar a vista somente à representação no ciclo, o seno, assim poderá ser feito com todos os elementos, conforme a necessidade e o direcionamento que o professor atribuir às aulas.

Na Figura 42, é apresentado o protocolo de construção dos objetos de estudo desenvolvidos na Figura 41.

Protocolo de Construção			
Arquivo Exibir Ajuda			
N.	Nome	Definição	Comando
1	Ponto O	Ponto de interseção de EixoX, EixoY	Interseção[EixoX, EixoY]
2	Círculo c	Círculo com centro O e raio 1	Círculo[O, 1]
3	Ponto $A_1$	Ponto de interseção de c, EixoX	Interseção[c, EixoX]
3	Ponto A	Ponto de interseção de c, EixoX	Interseção[c, EixoX]
4	Ângulo $\alpha$		
5	Ponto P	Imagem de A por uma rotação de ângulo $\alpha$	Girar[A, $\alpha$ , O]
6	Reta b	Reta passando por P e perpendicular a EixoX	Perpendicular[P, EixoX]
7	Reta d	Reta passando por P e perpendicular a EixoY	Perpendicular[P, EixoY]
8	Ponto C	Ponto de interseção de b, EixoX	Interseção[b, EixoX]
9	Ponto D	Ponto de interseção de d, EixoY	Interseção[d, EixoY]
10	Segmento e	Segmento [O, D]	Segmento[O, D]
11	Segmento f	Segmento [O, C]	Segmento[O, C]
12	Ponto $E_1$	Ponto de interseção de c, EixoY	Interseção[c, EixoY]
12	Ponto E	Ponto de interseção de c, EixoY	Interseção[c, EixoY]
13	Texto texto2	" $\cos \alpha = \frac{OC}{OP} = \dots + (x(P))$ "	" $\cos \alpha = \frac{OC}{OP} = \dots + (x(P))$ "
14	Reta g	Reta passando por A e perpendicular a EixoX	Perpendicular[A, EixoX]
15	Texto texto3	" $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{coss} \alpha} = \dots + (\sin(\alpha) / \cos(\alpha))$ "	" $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{coss} \alpha} = \dots + (\sin(\alpha) / \cos(\alpha))$ "
16	Reta i	Reta passando por E e paralela a EixoX	Reta[E, EixoX]
17	Texto texto4	" $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\operatorname{coss} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \dots + (\cos(\alpha) / \sin(\alpha))$ "	" $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\operatorname{coss} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \dots + (\cos(\alpha) / \sin(\alpha))$ "
18	Texto texto5	" $\operatorname{sec} = \frac{1}{\operatorname{coss} \alpha} = \dots + (1 / \cos(\alpha))$ "	" $\operatorname{sec} = \frac{1}{\operatorname{coss} \alpha} = \dots + (1 / \cos(\alpha))$ "
19	Texto texto6	" $\operatorname{coss} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \dots + (1 / \sin(\alpha))$ "	" $\operatorname{coss} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \dots + (1 / \sin(\alpha))$ "
20	Reta a	Tangente a c passando por P	Tangente[P, c]
21	Reta h	Reta PO	Reta[P, O]
22	Ponto B	Ponto de interseção de i, h	Interseção[i, h]
23	Ponto F	Ponto de interseção de g, h	Interseção[g, h]
24	Segmento j	Segmento [E, B]	Segmento[E, B]
25	Segmento k	Segmento [A, F]	Segmento[A, F]
26	Ponto G	Ponto de interseção de a, EixoX	Interseção[a, EixoX]
27	Ponto H	Ponto de interseção de a, EixoY	Interseção[a, EixoY]
28	Ângulo $\beta$	Ângulo entre A, O, P	Ângulo[A, O, P]
29	Segmento l	Segmento [O, H]	Segmento[O, H]
30	Segmento m	Segmento [O, G]	Segmento[O, G]
31	Texto texto1	" $\operatorname{sen} \alpha = \frac{CP}{OP} = \dots + (y(P))$ "	" $\operatorname{sen} \alpha = \frac{CP}{OP} = \dots + (y(P))$ "

Figura 42. Protocolo de construção da Figura 39

### 5.2.2.1 - Análise final da Situação de Aprendizagem 2

Para esta Situação de Aprendizagem o Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009), propôs seis atividades, para o estudo dos conteúdos que representam uma extensão das noções de seno, cosseno e tangente do ângulo reto; significado de seno, cosseno e tangente de um ângulo maior do que  $90^\circ$ ; as razões trigonométricas na circunferência: ângulos e arcos.

O documento retoma nas atividades da Situação de Aprendizagem 2, as ideias iniciadas na Situação de Aprendizagem 1, onde foram feitas relações entre ângulos e cordas de circunferência. O autor avança nesta Situação de Aprendizagem para as relações entre as semicordas e ângulos maiores que  $90^\circ$ .

As razões trigonométricas oriundas da primeira Situação de Aprendizagem que foram estabelecidas por meio da semelhança entre os lados correspondentes dos triângulos retângulos, também foram demonstradas na Situação de Aprendizagem 2, no ciclo trigonométrico como foi apresentada anteriormente nas Figuras 36 e 37, e por semelhança dos triângulos retângulos representados no ciclo trigonométrico na Figura 39, também apresentada anteriormente.

Nesta Situação de Aprendizagem o Caderno do Professor aponta a existência de uma proporcionalidade direta entre a medida do arco e a medida do ângulo central correspondente e que é possível representar geometricamente as seis razões trigonométricas, com a utilização de uma circunferência de raio unitário construída no plano cartesiano; e mostrou na Figura 38 os valores das razões (seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente) para os ângulos  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ , com indicação dos respectivos sinais das razões.

O documento destaca que é interessante se apropriar de uma Figura para observar as relações geométricas entre as cordas e os arcos, para de certa forma imaginar os possíveis polígonos regulares cujos lados correspondem às cordas. Segundo Machado (1995) e o que é exposto no Currículo, no processo de ensino aprendizagem da Geometria continuamente, é realizado o exercício de perceber para construir ou construir, para representar; conceber o que se pretende construir, com a mediação das representações; ou construir uma representação (como uma planta ou uma maquete) para facilitar a percepção. Ainda seguindo essa linha o Currículo destaca que a iniciação em Geometria costuma realizar-se por meio da percepção imediata das formas geométricas e de suas propriedades características, com base nas atividades sensoriais como a observação e a manipulação de objetos, tais atividades

relacionam-se diretamente com a construção, a representação ou a concepção de objetos, existentes ou imaginados (SÃO PAULO, 2010).

No Currículo do Estado de São Paulo (2010), os *softwares* de Geometria Dinâmica estão na linha de ferramentas que possibilitam a articulação do conhecimento Geométrico, nesta perspectiva de uso da tecnologia para o ensino de Matemática o documento destaca:

...certamente os numerosos recursos tecnológicos disponíveis para utilização em atividades de ensino encontram um ambiente propício para acolhimento no terreno da Matemática: máquinas de calcular, computadores, *softwares* para a construção de gráficos, para as construções em Geometria e para a realização de cálculos estatísticos são muito bem-vindos, bem como o seu uso será crescente, inevitável e desejável... (SÃO PAULO, 2010, p. 33, 34).

Para Kenski (2007) o grande desafio é a invenção ou a descoberta de usos criativos dos recursos tecnológicos, de tal forma que professores e alunos sintam-se inspirados para aprender. Bagé (2008) relata em seu trabalho uma experiência na realização de uma oficina, com a utilização dos recursos tecnológicos, mesmo que timidamente, ocorreram bons resultados que contribuíram, para a prática dos professores, no sentido de perceberem a importância do ensino da Geometria nas séries iniciais e as possibilidades que a tecnologia oferece para que isto ocorra.

Ressalta-se que as inferências realizadas para esta Situação de Aprendizagem com a utilização do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, atendeu a sugestão apresentada pelo Caderno do Professor em representar uma figura para analisar as relações geométricas em torno do conteúdo estudado.

As inferências apresentadas na Figura 41 mostram as seis relações trigonométricas em duas janelas do *software* GeoGebra (algébrica e geométrica), que possibilita a manipulação de todos os elementos geométricos que estão conectados ao seletor de ângulos  $\alpha$ , e por meio do mesmo é possível, animar os elementos construídos, sem que os mesmos percam as suas propriedades características.

Para Lauro (2007) os computadores podem ser instrumentos muito valiosos para os professores, pois os *softwares* dinâmicos permitem:

... construir e explorar objetos geométricos interativamente, e, uma vez construídas, as figuras podem ser movimentadas conservando as propriedades que lhes haviam sido atribuídas. Essa possibilidade de deformação permite o acesso rápido e contínuo a diferentes casos, constituindo-se numa ferramenta muito rica para a validação experimental de fatos geométricos... (LAURO, 2007, p. 18).

Acrescenta-se que as inferências realizadas para trabalhar as seis razões trigonométricas, com a utilização do recurso tecnológico do *software* GeoGebra como um meio enriquecedor, para a articulação das representações das figuras geométricas planas com a trigonometria, foram relevantes na ótica da presente pesquisa, que completa mais um estágio de confirmação da hipótese de pesquisa: o uso da tecnologia computacional, com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, poderá favorecer a proposta de articulação das Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo (2009), de forma simples e significativa.

### 5.2.3 - Situação de Aprendizagem 3 - polígonos e circunferências – regularidades na inscrição e na circunscrição

O Caderno do Professor de Matemática (SÃO PAULO, 2009), inicia a Situação de Aprendizagem 3 com relatos de que desde a origem, as razões trigonométricas sempre estiveram associadas às relações entre ângulos, arcos e cordas em uma circunferência.

Os autores do Caderno complementam com o seguinte argumento, sendo  $n$  um número natural, quando se divide  $360^\circ$  por  $n$ , a corda correspondente ao ângulo obtido pode ser vista como o lado do polígono regular de  $n$  lados, inscrito na circunferência. Para esta Situação de Aprendizagem, tal fato será explorado e complementado com um estudo análogo dos polígonos circunscritos à circunferência.

O quadro abaixo apresenta o conteúdo programático para o desenvolvimento da Situação de Aprendizagem 3.

**Tempo previsto:** 2 semanas.

**Conteúdos e temas:** medidas de ângulos centrais, internos e externos de polígonos regulares inscritos em uma circunferência; cálculo dos lados de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência; relações trigonométricas fundamentais e problemas de inscrição e circunscrição de polígonos.

**Competências e habilidades:** compreender algumas relações essenciais entre a Geometria e a Trigonometria, inter-relacionando linguagens e ampliando as possibilidades de expressão; sintetizar e generalizar resultados já conhecidos, relacionando-os a novas situações.

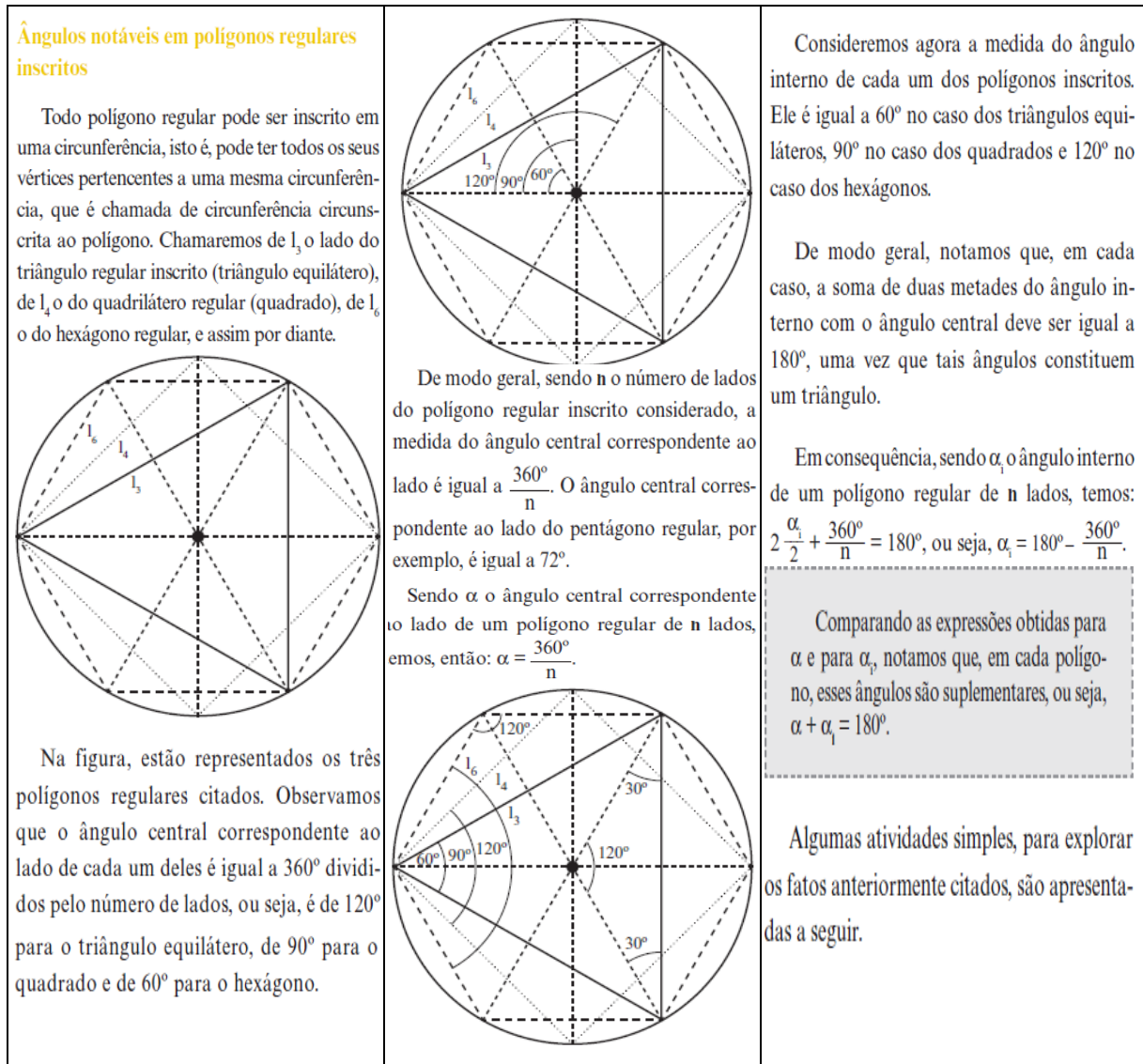
**Estratégias:** explorar relações entre elementos geométricos e trigonométricos, possibilitando uma maior compreensão de resultados já conhecidos; exploração de relações entre elementos geométricos e trigonométricos em diversos exemplos ilustrativos e exercícios exemplares.

#### Quadro 9 - Sugestão ao professor – 3ª Situação de Aprendizagem - 4º bimestre - 1ª série - Ensino médio. Fonte: (SÃO PAULO, 2009, p. 30)

Segundo o documento para a exploração dos conteúdos da Situação de Aprendizagem 3 foi pensado em alguns exemplos ilustrativos, que posteriormente serão complementados por

exercícios exemplares que poderão servir de modelo para que o professor crie ou selecione os seus próprios exercícios em outras fontes de materiais didáticos ou paradidáticos.

A Figura 43 destaca os ângulos notáveis em polígonos regulares inscritos na circunferência, bem como a relação entre os lados dos polígonos e o ângulo central.



**Figura 43 – Ângulos notáveis em polígonos regulares inscritos. Situação de Aprendizagem 3.**

Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 31, 32)

Diante do exposto na Figura 43, é proposta como **Atividade 1**, completar a tabela da Figura 44 a seguir, onde é indicado o ângulo central correspondente ao lado e o ângulo interno de cada um dos polígonos regulares indicados. Segundo o que é apresentado no Caderno do Professor, basta substituir o valor de  $n$  pelo correspondente ao número de lados de cada polígono nas expressões obtidas:  $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$  e  $\alpha_i = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ . O autor faz a seguinte

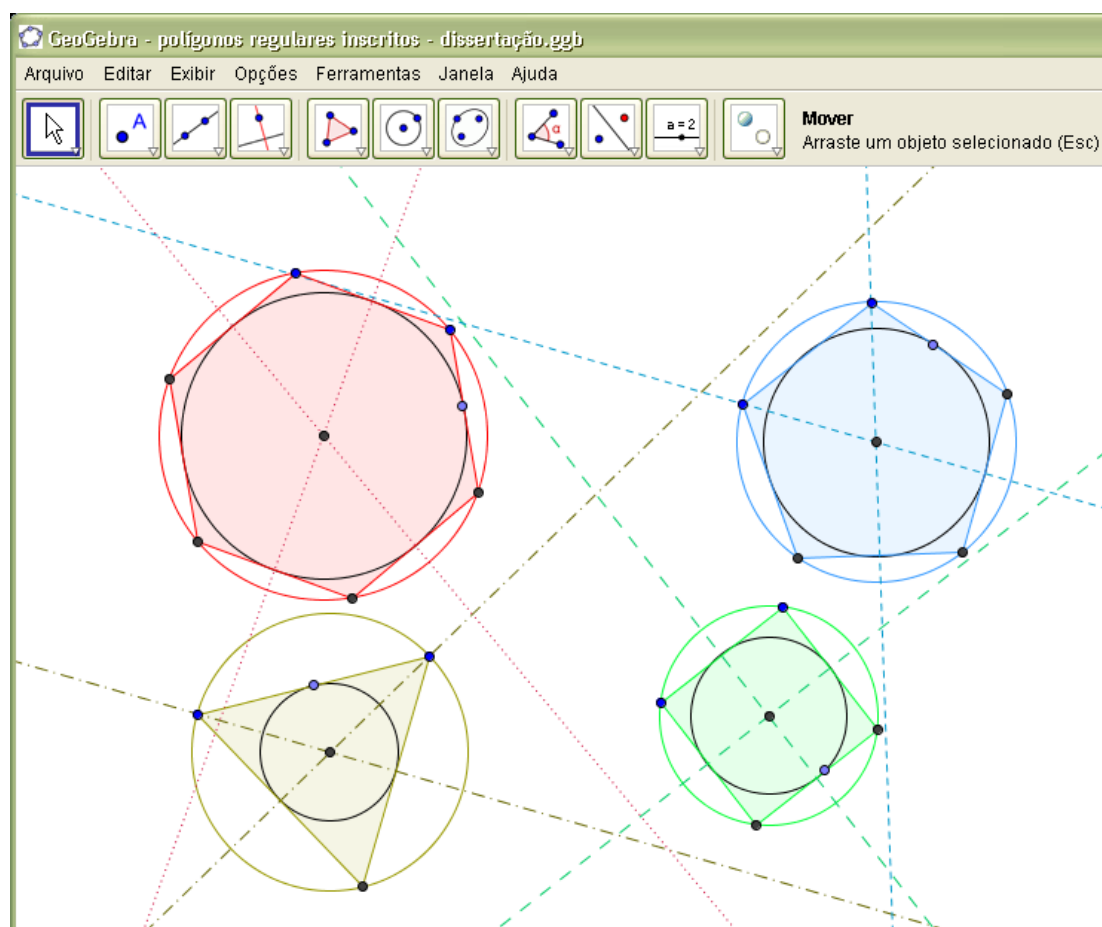
observação: Os valores obtidos que não forem inteiros podem significar alguma dificuldade na construção efetiva dos polígonos, mas não em sua concepção.

Polígono regular (n lados)	Ângulo central $\alpha$ (em graus)	Ângulo interno $\alpha_i$ (em graus)
triângulo (n = 3)	120	60
quadrado (n = 4)	90	90
pentágono (n = 5)	72	108
hexágono (n = 6)	60	120
heptágono (n = 7)	$\frac{360}{7} \cong 51,4$	$\cong 128,6$
octógono (n = 8)	45	135
eneágono (n = 9)	40	140
decágono (n = 10)	36	144
dodecágono (n = 12)	30	150
pentadecágono (n = 15)	24	156
icoságono (n = 20)	18	162
hectógono (n = 100)	3,6	176,4
quilógono (n = 1000)	0,36	179,64

**Figura 44 – Tabela: polígonos regulares, ângulos central e interno. Situação de Aprendizagem 3. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 32)**

Com o uso do recurso tecnológico, professores e alunos poderão explorar o conteúdo polígonos regulares inscritos em uma circunferência, reproduzindo as construções que hora foram feitas com régua e compasso. A vantagem na utilização de tal recurso para este tipo de conteúdo é constatada nas múltiplas formas de manipulação do objeto de estudo, além, de favorecer a percepção e a representação, bem como a sistematização das conjecturas elaboradas. Segundo as OCEM (2006) há argumentos relevantes para o uso de recursos no aprendizado da Geometria, existem programas que dispõem de instrumentos virtuais e com o menu de construção em linguagem clássica da Geometria, com eles a estrutura pode ser movimentada, que as propriedades geométricas dos elementos serão preservadas, que também

enriquecem as imagens mentais associadas às mesmas. Na observação da Figura 45 pode-se ter uma ideia da proposta de uso do *software* GeoGebra.



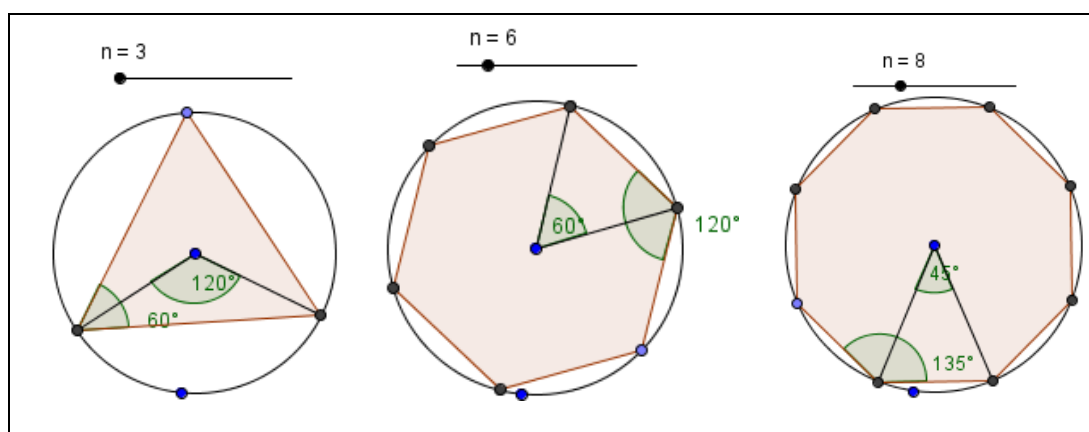
**Figura 45 – Polígonos Regulares Inscritos. Elaborado pelo autor**

Na representação dos quatro polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência, vista na Figura 45, todos têm em comum a utilização das retas mediatrizes como referência para inscrição e circunscrição dos mesmos nas circunferências.

O professor poderá propiciar um momento para os alunos explorarem diferentes polígonos regulares, com o auxílio do *software*, os alunos poderão relembrar e estabelecer uma discussão sobre o conceito de mediatriz. O professor poderá lançar a seguinte pergunta para aprofundar as discussões: será que o ponto de intersecção das retas mediatrizes de um polígono qualquer, sempre serão referências para inscrição e circunscrição dos mesmos a uma circunferência?

É importante lembrar que se chama de mediatriz a reta perpendicular a um segmento pelo seu ponto médio. O ponto onde as mediatrizes dos lados de um triângulo se encontram, chama-se de circuncentro.

No tocante a generalização do ângulo central, exposta anteriormente na Figura 43, poderá ser feita de modo dinâmico, a partir da visualização e da manipulação dos objetos na Figura 46 a seguir, com a utilização do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, será possível representar a variação dos (n) lados dos polígonos, que favorecerá a interpretação da relação entre ângulo central, os lados e os ângulos internos dos polígonos.



**Figura 46 – Polígonos regulares inscritos na circunferência.**

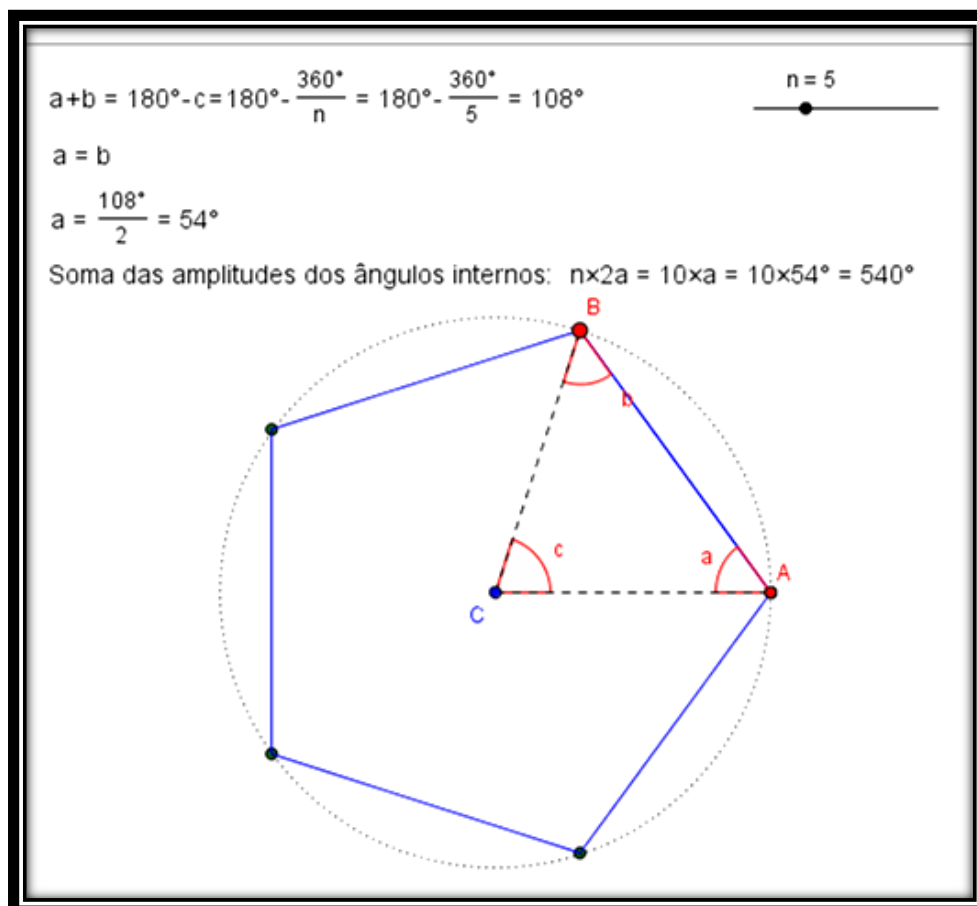
Adaptado de <http://www.geogebra.org.pt/index.php/m-eb/36-3-ciclo/98-poligonos-regulares> (Acesso em: agosto de 2011).

O desenvolvimento dos objetos na Figura 46 mostram as possibilidades significativas de uso do *software* GeoGebra, que está na linha de ferramentas tecnológicas que possibilitam a articulação das quatro faces para o conhecimento Geométrico, que se relacionam permanentemente na caracterização do espaço: a percepção, a concepção, a construção e a representação (MACHADO, 1995).

No Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009) propõe como **Atividade 2** que se observe a tabela obtida na atividade anterior na Figura 44. Nota-se que, quanto maior o número de lados de um polígono regular, menor é seu ângulo central e mais próxima de  $180^\circ$  é a medida de seu ângulo interno, o que significa que o polígono vai ficando cada vez mais arredondado. Pode-se imaginar uma circunferência como se fosse um polígono com um número de lados tão grande que o ângulo central correspondente a cada lado é zero e o ângulo interno é  $180^\circ$ . O autor sugere que se tente desenhar um icosaágono regular de lado 1 cm e verifique como ele praticamente pode ser identificado com uma circunferência. Agora, imagine o que aconteceria se você tentasse desenhar um quilógono regular... *Resposta pessoal.*

Para a execução da atividade 2, o *software* GeoGebra poderá contribuir significativamente com a construção das figuras, o mesmo facilita o processo para a

representação dos objetos e favorece a interpretação dos objetos, tal como é mostrado na Figura 47 a seguir, onde é possível visualizar os polígonos regulares inscritos e as variações dos ângulos centrais e internos, de acordo com a movimentação do cursor ( $n$ ) lados, das representações mostradas.



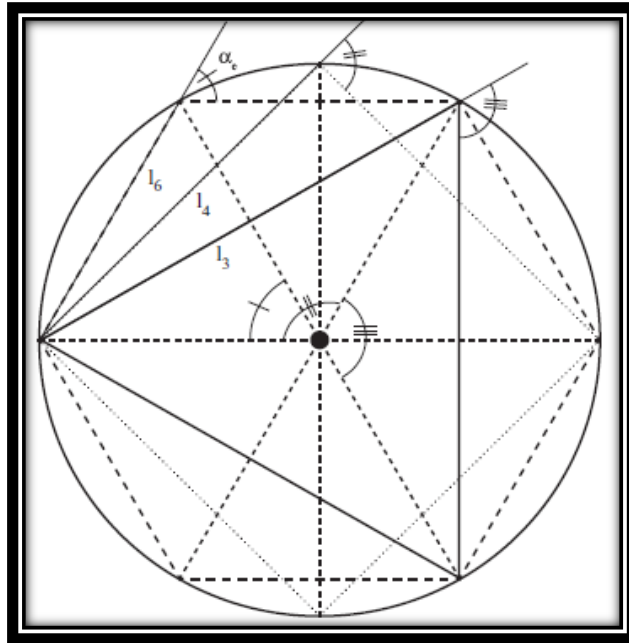
**Figura 47 – Soma dos ângulos internos de um polígono regular.**

Fonte: <http://www.geogebra.org.pt/index.php/m-eb/36-3-ciclo/145-soma-dos-angulos-internos-de-um-poligono-regular> (Acesso em: agosto de 2011)

Ao mover o cursor de ( $n$ ) lados, apresentado na Figura 47, o *software* mostrará a soma dos ângulos internos do polígono. Para a construção do objeto de estudo mostrado neste exemplo, não basta simplesmente usar o *software*, é preciso saber matemática. Segundo as OCEM (2006) é preciso saber informar, via teclado, as instruções de execução de operações e funções, e isso exige conhecimentos matemáticos.

A Figura 48 a seguir destaca o que o documento ressalta sobre o ângulo externo de um polígono regular: o ângulo externo  $\alpha_e$  de um polígono é formado pela semirreta que é o prolongamento de um dos lados com o lado seguinte. Naturalmente, ainda segundo o autor, cada ângulo interno  $\alpha_i$  de um polígono tem um ângulo externo  $\alpha_e$  adjacente, e a soma dos

dois é sempre  $180^\circ$ :  $\alpha_i + \alpha_e = 180^\circ$ .



**Figura 48 – Ângulo externo de um polígono regular.**  
**Fonte: (SÃO PAULO, 2009, p. 33)**

Nos polígonos regulares, mencionado anteriormente, a soma do ângulo central  $\alpha$  com o ângulo interno  $\alpha_i$  também é igual a  $180^\circ$ . Conclui-se, então, que o ângulo externo  $\alpha_e$  é igual ao ângulo central, ou seja, para obter o valor de  $\alpha_e$  basta dividir  $360^\circ$  pelo valor de  $(n)$ :  $\alpha_e = \frac{360^\circ}{n}$ . Por exemplo, o ângulo externo de um polígono regular de 20 lados é igual a  $18^\circ$ .

O documento propõe uma ilustração com a **Atividade 3** para o estudo do ângulo externo de um polígono regular. Descubra se existe um polígono regular:

a) cujo ângulo externo seja igual ao ângulo interno.

Como a soma do ângulo interno com o ângulo externo deve ser igual a  $180^\circ$ , para que os dois sejam iguais é preciso que ambos sejam iguais a  $90^\circ$ . O polígono regular, nesse caso, é um quadrado.

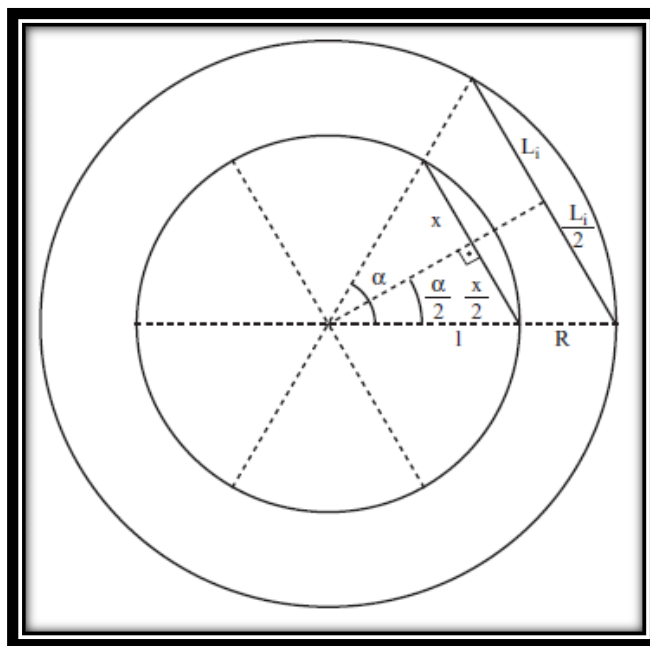
b) cujo ângulo interno seja igual ao dobro do ângulo externo.

Para que o ângulo interno seja igual ao dobro do ângulo externo, devemos ter:  $180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = 2 \cdot \frac{360^\circ}{n}$ , de onde resulta que  $n = 6$ . O polígono é um hexágono regular.

c) cujo ângulo central seja igual ao ângulo interno.

Se o ângulo central é igual ao ângulo interno, temos:  $\frac{360^\circ}{n} = 180 - \frac{360^\circ}{n}$ , de onde resulta que  $n = 4$ . O polígono procurado é um quadrado.

Para inscrever um polígono regular em uma circunferência de raio 1, o Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009), relata que existe uma relação simples entre o lado  $x$  do polígono e o ângulo central  $\alpha$  correspondente, conforme a Figura 49 abaixo. De fato,  $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)$  e, em consequência,  $x = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .

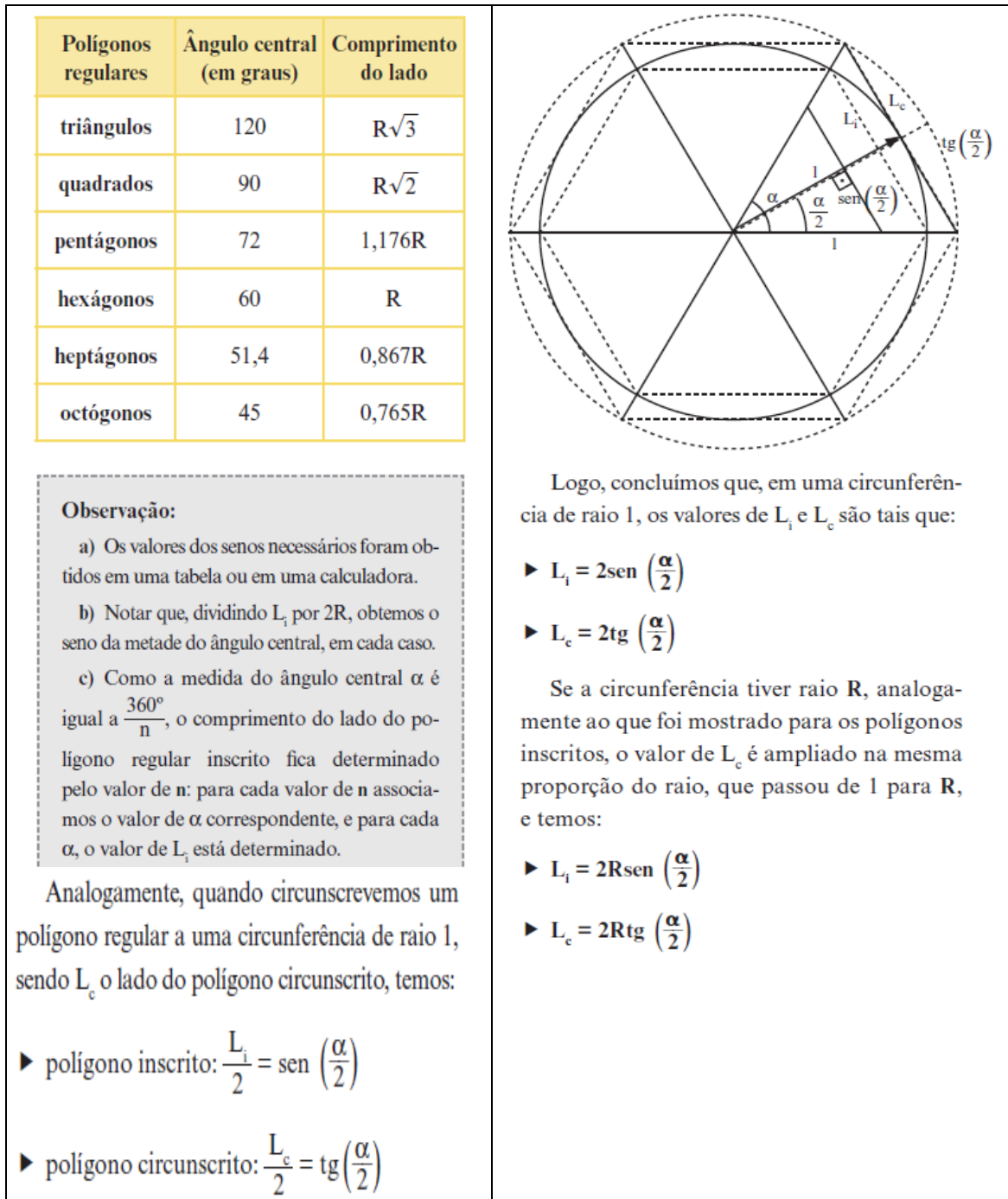


**Figura 49 – Inscrição de polígono na circunferência.**  
**Fonte: (SÃO PAULO, 2009, p. 34)**

Se o raio da circunferência for igual a  $R$ , então o lado  $L_i$  do polígono inscrito será proporcionalmente maior, então:  $\frac{R}{1} = \frac{L_i}{x}$

Logo,  $L_i = R \cdot x$ , ou seja,  $L_i = 2R \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .

Exemplos ilustrativos são apresentados na Figura 50, na tabela, estão indicados os ângulos centrais correspondentes aos lados dos polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 7 e 8 lados e os comprimentos dos lados correspondentes. Também na Figura 50, são apresentadas algumas considerações sobre a circunscrição de polígono regular a uma circunferência.



**Figura 50 – Inscrição e circunscricão de polígonos na circunferência. Exemplos ilustrativos. Situação de Aprendizagem 3. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 34, 35)**

Na Figura 51, são propostas, três atividades para exemplificar o que foi exposto na Situação de Aprendizagem 3, sobre a inscrição e circunscricão de polígonos regulares a uma circunferência, bem como algumas considerações sobre a avaliação dos conteúdos estudados.

<p><b>Atividade 4</b></p> <p>Calcule o lado do polígono regular de <math>n</math> lados inscrito e do polígono de <math>n</math> lados circunscrito à circunferência de raio 1 no caso em que:</p> <p>a) <math>n = 3, 6, 12, 24</math></p> <p>b) <math>n = 4, 8, 16, 32</math></p> <p>(Obtenha valores aproximados para os lados, usando uma tabela de senos ou uma calculadora.)</p> <p>a) Para <math>n = 3</math>, o ângulo central <math>\alpha</math> é igual a <math>\frac{360}{n}</math>, ou seja, <math>\alpha = 120^\circ</math>. Temos, então:</p> $L_{3i} = 2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} \cong 1,732;$ $L_{3c} = 2 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3} \cong 3,464.$ <p>Para <math>n = 6</math>, o ângulo central <math>\alpha</math> é igual a <math>60^\circ</math>. Temos, então:</p> $L_{6i} = 2 \cdot \sin 30^\circ = 1;$ $L_{6c} = 2 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 2\frac{\sqrt{3}}{3} \cong 1,155.$ <p>Para <math>n = 12</math>, <math>\alpha = 30^\circ</math> e temos:</p> $L_{12i} = 2 \cdot \sin 15^\circ \cong 0,518;$ $L_{12c} = 2 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ \cong 0,536.$ <p>Para <math>n = 24</math>, <math>\alpha = 15^\circ</math> e temos:</p> $L_{24i} = 2 \cdot \sin 7,5^\circ \cong 0,261;$ $L_{24c} = 2 \cdot \operatorname{tg} 7,5^\circ = 0,263.$ <p>b) Analogamente, calculando os lados dos polígonos inscrito e circunscrito para os valores indicados de <math>n</math>, temos:</p> $L_{4i} \cong 1,414 \text{ e } L_{4c} = 2;$ $L_{8i} \cong 0,765 \text{ e } L_{8c} \cong 0,828;$ $L_{16i} \cong 0,390 \text{ e } L_{16c} \cong 0,398;$ $L_{32i} \cong 0,196 \text{ e } L_{32c} \cong 0,197.$ <p><b>Atividade 5</b></p> <p>Em uma circunferência de raio 5 cm, inscreve-se um polígono regular de 36 lados. Tendo por base o comprimento da circunferência, qual é a diferença percentual entre o perímetro desse polígono e o comprimento da circunferência? (Dado: <math>\sin 5^\circ \cong 0,0872</math>.)</p>	<p>O lado do polígono inscrito na circunferência é igual a <math>L_{36i} = 2R \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)</math>, sendo <math>R = 5</math> cm e o ângulo central <math>\alpha</math> igual a <math>\frac{360}{36} = 10^\circ</math>.</p> <p>Calculando, obtemos: <math>L_{36i} = 2 \cdot 5 \cdot \sin 5^\circ \cong 0,872</math></p> <p>O perímetro do polígono será igual a <math>p_{36} = 36 \cdot L_{36i} \cong 31,392</math> cm.</p> <p>O comprimento da circunferência é <math>C = 2\pi R \cong 31,416</math>.</p> <p>A diferença percentual pedida é igual a <math>\frac{31,416 - 31,392}{31,416} \cong 0,000764 = 0,076\%</math>.</p> <p><b>Atividade 6</b></p> <p>Em uma circunferência de raio 1 dm, circunscreve-se um polígono regular de 36 lados. A área do polígono circunscrito supera em quantos por cento a área do círculo correspondente? (Dado: <math>\operatorname{tg} 5^\circ \cong 0,0875</math>.)</p> <p>Para calcular a área do polígono circunscrito, basta calcular a área de um dos 36 pequenos triângulos em que ele se divide e multiplicar esse resultado por 36.</p> <p>A área de um desses triângulos é a metade do produto da base <math>L_{36c}</math> pela altura, que é igual ao raio (1dm). Logo, tal área vale <math>\frac{(L_{36c} \cdot 1)}{2}</math>.</p> <p>Em consequência, a área do polígono circunscrito é igual a: <math>A_{36c} = 36 \cdot \frac{(L_{36c} \cdot 1)}{2} = 18 \cdot L_{36c}</math></p> <p>Calculando o lado do polígono, obtemos:</p> $L_{36c} = 2 \cdot \operatorname{tg} 5^\circ \cong 0,175 \text{ dm}.$	<p>Logo, a área será igual a:</p> $A_{36c} \cong 18 \cdot 0,175 = 3,150 \text{ dm}^2.$ <p>A área do círculo de raio <math>R = 1</math> dm é igual a <math>A = \pi \cdot 1^2 \cong 3,1416 \text{ dm}^2</math>.</p> <p>A diferença percentual pedida é <math>\frac{(3,150 - 3,1416)}{3,1416} \cong 0,003</math>, ou seja, <math>0,3\%</math>.</p> <hr/> <p>Para calcular a área do polígono regular inscrito, é necessário calcular a altura de cada um dos triângulos em que ele se divide, que é chamada de apótema (<math>a_p</math>) do polígono. O apótema pode ser obtido usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo que tem como catetos a metade do lado do triângulo e o apótema, e como hipotenusa o raio <math>R</math> da circunferência: <math>a_p^2 + \left(\frac{L_i}{2}\right)^2 = R^2</math>. Alguns exercícios explorando tal fato seriam interessantes.</p> <p><b>Considerações sobre a avaliação</b></p> <p>Nesta Situação de Aprendizagem, os problemas associados à inscrição e à circunscção de polígonos em uma circunferência serviram de pretexto para a prática e a consolidação das fecundas relações entre a Geometria e a Trigonometria. Algumas situações-problema foram exploradas, mas certamente existem muitas outras que também poderiam ter sido. Ao professor, em última instância, cabe a decisão de escolher algumas das que foram apresentadas ou optar por outras, de sua própria lavra, ou extraídas dos materiais didáticos de que dispõe.</p> <p>Ao final deste percurso, consideramos fundamental que os alunos saibam calcular os elementos básicos dos polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência, ou seja, o ângulo central que corresponde a um lado, os ângulos interno e externo, o perímetro e a área.</p>
--	--	--

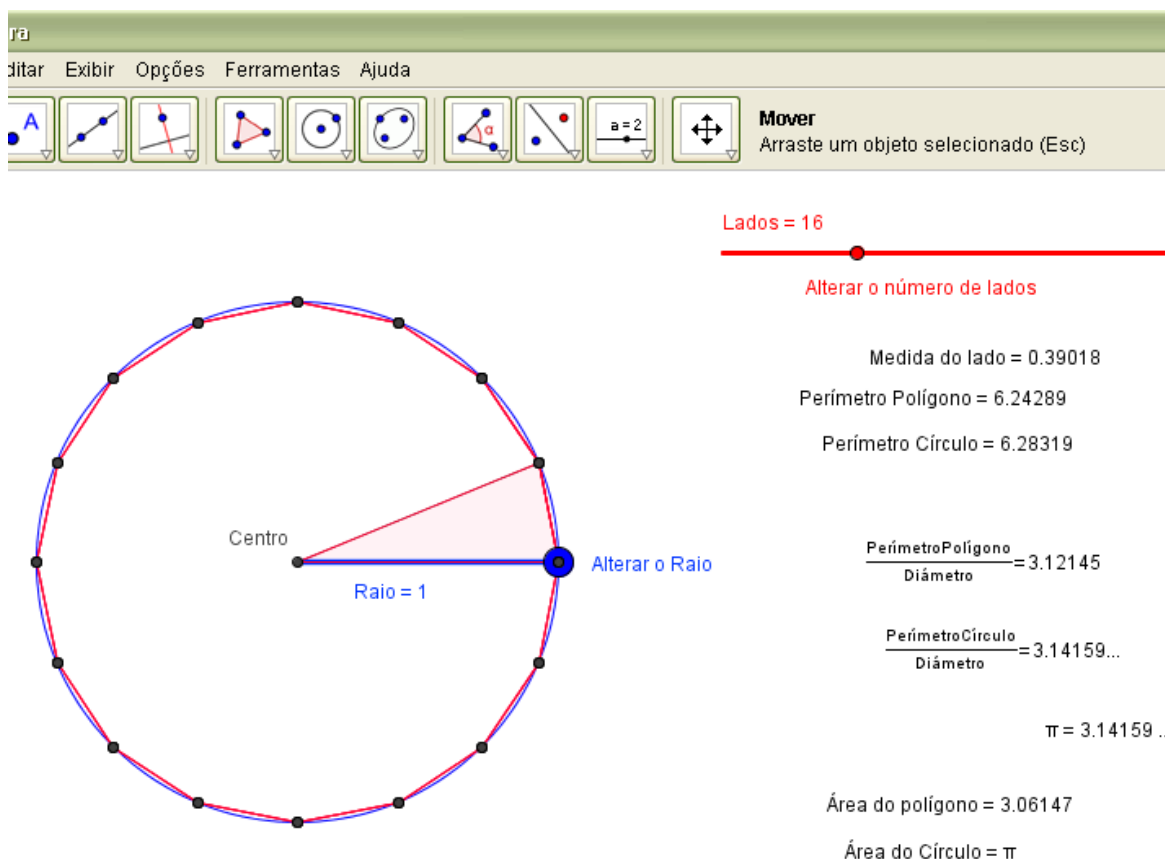
**Figura 51 - Atividades 4, 5 e 6 e considerações sobre a avaliação. Situação de Aprendizagem 3.**

**Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 35 – 37)**

O Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009) ressalta que na atividade 4 apresentada na Figura 51, é interessante que o professor, com base nos valores calculados, comente e interprete geometricamente os seguintes fatos: Quanto mais aumenta o valor de  $(n)$ , mais o comprimento do lado diminui. Quanto mais aumenta o valor de  $(n)$ , menor se torna a diferença entre os valores de  $L_i$  e de  $L_c$ . Se multiplicar os valores de  $L_i$  por  $(n)$ , o produto  $(n) \cdot L_i$

$L_i$  aproxima-se cada vez mais de  $2\pi$  ( $\cong 6,282$ ), que é o comprimento da circunferência de raio 1 na qual os polígonos são inscritos. (Para  $L_{16i} \cong 0,390$ , tem-se  $16 \cdot L_{16i} = 6,24$ ; para  $L_{32i} \cong 0,196$ , tem-se  $32 \cdot L_{32i} = 6,272$ ). O mesmo ocorre se multiplicar os valores dos lados dos polígonos circunscritos pelo número de lados.

Algumas das conclusões mencionadas acima podem ser visualizadas na Figura 52.



**Figura 52 - Polígonos regulares em uma circunferência. Fonte:** [http://www.geogebra.org/en/upload/files/piman/aproximar\\_pi.html](http://www.geogebra.org/en/upload/files/piman/aproximar_pi.html). (Acesso em: agosto de 2011)

A representação geométrica mostrada na Figura 52 proporciona a constatação de alguns fatos citados no Caderno do Professor referente às atividades de inscrição de polígonos regulares em uma circunferência, por exemplo, quanto maior for o número de lados do polígono inscrito, mais próximas, ficam as áreas e os perímetros da circunferência e do polígono regular.

A construção apresentada na Figura 52 permite que se imprima movimento aos objetos de estudo, por meio do seletor dos lados do polígono, para que outros polígonos sejam analisados, bem como é possível mudar o raio da circunferência para análise das alterações

ocorridas, e posteriormente verificar se as alterações vão interferir nas propriedades dos objetos.

### 5.2.3.1 - Análise final da Situação de Aprendizagem 3

Já foi mencionado por esta pesquisa que o Caderno do Professor de Matemática está a “serviço” do Currículo de Matemática, por meio deste se estabelece um diálogo do professor com o Currículo. Assim como nas Situações de Aprendizagens anteriores, o diálogo estabelecido é considerado pela presente pesquisa relevante e interessante. A maneira como é tratado o tema, polígonos regulares: ângulos internos, externos, inscrição e circunscrição nesta Situação de Aprendizagem, a fim de subsidiar o trabalho do professor durante as aulas, a ponto de estabelecer uma articulação entre a Geometria e a Trigonometria por meio de exemplos ilustrativos e de exercícios exemplares, abriu um rico espaço para a inserção do *software* GeoGebra neste contexto.

Sem descaracterizar o que é desenvolvido no ambiente estático no Caderno do Professor, o uso do *software* GeoGebra neste contexto, oferece algumas possibilidades em melhores condições para o desenvolvimento de uma aprendizagem construtivista da Geometria. Baldini (2004) faz a seguinte observação: a manipulação e a visualização de objetos, proporcionados por *software* de Geometria Dinâmica, contribuem para a construção de conhecimentos relacionados à Matemática e também a outros campos da ciência, como a física, a química e a biologia.

Seguindo esta linha de praticidade do uso do *software* GeoGebra para a representação das figuras geométricas envolvidas na atividade 4, por exemplo, como construir de modo satisfatório, um hexadecágono, um polígono de 16 lados? E posteriormente analisar as suas propriedades no ambiente estático? A partir desse ponto o *software* apresenta-se com um recurso auxiliar para a construção e manipulação do hexadecágono, pois com o uso do GeoGebra será possível empreender movimento ao polígono, sem que o mesmo perca as suas principais propriedades. Lembrando que existe segundo Bongiovanni (2006) uma diferença entre desenhar e construir uma figura, ele tem como pressuposto que a Geometria Dinâmica pode contribuir e estabelecer uma importante diferença entre desenhar e construir:

**Desenhar** é reproduzir a imagem mental que temos de um objeto geométrico. É uma das representações de um objeto geométrico teórico. **Construir** é utilizar as propriedades do objeto geométrico para obter a sua representação. A construção,

quando realizada num *software* de geometria dinâmica, preserva quando do deslocamento de um de seus pontos, as propriedades ligadas ao objeto geométrico que representa. Podemos dizer que, nesse caso, a construção é um desenho dinâmico que não perde as suas propriedades quando do deslocamento de seus pontos de base. A construção vai além do simples traçado empírico controlado apenas pela visualização. (BONGIOVANNI, 2006, p. 6).

Bongiovanni (2006) destaca que os desenhos estáticos não permitem descobrir as propriedades das figuras, ao passo que as construções dinâmicas são relevantes para conjecturar sobre as propriedades das figuras. A verificação de casos particulares pode contribuir para propriedades gerais dos objetos geométricos. O autor defende a linha de pensamento de que com os recursos tecnológicos, inúmeros exemplos de propriedades geométricas podem ser estudados melhor na Geometria Dinâmica do que no ensino sem o computador.

Por fim, a respeito das inferências realizadas nesta Situação de Aprendizagem para trabalhar os polígonos regulares: ângulos internos, externos, inscrição e circunscrição, com o uso da ferramenta tecnológica do *software* GeoGebra, foram consideradas para a presente pesquisa, satisfatórias, ao passo, que as inferências realizadas contribuíram para a confirmação da hipótese de pesquisa: o uso da tecnologia computacional, com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, poderá favorecer a proposta de articulação das Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo, de forma simples e significativa.

#### **5.2.4 - Situação de Aprendizagem 4 - a hora e a vez dos triângulos não retângulos**

De acordo com o exposto até o momento no Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009), destaca-se que por meio da Trigonometria, foi possível relacionar os lados e os ângulos de um triângulo retângulo. No entanto, na Situação de Aprendizagem 4, serão apresentadas duas relações importantes entre os lados e os ângulos de um triângulo qualquer: uma relação de proporcionalidade que envolve lados e ângulos, ou, mais precisamente, os lados e os senos dos ângulos, conhecida como Lei dos Senos; e uma generalização do teorema de Pitágoras, conhecida como Lei dos Cossenos.

Relata-se que tais relações também valem em triângulos retângulos, e seu aprendizado constitui uma ampliação do repertório das relações entre a Geometria e a Trigonometria que é proposto para o quarto bimestre.

O quadro abaixo apresenta o conteúdo programático para o desenvolvimento da Situação de Aprendizagem 4.

**Tempo previsto:** 2 semanas.

**Conteúdos e temas:** relação entre lados e ângulos de um triângulo qualquer: Lei dos Senos; generalização do teorema de Pitágoras: Lei dos Cossenos.

**Competências e habilidades:** generalizar resultados conhecidos; expressar e compreender fenômenos em que se encontram presentes relações entre lados e ângulos de um triângulo, bem como enfrentar situações-problema correlatas.

**Estratégias:** retomada das relações entre lados e ângulos já conhecidas em triângulos retângulos; extensão de algumas dessas relações, por meio de procedimentos análogos, para triângulos quaisquer; exemplos ilustrativos e exercícios exemplares sobre o tema, em diferentes contextos.

**Quadro 10 - sugestão ao professor – 4ª Situação de Aprendizagem - 4º bimestre - 1ª série - Ensino médio.**

**Fonte: (SÃO PAULO, 2009, p. 38)**

Sugere-se ao professor que utilize duas semanas nesta etapa, de tal maneira que a maior parte do tempo seja dedicada às aplicações práticas das duas relações entre lados e ângulos de um triângulo qualquer (SÃO PAULO, 2009).

É apresentado na Figura 53, um roteiro para aplicação da Situação de Aprendizagem 4. O ponto de partida são as razões trigonométricas no triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras. A partir deste ponto, serão feitas generalizações para outros tipos de triângulos não retângulos (SÃO PAULO, 2009).

**Roteiro para aplicação da Situação de Aprendizagem 4**

Após a recordação de algumas das relações conhecidas entre lados e ângulos de um triângulo retângulo, serão propostas algumas possibilidades de generalização para triângulos quaisquer. O entrelaçamento entre a Geometria e a Trigonometria será especialmente importante e estará presente em todas as atividades. Exemplos ilustrativos e exercícios exemplares, a serem estendidos pelos professores, serão propostos como modelos.

**Dos triângulos retângulos a quaisquer triângulos**

Sendo  $a$  e  $b$  os catetos opostos aos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente, e  $c$  a hipotenusa de um triângulo retângulo, sabemos, por exemplo, que:

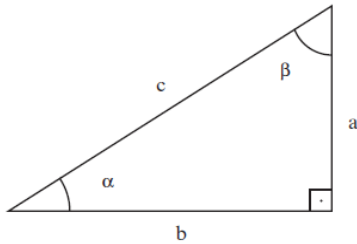
$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ (teorema de Pitágoras);}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}, \text{ ou seja, } a = c \cdot \text{sen } \alpha;$$

$$\text{sen } \beta = \frac{b}{c}, \text{ ou seja, } b = c \cdot \text{sen } \beta;$$

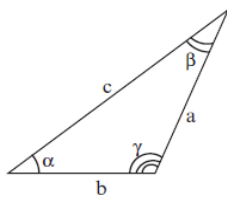
$$\text{cos } \alpha = \frac{b}{c}, \text{ ou seja, } b = c \cdot \text{cos } \alpha;$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}, \text{ ou seja, } a = b \cdot \text{tg } \alpha.$$



Essas são apenas algumas das múltiplas relações entre os lados e os ângulos do triângulo que poderíamos estabelecer.

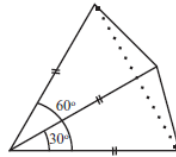
Consideremos agora um triângulo qualquer de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e de ângulos correspondentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , conforme mostra a figura a seguir:



Nenhuma das relações anteriormente apresentadas vale nesse triângulo, que não é retângulo, a começar pela que corresponderia ao teorema de Pitágoras. No caso da figura, certamente teríamos:  $c^2 > a^2 + b^2$ .

Existem, no entanto, pelo menos duas relações importantes entre os lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  e os ângulos correspondentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , que iremos, a partir de agora, conhecer.

A primeira delas decorre de uma observação muito simples: ao maior lado do triângulo sempre se opõe o maior ângulo, e vice-versa. Entretanto, não é verdade que se a medida de um ângulo dobrar, então o lado oposto também dobrará de valor. Para comprovar isso, basta notar, na figura a seguir, que o lado oposto ao ângulo de  $60^\circ$  não é o dobro do lado oposto ao ângulo de  $30^\circ$ , mantidas todas as demais condições.



Não é verdade, portanto, que, em um triângulo, os lados e os ângulos opostos são proporcionais.

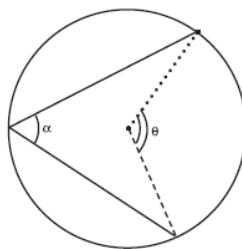
É verdade, no entanto, que existe uma proporcionalidade direta entre os lados e os senos dos ângulos opostos, ou seja:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

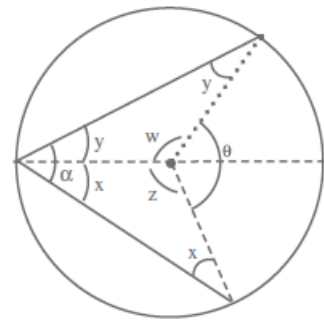
Essa relação de proporcionalidade é conhecida como **Lei dos Senos**, e será justificada nas atividades a seguir.

**Atividade 1**

Mostre que, se um ângulo  $\alpha$  é inscrito em uma circunferência, então sua medida é igual à metade da medida do ângulo central  $\theta$  correspondente (ver figura).



Para mostrar tal fato, basta traçar um diâmetro que passa pelo vértice do ângulo inscrito e notar as relações entre os ângulos indicados:



$$x + y = \alpha$$

$$2x + z = 180^\circ$$

$$2y + w = 180^\circ$$

Logo,  
 $2x + 2y + (z + w) = 360$ ,  
 ou seja,  $2\alpha + (z + w) = 360$ .

Como sabemos que  $\theta + (z + w) = 360^\circ$  (ver figura), podemos concluir que  $2\alpha = \theta$ , ou seja,  $\alpha = \frac{\theta}{2}$ , como queríamos mostrar.

Esta relação pode ser aqui explorada, enunciando-se tal resultado de diferentes modos, por exemplo:

- ▶ todos os ângulos inscritos em um arco de circunferência, que subtendem a mesma corda (ver Figura 1), têm a mesma medida, que é a metade do ângulo central correspondente;
- ▶ todo ângulo inscrito em uma semicircunferência tem medida  $90^\circ$  (ver Figura 2).

Figura 1

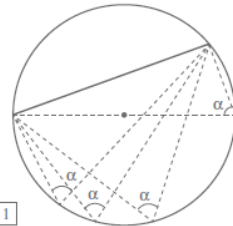
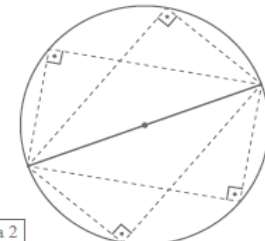


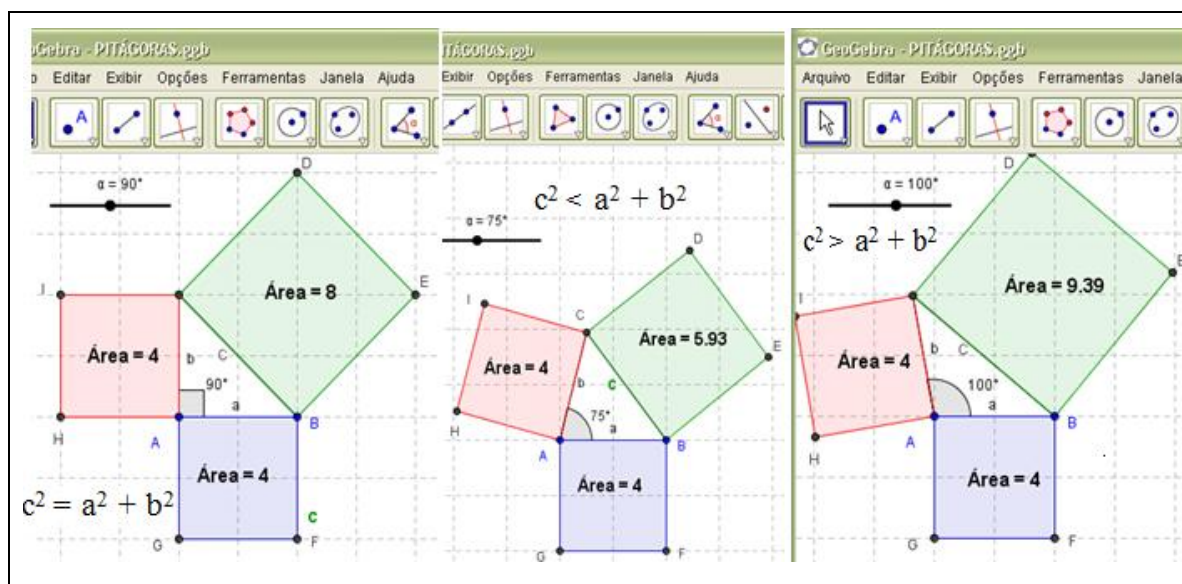
Figura 2



**Figura 53- Roteiro para aplicação da Situação de Aprendizagem 4: Dos triângulos retângulos a quaisquer triângulos. Atividade 1. Fonte: (SÃO PAULO, 2009, p. 38 - 40)**

Antes de partir para as generalizações da Lei dos senos e do teorema de Pitágoras para outros tipos de triângulos não retângulos, é importante observar a Figura 54. Nesta Figura é

possível verificar que a aplicação do teorema de Pitágoras só é válida para os triângulos retângulos, os outros triângulos não retângulos, não satisfazem à sentença matemática:  $c^2 = a^2 + b^2$ . A manipulação do objeto no ambiente de Geometria Dinâmica GeoGebra, proporcionará plena visão de o porquê os outros triângulos não retângulos não satisfazem ao teorema de Pitágoras.



**Figura 54 – Representação de triângulos com possíveis aplicações do teorema de Pitágoras. Elaborado pelo autor**

No triângulo retângulo, o quadrado construído que tem como lado a hipotenusa ( $c$ ) possui a área igual à soma das áreas dos quadrados construídos com os lados dos catetos ( $a$ ) e ( $b$ ), ou seja:  $c^2 = a^2 + b^2$ . Na observação da Figura 54, percebe-se que só há uma representação que contempla o teorema de Pitágoras, as outras duas representações entram no caso dos triângulos quaisquer. Isso ocorre, pois as áreas formadas pelos quadrados das hipotenusas, não são iguais à soma das áreas dos outros quadrados, formados pelos catetos, esse fato só acontece com o primeiro triângulo da esquerda, que é retângulo, ou seja, ele satisfaz a condição exigida pelo teorema de Pitágoras.

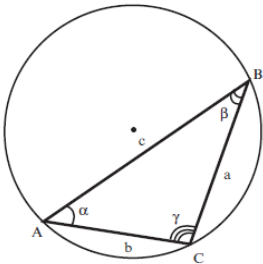
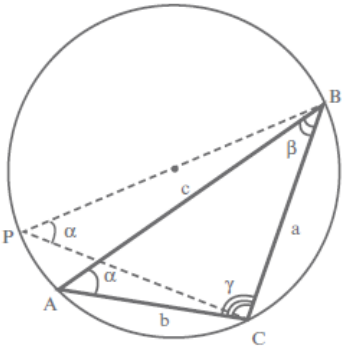
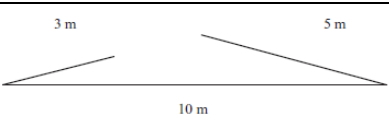
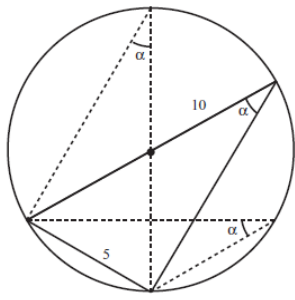
O Caderno do Professor aponta que é importante ressaltar que, em um triângulo de lados ( $a$ ), ( $b$ ) e ( $c$ ) e ângulos opostos respectivamente iguais a  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ :

- Se o quadrado do maior lado for igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo, com o ângulo reto oposto ao maior lado;
- Se o maior dos lados ao quadrado for menor que a soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é acutângulo (todos os ângulos são agudos);

- Se o maior lado ao quadrado for maior que a soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é obtusângulo, com o ângulo oposto ao maior lado maior do que 90°.

A manipulação dos triângulos apresentados anteriormente na Figura 54, construídos com o *software* GeoGebra, contribui para a confirmação do exposto acima no Caderno do Professor de Matemática.

A Figura 55 apresenta três atividades, que consistem em justificar a relação de proporcionalidade direta entre os lados dos triângulos e os respectivos senos dos ângulos opostos.

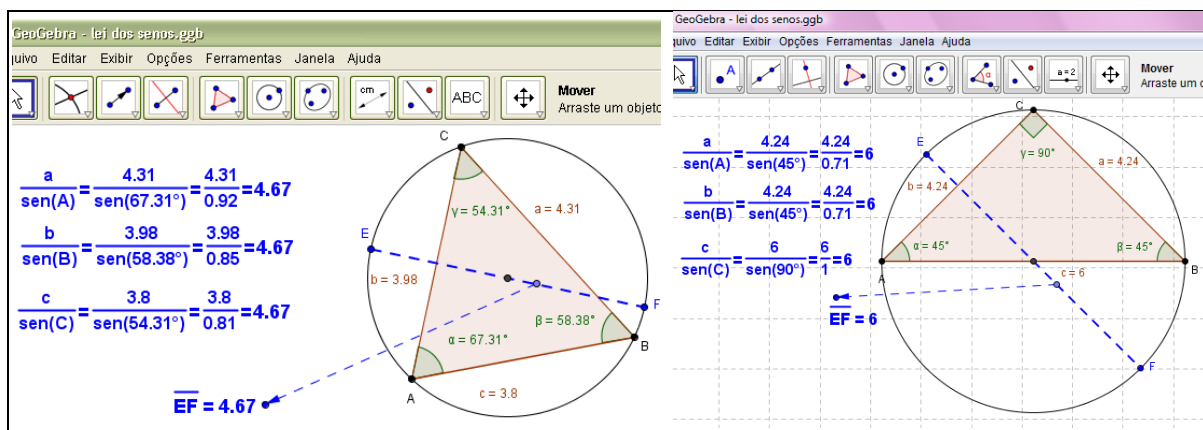
<p><b>Atividade 2</b></p> <p>Dado um triângulo qualquer de lados <math>a</math>, <math>b</math> e <math>c</math>, sempre podemos inscrevê-lo em uma circunferência, de modo que os ângulos correspondentes <math>\alpha</math>, <math>\beta</math> e <math>\gamma</math> sejam ângulos inscritos na circunferência, conforme mostra a figura a seguir.</p>  <p>Mostre que é válida a proporção:  <math display="block">\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}</math> (Lei dos Senos).</p> <p>Traçando-se o diâmetro <math>BP = d</math>, notamos que o triângulo <math>BPC</math> é retângulo em <math>C</math> e que o ângulo <math>BPC</math> é igual a <math>\alpha</math>, uma vez que é um ângulo inscrito no arco <math>CAPB</math>, que tem o lado <math>a</math> como corda.</p> 	<p>No triângulo retângulo <math>BPC</math>, temos:  <math>\sin \alpha = \frac{a}{d}</math>, onde <math>d</math> é o diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo. Notamos, então, que <math>\frac{a}{\sin \alpha} = d</math> ou seja, a razão entre o lado <math>a</math> e o seno do ângulo oposto correspondente é igual ao diâmetro <math>d</math> da circunferência. De modo inteiramente análogo, concluiríamos que <math>\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = d</math>, ou seja, as três razões lado/seno do ângulo oposto são iguais, o que significa que lados e senos são proporcionais. Esse é o significado da Lei dos Senos.</p> <p><b>Atividade 3</b></p> <p>Um triângulo tem lados de medidas 5 m, 6 m e 10 m.</p> <p>a) Esse triângulo é retângulo?</p> <p>O triângulo de lados 5 m, 6 m e 10 m não é retângulo, pois o quadrado do maior lado não é igual à soma dos quadrados dos outros dois: <math>10^2 &gt; 6^2 + 5^2</math>.</p> <p>b) Se dobrarmos as medidas dos três lados, o novo triângulo terá seus ângulos alterados?</p> <p>Se dobrarmos as medidas dos três lados, o novo triângulo será semelhante ao inicial. Terá, portanto, os mesmos ângulos que ele.</p> <p>c) Seria possível reduzir o lado de 6 m ao meio, construindo um triângulo de lados 5 m, 3 m e 10 m?</p> <p>Não é possível construir um triângulo com lados 5 m, 3 m e 10 m, pois a soma de dois dos lados (3 m e 5 m) é menor que o terceiro lado (10 m), como mostra a figura a seguir. Para ser possível a construção de um triângulo com lados <math>a</math>, <math>b</math> e <math>c</math>, é necessário que cada um dos lados seja menor do que a soma dos outros dois.</p>	 <p>d) Qual é a razão entre o seno do ângulo oposto ao lado de 5 m e o seno do ângulo oposto ao lado de 10 m?</p> <p>Os lados de um triângulo são diretamente proporcionais aos senos dos ângulos opostos, ou seja: <math>\frac{5}{\sin \alpha} = \frac{6}{\sin \beta} = \frac{10}{\sin \gamma}</math>.</p> <p>Portanto, a razão <math>\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}</math> é igual a <math>\frac{5}{10}</math> ou seja, é igual a <math>\frac{1}{2}</math>.</p> <p><b>Atividade 4</b></p> <p>Um ângulo <math>\alpha</math> inscrito em uma circunferência de diâmetro 10 m subtende uma corda de 5 m. Determine a medida de <math>\alpha</math> em graus.</p>  <p>Qualquer que seja a posição do ângulo <math>\alpha</math>, seu seno, calculado no triângulo retângulo que tem a hipotenusa como diâmetro, é igual a <math>\frac{1}{2}</math>. Logo, <math>\alpha = 30^\circ</math>.</p>
--	---	--

**Figura 55 – Lei dos Senos. Atividades 2, 3 e 4. Situação de Aprendizagem 4. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 40, 41)**

Na Figura 55, apresentou-se a primeira parte da justificativa da generalização para triângulos não retângulos, enfatizou também na Figura 53 que, se um ângulo ( $\alpha$ ) é inscrito em

uma circunferência, então a sua medida é igual à metade da medida do ângulo central ( $\theta$ ) correspondente. Essa relação entre o ângulo inscrito em uma circunferência e o ângulo central correspondente faz parte do conteúdo estudado na Situação de Aprendizagem 1. O aproveitamento de assuntos já estudados, durante o ano letivo, ou mesmo, conteúdos referentes aos anos anteriores, vão ao encontro às prescrições do Currículo de São Paulo (2010). O documento considera que a Geometria deve ser tratada, ao longo de todos os anos, em abordagem espiralada, significa dizer que os grandes temas podem aparecer tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, com a observação na diferença da escala de tratamento dada ao tema.

Após a validação da Lei dos Senos por meio da justificativa apresentada pelo documento anteriormente, fica como sugestão o desenvolvimento da atividade apresentada na Figura 56, que poderá complementar o estudo da Lei dos Senos com o uso do *software* GeoGebra, em relação a alguns aspectos relevantes que giram em torno desse tema. Por exemplo, a proporcionalidade entre lados e os senos dos ângulos opostos dos triângulos.



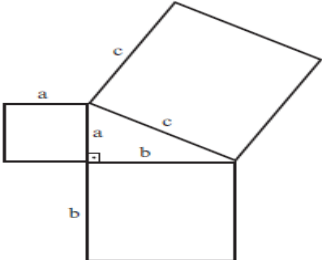
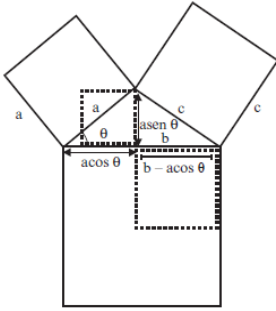
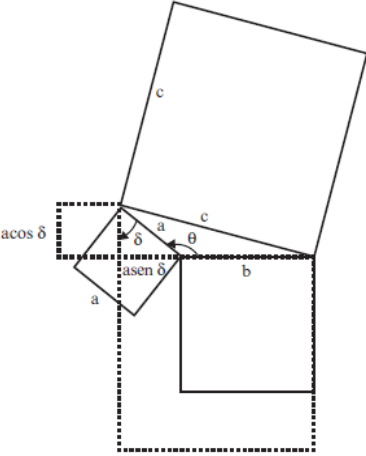
**Figura 56 - Leis dos Senos Adaptado de <http://www.luisclaudio.mat.br/rpm/leidossenos.html>. (Acesso em: agosto de 2011)**

Se o professor optar por não construir com os alunos o objeto de estudo da Figura 56, poderá realizar o *download* da atividade no *site* descrito na legenda acima, e fazer as adaptações que julgar necessárias para a exploração com seus alunos. Com o *download* da atividade o professor terá acesso ao protocolo de construção do objeto, na barra de menu (exibir) do *software* GeoGebra, para que possa seguir e entender os passos dos comandos utilizados na construção do objeto representado na Figura 56.

Com a construção do objeto realizada, com o uso do projetor multimídia, ou se preferir usar a sala de informática, o professor poderá propiciar momentos onde os alunos farão a

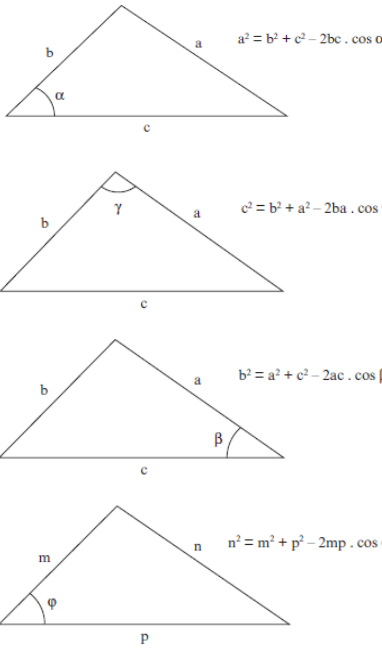
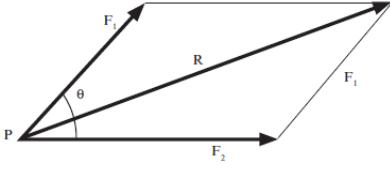
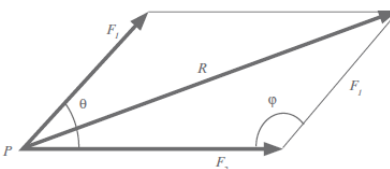
exploração do objeto no ambiente de Geometria Dinâmica. Com a movimentação de qualquer um dos vértices do triângulo, será possível verificar o que ocorre com cada uma das razões entre os lados do triângulo e os senos dos ângulos opostos a esses lados. Será possível a verificação de qual é a relação entre o diâmetro da circunferência e as razões encontradas, verificar que a Lei dos Senos é válida para triângulos retângulos, e não apenas para triângulos não retângulos.

A segunda relação importante entre os lados (a), (b) e (c) e os ângulos correspondentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  de um triângulo qualquer, que o documento apresenta é a Lei dos Cossenos, que é uma ampliação do teorema de Pitágoras. O autor relembra que, no triângulo retângulo, o quadrado construído com base no lado da hipotenusa (c) tem área igual à soma das áreas dos quadrados construídos com os lados dos catetos (a) e (b), ou seja:  $c^2 = a^2 + b^2$ , esta condição pode ser observada novamente na Figura 54, apresentada anteriormente. As considerações apresentadas na Figura 57 abaixo demonstram a Lei dos cossenos como uma consequência da ampliação do teorema de Pitágoras.

<p><b>Ampliando o teorema de Pitágoras: Lei dos Cossenos</b></p> <p>Já sabemos que, no triângulo retângulo, o quadrado construído tendo como lado a hipotenusa c tem área igual à soma das áreas dos quadrados construídos tendo como lados os catetos a e b, ou seja: <math>c^2 = a^2 + b^2</math>.</p>  <p>Vamos agora procurar uma relação entre os três lados de um triângulo qualquer, de lados a, b e c.</p> <p>Se o ângulo <math>\theta</math>, entre os lados a e b, for menor do que <math>90^\circ</math>, então certamente teremos: <math>c^2 &lt; a^2 + b^2</math>.</p> <p>Considerando, no entanto, os quadrados pontilhados da figura a seguir, no triângulo retângulo de hipotenusa c e de catetos <math>a \cos \theta</math> e <math>(b - a \cos \theta)</math>, podemos utilizar o teorema de Pitágoras e escrever:</p>	<p>Considerando, no entanto, os quadrados pontilhados da figura a seguir, no triângulo retângulo de hipotenusa c e de catetos <math>a \cos \theta</math> e <math>(b - a \cos \theta)</math>, podemos utilizar o teorema de Pitágoras e escrever:</p>  $c^2 = (a \cos \theta)^2 + (b - a \cos \theta)^2;$ $c^2 = a^2 \cdot \cos^2 \theta + b^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta - 2ab \cdot \cos \theta.$ <p>Como <math>\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1</math>, resulta:</p> $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \theta,$ <p>que é um resultado conhecido como Lei dos Cossenos.</p> <p>Um resultado análogo pode ser obtido se o ângulo entre a e b for maior do que <math>90^\circ</math>. Naturalmente, nesse caso, teremos <math>c^2 &gt; a^2 + b^2</math>. A figura a seguir ilustra as etapas para chegar a idêntico resultado:</p>	 $c^2 = (b + a \cos \delta)^2 + (a \cos \delta)^2$ <p>Logo,</p> $c^2 = b^2 + a^2 + 2ab \cdot \cos \delta$ <p>Observando a figura, notamos que <math>\cos \delta = \cos (180^\circ - \theta)</math>, o que resulta em <math>c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos (180^\circ - \theta)</math>.</p> <p>Mas <math>\cos (180^\circ - \theta) = -\cos \theta</math> ; logo, temos: <math>c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta</math>.</p>
---	--	---

**Figura 57 – Aplicação do teorema de Pitágoras: Lei dos cossenos.**  
**Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 41, 42)**

A segunda situação importante que estabelece uma relação entre os lados e os ângulos correspondentes de um triângulo qualquer, a partir da generalização<sup>26</sup> do teorema de Pitágoras, como foi demonstrada na Figura 57, denominada Lei dos Cossenos, é ilustrada e exemplificada na Figura 58.

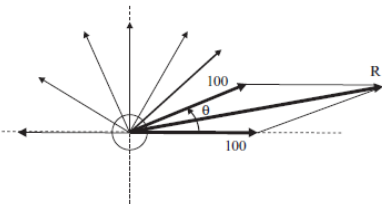
<p><b>Exemplos ilustrativos:</b></p>  <p>É importante destacar aqui que, em um triângulo de lados <math>a</math>, <math>b</math> e <math>c</math>, e ângulos opostos respectivamente iguais a <math>\alpha</math>, <math>\beta</math> e <math>\gamma</math>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▶ se o quadrado do maior lado for igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo, sendo o ângulo reto oposto ao maior lado;</li> <li>▶ se o maior dos lados ao quadrado for menor do que a soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é acutângulo (todos os ângulos são agudos);</li> <li>▶ se o maior lado ao quadrado for maior do que a soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é obtusângulo, sendo o ângulo oposto ao maior lado maior do que <math>90^\circ</math>.</li> </ul>	<p><b>Atividade 5</b></p> <p>Um triângulo tem ângulos <math>\alpha</math>, <math>\beta</math> e <math>\gamma</math>, e lados <math>a</math>, <math>b</math> e <math>c</math> respectivamente iguais a 2 m, 3 m e 4 m.</p> <p>a) Esse triângulo é retângulo?</p> <p><i>O triângulo não é retângulo, uma vez que o quadrado do maior dos lados não é igual à soma dos quadrados dos outros dois. Como <math>4^2 &gt; 2^2 + 3^2</math>, o triângulo tem um ângulo obtuso oposto ao lado 4.</i></p> <p>b) Calcule o cosseno do ângulo <math>\gamma</math>.</p> <p><i>Para calcular o cosseno do ângulo <math>\gamma</math>, podemos escrever:</i></p> $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma.$ <p><i>Logo,</i></p> $16 = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \gamma, \text{ ou seja,}$ $\cos \gamma = -\frac{1}{4}.$ <p><i>(Notamos que <math>\cos \gamma &lt; 0</math>, pois <math>\gamma &gt; 90^\circ</math>)</i></p> <p>c) Calcule o seno dos ângulos <math>\alpha</math> e <math>\beta</math>.</p> <p><i>Para calcular o seno dos outros dois ângulos, podemos escolher um dos seguintes caminhos: Calculamos o cosseno de cada um deles, do mesmo modo que calculamos o cosseno de <math>\gamma</math>, e, a partir daí, calculamos o seno por meio da relação fundamental <math>\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1</math>. Alternativamente, podemos calcular o seno de <math>\gamma</math> por meio da relação: <math>\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1</math> e, a partir daí, usar a Lei dos Senos.</i></p> <p><i>Optando por esse segundo caminho, temos:</i></p> $\sin^2 \gamma + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1, \text{ ou seja, } \sin \gamma = \frac{\sqrt{15}}{4}.$ <p><i>(Lembrar que <math>\gamma</math> tem seno positivo por ser um ângulo menor do que <math>180^\circ</math>.)</i></p> <p><i>Como temos, pela Lei dos Senos, a proporção a seguir: <math>\frac{\sin \gamma}{4} = \frac{\sin \alpha}{2} = \frac{\sin \beta}{3}</math>,</i></p> <p><i>concluimos que:</i></p> $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{8} \text{ e } \sin \beta = 3 \frac{\sqrt{15}}{16}.$	<p><b>Atividade 6</b></p> <p>Quando duas forças de intensidades <math>F_1</math> e <math>F_2</math> agem simultaneamente sobre o mesmo ponto <math>P</math>, a força resultante pode ser representada pela Regra do Paralelogramo e tem uma intensidade <math>R</math> que pode ser calculada de acordo com a Lei dos Cossenos. Sendo <math>\theta</math> o ângulo formado pelas duas forças (ver figura), mostre que devemos ter <math>R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \theta</math>.</p>  <p><i>Considerando o triângulo formado por <math>F_2</math>, <math>R</math> e o segmento paralelo a <math>F_1</math>, e sendo <math>\varphi</math> o ângulo formado pelos lados <math>F_2</math> e <math>F_1</math>, usando a Lei dos Cossenos, temos:</i></p>  $R^2 = F_2^2 + F_1^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \varphi.$ <p><i>Como os ângulos <math>\theta</math> e <math>\varphi</math> são suplementares, isto é, a soma dos dois é igual a <math>180^\circ</math>, <math>\cos \varphi = -\cos \theta</math>. Em consequência:</i></p> $R^2 = F_2^2 + F_1^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \theta.$ <p>É importante destacar aqui que o ângulo <math>\theta</math> considerado pelos professores de Física em geral é o ângulo entre as duas forças, e não o ângulo entre os dois lados do triângulo em que se utiliza a Lei dos Cossenos. Como esses ângulos, entre as duas forças e entre os dois lados do triângulo, são suplementares, os cossenos são simétricos. Em razão disso, os sinais aparecem trocados no termo em que aparece o cosseno na lei e na fórmula da resultante, usada pelos professores de Física.</p>
---	--	--

**Figura 58 – Exemplos ilustrativos. Atividades 5 e 6. Situação de Aprendizagem 4. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 42 – 44)**

<sup>26</sup> No anexo III é apresentada uma generalização dinâmica do teorema de Pitágoras.

Os exemplos ilustrativos e as atividades tal qual foram apresentados na Figura 58, comprovam que a Lei dos Cossenos possibilita o cálculo do comprimento de um lado de um triângulo qualquer, desde que se conheça o comprimento dos demais lados e a medida do ângulo oposto a esse. Também possibilita calcular todos os ângulos de um triângulo qualquer, desde que se saiba a medida de todos os lados.

A atividade 7 apresentada na Figura 59 complementa a aplicação da Lei dos Cossenos, iniciada na atividade 6 na Figura 58, aplicada a outra área do conhecimento, a Física, que utiliza esses conceitos, onde se têm apenas duas forças que são aplicadas sobre um corpo e elas formam entre si um ângulo.

<p><b>Atividade 7</b></p> <p>Duas forças de 100N são aplicadas a uma pequena esfera. O ângulo formado pelas suas linhas de ação é igual a <math>\theta</math>, conforme mostra a figura. Calcule a intensidade da resultante das duas forças em N para os seguintes valores de <math>\theta</math>:</p> <p>a) <math>0^\circ</math>                      e) <math>90^\circ</math>  b) <math>30^\circ</math>                      f) <math>120^\circ</math>  c) <math>45^\circ</math>                      g) <math>150^\circ</math>  d) <math>60^\circ</math>                      h) <math>180^\circ</math></p>  <p><i>Temos: <math>R^2 = 100^2 + 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot \cos \theta</math></i>  <i>Substituindo os valores de <math>\theta</math>, em cada um dos itens, obtemos:</i></p>	<p>a) <math>R^2 = 20\,000 + 20\,000 \cdot \cos 0^\circ = 40\,000</math>  Logo, <math>R = 200</math></p> <p>b) <math>R^2 = 20\,000 + 20\,000 \cdot \cos 30^\circ = 20\,000 + 10\,000\sqrt{3} \cong 37\,321</math>.  Logo, <math>R \cong 193,2</math></p> <p>c) <math>R^2 = 20\,000 + 20\,000 \cdot \cos 45^\circ = 20\,000 + 10\,000\sqrt{2} \cong 34\,142</math>  Logo, <math>R \cong 184,8</math></p> <p>d) <math>R^2 = 20\,000 + 20\,000 \cdot \cos 60^\circ = 20\,000 + 10\,000 = 30\,000</math>  Logo, <math>R \cong 173,2</math></p> <p>e) <math>R^2 = 20\,000 + 20\,000 \cdot \cos 90^\circ = 20\,000 + 0</math>  Logo, <math>R \cong 141,4</math></p> <p>f) <math>R^2 = 20\,000 + 20\,000 \cdot \cos 120^\circ = 20\,000 + 20\,000 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 10\,000</math>  Logo, <math>R = 100</math></p> <p>g) <math>R^2 = 20\,000 + 20\,000 \cdot \cos 150^\circ = 20\,000 + 20\,000 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cong 2\,679</math>  Logo, <math>R \cong 51,8</math></p> <p>h) <math>R^2 = 20\,000 + 20\,000 \cdot \cos 180^\circ = 20\,000 + 20\,000(-1) = 0</math>  Logo, <math>R = 0</math></p>	<p>É interessante fazer uma figura para cada um dos valores de <math>\theta</math>, representando a resultante pela Regra do Paralelogramo e interpretando os resultados: quando o ângulo <math>\theta</math> mede <math>180^\circ</math>, por exemplo, as forças são diretamente opostas, e a resultante, naturalmente, é igual a 0.</p> <p><b>Considerações sobre a avaliação</b></p> <p>Ao final de nosso percurso, esperamos que os alunos tenham compreendido os dois resultados básicos explorados na presente Situação de Aprendizagem: a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos. Tais resultados referem-se a triângulos quaisquer, mas são válidos, naturalmente, para triângulos retângulos. Tal ampliação de horizontes pode ser destacada pelo professor, uma vez que ela contribui para a consciência de que o conhecimento foi aprimorado, por meio da compreensão dessas novas relações. Muitas possibilidades se abrem para problemas e exercícios de Física, por exemplo, como se sugere nas atividades 6 e 7.</p> <p>De uma forma ou de outra, considera-se fundamental que, ao completar a Situação de Aprendizagem, os alunos estejam familiarizados com as duas relações apresentadas.</p>
--	---	---

**Figura 59 – Atividade 7. Considerações sobre a avaliação. Situação de Aprendizagem 4. Fonte (SÃO PAULO, 2009, p. 44, 45)**

Segundo o Currículo de São Paulo (2010), a conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento constituem recursos fundamentais para a construção do significado dos temas estudados, contribuindo de modo decisivo para a criação de centros de interesse nos alunos.

Ao respeitar a rica história da disciplina e alçá-la a uma área do conhecimento, busca-se apenas criar as condições para uma exploração mais adequada das possibilidades de a Matemática servir às outras áreas, na grande tarefa de

transformação da informação em conhecimento em sentido amplo, em todas as suas formas de manifestação (SÃO PAULO, 2010, p. 28).

Nesta mesma direção os PCN+ (2002) endossam a visão do Currículo de São Paulo (2010), que na sociedade atual, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento.

Nas considerações sobre a avaliação para a presente Situação de Aprendizagem, apresentadas na Figura 59, respondem ao diálogo iniciado nas prescrições do Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, relatam que “muitas possibilidades se abrem para problemas e exercícios de Física”, como foi sugerido nas atividades 6 e 7.

O Caderno do Professor na Figura 59 destaca que é interessante fazer uma figura para cada um dos valores do ângulo teta, para representar a resultante pela regra do paralelogramo e realizar a interpretação dos resultados: quando o ângulo teta mede  $180^\circ$ , por exemplo, as forças são diretamente opostas, e a resultante, naturalmente é igual a zero.

Com a utilização do *software* GeoGebra não há necessidade de representar várias figuras para ver o que acontece com a resultante das forças representadas por meio do paralelogramo, para os vários ângulos da atividade 7.

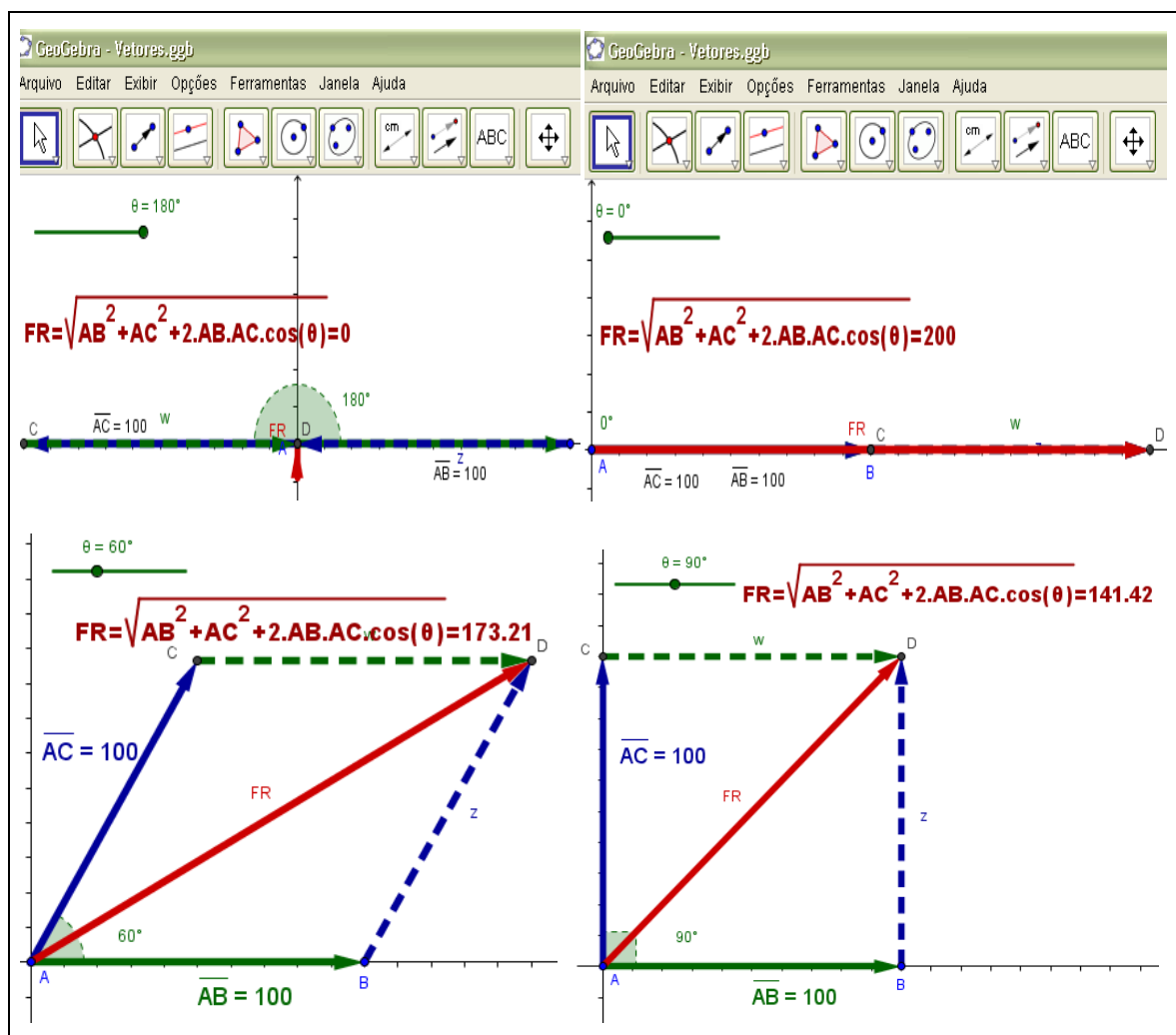
Segundo Gravina (2001), os objetos construídos em ambiente de Geometria Dinâmica podem ser manipulados diretamente na tela do computador, imprimindo-se nos mesmos movimentos dinâmicos às configurações.

O “desenho em movimento” torna-se revelador dos invariantes que são decorrências implícitas da construção feita. De imediato percebe-se parte da potencialidade do ambiente: ao permitir a construção e manipulação de objetos *concreto-abstratos*, ele desencadeia algumas das primeiras ações mentais características do pensar matemático — o estabelecer relações e conjecturar — e o faz de forma contundente, se comparado às possibilidades apresentadas pelo desenho, estático, em papel.

A autora ainda relata que para a superação de dificuldades inerentes à aprendizagem de Geometria, os ambientes dinâmicos se revelam como ferramentas promissoras. Baldini (2004) compartilha com essa interpretação, os recursos tecnológicos, em especial os *softwares* de Geometria Dinâmica, que apresentam aspectos relevantes no processo de ensino aprendizagem da Geometria.

Na presente pesquisa, fica evidente que a interface do *software* GeoGebra é apropriada para a construção dos conceitos geométricos, bem como para estimular o desenvolvimento do raciocínio matemático, uma vez que o mesmo permite assim como no ambiente estático a formulação de conjecturas, a verificação de erros e a validação das hipóteses, com mais praticidade.

Na Figura 60 foi feita a construção do paralelogramo, na tentativa de enriquecer e ilustrar as possibilidades de uso do *software* GeoGebra para o ensino da Matemática, Física e outras áreas afins.



**Figura 60 – Regra do paralelogramo – Lei dos Cossenos. Elaborado pelo autor**

Como foi dito anteriormente, não foi preciso construir vários paralelogramos para representar as variações do ângulo teta indicado na atividade 7. Na observação da Figura 60, para ver o resultado da variação do ângulo teta ( $\theta$ ), basta movimentar o seletor de ângulos,

que o vetor resultante, das duas forças representadas pelos segmentos AB e AC, irá se movimentar no intervalo:  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ .

A seguir é apresentado o protocolo de construção do paralelogramo representado na Figura 61.

Protocolo de Construção			
Arquivo Exibir Ajuda			
N.	Nome	Definição	Comando
1	Ângulo $\theta$		
2	Ponto A		
3	Ponto B		
4	Vetor u	Vetor[A, B]	Vetor[A, B]
5	Ponto C	Imagem de B por uma rotação de ângulo $\theta$	Girar[B, $\theta$ , A]
6	Vetor v	Vetor[A, C]	Vetor[A, C]
7	Ponto D	Translação de B por v	Transladar[B, v]
8	Vetor w	Vetor[C, D]	Vetor[C, D]
9	Vetor z	Vetor[B, D]	Vetor[B, D]
10	Vetor FR	Vetor[A, D]	Vetor[A, D]
11	Ângulo $\beta$	Ângulo entre u, v	Ângulo[u, v]
12	Número distânciaAB	Distância de A a B	Distância[A, B]
13	Número distânciaAB'	Distância de A a C	Distância[A, C]
14	Texto TextoAB'	" $\overline{AB'} = \sqrt{AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\theta)}$ " + distânciaAB'	" $\overline{AB'} = \sqrt{AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\theta)}$ " + distânciaAB'
15	Número distânciaAD	Distância de A a D	Distância[A, D]
16	Texto FR <sub>1</sub>	" $\overline{FR_1} = \sqrt{AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\theta)}$ " + distânciaAD	" $\overline{FR_1} = \sqrt{AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\theta)}$ " + distânciaAD
17	Texto texto1	"FR = $\sqrt{AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\theta)}$ " + distânciaAD	"FR = $\sqrt{AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\theta)}$ " + distânciaAD
18	Texto TextoAB	" $\overline{AB} = \sqrt{AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\theta)}$ " + distânciaAB	" $\overline{AB} = \sqrt{AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\theta)}$ " + distânciaAB

Figura 61 – Protocolo de construção do paralelogramo

#### 5.2.4.1 - Análise final da Situação de Aprendizagem 4

Ao término da análise da presente Situação de Aprendizagem ficou evidente que os autores do Caderno do Professor ao realizar o entrelaçamento entre a Geometria e a Trigonometria, buscaram propiciar aos professores uma visão das relações entre os lados e os ângulos dos triângulos, partindo inicialmente do triângulo retângulo, utilizaram o teorema de Pitágoras e posteriormente realizaram uma generalização do mesmo para quaisquer triângulos.

Nesta Situação de Aprendizagem ficou nítida a forma de abordagem espiralada dos temas, como é proposto pelo Currículo de São Paulo (2010), que pressupõe que os grandes

temas devem ser tratados ao longo de todos os anos, com observação na diferença na escala de tratamentos para cada ano de ensino. O documento encaminha que cabe ao professor a busca de um equilíbrio no tratamento dos conteúdos fundamentais nos diversos bimestres durante o processo de ensino.

A forma como foram desenvolvidas as atividades nesta Situação de Aprendizagem, para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, resgatou os conhecimentos de Geometria, oriundos do Ensino Fundamental. Segundo os PCN+ (2002), nesta fase de ensino busca-se uma primeira reflexão através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. No Ensino Médio, busca-se o aprofundamento dessas ideias no sentido de que possa estabelecer um sistema dedutivo, análise e significado de postulados, teoremas e o valor de uma demonstração.

Também são encontradas nas OCEM (2006) diretrizes que sinalizam para a maneira de desenvolvimento das atividades aplicadas no Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009) na Situação de Aprendizagem 4:

O trabalho de representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundado e sistematizado nesta etapa de escolarização. Alguns conceitos estudados no ensino fundamental devem ser consolidados, como, por exemplo, as ideias de congruência, semelhança e proporcionalidade, o Teorema de Tales e suas aplicações, as relações métricas e trigonométricas nos triângulos (retângulos e quaisquer) e o Teorema de Pitágoras (OCEM, 2006, p. 75, 76).

Assim, o Caderno do Professor apresentou recursos para que os professores possam demonstrar satisfatoriamente, que existe uma proporcionalidade direta entre os lados e os senos dos ângulos opostos de um triângulo qualquer, denominada Lei dos senos, e que a Lei dos Cossenos é uma generalização do teorema de Pitágoras.

No que diz a respeito às inferências realizadas pela presente pesquisa na Situação de Aprendizagem 4, pensada e realizada com o uso do *software* GeoGebra, encontra-se apoio no discurso apresentado no Currículo de São Paulo (2010), que considera que há um farto número de recursos tecnológicos que estão à disposição para o ensino da Matemática de um modo geral, mas particularmente para a Geometria, é possível encontrar ambientes digitais riquíssimos para trabalhar os conceitos geométricos, como por exemplo, os *softwares* para a construção de gráficos, construções em Geometria, etc.

Na pesquisa de Bagé (2008) encontram-se argumentos que também endossam a

proposta de uso dos recursos tecnológicos, a autora, vê com bons olhos a presença das tecnologias nas escolas do Estado de São Paulo, com a instalação da Sala Ambiente de Informática e a incorporação dos recursos tecnológicos na prática do professor, a influência é positiva no processo ensino aprendizagem, mas também um grande desafio.

Desafio este que faz parte do dia a dia do professor, Borba e Penteado (2007) relatam que por mais experiência que o professor tenha na utilização de ambientes computacionais com o auxílio dos diversos *softwares* existentes, é possível que situações não esperadas, às vezes aconteçam.

Para minimizar as situações inesperadas no uso dos ambientes computacionais, Miskulin (1999) argumenta que para efetuar a escolha de um *software* educacional devem ser consideradas as características pedagógicas, para a utilização do mesmo no laboratório de informática, ou em sala de aula, a escolha deve estar vinculada à metodologia que será usada, ao objetivo a ser alcançado no desenvolvimento de conteúdos e conceitos relacionados ao conhecimento matemático.

Para tanto, a presente pesquisa realizou as inferências na presente Situação de Aprendizagem, bem como nas anteriores, seguindo as recomendações de Bardin (1977) sobre a Análise de Conteúdo, sob a luz do Currículo do Estado de São Paulo (2010), com a preocupação de realizar um trabalho que não ficasse deslocado da realidade dos professores e alunos das escolas públicas do Estado de São Paulo.

Por fim, a análise das inferências realizadas para trabalhar (a proporcionalidade lado/seno: Lei dos Senos e a generalização do teorema de Pitágoras: Lei dos Cossenos), com a utilização da ferramenta tecnológica do *software* GeoGebra, na Situação de Aprendizagem 4, foi considerada para a presente pesquisa, satisfatória. As inferências contribuíram para a confirmação da hipótese de pesquisa: o uso da tecnologia computacional, com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, poderá favorecer a proposta de articulação das Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo, de forma simples e significativa.

Para realizar a análise geral das inferências realizadas pela presente pesquisa às Situações de Aprendizagem que compõe o Caderno do Professor de Matemática do Ensino Médio, volume 4, foi necessário retomar o que disse Bardin (1977), as inferências (ou deduções lógicas) podem auxiliar a responder a dois tipos de problemas: “O que é que

conduziu a um determinado enunciado? Quais as consequências que determinado enunciado vai provavelmente provocar?” (BARDIN, 1977, p.39)

Esses dois tipos de problemas ajudaram a iluminar os direcionamentos dados aos enunciados propostos nas atividades analisadas, em todas as Situações de Aprendizagem, pelo Caderno do Professor do Ensino Médio Volume 4, da primeira série, a ponto de corroborar com o encaminhamento para a confirmação da hipótese de pesquisa, contribuíram também para a elucidação da questão de pesquisa.

O primeiro problema que Bardin (1977) levantou contribuiu para verificar que os enunciados das atividades presentes nas Situações de Aprendizagem, foram criados para uma representação das razões trigonométricas em contextos diferenciados, com a realização de um entrelaçamento com a Geometria, como por exemplo, as distâncias interestelares, na tentativa de tornar o estudo dos temas mais significativos e interessantes.

Com segundo problema foi possível analisar que o Caderno do Professor de Matemática (SÃO PAULO, 2009), aponta a possibilidade dos enunciados propiciarem a compreensão de fenômenos naturais e o enfrentamento de situações-problema em contextos variados.

Com a identificação dos dois problemas nas Situações de Aprendizagem, indicados pela teoria de Bardin (1977) ficou claro que o material elaborado para os professores da rede pública do Estado de São Paulo, seguem as orientações contidas no Currículo de Matemática, o qual destaca que para se trabalhar os conteúdos/ temas em cada ano de escolarização é preciso estar atento às ideias fundamentais que compõem cada conteúdo/tema.

A presente pesquisa teve como perspectiva de investigação propor uma articulação das Situações de Aprendizagem do Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo, a luz do Currículo do Estado de São Paulo (2010), com auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra. Procurou-se responder à questão de pesquisa, de modo a atender a indicação do Currículo de São Paulo (2010) no trato da ideias fundamentais (proporcionalidade, equivalência, ordem, aproximação) para desenvolvimento dos conteúdos/ temas, com uma abordagem dinâmica com o uso do *software* GeoGebra, com a preocupação de não fugir do assunto abordado em cada Situação de Aprendizagem, e principalmente mostrar a aplicabilidade do GeoGebra para as atividades apresentadas no Caderno do Professor.

As inferências foram realizadas de forma diferenciada nas atividades propostas em cada Situação de Aprendizagem, sem que as mesmas fossem deslocadas do conteúdo analisado, elas contribuíram com a articulação entre a Geometria e a Trigonometria, proposta pelo Caderno do Professor; com ênfase às relações de proporcionalidade das figuras geométricas planas, do conhecimento geométrico por meio das quatro faces, que se relacionam permanentemente na caracterização do espaço: a percepção, a concepção, a construção e a representação de acordo com a apresentação de Machado (1995) e a luz do Currículo de Matemática do Estado de São Paulo.

No próximo capítulo serão apresentadas as considerações finais sobre este trabalho de pesquisa.

## CAPÍTULO 6

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

---

Esta pesquisa teve como objetivo, analisar as Situações de Aprendizagem de Geometria, do 4º bimestre da primeira série do Ensino Médio, do Caderno do Professor de Matemática publicado pela Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (2009), a luz do Currículo de Matemática. Tem por premissa contribuir com o ensino da Matemática em particular com o conteúdo de Geometria Plana e apresentar uma proposta para articular as situações de aprendizagens encontradas no Caderno do Professor de Matemática, com o uso do *software* GeoGebra.

A hipótese de investigação que protagonizou esta pesquisa foi a de que o uso da tecnologia computacional, com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, poderá favorecer a proposta de articulação das Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo (2009), de forma simples e significativa. Inevitavelmente surgiu a pergunta: De que maneira é possível criar uma abordagem dinâmica, com o *software* GeoGebra para o conteúdo de Geometria Plana do Ensino Médio, com base no Currículo do Estado de São Paulo?

Este trabalho de pesquisa foi elaborado em três etapas, que seguiu as orientações apresentadas na obra de Bardin (1977), sobre a metodologia de Análise de Conteúdo, que consiste em tratar a informação por meio de um plano específico de análise.

A revisão bibliográfica juntamente com a análise dos documentos oficiais subsidiou as investigações realizadas nos materiais analisados por esta pesquisa, sobre o uso dos recursos tecnológicos como uma ferramenta mediadora das relações de aprendizagem em diversos níveis de ensino, a inserção e a disseminação tecnológica computacional na sociedade e na educação, agregaram aportes teóricos para corroborar com esta pesquisa que destaca o uso das tecnologias, dos ambientes de Geometria Dinâmica como uma ferramenta enriquecedora para o ensino da Matemática, particularmente do conteúdo de Geometria.

O Currículo de Matemática aponta que o uso da tecnologia tem provocado uma alteração no cenário cultural da sociedade atual. As tecnologias da informação e comunicação contribuíram para uma mudança na produção, na organização, no acesso e na disseminação do conhecimento. A escola deve preparar o aluno para viver em uma sociedade, em que a

informação é disseminada em grande velocidade. Contudo as escolas públicas da rede Estadual de São Paulo estão equipadas com computadores, mas, ainda não representa uma melhora significativa na qualidade do ensino.

De certa forma pesquisadores afirmam que não se tem provas concretas de que grandes melhorias aconteceram no âmbito educacional, provocadas pela explosão tecnológica mundial, a sociedade de maneira geral vive em função dos recursos tecnológicos, novos equipamentos cada vez mais sofisticados lançados em velocidades surpreendentes, “gerador” de pessoas consumistas das tecnologias, sempre na fila para ser a primeira a possuir uma nova tecnologia.

Há de se levar em consideração que as interfaces das novas ferramentas tecnológicas estão cada vez mais amigáveis. Paraphraseando, Kenski (2003, 2007) e Oliveira (2007), não se têm provas concretas de que a implementação de mudanças ou melhorias tecnológicas revolucionou o ensino, por conseguinte a educação, pelo simples fato de que não são as tecnologias responsáveis pelas mudanças, mas professores e alunos na interação e comunicação no processo de ensino, mediado pelas tecnologias. Não coube a esta pesquisa abrir uma discussão incisiva sobre as ações governamentais dos programas de implementação da informática na escola.

Esta pesquisa se apropriou do Currículo do Estado de São Paulo, realizou um estudo panorâmico desde a idealização até a consolidação do documento (2007 a 2010), bem como a sua relação com as tecnologias da informação e comunicação na Matemática. Foi importante fazer este estudo panorâmico do Currículo, pois, o documento trouxe novas perspectivas à ação educativa do Estado de São Paulo.

Também houve um interesse em observar como é proposto o uso das tecnologias nos demais Cadernos Professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio. Inicialmente foi feita uma análise geral dos cadernos, na tentativa de identificar o uso dos recursos tecnológicos como uma ferramenta mediadora das relações de aprendizagem nos dois níveis de ensino, em particular os *softwares* de Geometria Dinâmica.

É importante destacar que o Currículo é uma dialética com o Caderno do Professor, que representa um diálogo entre professores.

Na realização da análise geral dos Cadernos do Professor de Matemática, observou-se que em todos os cadernos apresentam o seguinte texto: “sempre que possível são apresentados

materiais disponíveis (textos, *softwares*, *sites* e vídeos, entre outros)”, em sintonia com a forma de abordagem do Currículo do Estado de São Paulo, que podem ser utilizados pelo professor para o enriquecimento de suas aulas (SÃO PAULO, 2009, p. 8).

Constatou-se que dos vinte oito Cadernos do Professor publicados, somente seis efetivamente recomendam o uso de alguns *softwares* para o desenvolvimento das Situações de Aprendizagem. São eles: o Caderno do sexto ano volume três do Ensino Fundamental (Geometria - Geoplano); os Cadernos da primeira série, volume 3, segunda série, volume 1, e terceira série, volume 3, do Ensino Médio (funções: exponenciais, logarítmicas, seno e cosseno - *Graphmatica*); os Cadernos da terceira série, volumes 1 e 2 do Ensino Médio (transformação no plano, Geometria Analítica Plana – *Cabri* e Geometria Dinâmica).

O Caderno do Professor da primeira série do Ensino Médio, volume 4, que é o foco desta pesquisa, não apresentou nenhuma indicação quanto ao uso de *softwares*.

Foi possível verificar também nessa análise geral dos Cadernos do Professor que a estratégia básica para mobilizar os conteúdos durante o processo de ensino aprendizagem, gira em torno da exploração das ideias fundamentais (Aproximação, Proporcionalidade, Ordem, Equivalência, etc.).

Os conteúdos foram organizados em oito unidades de extensões aproximadamente iguais, com o objetivo de corresponder a oito semanas de trabalho letivo, que depende do número de aulas do professor.

Na análise do Caderno do Professor da primeira série do Ensino Médio, constatou-se que o conteúdo básico do volume 4, apresenta um entrelaçamento entre a Geometria e a Trigonometria, em cada Situação de Aprendizagem.

As Situações de Aprendizagem, os exemplos ilustrativos e as atividades, propostas ao longo de todo o Caderno, foram elaboradas para orientar o trabalho do professor em sala de aula.

Fica claro para o pesquisador de que a forma de elaboração dos enunciados das atividades, nas Situações de Aprendizagem do Caderno do Professor, fez uso de alguns assuntos como pretexto para a apresentação da riqueza e da fecundidade das ideias fundamentais; consecutivamente proporcionar a consolidação e o aprofundamento dos conceitos estudados no Ensino Fundamental, para tornar o estudo dos temas mais

significativos e interessantes.

Para o pesquisador ficou evidente que as Situações de Aprendizagem apresentadas no Caderno do Professor, foram constituídas para ajudar o professor a construir a identidade de suas aulas, de modo que o professor possa agir com autonomia em relação aos conteúdos que deverão ser ensinados, para favorecer a mobilização dos mesmos, metodologias e saberes próprios da Matemática, conseqüentemente propiciar o desenvolvimento das competências e habilidades que os alunos necessitarão para fazer a leitura crítica do mundo, de modo a questioná-lo para melhor compreendê-lo, inferir questões e compartilhar ideias, sem ignorar a complexidade da sociedade em que está inserido.

O pesquisador considerou relevante a maneira como foram tratados os conteúdos desse material, uma vez que a primeira série do Ensino Médio representa para os alunos um período de mudanças significativas, os conceitos matemáticos estudados nesse nível de ensino é mais sofisticado e abstrato, com demonstrações, análise de postulados e teoremas.

Desta forma, para realizar as inferências às Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática da primeira série do Ensino Médio (2009), foi preciso levar em conta as ideias fundamentais, desenvolvidas no material, e recomendadas no Currículo de Matemática (SÃO PAULO, 2010).

Portanto, procurou-se com o uso do *software* GeoGebra, seguir a mesma linha de pensamento apresentada no Currículo de São Paulo (2010), a fim de contribuir de uma forma enriquecedora com a realização das inferências nas Situações de Aprendizagem, para a consolidação destas ideias. Ao interpretar o Currículo de Matemática, percebeu-se que o *software* está na linha de ferramentas que possibilitam a articulação das quatro faces para o conhecimento Geométrico, que se relacionam permanentemente na caracterização do espaço: a percepção, a concepção, a construção e a representação (MACHADO, 1995).

O GeoGebra é um *software* livre de Geometria Dinâmica e o mesmo permite explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, propiciar a experimentação, testar hipóteses, esboçar conjecturas, criar estratégias para resolver problemas, oferece diferentes representações para um mesmo objeto matemático (numérica, algébrica e geométrica) e com a opção de manipular os objetos que estão na tela do computador.

O uso do GeoGebra na articulação das quatro faces do conhecimento foi satisfatório, pois proporcionou uma visão diferenciada do entrelaçamento da Geometria com a

Trigonometria, possibilitou a visualização de situações que no ambiente estático não seria possível, enriqueceu a representação das imagens mentais. Tudo isso se deu, pois, o *software* GeoGebra apresenta régua e compasso virtuais, com um menu de construção em linguagem clássica da Geometria (reta perpendicular, ponto médio, mediatriz, bissetriz, etc). Portanto, na construção das figuras de estudo das atividades do Caderno do Professor, pôde-se aplicar movimento a seus elementos, sem que as mesmas perdessem as suas propriedades características e foram preservadas as relações geométricas impostas à figura.

Conclui-se que, por esta especificidade e praticidade de manipulação dinâmica, experimentação, verificação, construção, representação, intervenção, interação, etc. do *software* GeoGebra, foi possível articular as Situações de Aprendizagem de uma maneira interessante e satisfatória, a ponto de contribuir para a consolidação das ideias fundamentais.

Portanto, a hipótese da presente pesquisa foi confirmada: o uso da tecnologia computacional, com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, favorece a articulação das Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Professor de Matemática do Estado de São Paulo (2009), de forma simples e significativa.

Como resposta à questão de pesquisa, este trabalho procurou seguir as indicações do Currículo de São Paulo (2010) no trato das ideias fundamentais (proporcionalidade, equivalência, ordem, aproximação) para desenvolvimento dos conteúdos/ temas, com a preocupação de não desviar o foco do assunto abordado em cada Situação de Aprendizagem, e principalmente mostrar a aplicabilidade do GeoGebra para as atividades apresentadas no Caderno do Professor; procurou realizar inferências de maneira diferenciada, sem que as mesmas ficassem deslocadas do conteúdo analisado, para contribuir com a articulação entre a Geometria e a Trigonometria, proposta pelos autores do Caderno do Professor, com ênfase às relações de proporcionalidade das figuras geométricas planas, do conhecimento geométrico por meio das quatro faces, que se relacionam permanentemente na caracterização do espaço: a percepção, a concepção, a construção e a representação de acordo com a apresentação de Machado (1995) e a luz do Currículo de Matemática do Estado de São Paulo.

Para pesquisas futuras na Educação Matemática sugere-se a aplicação das atividades propostas com professores da Educação Básica e com alunos do Ensino Médio.

O pesquisador tem como expectativa de que as reflexões suscitadas por esta pesquisa, sobre o uso dos recursos tecnológicos como uma ferramenta mediadora das relações de

aprendizagem entre professor e aluno permeiem as salas de aulas nos diversos níveis de ensino.

## REFERÊNCIAS

---

---

**ARBACH, Nelson. O ensino de geometria plana: o saber do aluno e o saber escolar.** Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2002.

**ARAÚJO, L. C.; NÓBRIA, J. C. C. Aprendendo Matemática com o GeoGebra.** São Paulo: Editora Exato, 2010.

**BAGÉ, Idalise Bernardo. Proposta para a prática do professor do ensino fundamental I de noções básicas de Geometria com o uso de Tecnologias.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.

**BALDINI, Loreni Aparecida Ferreira. Construção do Conceito de Área E Perímetro: Uma Seqüência Didática com Auxílio de Software de Geometria Dinâmica.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

**BARDIN, L. Análise de conteúdo.** Lisboa: Edições 70, 1977.

Borba, M. C. **A pesquisa qualitativa em educação matemática.** Disponível em: [http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso\\_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf](http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf). (Acesso em: agosto de 2011).

**BORBA, M. C.; Penteadó, M. G. Informática e Educação Matemática.** 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

**BONGIOVANNI, V. Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em geometria.** São Paulo: Editora Proem Ltda, 2006.

**BRASIL, Ministério da Educação. LDB: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional:** lei no 9.394, de 1996, 5ª ed. Brasília. Edições Câmara, 201. Disponível em: [http://bd.camara.gov.br/bd/bitstream/handle/bdcamara/2762/ldb\\_5ed.pdf?sequence=1](http://bd.camara.gov.br/bd/bitstream/handle/bdcamara/2762/ldb_5ed.pdf?sequence=1). (Acesso em: agosto de 2011).

**BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

\_\_\_\_\_. Secretaria da Educação Básica. **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Orientações Curriculares para o Ensino Médio**; volume 2. Brasília; MEC, 2006.

CASTELLS, Manuel. **A sociedade em rede - a era da informação: economia, sociedade e cultura**; v. 1. São Paulo: Paz e Terra, 1999.

CRITELLI, Dulce. **Martin Heidegger e a essência da técnica**. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/52234299/Dulce-Critelli-Heidegger-e-a-essencia-da-tecnica-pdf-artigo>. (Acesso em: agosto de 2011).

ECO, Umberto (1996). **From Internet to Gutenberg** – A lecture presented by Humberto Eco at The Italian Academy for Advanced Studies in America. Tradução: Vani M. Kenski. Disponível em <http://www.clubedoprofessor.com.br/artprof/internetgutenberg.htm>. (Acesso em: agosto de 2011).

D' AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: Da teoria à prática**. Campinas, SP: Papirus, 1996.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo**. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001. Disponível em <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/2545>. (Acesso em: agosto de 2011).

GRAVINA, M.A.; BARRETO, M. **Mídias Digitais I. Material Didático**. Curso de Especialização: **Matemática, Mídias Digitais e Didática para a Educação Básica**. Porto Alegre, UAB/IM/UFRGS, 2009. Disponível em: [www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias\\_digitais\\_I/](http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_I/). (Acesso em: agosto de 2011).

FERREIRA, Ana. Cristina. **Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática: uma experiência de trabalho colaborativo**. (Tese de Doutorado). Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP, 2003. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?down=vtls000297486>. (Acesso em: agosto de 2011)

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. 2. ed. Campinas, SP: Papirus, 2003.

KENSKI, **Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação**. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2007.

LÉVY, Pierre. **Tecnologias da Inteligência**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LAURO, M. M. **Percepção – Construção – Representação – Concepção: Os quatro processos do ensino da Geometria: uma proposta de articulação**. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Faculdade de Educação. São Paulo, SP, 2007.

LORENZATO, Sergio. **Por que não ensinar geometria?** Disponível em: <http://www.geometriadinamica.kit.net/Lorenzato.pdf>. (Acesso em: agosto de 2011).

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua**. São Paulo: Cortez, 1990.

MACHADO, Nilson José. **Epistemologia e Didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente**. São Paulo: Cortez, 1995.

MACHADO, Nilson José. **Cidadania e Educação**. 3. ed. São Paulo: Escrituras, 2001.

MISKULIN, R. G. S. **Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino-aprendizagem da geometria**. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, SP, 1999.

MISKULIN, R. G. S. O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. In: LORENZATO, S (org). **As potencialidades didático-pedagógicas de um laboratório em educação matemática mediado pelas TICs na formação de professores**. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados. P. 153-178, 2010

ODDI, Vanderlei Sanches. **Percepções de Professores do Ensino Médio sobre o Projeto “São Paulo Faz Escola”: Um Estudo em duas Escolas de uma Cidade da Grande São Paulo**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2009.

OLIVEIRA, G. P. **Avaliação em cursos on-line colaborativos: uma abordagem multidimensional**. Tese de doutorado em Educação. USP. São Paulo, 2007.

OLIVEIRA, G. P. **Generalização de padrões, pensamento algébrico e notações: o papel das estratégias didáticas com interfaces computacionais**. In: Educação Matemática Pesquisa, v. 10, p. 295-312, 2008.

OLIVEIRA, G. P. **Novas tecnologias da informação e da comunicação e a construção do conhecimento em cursos universitários: reflexões sobre acesso, conexões e virtualidade**. In: OEI-Revista Iberoamericana de Educación (ISSN: 1681-5653), 2002.

OLIVEIRA, G. P. FERNANDES, R.U. **O uso de tecnologias para ensino de trigonometria: estratégias pedagógicas para a construção significativa da aprendizagem.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.12, n.3, pp.548-577, 2010. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/4631/3701>. (Acesso em: agosto de 2011)

ORTEGA Y GASSET, J. **Meditação da Técnica.** Vicissitudes das Ciências. Cacofonia na Física. Rio de Janeiro, Editora Livro Ibero-Americano, 1963.

ROSA, Kelly Cristina. **Ambientes computacionais no contexto da Geometria: Panorama das teses e dissertações do Programa de Educação Matemática da PUC-SP de 1994 a 2007.** Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2009.

SCHEFFER, N. F. O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. In: LORENZATO, S (org). **As potencialidades didático-pedagógicas de um laboratório em educação matemática mediado pelas TICs na formação de professores.** 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados. P. 93-112, 2010

SÃO PAULO, Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias.** Coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. São Paulo: SEE, 2010.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática (Ensino Fundamental- Ciclo II e Médio).** São Paulo, SEE, 2008.

\_\_\_\_\_. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor – Matemática da 5ª série do Ensino Fundamental.** 3º bimestre de 2009. São Paulo, SEE, 2009.

\_\_\_\_\_. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor – Matemática da 6ª série do Ensino Fundamental.** 2º bimestre de 2009. São Paulo, SEE, 2009.

\_\_\_\_\_. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor – Matemática da 7ª série do Ensino Fundamental.** 4º bimestre de 2009. São Paulo, SEE, 2009.

\_\_\_\_\_. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor – Matemática da 8ª série do Ensino Fundamental.** 3º e 4º bimestres de 2009. São Paulo, SEE, 2009.

\_\_\_\_\_. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor – Matemática do 1º ano do Ensino Médio.** 4º bimestre de 2009. São Paulo, SEE, 2009.

\_\_\_\_\_. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor – Matemática do 2º ano do Ensino Médio**. 4º bimestre de 2009. São Paulo, SEE, 2009.

\_\_\_\_\_. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor – Matemática do 3º ano do Ensino Médio**. 1º bimestre de 2009. São Paulo, SEE, 2009.

Silva, Júnior Teodoro Da. **O uso reconstrutivo do erro na aprendizagem de simetria axial: uma abordagem a partir de estratégias pedagógicas com uso de tecnologias**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2010.



## **ANEXOS**

---

---

## ANEXO I

### Quadro de conteúdos e habilidades de Matemática

5ª série/6º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<b>Números</b> Números naturais <ul style="list-style-type: none"> <li>Múltiplos e divisores</li> <li>Números primos</li> <li>Operações básicas (+, -, ., ÷)</li> <li>Introdução às potências</li> </ul> Frações <ul style="list-style-type: none"> <li>Representação</li> <li>Comparação e ordenação</li> <li>Operações</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender as principais características do sistema decimal: significado da base e do valor posicional</li> <li>Conhecer as características e propriedades dos números naturais: significado dos números primos, de múltiplos e de divisores</li> <li>Saber realizar operações com números naturais de modo significativo (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação)</li> <li>Compreender o significado das frações na representação de medidas não inteiras e da equivalência de frações</li> <li>Saber realizar as operações de adição e subtração de frações de modo significativo</li> </ul>
	<b>Números/Relações</b> Números decimais <ul style="list-style-type: none"> <li>Representação</li> <li>Transformação em fração decimal</li> <li>Operações</li> </ul> Sistemas de medida <ul style="list-style-type: none"> <li>Medidas de comprimento, massa e capacidade</li> <li>Sistema métrico decimal: múltiplos e submúltiplos da unidade</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender o uso da notação decimal para representar quantidades não inteiras, bem como a ideia de valor posicional</li> <li>Saber realizar e compreender o significado das operações de adição e subtração de números decimais</li> <li>Saber transformar frações em números decimais e vice-versa</li> <li>Saber realizar medidas usando padrões e unidades não convencionais; conhecer diversos sistemas de medidas</li> <li>Conhecer as principais características do sistema métrico decimal: unidades de medida (comprimento, massa, capacidade) e transformações de unidades</li> </ul>
5ª série/6º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<b>Geometria/Relações</b> Formas geométricas <ul style="list-style-type: none"> <li>Formas planas</li> <li>Formas espaciais</li> </ul> Perímetro e área <ul style="list-style-type: none"> <li>Unidades de medida</li> <li>Perímetro de uma figura plana</li> <li>Cálculo de área por composição e decomposição</li> <li>Problemas envolvendo área e perímetro de figuras planas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Saber identificar e classificar formas planas e espaciais em contextos concretos e por meio de suas representações em desenhos e em malhas</li> <li>Saber planificar figuras espaciais e identificar figuras espaciais a partir de suas planificações</li> <li>Compreender a noção de área e perímetro de uma figura, sabendo calculá-los por meio de recursos de contagem e de decomposição de figuras</li> <li>Compreender a ideia de simetria, sabendo reconhecê-la em construções geométricas e artísticas, bem como utilizá-la em construções geométricas elementares</li> </ul>
	<b>Números/Relações</b> Estatística <ul style="list-style-type: none"> <li>Leitura e construção de gráficos e tabelas</li> <li>Média aritmética</li> <li>Problemas de contagem</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender informações transmitidas em tabelas e gráficos</li> <li>Saber construir gráficos elementares (barras, linhas, pontos) utilizando escala adequada</li> <li>Saber calcular, interpretar e utilizar informações relacionadas às medidas de tendência central (média, mediana, moda)</li> <li>Saber utilizar diagramas de árvore para resolver problemas simples de contagem</li> <li>Compreender a ideia do princípio multiplicativo de contagem</li> </ul>
4º Bimestre		

6ª série/7º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<p><b>Números</b></p> <p>Sistemas de numeração</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Sistemas de numeração na Antiguidade</li> <li>O sistema posicional decimal</li> </ul> <p>Números negativos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Representação</li> <li>Operações</li> </ul> <p>Números racionais</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Representação fracionária e decimal</li> <li>Operações com decimais e frações (complementos)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender o funcionamento de sistemas decimais e não decimais de numeração e realizar cálculos simples com potências</li> <li>Compreender a relação entre uma fração e a representação decimal de um número, sabendo realizar de modo significativo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com decimais</li> <li>Saber realizar operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações, compreendendo o significado das operações realizadas</li> <li>Compreender o significado dos números negativos em situações concretas, bem como das operações com negativos</li> <li>Saber realizar de modo significativo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números negativos</li> </ul>
2º Bimestre	<p><b>Geometria</b></p> <p>Geometria</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Ângulos</li> <li>Polígonos</li> <li>Circunferência</li> <li>Simetrias</li> <li>Construções geométricas</li> <li>Poliedros</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender a ideia de medida de um ângulo (em grau), sabendo operar com medidas de ângulos e usar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos</li> <li>Compreender e identificar simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia</li> <li>Saber calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estender tal cálculo para polígonos de <math>n</math> lados</li> <li>Saber aplicar os conhecimentos sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo e de um polígono em situações práticas</li> <li>Saber identificar elementos de poliedros e classificar os poliedros segundo diversos pontos de vista</li> <li>Saber planejar e representar (em vistas) figuras espaciais</li> </ul>
6ª série/7º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p><b>Relações</b></p> <p>Proporcionalidade</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais</li> <li>Conceito de razão</li> <li>Porcentagem</li> <li>Razões constantes na Geometria: <math>\pi</math></li> <li>Construção de gráficos de setores</li> <li>Problemas envolvendo probabilidade</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Saber reconhecer situações que envolvem proporcionalidade em diferentes contextos, compreendendo a ideia de grandezas direta e inversamente proporcionais</li> <li>Saber resolver problemas variados, envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais</li> <li>Reconhecer e saber utilizar o conceito de razão em diversos contextos (proporcionalidade, escala, velocidade, porcentagem etc.), bem como na construção de gráficos de setores</li> <li>Conhecer o significado do número <math>\pi</math> como uma razão constante da Geometria, sabendo utilizá-lo para realizar cálculos simples envolvendo o comprimento da circunferência ou de suas partes</li> <li>Saber resolver problemas simples envolvendo a ideia de probabilidade (porcentagem que representa possibilidades de ocorrência)</li> </ul>
4º Bimestre	<p><b>Números</b></p> <p>Álgebra</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Uso de letras para representar um valor desconhecido</li> <li>Conceito de equação</li> <li>Resolução de equações</li> <li>Equações e problemas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender o uso de letras para representar valores desconhecidos, em particular, no uso de fórmulas</li> <li>Saber fazer a transposição entre a linguagem corrente e a linguagem algébrica</li> <li>Compreender o conceito de equação a partir da ideia de equivalência, sabendo caracterizar cada equação como uma pergunta</li> <li>Saber traduzir problemas expressos na linguagem corrente em equações</li> <li>Conhecer alguns procedimentos para a resolução de uma equação: equivalência e operação inversa</li> </ul>

7ª série/8º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<b>Números</b> Números racionais <ul style="list-style-type: none"> <li>Transformação de decimais finitos em fração</li> <li>Dízimas periódicas e fração geratriz</li> </ul> Potenciação <ul style="list-style-type: none"> <li>Propriedades para expoentes inteiros</li> <li>Problemas de contagem</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender a ideia de número racional em sua relação com as frações e as razões</li> <li>Conhecer as condições que fazem com que uma razão entre inteiros possa se expressar por meio de dízimas periódicas; saber calcular a geratriz de uma dízima</li> <li>Compreender a utilidade do uso da linguagem das potências para representar números muito grandes e muito pequenos</li> <li>Conhecer as propriedades das potências e saber realizar de modo significativo as operações com potências (expoentes inteiros)</li> </ul>
	<b>Números/Relações</b> Expressões algébricas <ul style="list-style-type: none"> <li>Equivalências e transformações</li> <li>Produtos notáveis</li> <li>Fatoração algébrica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Realizar operações simples com monômios e polinômios</li> <li>Relacionar as linguagens algébrica e geométrica, sabendo traduzir uma delas na outra, particularmente no caso dos produtos notáveis</li> <li>Saber atribuir significado à fatoração algébrica e como utilizá-la na resolução de equações e em outros contextos</li> <li>Compreender o significado de expressões envolvendo números naturais por meio de sua representação simbólica e de seu significado geométrico (<math>2n</math> é um número par, <math>2n + 1</math> é um número ímpar, a soma dos <math>n</math> primeiros números naturais é <math>\frac{n(n+1)}{2}</math> etc.)</li> </ul>
7ª série/8º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<b>Números/Relações</b> Equações <ul style="list-style-type: none"> <li>Resolução de equações de 1º grau</li> <li>Sistemas de equações e resolução de problemas</li> <li>Inequações de 1º grau</li> </ul> Gráficos <ul style="list-style-type: none"> <li>Coordenadas: localização de pontos no plano cartesiano</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender situações-problema que envolvem proporcionalidade, sabendo representá-las por meio de equações ou inequações</li> <li>Saber expressar de modo significativo a solução de equações e inequações de 1º grau</li> <li>Saber explorar problemas simples de matemática discreta, buscando soluções inteiras de equações lineares com duas incógnitas</li> <li>Saber resolver sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas pelos métodos da adição e da substituição, sabendo escolher de forma criteriosa o caminho mais adequado em cada situação</li> <li>Compreender e usar o plano cartesiano para a representação de pares ordenados, bem como para a representação das soluções de um sistema de equações lineares</li> </ul>
	<b>Geometria</b> Geometria <ul style="list-style-type: none"> <li>Teorema de Tales</li> <li>Teorema de Pitágoras</li> <li>Área de polígonos</li> <li>Volume do prisma</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reconhecer e aplicar o teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, na solução de problemas em diferentes contextos</li> <li>Compreender o significado do teorema de Pitágoras, utilizando-o na solução de problemas em diferentes contextos</li> <li>Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares</li> <li>Saber identificar prismas em diferentes contextos, bem como saber construí-los e calcular seus volumes</li> </ul>
4º Bimestre		

8ª série/9º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<b>Números</b> Números reais <ul style="list-style-type: none"> <li>• Conjuntos numéricos</li> <li>• Números irracionais</li> <li>• Potenciação e radiciação em R</li> <li>• Notação científica</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreender a necessidade das sucessivas ampliações dos conjuntos numéricos, culminando com os números irracionais</li> <li>• Saber representar os números reais na reta numerada</li> <li>• Incorporar a ideia básica de que os números irracionais somente podem ser utilizados em contextos práticos por meio de suas aproximações racionais, sabendo calcular a aproximação racional de um número irracional</li> <li>• Saber realizar de modo significativo as operações de radiciação e de potenciação com números reais</li> <li>• Compreender o significado e saber utilizar a notação científica na representação de números muito grandes ou muito pequenos</li> </ul>
2º Bimestre	<b>Números/Relações</b> Álgebra <ul style="list-style-type: none"> <li>• Equações de 2º grau: resolução e problemas</li> </ul> Funções <ul style="list-style-type: none"> <li>• Noções básicas sobre função</li> <li>• A ideia de variação</li> <li>• Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1ª e de 2ª graus</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreender a resolução de equações de 2º grau e saber utilizá-las em contextos práticos</li> <li>• Compreender a noção de função como relação de interdependência entre grandezas</li> <li>• Saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre duas grandezas por meio de funções de 1º grau</li> <li>• Saber expressar e utilizar em contextos práticos as relações de proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra por meio de uma função de 2º grau</li> <li>• Saber construir gráficos de funções de 1ª e de 2ª graus por meio de tabelas e da comparação com os gráficos das funções <math>y = x</math> e <math>y = x^2</math></li> </ul>
8ª série/9º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<b>Geometria/Relações</b> Proporcionalidade na Geometria <ul style="list-style-type: none"> <li>• O conceito de semelhança</li> <li>• Semelhança de triângulos</li> <li>• Razões trigonométricas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes</li> <li>• Saber identificar triângulos semelhantes e resolver situações-problema envolvendo semelhança de triângulos</li> <li>• Compreender e saber aplicar as relações métricas dos triângulos retângulos, particularmente o teorema de Pitágoras, na resolução de problemas em diferentes contextos</li> <li>• Compreender o significado das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e saber utilizá-las para resolver problemas em diferentes contextos</li> </ul>
4º Bimestre	<b>Geometria/Números</b> Corpos redondos <ul style="list-style-type: none"> <li>• O número <math>\pi</math>; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo</li> <li>• Volume e área do cilindro</li> </ul> Probabilidade <ul style="list-style-type: none"> <li>• Problemas de contagem e introdução à probabilidade</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conhecer a circunferência, seus principais elementos, suas características e suas partes</li> <li>• Compreender o significado do <math>\pi</math> como uma razão e sua utilização no cálculo do perímetro e da área da circunferência</li> <li>• Saber calcular de modo compreensivo a área e o volume de um cilindro</li> <li>• Saber resolver problemas envolvendo processos de contagem – princípio multiplicativo</li> <li>• Saber resolver problemas que envolvam ideias simples sobre probabilidade</li> </ul>

1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p><b>Relações</b></p> <p>Funções exponencial e logarítmica</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Crescimento exponencial</li> <li>• Função exponencial: equações e inequações</li> <li>• Logaritmos: definição e propriedades</li> <li>• Função logarítmica: equações e inequações</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decréscimo</li> <li>• Compreender o significado dos logaritmos como expoentes convenientes para a representação de números muito grandes ou muito pequenos, em diferentes contextos</li> <li>• Conhecer as principais propriedades dos logaritmos, bem como a representação da função logarítmica, como inversa da função exponencial</li> <li>• Saber resolver equações e inequações simples, usando propriedades de potências e logaritmos</li> </ul>
4º Bimestre	<p><b>Geometria/Relações</b></p> <p>Geometria-Trigonometria</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Razões trigonométricas nos triângulos retângulos</li> <li>• Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies</li> <li>• Resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Saber usar de modo sistemático relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos</li> <li>• Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos</li> <li>• Saber construir polígonos regulares e reconhecer suas propriedades fundamentais</li> <li>• Saber aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies</li> <li>• Saber inscrever e circunscrever polígonos regulares em circunferências dadas</li> </ul>
1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<p><b>Números</b></p> <p>Números e seqüências</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Conjuntos numéricos</li> <li>• Regularidades numéricas: seqüências</li> <li>• Progressões aritméticas e progressões geométricas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Saber reconhecer padrões e regularidades em seqüências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente, quando possível</li> <li>• Conhecer as características principais das progressões aritméticas – expressão do termo geral, soma dos <math>n</math> primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos</li> <li>• Conhecer as características principais das progressões geométricas – expressão do termo geral, soma dos <math>n</math> primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos</li> <li>• Compreender o significado da soma dos termos de uma PG infinita (razão de valor absoluto menor do que 1) e saber calcular tal soma em alguns contextos, físicos ou geométricos</li> </ul>
2º Bimestre	<p><b>Relações</b></p> <p>Funções</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Relação entre duas grandezas</li> <li>• Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado</li> <li>• Função de 1º grau</li> <li>• Função de 2º grau</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Saber reconhecer relações de proporcionalidade direta, inversa, direta com o quadrado, entre outras, representando-as por meio de funções</li> <li>• Compreender a construção do gráfico de funções de 1º grau, sabendo caracterizar o crescimento, o decréscimo e a taxa de variação</li> <li>• Compreender a construção do gráfico de funções de 2º grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado de outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento e decréscimo, os sinais da função e os valores extremos (pontos de máximo ou de mínimo)</li> <li>• Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1º e de 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos</li> </ul>

2ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<p><b>Relações</b></p> <p>Trigonometria</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Fenômenos periódicos</li> <li>Funções trigonométricas</li> <li>Equações e inequações</li> <li>Adição de arcos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reconhecer a periodicidade presente em alguns fenômenos naturais, associando-a às funções trigonométricas básicas</li> <li>Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o seno, o cosseno e a tangente), sabendo construir seus gráficos e aplicá-las em diversos contextos</li> <li>Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como <math>f(x) = a \sin(bx) + c</math> a partir do gráfico de <math>y = \sin x</math>, compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes <math>a</math>, <math>b</math> e <math>c</math></li> <li>Saber resolver equações e inequações trigonométricas simples, compreendendo o significado das soluções obtidas, em diferentes contextos</li> </ul>
2º Bimestre	<p><b>Números/Relações</b></p> <p>Matrizes, determinantes e sistemas lineares</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Matrizes: significado como tabelas, características e operações</li> <li>A noção de determinante de uma matriz quadrada</li> <li>Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas na representação de tabelas e de transformações geométricas no plano</li> <li>Saber expressar, por meio de matrizes, situações relativas a fenômenos físicos ou geométricos (imagens digitais, pixels etc.)</li> <li>Saber resolver e discutir sistemas de equações lineares pelo método de escalonamento de matrizes</li> <li>Reconhecer situações-problema que envolvam sistemas de equações lineares (até a 4ª ordem), sabendo equacioná-los e resolvê-los</li> </ul>

2ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p><b>Números</b></p> <p>Análise combinatória e probabilidade</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Princípios multiplicativo e aditivo</li> <li>Probabilidade simples</li> <li>Arranjos, combinações e permutações</li> <li>Probabilidade da reunião e/ou da intersecção de eventos</li> <li>Probabilidade condicional</li> <li>Distribuição binomial de probabilidades: o triângulo de Pascal e o binômio de Newton</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender os raciocínios combinatórios aditivo e multiplicativo na resolução de situações-problema de contagem indireta do número de possibilidades de ocorrência de um evento</li> <li>Saber calcular probabilidades de eventos em diferentes situações-problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas específicas</li> <li>Saber resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidades de eventos simples repetidos, como os que conduzem ao binômio de Newton</li> <li>Conhecer e saber utilizar as propriedades simples do binômio de Newton e do triângulo de Pascal</li> </ul>
4º Bimestre	<p><b>Geometria</b></p> <p>Geometria métrica espacial</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Elementos de geometria de posição</li> <li>Poliedros, prismas e pirâmides</li> <li>Cilindros, cones e esferas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Compreender os fatos fundamentais relativos ao modo geométrico de organização do conhecimento (conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas)</li> <li>Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-as em diferentes contextos</li> <li>Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como a pirâmide e o cone, utilizando-as em diferentes contextos</li> <li>Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) da esfera e de suas partes, utilizando-as em diferentes contextos</li> <li>Compreender as propriedades da esfera e de suas partes, relacionando-as com os significados dos fusos, das latitudes e das longitudes terrestres</li> </ul>

3ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
1º Bimestre	<p><b>Geometria/Relações</b></p> <p>Geometria analítica</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos</li> <li>• Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares</li> <li>• Ponto e reta: distância</li> <li>• Circunferência: equação</li> <li>• Reta e circunferência: posições relativas</li> <li>• Cônicas: noções, equações, aplicações</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações</li> <li>• Saber reconhecer a equação da reta, o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas</li> <li>• Compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares</li> <li>• Saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares</li> <li>• Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas</li> </ul>
2º Bimestre	<p><b>Números</b></p> <p>Equações algébricas e números complexos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Equações polinomiais</li> <li>• Números complexos: operações e representação geométrica</li> <li>• Teorema sobre as raízes de uma equação polinomial</li> <li>• Relações de Girard</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreender a história das equações, com o deslocamento das atenções das fórmulas para as análises qualitativas</li> <li>• Conhecer as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica</li> <li>• Saber reduzir a ordem de uma equação a partir do conhecimento de uma raiz</li> <li>• Saber expressar o significado dos números complexos por meio do plano de Argand-Gauss</li> <li>• Compreender o significado geométrico das operações com números complexos, associando-as a transformações no plano</li> </ul>
3ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	Habilidades
3º Bimestre	<p><b>Relações</b></p> <p>Estudo das funções</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Qualidades das funções</li> <li>• Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais</li> <li>• Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação</li> <li>• Composição: translações e reflexões</li> <li>• Inversão</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Saber usar de modo sistemático as funções para caracterizar relações de interdependência, reconhecendo as funções de 1ª e de 2ª graus, seno, cosseno, tangente, exponencial e logarítmica, com suas propriedades características</li> <li>• Saber construir gráficos de funções por meio de transformações em funções mais simples (translações horizontais, verticais, simetrias, inversões)</li> <li>• Compreender o significado da taxa de variação unitária (variação de <math>f(x)</math> por unidade a mais de <math>x</math>), utilizando-a para caracterizar o crescimento, o decréscimo e a concavidade de gráficos</li> <li>• Conhecer o significado, em diferentes contextos, do crescimento e do decréscimo exponencial, incluindo-se os que se expressam por meio de funções de base <math>e</math></li> </ul>
4º Bimestre	<p><b>Números/Relações</b></p> <p>Estatística</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos</li> <li>• Medidas de tendência central: média, mediana e moda</li> <li>• Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão</li> <li>• Elementos de amostragem</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Saber construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências a partir de dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas</li> <li>• Saber calcular e interpretar medidas de tendência central de uma distribuição de dados: média, mediana e moda</li> <li>• Saber calcular e interpretar medidas de dispersão de uma distribuição de dados: desvio padrão</li> <li>• Saber analisar e interpretar índices estatísticos de diferentes tipos</li> <li>• Reconhecer as características de conjuntos de dados distribuídos normalmente; utilizar a curva normal em estimativas pontuais e intervalares</li> </ul>

## ANEXO II

## ORIENTAÇÕES PARA RECUPERAÇÃO

Caso as razões trigonométricas não tenham sido assimiladas na Situação de Aprendizagem 1, pode-se:

- ▶ explorar as relações métricas no triângulo retângulo de catetos  $a$  e  $b$  e hipotenusa  $c$ , antes de aplicar a contextualização das razões trigonométricas;
- ▶ concentrar-se nas três razões fundamentais (seno, cosseno e tangente), deixando as demais para as Situações de Aprendizagem seguintes.  
Na Situação de Aprendizagem 2, se a passagem fundamental dos ângulos agudos aos ângulos da primeira volta (de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ ) não tiver sido compreendida, o professor pode optar por:
- ▶ concentrar-se na passagem do primeiro quadrante ( $0 < \alpha < 90^\circ$ ) para o segundo quadrante ( $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ), procurando identificar os segmentos e os valores correspondentes de todas as razões trigonométricas para os ângulos obtusos antes do estudo dos outros quadrantes;
- ▶ explorar inicialmente as extensões do significado de uma das razões trigonométricas apenas, de preferência o seno de  $\alpha$ , em todos os quadrantes, explorando intensamente tal extensão, antes de passar às das outras razões trigonométricas.

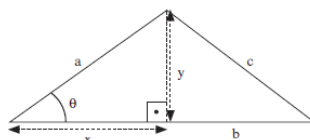
A Situação de Aprendizagem 3 envolve cálculos que podem ser difíceis para alguns alunos. Assim, você pode chamar a atenção para problemas de inscrição e circunscrição. É possível, por exemplo:

- ▶ trabalhar com polígonos mais simples, como o quadrado, explorando as relações entre os elementos já referidos, antes de generalizações com polígonos variados;
- ▶ explorar elementos estéticos associados à inscrição ou à circunscrição, demorando-se mais nas relações qualitativas entre elementos já estudados do que na realização efetiva de cálculos.

Para que os alunos compreendam as relações apresentadas na Situação de Aprendizagem 4, pode-se:

- ▶ usar o triângulo retângulo, em que a hipotenusa  $c$  é o maior lado e se opõe ao maior ângulo, observando também que, no que se refere aos catetos  $a$  e  $b$ , e aos ângulos agudos correspondentes  $\alpha$  e  $\beta$ , o maior cateto corresponde ao maior ângulo, e vice-versa. A partir daí, notar proporcionalidade entre o cateto e o seno do ângulo agudo correspondente, observando diretamente: se  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ , então  $c = \frac{a}{\sin \alpha}$ . Analogamente,  $c = \frac{b}{\sin \beta}$ , e concluímos que a razão entre os catetos e os senos correspondentes é constante;
- ▶ explorar um triângulo qualquer, observando que o maior lado sempre se opõe ao maior ângulo;
- ▶ destacar que mesmo que duas grandezas variem de modo inter-relacionado, não podemos concluir que elas são diretamente proporcionais. Para tanto, seria necessário que sempre que uma delas tivesse seu valor dobrado, o valor correspondente da outra também dobrasse (a razão entre os valores fosse constante), o que não ocorre entre lados e ângulos;
- ▶ notar que existe uma proporcionalidade direta entre os lados e os senos dos ângulos respectivamente opostos a esses lados. Se uma das grandezas dobra, o mesmo ocorre com a outra. Deve-se exemplificar a relação, antes de justificá-la.

Uma alternativa de abordagem para a Lei dos Cossenos poderia ser utilizar um triângulo qualquer, como o indicado:



- ▶ dividir o triângulo em dois por meio da altura relativa ao lado  $b$  (figura);
- ▶ usar o teorema de Pitágoras duas vezes, obtendo:  $a^2 = x^2 + y^2$  e  $c^2 = y^2 + (b - x)^2$ ;
- ▶ substituir na segunda relação o valor de  $y^2$  obtido na primeira, obtendo:  $c^2 = a^2 - x^2 + b^2 + x^2 - 2bx = a^2 + b^2 - 2bx$ .
- ▶ notar que  $x = a \cos \theta$ , concluir que  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$  (Lei dos Cossenos).

Vale destacar, no entanto, que tal procedimento simplificado omite as relações geométricas que foram exploradas no texto e que poderão ser apresentadas em exercícios.

## RECURSOS PARA AMPLIAR A PERSPECTIVA DO PROFESSOR E DO ALUNO PARA A COMPREENSÃO DO TEMA

## Sites

CEPA. Disponível em: <<http://www.cepa.if.usp.br>>. Acesso em: 15 jul. 2009.

No *site*, há referências sobre a história da Trigonometria, que podem incentivar os alunos a realizarem investigações sobre o tema.

WIKIPEDIA. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Parsec>>. Acesso em: 15 jul. 2009.

Neste *site*, encontram-se informações muito interessantes, que complementam o que foi apresentado.

## Artigos

SILVEIRA, Fernando Lang da. Inclinações das ruas e das estradas. *Revista Física na Escola*. Porto Alegre, UFRGS, v. 8, n. 2, out. 2007. Disponível em: <[http://www.if.ufrgs.br/~lang/Ruas\\_estradas.pdf](http://www.if.ufrgs.br/~lang/Ruas_estradas.pdf)>. Acesso em: 15 jul. 2009.

O artigo aborda de modo interessante a questão das rampas.

*Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Reiteramos aqui que, de modo geral, a *Revista do Professor de Matemática* pode ser um importante material auxiliar para o enriquecimento das aulas de quase todos os temas tratados no ensino básico. No caso da Situação de Aprendizagem 1, destacamos os seguintes números:

Número 11 (2º semestre de 1987): há um artigo sobre o cálculo aproximado do valor de  $\pi$ , usando inscrição de polígonos e a Lei dos Cossenos.

Número 19 (2º semestre de 1991): há um artigo sobre a soma dos ângulos, internos e externos, de um polígono.

Particularmente no que tange aos conceitos trabalhados na Situação de Aprendizagem 2, destacamos os seguintes números:

Número 9 (2º semestre de 1986): há dois artigos muito criativos que sugerem materiais didáticos para o ensino de Trigonometria.

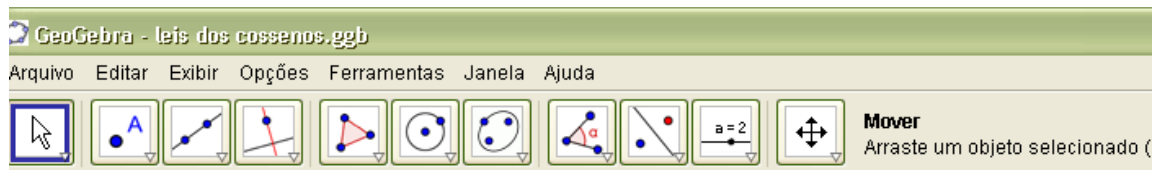
Número 52 (3º quadrimestre de 2003): há um problema de otimização que se resolve com recursos da Trigonometria.

Para abordagem dos temas da Situação de Aprendizagem 3, sugerimos:

Número 10 (1º semestre de 1987): há um artigo interessante sobre a Trigonometria numa oficina mecânica.

Número 15 (2º semestre de 1989): há uma observação interessante sobre a construção de polígonos regulares.

## ANEXO III



## Demonstração da lei dos cossenos

- Clique nos quadrados, na seqüência sugerida, para visualizar a demonstração.
- O triângulo ABC pode ser movimentado por qualquer um de seus vértices.
- Para visualizar a segunda parte da demonstração torne o triângulo ABC obtusângulo.

## I) Sendo ABC triângulo acutângulo

1-  No  $\Delta ADC$  :

$$b^2 = h^2 + m^2$$

$$h^2 = b^2 - m^2 \quad (I)$$

2-  No  $\Delta BDC$  :

$$a^2 = h^2 + (c - m)^2$$

$$a^2 = h^2 + c^2 - 2cm + m^2 \quad (II)$$

3-  Substituindo (I) em (II) :

$$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \quad (III)$$

4-  Ainda no  $\Delta ADC$ :

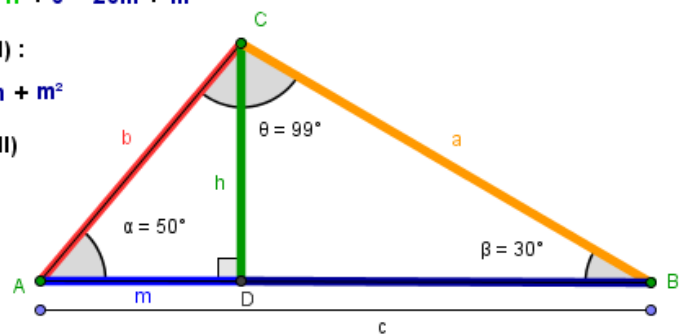
$$\cos \alpha = \frac{m}{b}$$

$$m = \cos \alpha \cdot b \quad (IV)$$

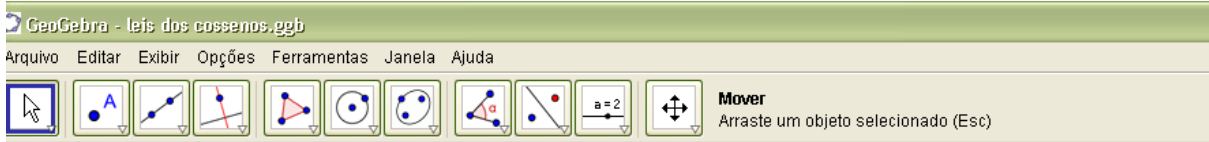
5-  Substituindo (IV) em (III):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c(\cos \alpha \cdot b)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$



Demonstração da lei dos cossenos, triângulo acutângulo. Fonte:  
<http://www.es.iff.edu.br/softmat/projetotic/aple/Blo5/28eidoscossenos1.html>.  
 (Acesso em: agosto de 2011)



**Demonstração da lei dos cossenos**

- Clique nos quadrados, na seqüência sugerida, para visualizar a demonstração.
- O triângulo ABC pode ser movimentado por qualquer um de seus vértices.
- Para visualizar a segunda parte da demonstração torne o triângulo ABC obtusângulo.

**I) Sendo ABC triângulo acutângulo**

1-  No Δ ADC :

$$b^2 = h^2 + m^2$$

$$h^2 = b^2 - m^2 \quad (I)$$

3-  Substituindo (I) em (II) :

$$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \quad (III)$$

4-  Ainda no Δ ADC:

$$\cos \alpha = \frac{m}{b}$$

$$m = \cos \alpha \cdot b \quad (IV)$$

5-  Substituindo (IV) em (III):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c(\cos \alpha \cdot b)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

**II) Sendo ABC triângulo obtusângulo ( $\alpha > 90^\circ$ )**

1- No Δ ADC :

$$b^2 = h^2 + m^2$$

$$h^2 = b^2 - m^2 \quad (I)$$

2- No Δ BDC :

$$a^2 = h^2 + (c + m)^2$$

$$a^2 = h^2 + c^2 + 2cm + m^2 \quad (II)$$

3- Substituindo (I) em (II):

$$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2cm + m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm \quad (III)$$

4- Ainda no Δ ADC:

$$\cos (180^\circ - \alpha) = \frac{m}{b}$$

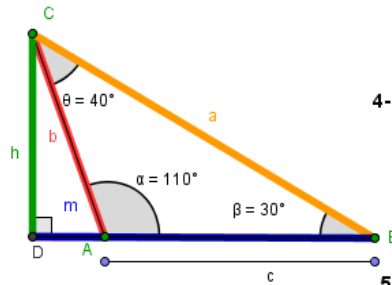
$$-\cos \alpha = \frac{m}{b}$$

$$m = -\cos \alpha \cdot b \quad (IV)$$

5- Substituindo (IV) e (III):

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c(-\cos \alpha \cdot b)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$



**Demonstração da lei dos cossenos, triângulo obtusângulo. Fonte:**  
<http://www.es.iff.edu.br/softmat/projetotic/aple/Blo5/28eidoscossenos1.html>  
 (Acesso em: agosto de 2011)