ARMANDO TRALDI JÚNIOR

Sistema de Inequações do 1º Grau:

Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representações.

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

São Paulo
2002

ARMANDO TRALDI JÚNIOR

Sistema de Inequações do 1º Grau:

Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representações.

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à banca examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.

PUC – SP
São Paulo
2002

Banca Examinadora

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Saddo Almouloud, pela confiança que depositou em mim, pelo incentivo e pelas sugestões, sempre pertinentes.

À Profª. Drª Célia Carolino Pires e ao Prof.º Dr. Marcelo Câmara por aceitarem fazer parte da banca examinadora e por suas valiosas sugestões.

À coordenação do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP- Profª Dr.ª Sonia Barbosa Camargo Igliori e aos professores doutores do programa pela atenção, apoio e principalmente pela possibilidade de conhecer um pouco mais sobre Matemática e Educação Matemática.

À professora Ana Lúcia Manrique por ter sido a iniciadora deste projeto e por ter contribuído em todos os momentos com leituras, comentários e sugestões pertinentes.

Ao professor Rogério Marques Ribeiro por ter observado o desenvolvimento da seqüência didática e pelo seu interesse e incentivo durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao secretário do programa Sr. Francisco e aos funcionários da biblioteca.

Aos meus professores da graduação que contribuíram com seus conhecimentos matemáticos, em especial a: Maria Célia Leme, Maria Thereza, Maria Cristina, Edda Cury, Célia Carolino, Ruy Petropoli, Cileda Coutinho e Maria Inês.

Aos meus colegas do mestrado pelo convívio e amizade, em especial, Marcia Maioli, Sonia Regina Facco, Marli Campana, Alessandro Jacques Ribeiro e Cibele de Almeida Souza.

A minha família, em especial a minha mãe Ilka D' Aquino Traldi, minha irmã Regina Célia Traldi de Almeida Albuquerque, minha tia Sonia Maria D' Aquino Gomes e meu cunhado e sobrinhos, pelo amor, apoio, incentivo e compreensão durante todo o tempo em que estive envolvido neste trabalho.

À memória do meu pai Armando Traldi e de minha avó Ventura D' Aquino, que preservo com amor e carinho.

À CAPES...

...**MUITO OBRIGADO.**

RESUMO

Em vista do destaque que o termo resolução de problema tem tido na Educação Matemática e de algumas dificuldades dos alunos em resolvê-los, iniciamos essa pesquisa investigando se os alunos que estão terminando o Ensino Médio resolvem alguns problemas de programação linear que podem ser solucionados com conceitos e procedimentos já estudados, entre eles o sistema de inequações do 1º grau. Tendo como hipótese que alguns alunos teriam dificuldades em resolver esses problemas, fizemos um teste diagnóstico para confirmar a nossa hipótese. Depois de confirmada a hipótese e tendo como questão de pesquisa observar se, como proposta por Duval (1993), as atividades que consideram o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros de representação de um determinado objeto contribuem no processo ensino-aprendizagem desse objeto, elaboramos uma seqüência didática. Após o desenvolvimento dessa seqüência-didática, em uma outra turma da 3ª série, aplicamos o pós-teste e fizemos uma análise comparativa entre o teste diagnóstico da primeira turma e o pós-teste aplicado na segunda turma. Essa análise nos evidenciou que, enquanto os alunos da primeira turma não obtiveram sucesso na resolução dos problemas de programação linear e somente resolveram corretamente algumas das atividades sobre inequações do 1º grau, os alunos da segunda turma abordaram os problemas e a maioria deles obtiveram sucesso na resolução. Sendo assim pudemos inferir que as atividades de tratamento, conversão e coordenação dos registros de representação do objeto matemático sistema de inequações, trazem uma importante contribuição para a formação do conceito e a aplicação dele na resolução de problemas de programação linear.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Seqüência Didática, Problemas de Otimização e Registros de Representação.

ABSTRACT

In light of the emphasis that the term problem-solving has received in the mathematics education community as well as research results indicating the various difficulties students exhibit in solving problems, we embarked on this study. The study aims to investigate whether students, at the end of the Ensino Médio (High School) are able to resolve optimisation problems. For all of the problems investigated, it was possible to obtain the solution by applying concepts and procedures already studied by the students, among them, systems of inequalities of the first degree. To test our hypothesis that some students would experience difficulties in resolving these problems, we applied a diagnostic test to a group of 33 students. Analysis of students' responses indicated that none of the students were able to resolve the optimisation problems. Our next step was to investigate if, as proposed by Duval (1993), activities concerning the treatment, the conversion and the co-ordination between registers of representation of a certain object contribute to the processes of learning and teaching this object. To this end, we designed a didactic (teaching) sequence. After a second group of 10 students worked through the sequence, they completed a post-test. We conducted a comparative analysis between the responses of the first group to the diagnostic test and the post-test responses given by the second group of students. This analysis showed that, while the first group of students failed to solved the optimisation problems, all the students in the second group approached the problems and most were able to resolve them. These results suggest that the activities of treatment, conversion and co-ordination of registers of representation of the mathematical object system of inequality make an important contribution to the formation of the concept and its application in the resolution of optimisation problems.

Keywords: Problem-Solving, Didactic (teaching) Sequence, Optimisation Problems, Registers of Representation and Systems of Inequalities.

ÍNDICE

1. Introdução

A idéia de desenvolver uma pesquisa sobre o processo ensino-aprendizagem de sistema de inequações do 1º grau nos surgiu após ter tido contato com o projeto da professora Ana Lúcia Manrique, que tinha interesse em observar se os alunos do Ensino Médio poderiam resolver alguns problemas de programação linear.

Sendo professor do Ensino Médio há mais de 10 anos, muitas vezes fui questionado pelos alunos sobre a utilidade de determinados conteúdos, entre eles o de sistema de inequações do 1º grau. Esperando esse tipo de questionamento, sempre busquei, quando possível, partir de um problema do quotidiano ou específico de atividades profissionais para relacionar com o objeto matemático que seria estudado.

Foi nesse sentido que começamos a nossa pesquisa, observando que existe uma classe de problemas que são estudados na disciplina pesquisa operacional, os de otimização (ou programação linear), que são resolvidos com conceitos e procedimentos estudados no Ensino Fundamental e Médio.

Assim traçamos o nosso primeiro objetivo: observar se os alunos da 3ª série do Ensino Médio (chamados por nós de turma A), que já estudaram o conteúdo sistemas de inequações do 1º grau, resolvem alguns problemas de otimização.

Aplicamos um teste-diagnóstico e confirmamos a nossa hipótese de que os alunos têm dificuldades em resolver os problemas de otimização. Fomos buscar elementos na teoria proposta por Duval para preparar e desenvolver uma seqüência didática com uma outra turma da 3ª série do Ensino Médio (turma B), e observar se atividades que consideram o tratamento, a conversão e a coordenação entre registros proporcionam condições favoráveis para a apreensão do objeto sistema de inequações do 1º grau e se os alunos utilizam esses conhecimentos para resolver problemas de otimização.

Sendo assim, elaboramos mais um objetivo: observar se após inserirmos no processo ensino-aprendizagem atividades que focalizem o tratamento, a conversão e a coordenação dos registros de representação do objeto matemático sistema de inequações do 1º grau, o aluno terá condições mais favoráveis para apreensão do objeto matemático sistema de inequações do 1º grau e aplicar seus conhecimentos na resolução de problemas de otimização.

2. Problemática

Os problemas têm ocupado um lugar central para a matemática desde a Antigüidade, visto que há registros de problemas na antiga história egípcia, chinesa e grega, mas foi recentemente que educadores matemáticos passaram a aceitar a idéia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia maior atenção.

No fim da década de 70, a resolução de problemas começou a se destacar no mundo inteiro com um movimento a seu favor. Em 1980, foi editada nos Estados Unidos a *"Agenda para Ação". E*sse documento tem como objetivo buscar uma melhoria no ensino e na aprendizagem da Matemática. A sua primeira recomendação é que a resolução de problemas deva ser o foco principal da matemática escolar, sugerindo aos educadores matemáticos dirigir seus esforços para que seus alunos desenvolvam a habilidade em resolvê-los.

Na década de 80, o Brasil também começa a questionar o período da chamada Matemática Moderna (décadas de 60 e 70) e as discussões a respeito de resoluções de problemas começam a ter destaque, e tomam forma em 1998 com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio e Fundamental. O PCN-EM destaca a importância da resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem de matemática, observando "*... é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente".*(PCN-EM, p.251).

Portanto, os PCN tratam a resolução de problemas como eixo organizador dos processos de ensino e de aprendizagem. Sendo assim, sempre que possível, podemos iniciar o processo de ensino-aprendizagem de um determinado objeto matemático propondo problemas que tenham como uma das soluções a utilização desse objeto como ferramenta e não iniciar o processo partindo da definição e exemplos. Os conceitos, as idéias e os métodos matemáticos necessitam serem abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las.

Para Duval (1993), os registros de representação mais complexos são os que têm como ponto de partida o enunciado em língua natural ou texto e, segundo ele, "*os problemas de 'matematização' são aqueles que visam a descobrir a aplicação de tratamentos matemáticos já adquiridos a questões imersas em situações quotidianas..." (Duval, 1993, p.62).*

Duval propõe que as resoluções desses problemas dependem primeiramente da compreensão do enunciado e da conversão das informações pertinentes.

Buscando alguns problemas adequados para estimular os alunos a utilizarem explicitamente ou implicitamente seus conhecimentos e ao mesmo tempo ampliarem suas habilidades e competências para resolver problema, nos deparamos com uma classe de problemas que são relevantes para os dias de hoje. São os problemas de otimização, ou seja, deseja-se maximizar ou minimizar um determinado valor que pode ser o ganho, a perda, o lucro, a diferença, o custo ou outros.

Por exemplo:

Um vendedor pode transportar 800 caixas de frutas para sua região de vendas. Ele necessita transportar 200 caixas de laranja com R$ 20,00 de lucro por caixa, pelo menos 100 caixas de pêssegos com R$ 10,00 de lucro por caixa, e no máximo 200 caixas de tangerinas com R$ 30,00 de lucro por caixa. De que forma deverá ele carregar o caminhão para obter o lucro máximo?

É comum, nos dias de hoje, encontrarmos problemas que tenham que minimizar custos e maximizar lucros nas diversas atividades profissionais e no nosso cotidiano. Muitos desses problemas podem ser classificados como problemas de programação linear e são estudados na disciplina de Pesquisa Operacional nos cursos de Administração, Economia e Computação.

Os conceitos e procedimentos que mobilizamos para resolver alguns dos problemas de programação linear, utilizando a estratégia geométrica e algébrica concomitantemente, são: conversão da língua natural para sentenças matemáticas, dessas para as representações no sistema cartesiano, leitura e interpretação de gráficos, cálculos numéricos e função do 1º grau.

Por serem problemas que podem ser resolvidos usando como ferramentas conteúdos que fazem parte do Ensino Fundamental e Médio, nos perguntamos: será que os alunos que estão completando o Ensino Médio resolvem alguns desses problemas de otimização?

Considerando essa questão como exploratória para contribuir com a nossa pesquisa e tendo como hipótese de pesquisa que os alunos têm dificuldades em resolver esses problemas de otimização, nos propusemos a elaborar e aplicar um teste diagnóstico para uma turma do final da 3ª série do Ensino Médio (turma A), para validar ou refutar a hipótese. Fundamentamos a nossa hipótese em nossa prática docente e também nas considerações que Duval faz de que as representações mais complexas são as que têm como ponto de partida o enunciado em língua natural ou textos e que as atividades de conversão são pouco consideradas no processo ensino-aprendizagem e, portanto, ocasionam dificuldades para os alunos.

E assim formulamos a nossa questão de pesquisa:

Será que se inserirmos nos processos ensino-aprendizagem do objeto matemático sistema de inequações do 1º grau algumas atividades que focalizem o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros de representação algébrico, gráfico e da língua natural, essas atividades proporcionarão aos alunos condições favoráveis para apreensão desse objeto?

Temos assim mais uma hipótese, a de que o processo ensino-aprendizagem do objeto sistema de inequações que considera as atividades que permitem o tratamento, conversão e coordenação dos registros de representação podem proporcionar condições favoráveis para apreensão desse objeto e permitir que o aluno utilize desse objeto como ferramenta na resolução de alguns problemas.

Nesse sentido, Duval (1993) destaca três aspectos: a importância de trabalhar com diversos registros de representações de um mesmo objeto, a essencialidade de distinguir o representado do seu representante e a coordenação de registros como característica do funcionamento cognitivo do sujeito.

Para confirmar ou refutar as nossas hipóteses, vamos propor um conjunto de situações formadas por atividades e, entre elas, alguns problemas de otimização.

3. Metodologia e Processos Metodológicos

Para confirmar ou refutar as nossas hipóteses, tanto a relacionada com a questão exploratória, como a relacionada com a questão de pesquisa, elaboramos um teste-diagnóstico, uma seqüência didática e um pós-teste. O processo de elaboração foi inspirado na nossa fundamentação teórica e para analisar os resultados, fomos buscar uma metodologia de pesquisa que tivesse como finalidade à análise de objetos de estudo da Didática da Matemática. Essa é a "engenharia didática" que, segundo Artigue (1988), é caracterizada como:

> *...um esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino.*

Artigue ainda observa as fases da metodologia da engenharia didática que são:

- primeira fase: as análises preliminares, que são feitas por meio de considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos já adquiridos sobre o assunto;

- segunda fase: concepção e análise *a priori* da seqüência didática, que é feita de acordo com as análises preliminares, sendo que o pesquisador escolhe variáveis que são descritas na análise *a priori* e pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar;
- terceira fase: a experimentação, que supõe o momento da explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação, a aplicação do instrumento de pesquisa e o registro das observações durante a experimentação;

- quarta fase: a análise a *posteriori* e validação. Elas são feitas sobre os dados colhidos durante a experimentação. Esses dados são tratados e confrontados com a análise *a priori* para validar ou refutar as hipóteses levantadas no início da engenharia.

As etapas que utilizamos em nossa pesquisa foram:

Estudos Preliminares

i. **Análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Buscamos, nessa análise, observar quais são os objetivos e os processos metodológicos indicados por esse documento para o Ensino Médio.

ii. **Levantamento Histórico**. Como usamos em nossa seqüência didática alguns problemas de programação linear que são estudados em Pesquisa Operacional, fizemos um resumo da história dessa disciplina e a evolução de suas aplicações.

iii. **Fundamentação Teórica.** Sabendo da dificuldade em resolução de problemas enfrentada pelos alunos, buscamos, com a teoria de registros de representação proposta por Duval (1993), encontrar elementos para superar essas dificuldades ou minimizá-las.

iv. **Revisão Literária**. Buscamos em artigos ou dissertações considerações que possam contribuir na formulação da seqüência didática.

v. **Análise de Livro Didático**. Analisamos dois livros didáticos, observando como são mostrados os conteúdos de sistemas de inequações do 1º grau, se são apresentados problemas de programação linear e caso sejam apresentados quais são as estratégias de resolução.

Teste-Diagnóstico

Aplicamos um teste-diagnóstico em uma turma da 3ª série do Ensino Médio para observar quais são as estratégias de resolução de alguns problemas propostos e as dificuldades encontradas pelos alunos ao tentar resolvê-los.

Elaboração da Seqüência Didática

i. A seqüência didática foi formada com atividades que permitem observar as relações explícitas e implícitas entre os alunos ao tratarem com um determinado objeto matemático, observando principalmente as suas evoluções no tratamento de atividades da matemática.
ii. Fizemos uma análise *a priori* das atividades propostas por nós. Essa análise visa determinar o significado das variáveis escolhidas por nós e permite predizer procedimentos possíveis durante cada atividade.
iii. Aplicação do pós-teste na turma B, que foi o mesmo que o teste-diagnóstico aplicado na turma A.

Experimentação

i. Descrevemos a aplicação da seqüência didática e as análises das observações dos procedimentos, sucessos e erros cometidos durante o desenvolvimento desta etapa e em relação ao pós-teste.

Conclusão

i. Fizemos uma discussão a respeito dos resultados encontrados, relacionamos esses resultados com as nossas hipóteses e apresentamos as nossas considerações.

4. Estudos Preliminares

4.1 Leitura dos Parâmetros Curriculares Nacionais com o foco em Resolução de Problemas.

Como a nossa pesquisa focaliza os alunos do Ensino Médio, e cabendo aos Parâmetros Curriculares Nacionais (1999) o papel de norteadores das reformas no Ensino Médio, iniciamos o trabalho com uma leitura desse documento.

Esse documento diz que "*é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente".*(PCN, p.251). E, para atender tais indicações, propõe um conjunto de parâmetros para a organização do Ensino Médio, com o objetivo de preparar os alunos para: "... *a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional".*(PCN, p.251).

Ainda, os PCN propõem: "*A matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo...*" para *"... formar no aluno a capacidade para resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas..."* e também tem um papel instrumental, "... *pois é uma ferramenta para a vida cotidiana...",* e deve ser vista pelo aluno como "... *um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional."* Neste sentido, além do caráter formativo e instrumental " *é preciso que o aluno perceba a Matemática* *como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias e permite modelar a realidade e interpretá-la."* (PCN, p.251).

Vale ressaltar que o PCN faz a ressalva: "... *a matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas".* (PCN, p.252). Portanto, apesar de mostrarmos a aplicabilidade dos objetos matemáticos como ferramenta, é necessário que o aluno se aproprie das demonstrações, definições e os encadeamentos conceituais e lógicos, para construir novos conceitos, validar e dar sentidos às técnicas aplicadas.

Para atender a esses objetivos, os PCN indicam como um dos caminhos a **Resolução de Problemas** e também mostra que um **problema é uma situação que demanda a realização de uma seqüência de ações, decisões e operações para obter um resultado.** Portanto, a solução deve ser construída. Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados, pois dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação de conhecimento envolvido. É necessário desenvolver habilidades que permitam provar os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter a solução, estruturando e desenvolvendo os processos de pensamento e do raciocínio dedutivo. Notamos o quanto é importante a resolução de problemas inserida no processo metodológico, para os PCN.

Parece, então, imprescindível ampliar o âmbito dos problemas escolares na sua natureza. Mas somente isso não é suficiente, pois também devemos saber quando e como propor os problemas.

No sentido dos diferentes momentos de propor um problema, podemos mostrar as perspectivas de Boavida (1992):

- **como justificação**: os problemas são incluídos no currículo para justificar o ensino da matemática;

- **como motivação**: o objetivo é interessar os alunos pelo ensino de determinados conteúdos matemáticos;
- **como recreação**: procura-se, antes de qualquer coisa, que os alunos se divirtam com a matemática que já aprenderam;
- **como veículo**: os problemas constituem um veículo por meio do qual pode ser apreendido um novo conceito ou competência;
- **como prática**: fundamentalmente os problemas constituem a prática necessária para reforçar conceitos e competências ensinadas diretamente.

O estudo por diletantismo é um atrativo para algumas pessoas, mas não para todas. De fato, a maioria das pessoas sente-se mais motivada ao estudo quando é capaz de perceber que o conhecimento adquirido será útil para sua vida. Portanto, acreditamos que partir de um problema para chegar a um conceito matemático é muito mais significativo para o aluno. Nesse caminho, temos uma classe de problemas estudados pela Pesquisa Operacional que são ligados à tomada de decisões no gerenciamento de sistemas de grandes e pequenos portes, que podem contribuir para a aplicação e apresentação de alguns conceitos matemáticos vistos no Ensino Fundamental e Médio.

A Pesquisa Operacional se propõe a trabalhar com várias classes de problemas, usando várias estratégias, procedimentos e teorias. Por exemplo: Teoria das Filas, Método Monte Carlo e Programação Matemática. A parte da Programação Matemática possibilita examinar inúmeras configurações viáveis do problema proposto pelo tomador de decisão e selecionar, dentro de certos critérios, as "melhores". A Programação Matemática pode ser subdividida em Programação não-linear, quando o problema exibir qualquer tipo de não-linearidade, seja na função objetivo ou em qualquer de suas restrições, ou em problemas de programação linear, que apesar de serem um caso particular dos modelos de programação, são de grande aplicabilidade, são os problemas em que as variáveis apresentam um comportamento linear, tanto em relação às restrições como à função objetivo.

Os problemas de programação linear são os de nosso interesse, visto que podem ser mostrados como ponto de partida de conceitos matemáticos do Ensino Fundamental e Médio. Por serem problemas estudados pela Pesquisa Operacional, vamos mostrar um pouco da evolução da história dessa disciplina.

4.2 Resumo do artigo de Ackoff sobre a evolução histórica da pesquisa operacional.

Segundo Ackoff (1977), o termo Pesquisa Operacional apareceu por volta de 1939, apesar de em épocas anteriores à Primeira Revolução Industrial já terem surgido os primeiros problemas que a nova disciplina iria se propor a resolver.

Até meados do século passado, a grande maioria das empresas usava da mão-de-obra e de pouca tecnologia. Com o desenvolvimento da comunicação e do transporte para atender o crescimento da população, as indústrias começaram a amadurecer para as estruturas que apresentam hoje, usando muita tecnologia.

Com a modernização e o crescimento industrial, a tarefa de administrar a indústria começou a ser dividida em gerências, entre elas, a de compras, manutenção, transporte, controle de qualidade e processamento de dados. Conseqüentemente, as operações das indústrias tornaram-se dispersas, isto é, não mais centralizadas. A existência de vários centros de produção e escritórios de vendas, cada qual exigindo administração própria, passou a ser um lugar comum. Sendo assim, foi conseqüência da Primeira Revolução Industrial a divisão funcional e geográfica da administração.

Com essa divisão, a função do administrador foi sendo alterada e, para o bom andamento dos negócios, cada vez mais foi necessário tomar decisões corretas e rápidas. A disputa pelo mercado de consumo exigiu novos objetivos, entre eles: maximizar o volume de bens ou serviços produzidos e minimizar o custo unitário da produção; maximizar o volume vendido e minimizar o custo unitário de produtos para vendas e minimizar o capital necessário para manter um dado nível de negócios, entre outros.

Essas decisões muitas vezes são apresentadas em forma de conflitos. Para ilustrar um desses conflitos, vamos exemplificar a situação em que o departamento de produção quer produzir a maior quantidade possível de bens pelo menor custo possível. Para tal, procura produzir um grande número de bens em um mesmo lote para minimizar o custo. O departamento de vendas também busca por uma alta produção para ter um estoque sempre pronto a atendê-lo. Em contrapartida, o departamento financeiro, que procura minimizar o capital "aplicação", quer um controle grande do estoque a fim de reduzí-lo ao necessário, fazendo o estoque oscilar de acordo com a necessidade.

Portanto, para resolver esses conflitos, o dirigente tem o poder da decisão e deve fazer uso de critérios válidos que melhor satisfaçam os interesses da empresa e não os de departamentos isolados.

As funções dos dirigentes foram sendo desenvolvidas gradativamente, acompanhando o desenvolvimento das empresas. O dirigente vivia isolado com seus problemas e a solução parecia exigir apenas a capacidade de julgamento adquirida pela experiência. Com o aumento da exigência do mercado de consumo, cada vez mais os dirigentes sentiram a necessidade de consultores de administração, cuja atividade, no início, não se baseava nem na ciência nem na pesquisa científica. Assim, o que chamamos de Pesquisa Operacional é a utilização da pesquisa científica para auxiliar os dirigentes a tomar decisões.

Percebemos que a Pesquisa Operacional surgiu de acordo com a necessidade de novas políticas de gerenciamento frente ao crescimento das indústrias e, principalmente, pela competição do mercado de consumo entre elas. Mas o grande avanço da Pesquisa Operacional foi devido às organizações militares com a deflagração da Segunda Guerra Mundial.

As organizações militares passaram pela mesma evolução organizacional que a indústria. A principal diferença entre elas foi no período entre a Primeira e a Segunda Guerra, visto que a tecnologia militar desenvolveu-se tão rapidamente que não foi absorvida pelas estratégias, não sendo surpresa que os militares recorreram a cientistas quando começaram os ataques aéreos alemães à Grã-Bretanha. Especificamente, pediram para incorporar o radar às estratégias de suas defesas, que na época era novidade. Pequenas equipes de cientistas trabalharam com problemas desse tipo, obtendo êxito considerável, o que provocou o aumento da procura por esses serviços. O emprego de cientistas difundiu-se entre os aliados. Essas equipes eram geralmente subordinadas ao chefe encarregado das operações e esse trabalho ficou conhecido como Pesquisa Operacional.

Ao fim da Segunda Grande Guerra, os ingleses reduziram os gastos com a pesquisa e com isso muitos profissionais ficaram livres para serem aproveitados pelas indústrias, que começaram uma fase de reconstrução após a guerra.

Aplicações da Pesquisa Operacional começaram a surgir na exploração do carvão, na siderurgia, nos transportes e nas empresas de serviço público. No início da década de 1950, a indústria começou a absorver alguns especialistas em Pesquisa Operacional que deixavam as organizações militares. Os demais eram absorvidos por empresas de consultorias, universidades, institutos de pesquisas e órgãos governamentais. Foi assim que a Pesquisa Operacional se difundiu nos Estados Unidos e depois em outros países, tornando-se útil a diversas atividades profissionais.

Ackoff considera como Pesquisa Operacional a aplicação do método científico por equipes interdisciplinares a problemas que dizem respeito ao controle de sistemas organizados (homem-máquina), com a finalidade de obter as soluções que melhor satisfaçam aos objetivos da organização. Para ele, as características essenciais da Pesquisa Operacional, segundo essa definição, são duas:

(i) A Orientação para Sistemas ou para a Direção

Essa orientação está ligada ao fato de que, em sistemas organizados, o comportamento de qualquer parte afeta os demais, porém nem todos esses efeitos são perceptíveis ou significativos. A Pesquisa Operacional busca tornar esses efeitos significativos, tornando-os mensuráveis. Podemos retomar o exemplo do problema do estoque: para o departamento de produção é interessante produzir a maior quantidade possível para minimizar o custo de produção e para o de vendas também é satisfatória uma maior produção visto que terá mais mercadoria à disposição para venda, em contrapartida o departamento financeiro solicita o menor número possível de produção para ter um maior giro do capital em menos tempo. Portanto, percebemos que a relação entre as restrições e a solução mais viável é a que atenda a todos.

(ii) A Equipe Interdisciplinar

Foi no século XIX que o campo do saber foi separado em disciplinas. Até então um só homem poderia reter a maior parte - senão a totalidade - de informações "científicas" que a humanidade havia acumulado. Era comum ver um mesmo homem sendo citado na Astronomia, na Matemática, no Direito ou em outras áreas. Esses homens geralmente eram denominados filósofos e buscavam o saber completo e não especializações. A especialização surgiu quando o saber total começou a superar essa capacidade de retenção. A filosofia natural tornou-se distinta da tradicional, não-orientada empiricamente. Mais tarde ficou conhecida como ciência natural. Foi no século XIX que a ciência natural se dividiu primeiramente em Química e Física e depois em Biologia, Psicologia e cada vez mais foi sendo dividida e subdividida.

As universidades se estruturaram de acordo com essa divisão, levando muitas vezes a observarmos a natureza como se fosse dividida. Mas essa divisão nem sempre representa a realidade, visto que não existem problemas de física, biologia, psicologia ou de economia e, sim, existem apenas "problemas" e diferentes maneiras de visualizá-los pelas disciplinas. Entretanto, é fato que nem sempre é possível encarar o problema por meio de todas as suas implicações.

A experiência, por sua vez, nos ensina algumas maneiras de analisar a maioria dos problemas que nos são familiares e que ocorrem com freqüência. No caso de situações novas e complicadas, tendemos sempre a adotar o método da análise que nos é familiar.

Ackoff busca novamente no exemplo da produção ilustrar o fato: - na necessidade de aumentar a produção, o chefe de recurso humano busca selecionar e treinar melhor os funcionários, o engenheiro mecânico procura aperfeiçoar as máquinas, o engenheiro industrial aperfeiçoar o "layout" da fábrica de forma que simplifique as operações, o analista procura melhorar o fluxo de informações e desta forma todos poderão produzir melhorias. Mas, no caso de problemas complexos, é difícil conseguirmos responder qual o método ou as combinações de métodos são mais adequados. Conseqüentemente é necessário analisar e avaliar o problema segundo o maior número de pontos de vista possíveis. Eis a razão para as equipes de pesquisa interdisciplinares.

Como existem centenas de disciplinas científicas puras e aplicadas, é bastante difícil incorporá-las a cada projeto. Mesmo assim, é aconselhável que o maior número possível esteja representado na equipe e que o resultado seja analisado e criticado por especialistas das disciplinas não representadas para ficar mais próximo da realidade e para que a resolução seja positiva.

O método operacional adotado para resolver um grande número de problemas é a experimentação, que é considerada, na maioria dos debates, essencial no método científico. Porém, quando lidamos com organizações governamentais, militares ou industriais, nem sempre é possível à experiência. No caso de uma empresa, não é possível arriscar-se a ir à falência para realizar certa experiência. Apesar disso, a experimentação é, às vezes, possível, particularmente no caso de subsistemas, e desempenha um papel importante na Pesquisa Operacional; na maioria das vezes, entretanto, o sistema global em estudo não admite um tratamento dessa natureza. Conseqüentemente, nem sempre é possível a experimentação no sentido da manipulação física dos objetos em estudo.

Nesses casos, Ackoff diz que um método muito usado pelos astrônomos é aplicado em pesquisa operacional. O astrônomo observa o sistema que estuda, mas não pode modificá-lo. Em tais condições, constrói modelos que orientam a pesquisa. Quem trabalha em Pesquisa Operacional é geralmente obrigado a fazer o mesmo.

> *"Os modelos em Pesquisa Operacional assumem a forma de equações que até mesmo quando complicadas do ponto de vista matemático, possuem uma estrutura básica muito simples: $U = f(X_i, Y_j)$, sendo U a utilidade ou o valor do desempenho do sistema, X_i as variáveis que podem ser controladas, Y_j as variáveis (ou constantes) que não podem ser controladas, mas*

que afetam U, e f o relacionamento entre U, X_i e Y_j.” (Ackoff, 1977, pág 11).

Esses modelos freqüentemente têm uma ou mais equações ou inequações que são usadas para traduzir as condições e variações que podem ser manipuladas dentro de algumas restrições. Por exemplo:

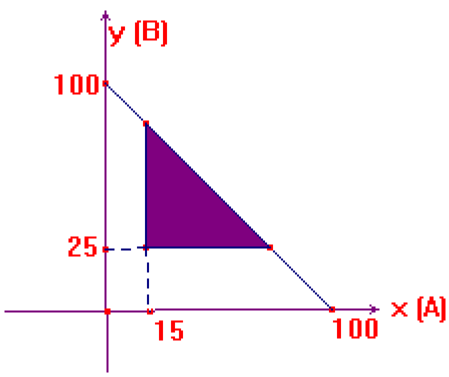
Um comerciante vende dois tipos de artigos, A e B. Na venda do artigo A obtém um lucro de R$ 20,00 por unidade e, na venda do artigo B, um lucro de R$ 30,00. Em seu depósito só cabem 100 artigos e sabe-se que, por compromissos já assumidos, ele venderá pelo menos 15 artigos do tipo A e 25 do tipo B. Quantos artigos de cada tipo deverão o comerciante encomendar ao distribuidor para que, supondo que os venda todos, obtenha o lucro máximo?

Esse é um exemplo de um problema que apresenta certas condições e solicita uma decisão de tal forma que se atinja o objetivo que é obter o maior lucro possível. Uma das possíveis estratégias de solução é:

- escrever a equação que calcula o lucro → L = 20. x + 30. y (x e y representam as quantidades);

- escrever as restrições: $x + y \leq 100$; $x \geq 15$ e $y \geq 25$;

- representar a equação e as restrições no sistema de eixo cartesiano:



- interpretar o gráfico percebendo que as possibilidades das respostas estão na região limitada pelo triângulo;

- fazer os cálculos numéricos a partir da região possível;

- decidir a quantidade que irá fornecer um maior lucro;

- validar a resposta.

Esse é um dos problemas de programação matemática, pois possibilita, por parte de quem resolve o problema, examinar as configurações viáveis do problema, selecionar, analisar e tomar decisões, dentro de certos critérios. Podemos, ainda, perceber que suas variáveis apresentam um comportamento linear, tanto em relação às restrições como em relação à equação do lucro. Então podemos dizer que esse é um Problema de Programação Linear, que será de nosso interesse para o estudo.

4.3 Registros de representação semióticos e funcionamento cognitivo do pensamento. (Duval, 1993).

Duval (1993) trata da importância das representações no processo ensino-aprendizagem. Para ele, a palavra "representação" é bastante usada em matemática e podemos ter uma escrita, uma notação, um símbolo ou mesmo os traçados e as figuras como representantes de objetos matemáticos.

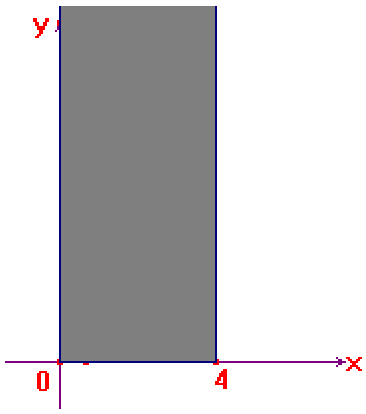
As representações podem ser mentais ou semióticas. "*As representações mentais, ocultam o conjunto de imagens e, mais globalmente, as concepções que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhes está associado".* (Duval, 1993, p.38). Já as representações semióticas "... *são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que têm dificuldades próprias de significância e de funcionamento".* (Duval, 1993, p.39). Ele considera como exemplos de representações semióticas os enunciados em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico, entre outros. Porém, diz que muitos consideram erroneamente que essas representações são apenas exteriorização das representações mentais para permitir a comunicação, mas "... *elas são igualmente essenciais para a atividade cognitiva de pensamento*". (Duval, 1993, p.39).

Entre essas representações existe uma relação: "*não se pode considerar as representações semióticas como simplesmente subordinadas às representações mentais, uma vez que essas últimas dependem de uma interiorização das primeiras e sozinhas as representações semióticas permitem certas funções cognitivas essenciais, como a do tratamento".* (Duval, 1993, p.40). Para ele, ainda, não é possível separar os diversos registros de representações semióticos da função cognitiva do pensamento humano. Ele chama de "sémiosis" "*a apreensão ou a produção de uma representação semiótica*" e de "noésis" "*apreensão conceitual de um objeto*". (Duval, 1993, p.40).

Essas considerações podem ser exemplificadas: considere um sistema de inequações do 1º grau e seus diferentes registros de representação:

(1) Representação algébrica: $\left\{ (x,y) \in \Re \;/\; 0 \leq x \leq 4 \text{ e } y \geq 0 \right\}$

(2) Representação geométrica:



(3) Representação pela língua natural: conjunto dos pares ordenados (x,y),sendo que "x" pertence ao intervalo fechado entre zero e quatro e "y" é um número real maior ou igual a zero.

Portanto, temos um sistema de inequações do 1º grau representado de três maneiras diferentes: algebricamente, por meio de gráfico e em língua natural. O fato de o aluno saber resolver o exercício representado da forma algébrica ou qualquer outra forma isoladamente ("sémiosis") não garante que ele tenha o conceito do objeto sistema de inequações do 1º grau, ("noésis").

Duval diz que os registros de representação são fundamentais no processo de ensino-aprendizagem, mas podem ocasionar o comprometimento desse processo quando não tomados os devidos cuidados na diferenciação entre os registros de representação e o objeto matemático. Os objetos matemáticos na maioria das vezes não são diretamente acessíveis pela percepção ou em uma experiência intuitiva imediata; é necessário então poder dar-lhes representantes que permitam efetuar os tratamentos sobre os objetos matemáticos que dependem diretamente do sistema de representação semiótica utilizada. Para Duval, estamos na presença de um paradoxo cognitivo do pensamento matemático: de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos pode estar apenas ligada ao conceitual e, de outro lado, é somente por meio das representações semióticas que podemos realizar atividades sobre os objetos matemáticos. Vale ressaltar que devido à impossibilidade de um acesso direto aos objetos matemáticos, suas representações semióticas são de grande importância.

Duval coloca em evidência essa forte ligação entre "sémiosis" e "noésis" no funcionamento cognitivo do pensamento e examina diferentes atividades cognitivas constituídas da "sémiosis", focando:

- *"As razões pelas quais a apreensão conceitual implica na coordenação de diversos registros de representação";*
- *"As condições necessárias para favorecer essa coordenação"; e*
- *"Organizar um ensino que leva em conta a forte ligação entre 'sémiosis' e 'noésis' ".* (Duval, 1993, p.41).

Para tal exame, é necessário antes esclarecer o que faz com que um sistema semiótico seja considerado um registro de representação. Ele deve permitir as três atividades cognitivas ligadas à "sémiosis":

(1) **Identificação da representação**: a partir de um registro de representação, saber qual é o objeto matemático que está sendo referenciado;

(2) **Tratamento:** ocorre quando podemos modificar a representação do objeto matemático conservando o seu registro;

(3) **Conversão:** é a transformação da representação em uma outra usando outro registro, conservando a totalidade ou somente parte da representação inicial.

Exemplificação das situações acima:

(1) Qual é o conjunto-solução que satisfaz à condição: o dobro de um número mais 3 é maior que 4?

Resolução: $2x + 3 > 4$ (conversão: registro língua natural para registro algébrico).

$2x > 1 \Rightarrow x > 1/2$ (tratamento: transformações de representações dentro de um mesmo registro algébrico).

Podemos também observar a **identificação**, pois, para fazer a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico, é necessário identificar o objeto matemático: inequações do 1º grau.

A conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente da atividade do tratamento. Duval ilustra essa situação com o exemplo dos alunos que podem efetuar com sucesso a adição de dois números escritos na forma decimal e dois escritos na forma fracionária, porém, quando solicitados à conversão do fracionário em decimal, não conseguem. (Alunos do “seconde” na França, que equivale a 1ª série do ensino médio brasileiro).

Podemos ilustrar esse mesmo exemplo de Duval com a situação do aluno que consegue resolver o sistema de inequações a partir de uma representação algébrica aplicando o algoritmo, sabe fazer a leitura de um gráfico e encontrar soluções, porém não faz a conversão entre os dois registros de representação.

Enquanto a “sémiosis” apresenta os vários registros de representação em relação a um conceito, a “noésis” busca a coordenação desses registros de representação. Portanto, a ligação entre “noésis” e “sémiosis”, para Duval, é fundamental, visto que a caracterização do funcionamento do modo de pensar humano em relação à inteligência animal, não está ligada somente ao recurso de um sistema semiótico para se comunicar, mas sim a diversos sistemas de representação: desenho, pintura, linguagem...

Geralmente os sistemas semióticos têm como primeiro registro de representação a língua natural e daí ocorrem uma criação e desenvolvimento de novos sistemas semióticos.

Para Duval, a importância de diversos registros de representações no processo de ensino-aprendizagem está ligada à economia de tratamento que, por meio da mudança de registros, fica possível, permitindo efetuar o tratamento de uma forma mais econômica e rápida, e a complementaridade dos registros, pois, segundo ele, todos os registros são parciais em suas representações e necessitam uma complementaridade achada em outro registro. A coordenação entre os registros de representações também é importante, visto que a conceitualização implica em uma coordenação de registros de representação. Porém, ela está longe de ser natural e não parece ser possível de ser realizada no quadro de um ensino que seja principalmente determinado pelos conteúdos conceituais, podendo ser observado que em todos os níveis há uma separação dos registros de representação pelos alunos.

Sendo assim, os alunos não reconhecem o mesmo objeto por meio de diferentes representações que lhes são dadas em diferentes sistemas semióticos. Exemplos: a escrita algébrica de uma relação e a sua representação gráfica, a escrita numérica de uma relação e sua relação geométrica numa reta ou num plano, o enunciado de uma fórmula em linguagem natural e sob a forma literal, a descrição de uma situação e sua inserção em uma equação. E essa separação ocorre mesmo após o ensino dos conteúdos matemáticos terem sido feitos usando diferentes registros.

A ausência dessa coordenação impede a compreensão global do conteúdo e, quando essa compreensão fica restrita ao contexto semiótico de um único registro, não favorece as transferências das aprendizagens.

São muitas as explicações que justificam a separação entre os registros. Uma das que é inerente à variedade de registros é a da “não-congruência”: quando há congruência entre os registros, a conversão torna-se trivial e pode ser considerada intuitivamente como um simples processo de codificação, mas, quando não há congruência, a conversão torna-se onerosa em termos de tratamento e pode criar problemas ao aluno.

Portanto, a coordenação de diversos registros é uma condição necessária para que as representações contribuam para o funcionamento cognitivo do aluno. Duval observa que isso não se efetua espontaneamente na maioria dos alunos e que não se pode esperar sua colocação pelos educadores que não conheçam a forte ligação entre “noésis” e “sémiosis”. Ele verifica que a conceitualização implica em uma coordenação de registros de representação, por isso não pode ficar restrita a automatização de certos tratamentos ou compreensões de noções. A condição fundamental para a aprendizagem é a coordenação dos registros de representação, ao menos nos domínios em que os dados são representados.

A forma em que a matemática geralmente é organizada, como se não houvesse problemas e custos quanto à congruência entre registros, ocasiona entraves no processo ensino-aprendizagem. Então não deveria ser levado em consideração somente o tratamento dado ao registro a partir da representação obtida após a troca do registro e sim a dificuldade que existe nessa troca quando não há uma congruência entre os registros.

A importância da “sémiosis” na “nóesis” estimula a acreditar que a língua natural é um registro de representação que deve ser considerado de partida e de chegada no que concerne ao raciocínio. Porém essa conversão interna não é feita diretamente e sim por meio de outras representações não-discursivas. Para Duval, (apud, Duval & Egret 1993), a explicação de representações intermediárias parece ser condição necessária no aprendizado do raciocínio dedutivo e no controle de uma argumentação. Da mesma forma, a conversão do registro da língua natural em uma escrita simbólica requer os desvios pelas representações intermediárias. Para ele, o registro de representação semiótico na forma da língua natural, no quadro do ensino de matemática, é tão fundamental quanto os outros e mais particularmente aqueles que permitem os tratamentos de cálculo. Ele diz que *"... não pode haver um verdadeiro aprendizado quando as situações e tarefas propostas não levam em conta a necessidade de diversos registros de representação, para o funcionamento cognitivo do pensamento, e o caráter central de conversão".*(Duval, 1993, p.64).

Novamente ressaltamos a importância dos problemas de programação linear que são propostos em língua natural e permitem, além do tratamento de alguns registros de representação, a conversão e coordenação desses registros de representações.

Porém a resolução desses problemas requer determinados tratamentos, conversões e coordenações já citados e que podem ser dificuldades para os alunos, dependendo de como esses conceitos foram inseridos ou não no processo de ensino-aprendizagem.

Buscando pesquisas em Educação Matemática, encontramos a de Duval, que mostra a dificuldade da conversão e coordenação entre dois registros de representação. A leitura dessa irá contribuir na elaboração e análise de nossa seqüência didática.

4.4 Leitura do artigo: *Graphiques et équations: L' Articulation de deux registres.* (Duval, 1988).

Ao resolver um Problema de Programação Linear, uma das etapas necessárias é a conversão do registro de representação algébrico para o gráfico e do gráfico para o algébrico. Duval (1988) apresentou as observações de uma enquête que foi aplicada em 105 alunos do "seconde"[1], sobre a articulação entre esses dois registros: algébrico e gráfico. Segundo o autor, "*a leitura das representações gráficas pressupõe a descrição das variáveis visuais*[2]

[1] Seconde: equivale à 1ª série do Ensino Médio brasileiro.

pertencentes às variações correspondentes da escrita algébrica".(Duval, 1988, p.235). Porém, para Duval, um grande número de estudantes tem dificuldades em fazer essa leitura e a interpretação das representações gráficas. Ele apresenta como um dos obstáculos[3], a construção ponto a ponto da representação gráfica de uma equação para quando o aluno tem que, a partir do gráfico, escrever a equação. Para superar esse obstáculo e as dificuldades dos alunos, Duval destaca três pontos diferentes:

A- Diferentes apresentações das atividades relacionadas às representações gráficas:

- **Pontuação:** deve ser proposta como atividade introdutória. Nesta atividade é solicitada a representação de um ponto a partir de um par ordenado e a identificação do par ordenado a partir do ponto;

- **Traços:** são as atividades que solicitam a união dos pontos por traços, desenhando o gráfico. Podemos incrementar a atividade solicitando que encontrem os pontos de intersecção entre duas retas, discutam a respeito de intervalo e conjunto de pontos finitos e infinitos. Porém Duval diz que as atividades de traços e pontuações não garantem que o aluno tenha visualizado as variáveis da escrita algébrica pertinentes à representação gráfica.

- **Interpretação global** das propriedades das figuras: são atividades que podem permitir ao aluno perceber que a modificação da escrita algébrica implica na mudança da representação gráfica. Essas atividades devem permitir um grande número de mudanças na imagem dos gráficos e a relação com as equações algébricas. Outra atividade indicada é a que permite a associação entre as variáveis visuais e suas representações gráficas. Por exemplo, quando se trata de uma escrita algébrica do 1º

[2] Variáveis visuais, para Duval (1988), são aquelas que pertencem, por exemplo, às equações algébricas e que a partir da leitura delas é possível retirar características da representação gráfica. Exemplo: uma equação do 1º grau (uma das variáveis visuais é o expoente) a representação gráfica será uma reta.

grau, teremos como resultado gráfico uma reta, relação entre o coeficiente angular positivo ou negativo e a inclinação da reta e o termo independente em relação ao ponto em que o gráfico intercepta o eixo y. Essas, apesar de serem atividades importantes, segundo Duval, são geralmente negligenciadas no processo de ensino-aprendizagem.

B- Explicitação das variáveis visuais e seus significados simbólicos

Uma outra atividade que Duval acredita ser de grande importância no processo de ensino e aprendizagem das representações gráficas é a explicitação das variáveis visuais e seus significados simbólicos: "*Uma análise de congruência exige as descrições das unidades significativas propostas para mudar de registros de representação...".* (Duval, 1988, p.238).

Para Duval (1988, p.242), uma expressão algébrica é composta por variáveis visuais (ou unidades significativas), que são:

- *os símbolos de relações: (< , >, =,...)*
- *os símbolos de operação ou sinais (+, -)*
- *os símbolos de variáveis*
- *os símbolos de expoentes, de coeficientes e constantes. (Duval, 1988, p.238).*

Quando estamos tratando as expressões algébricas, segundo Duval, é importante apresentarmos explicitamente as variáveis visuais e seus diferentes significados e formas de apresentação, por exemplo:

- $y = + 1\,x$, o coeficiente 1 e o sinal positivo pode ser omitido;

[3]Obstáculo: Apesar de Duval não explicitar o significado do termo, notamos que ele usa este termo de acordo com Brousseau que aponta como obstáculo "*...um conhecimento anterior que tinha o seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptável.*" (RDM 4.2, p.171).

- $y = -2x$, a importância do sinal negativo e do coeficiente que, quando alterados, modificam o desenho gráfico;
- a partir das variáveis visuais, verificar se a representação gráfica é uma reta ou uma região do plano;
- quando é uma reta, se essa delimita ou não uma região; quando é uma curva, se é aberta ou fechada.
- inclinação da reta em relação ao sinal do coeficiente angular;
- ângulo formado com os eixos;
- a posição da reta em relação à origem;
- tratando de representação gráfica por retas, se é crescente ou decrescente;
- ponto de intersecção com os eixos;
- se a reta é constante.

A importância dada às variáveis visuais nas atividades é considerada por Duval relevante, pois pode permitir ao aluno perceber as diferenças entre as variáveis da equação algébrica em relação à imagem de suas representações gráficas. Porém *"... essas articulações entre representação gráfica e equações algébricas são ausentes das perspectivas do ensino de matemática".*(Duval, 1988, p.242).

C- O sincretismo da percepção das representações gráficas dos alunos

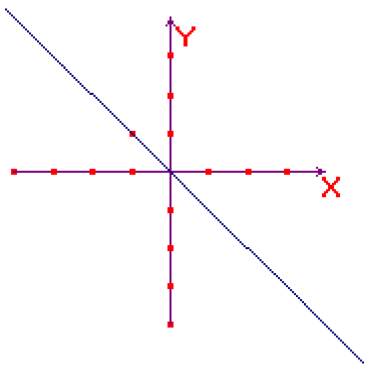
Para Duval, é fundamental destacar certas variáveis visuais e suas relações com a equação algébrica: "*Não podemos utilizar corretamente as representações gráficas cartesianas sem descrever explicitamente as variáveis visuais e suas correspondências sistemáticas estabelecidas entre os valores destas variáveis e* *seu significado na equação algébrica*". (Duval, 1988, p.243). Portanto, para a utilização da representação gráfica como ferramenta na resolução de problemas, é importante saber o que implica cada variável visual da equação algébrica na imagem do gráfico. Duval observou que a maioria dos alunos de 15-16 anos do "seconde", mesmo após passar pelo processo de ensino e aprendizagem da função afim, tem um "conhecimento mecânico" da construção dos gráficos (ponto relacionado com par ordenado), não utilizando corretamente as representações gráficas. Ele apresenta alguns desses erros e os discute.

1. Variáveis visuais particulares das representações das retas.

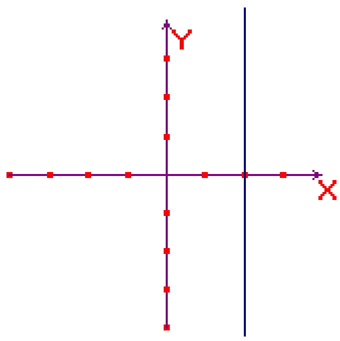
Foi proposta, por Duval (1988), para 105 alunos do "seconde", a seguinte questão:

Sendo x a abscissa e y a ordenada de um ponto M do plano representado, indique qual é a expressão algébrica (E_1, E_2,... ou E_{10}) de cada uma das retas D1, D2,... D5 correspondentes. (Duval, 1988, p.244).

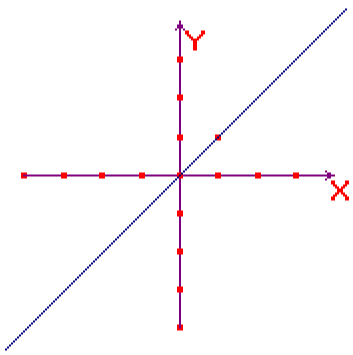
D1



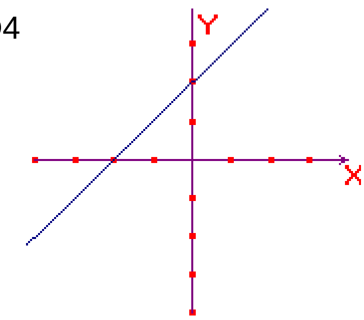
D2



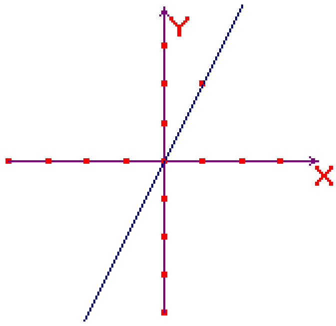
D3



D4



D 5



E 1: $y \geq x$ E 6 : $y = x + 2$

E 2 : $y \quad x$ E 7 : $y = x – 2$

E 3 : $y = x$ E 8 : $y = 2x$

E 4 : $y = -x$ E 9 : $y \geq x + 2$

E 5: $y = 0$ E 10: $x = 2$

Considerando os 105 alunos, os resultados foram (Duval, 1988, p. 245):

- 75 alunos associaram corretamente $y = x$, com D 3;
- 59 alunos associaram corretamente $y = -x$, com D 1;
- 68 alunos associaram corretamente $x = 2$, com D 2;
- 26 alunos associaram corretamente $y = x + 2$, com D 4;
- 39 alunos associaram corretamente $y = 2x$, com D 5;
- 59 alunos não diferenciaram a representação gráfica de $y = x$ e $y = -x$;
- 23 alunos não diferenciaram a representação gráfica de $y = 2x$ e $y = x + 2$;
- 05 alunos obtiveram sucesso nos cinco itens;
- 14 alunos erraram os cinco itens.

Duval apresenta os três principais erros e um comentário a respeito deles: (A) 21 respostas $y = x$ para D 1; (B) 23 respostas $y = -x$ para D4 e (C) 14 respostas $y \geq x$ para D 5. Segundo ele, o erro (A) é a não-associação dos alunos entre a relação da inclinação decrescente da reta com o coeficiente negativo da equação algébrica; (B) esses alunos não usaram a propriedade da figura que relaciona a intersecção com o eixo x e a equação algébrica; e (C) eles forçaram a tradução do fato de que, no 1º quadrante, em todos os pontos da reta, o valor de x é maior que o de y, caracterizando, com esse erro, o obstáculo da relação ponto com par ordenado.

Após esses resultados e outros muito semelhantes obtidos por meio de outra enquête feita por Duval, ele diz que existe uma separação entre as atividades de pontuação e a interpretação global do gráfico, "... *essa última exige uma descrição de todas as variáveis visuais pertinentes...*". (Duval, 1988, p.246).

2. Variáveis visuais gerais e representação das relações.

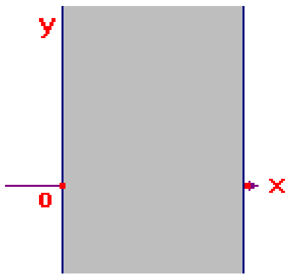
Duval cita as questões propostas por Hajri (apud Duval,1988) para alunos do "seconde" que solicitava a eles para hachurar o plano que representava:

- o conjunto dos pontos que tem abscissa positiva;
- o conjunto dos pontos que tem a ordenada negativa;
- o conjunto dos pontos que tem a abscissa e a ordenada com o mesmo sinal;
- o conjunto dos pontos que tem a ordenada maior que a abscissa, a partir da língua natural para um sistema de eixo cartesiano.

Duval propõe essas mesmas questões a 105 alunos do "seconde", porém com alterações: ele apresenta o enunciado na língua natural e dá alguns registros de representação na forma de escrita algébrica *"($y = x$, $y < x$, $y = -x$, $x\,y \geq 0$, $x > 0$, $y < 0$...)"*, (Duval, 1988, p.247), e pede para relacionar com os gráficos que são resultados dos enunciados.

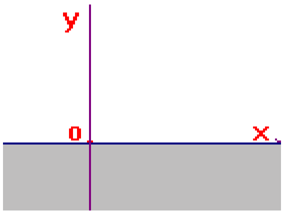
A seguir apresentaremos as questões propostas por Duval com as porcentagens de acertos observadas:

(A) Hachurar o conjunto dos pontos que tem abscissa positiva e escrever a equação algébrica:



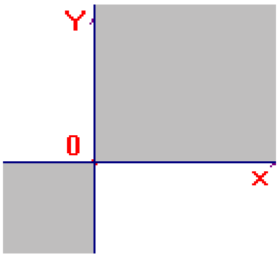
- 67% dos alunos representaram corretamente no gráfico e 51% dos alunos escreveram algebricamente $x > 0$.

(B) Hachurar o conjunto dos pontos que tem a ordenada negativa e escrever a equação algébrica:



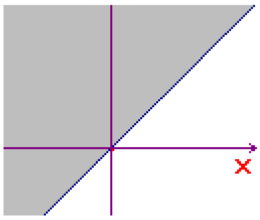
-67% dos alunos representaram corretamente no gráfico e 61% dos alunos escreveram algebricamente y < 0.

(C) Hachurar o conjunto dos pontos em que a abscissa e ordenada têm o mesmo sinal e escrever a equação algébrica:



-56% dos alunos representaram corretamente no gráfico e 25% dos alunos escreveram algebricamente x y > 0.

(D) Hachurar o conjunto dos pontos que tem ordenada maior que a abscissa e escrever a equação algébrica:



-19% dos alunos representaram corretamente no gráfico e 25% dos alunos escreveram algebricamente y > x.

A partir das comparações dos resultados de acertos entre os dois tipos de mudanças de registros de representação, Duval comenta que:

- *-Há uma congruência semântica entre os casos A e B das duas tarefas: a expressão discursiva, a representação gráfica e a escrita algébrica, fornecendo as mesmas informações a partir de elementos identificáveis: abscissa positiva (parte positiva do eixo de x), ordenada negativa (parte negativa do eixo de y). Essas representações levam a três registros diferentes que são congruentes.*

- *-Há novamente uma congruência semântica na primeira tarefa do caso (C), porém nem tanto para a segunda. Para encontrar a equivalência da representação algébrica com as outras duas representações, é necessário voltar à informação inicial e fazer a equivalência "mesmo sinal ⇔ o produto das coordenadas é positivo". Quando comparamos o sucesso da primeira com a segunda tarefa, o resultado da segunda cai para a metade.*

- *-Não há mais congruência semântica no caso D: a relação não expressa discursivamente ou algebricamente a função dos elementos identificados no gráfico (parte positiva do eixo x,...). A taxa de sucesso é muito baixa. Em compensação, quando reduz a não-congruência, como proposto no caso D, a taxa de sucesso dobra."*(Duval, 1988, p. 249)".

A partir dessas observações, Duval apresenta suas conclusões:

> *"A interpretação das representações gráficas cartesianas depende de uma identificação das variáveis visuais pertencentes e do reconhecimento qualitativo das unidades da escrita simbólica que é correspondente. Para a grande maioria dos alunos, essa aprendizagem não se faz treinando exercícios de construção de gráficos no plano, nem por tarefas de leitura mostrando o jogo de regras de associação de pontos e coordenadas. Para maioria dos alunos resta, então, uma apropriação sincrética, inoperante, sem um verdadeiro valor intuitivo das representações gráficas." (Duval, 1988, p.251).*

Para efetuar a aprendizagem específica, Duval distingue dois tipos de tarefas utilizadas na representação gráfica:

- as que recorrem aos gráficos em situações do contexto matemático; e
- as que recorrem aos gráficos não somente em situações matemáticas, mas também usando de grandezas de naturezas diferentes.

Duval considera que, para que haja efetivamente uma aprendizagem de tarefas de interpretação global de um gráfico, não podemos nos centrar puramente no estudo dentro do contexto matemático, pois, neste, a articulação entre os valores das variáveis visuais e suas propriedades conceituais pode ser mostrada por si mesmo. "*A significação dos gráficos cartesianos e, conseqüentemente, sua leitura dependem da percepção dessa articulação.*

Quando o gráfico representa grandezas heterogêneas, a tarefa de interpretação global é maior".(Duval, 1988, p. 252).

Os Problemas de Programação Linear apresentam grandezas heterogêneas, e a estratégia gráfica para a resolução deles requer uma interpretação global do gráfico que faz parte da resolução.

5. Análise dos Livros Didáticos

Devido à importância dos livros didáticos no processo de ensino e aprendizagem, pois eles são usados pelos professores como principal fonte de pesquisa para o planejamento de suas aulas, e o nosso interesse em verificar se os alunos do Ensino Médio estudam os conceitos e procedimentos necessários para resolver os problemas de programação linear, analisamos dois exemplares.

Os livros que analisamos foram:

Livro 1: O livro de Dante (1999), indicado para o Ensino Médio. Escolhemos esse exemplar para análise, pois ele é usado como material de apoio pelo professor da turma em que aplicamos o teste-diagnóstico[4]. A coleção é formada por três livros e o analisado por nós foi o volume dois, pois é o que contém os problemas de programação linear. O volume é apresentado em 16 capítulos e cada capítulo é dividido, em média, em oito tópicos.

Livro 2: O outro livro analisado por nós foi o de Marcondes, Gentil e Sérgio, (2000). Escolhemos esse livro para analisar, pois o professor da turma em que aplicamos o teste-diagnóstico adotou-o. Assim, ela usa o primeiro livro analisado por nós como apoio para buscar exercícios extras, e segue o livro 2 em suas aulas. Segundo a professora, ela recomendou a compra do livro no ano anterior,

[4] Chamamos de teste-diagnóstico a avaliação que aplicamos em uma turma que estava no último bimestre do 3º ano do Ensino Médio.

pois é volume único, e aproximadamente 40% dos alunos compraram. O livro está dividido em três partes, que supomos ser sugestão do autor trabalhar nas três séries de acordo com essa divisão, e cada parte é dividida em módulos. Após cada conjunto de módulos, apresenta uma seção que se propõe a ligar a matemática à realidade da vida e da sociedade. Nesta seção apresenta alguns problemas contextualizados com suas soluções passo a passo. Ao todo, ele apresenta doze dessas seções, com quatro a seis problemas em cada, os quais apresentam os conteúdos vistos sendo usados como ferramenta.

Estabeleceremos como critérios de análise dos livros algumas das recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e as considerações feitas por Duval e apresentadas na nossa fundamentação teórica. Essa análise foi feita focando o objeto matemático sistemas de inequações do 1º grau e os problemas de programação linear.

5.1 Questões formuladas para orientar a análise dos livros didáticos

1. Os livros propõem problemas para serem resolvidos? Em qual momento são apresentados esses problemas?

Livro 1: Esse livro propõe três problemas de programação linear para serem resolvidos. Ele apresenta esses problemas como motivação ou justificação do ensino de sistema de inequações do 1º grau. Após apresentar a resolução de três problemas, propõem alguns sistemas de inequações para serem resolvidos.

Livro 2: Inicia o conteúdo sistemas de inequações do 1º grau com a definição e com exemplos. Não apresenta problemas para serem resolvidos.

2. São propostas atividades do tipo pontuação, traços ou interpretação global, conforme recomendação de Duval, nos livros?

Livro 1: Propõe algumas atividades de pontos e outras de traços e consideramos as atividades de interpretação global os problemas de programação linear.

Livro 2: Só apresenta atividades de pontos e traços.

3. Propõe atividades sobre as variáveis visuais da equação ou inequação em relação aos gráficos?

Nenhum dos dois livros analisados por nós propõe atividades que focalizem as variáveis visuais com suas diferentes representações gráficas.

4. Quais são os registros de representações usados?

Livro 1: Algébrico, gráfico e língua natural.

Livro 2: Algébrico e gráfico.

5. Propõe atividade de conversão do registro língua natural para o geométrico ou algébrico?

Livro 1: Sim, no módulo que mostra os problemas de programação linear.

Livro 2: Não.

6. Propõe atividade que propicie a coordenação entre diversos registros de representação de um mesmo objeto?

Livro 1: Não propõe, porém inicia o módulo mostrando a resolução de três problemas de programação linear e usa na resolução a estratégia de coordenação e interpretação dos registros de representação algébrico, gráfico e língua natural do objeto matemático sistema de inequações do 1º grau.

Livro 2: Não traz nenhuma atividade que permita essa coordenação.

7. Faz ligação do objeto estudado com aplicação em situações do cotidiano ou profissional?

Livro 1: Faz a ligação, apresentando os problemas de programação linear.

Livro 2: Não faz essa ligação.

8. Como são apresentados os problemas de programação linear no livro analisados por nós?

Livro 1: No capítulo de Sistemas Lineares, encontramos o tópico com o título “Introdução à programação linear”. Esse tópico é iniciado informando que as equações, inequações e sistemas de equações e inequações lineares são bastante úteis na resolução de problemas da vida prática, tais como, transporte, economia e dieta. Em seguida, propõe um problema sobre dieta e os seguintes passos necessários para resolvê-lo:

1. “*Estabelecemos a função objetivo, isto é, a função que queremos maximizar ou minimizar.*
2. *Transformamos as restrições impostas ao problema num sistema de inequações lineares.*
3. *Traçamos o gráfico do polígono convexo correspondente a essas restrições, determinando as coordenadas dos seus vértices.*
4. *Calculamos os valores da função objetivo em cada um dos vértices.*
5. *O maior desses valores é o máximo; e o menor, o mínimo da função objetivo.*
6. *Voltamos ao problema e damos a sua solução “. (Dante, 1999, p.252)”.*

Depois, o autor apresenta alguns problemas de programação linear, já resolvido, e encerra o tópico propondo dois exercícios para resolução:

- o primeiro, solicitando a construção de quatro gráficos a partir dos sistemas de inequações;
- o segundo para determinar o valor máximo e o valor mínimo da função que foi dada, sujeita às restrições que foram propostas como sistema de inequações.

Livro 2: Apesar de desenvolver todos os conceitos necessários para a resolução de problemas de programação linear, não propõe problemas para serem resolvidos.

5.2 Conclusão após análise dos livros didáticos:

Após a análise dos livros, pudemos perceber que:

O livro 1 desenvolve os conteúdos que são necessários para resolver os problemas de programação linear e alguns desses problemas. Apresenta esses problemas como ponto de início do desenvolvimento do conteúdo sistema de inequações do 1º grau. A estratégia de resolução dos problemas é a algébrica e geométrica concomitantemente e o procedimento usado para encontrar o ponto de otimização é pelos vértices do polígono formado pelos segmentos da região viável. Não apresenta a resolução usando as retas paralelas.

Também percebemos que os livros analisados por nós não propõem atividades de conversão da língua natural para a representação gráfica e dessa para a representação algébrica.

Portanto verificamos que os livros não consideram todos os tipos de atividades propostas por Duval, conforme explicitamos na página 26.

6. Teste-Diagnóstico

Após a análise dos Livros didáticos, preparamos um teste que chamamos de teste-diagnóstico. Aplicamos esse teste em uma turma da 3ª série do Ensino Médio de uma Escola Estadual. O curso era noturno, e, apesar de a sala ter 38 alunos, consideramos em nossa análise apenas 33 alunos. O critério de escolha foi de não considerar para análise os alunos que haviam faltado em uma das aulas sobre sistema de inequações do 1º grau.

Na aplicação do teste, ficaram na sala de aula o pesquisador e o professor, sendo que o professor só teve a função de apresentar o pesquisador e solicitar que todos os alunos participassem da atividade. O pesquisador, antes de iniciar o teste, explicou que o mesmo seria objeto de uma dissertação de mestrado, que não iriam ser divulgados nem o nome da escola e nem dos alunos, que todos deveriam pôr o nome para uma possível entrevista em caso de dúvida e que o teste deveria ser individual.

Durante alguns momentos, pudemos observar que alguns alunos tentaram conversar com outros para buscarem possíveis respostas, pois eles identificaram o teste como uma “prova”; o pesquisador interferiu nesses momentos deixando claro que não era uma “prova”, portanto não havia a necessidade da “cola” e que cada aluno deveria se empenhar ao máximo para fazer o que sabia. A duração do teste foi de aproximadamente 80 minutos.

O nosso **objetivo no teste-diagnóstico** foi verificar:

(1) se o aluno da 3ª série do Ensino Médio têm disponíveis algumas das ferramentas necessárias para resolver os problemas de programação linear de, no máximo, duas variáveis;
(2) caso os alunos tenham essas ferramentas disponíveis, se resolvem os problemas de programação linear propostos por nós com sucesso.

6.1- Análise *a priori* e *posteriori* do teste-diagnóstico

Mostraremos a seguir a análise *a priori* e *a posteriori* das questões do teste-diagnóstico. Organizamos da seguinte forma:

- apresentação da questão;
- a análise *a priori* da questão com:
  - objetivo;
  - comentário a priori sobre a questão; e
  - solução nossa.
- análise *a posteriori* da questão:
  - resultado quantitativo;
  - acertos e observações;
  - erros; e
  - comentário *a posteriori* sobre a questão.
- análise final do teste-diagnóstico.

1ªQuestão: Represente as situações abaixo escrevendo sentenças matemáticas:

Item (a): Pensei em um número, multipliquei-o por 6 e subtraí 72 do resultado. Obtive 66.

Item (b): Somando um número real ao 3, o resultado é maior que o da multiplicação do mesmo número real por 3.

Item (c): Pensei em um número maior que –7 e menor ou igual a 10.

Item (d): Gastei R$22,00 na compra de refrigerantes e cervejas, sendo que cada litro de cerveja custa R$1,00 e cada litro de refrigerante custa R$0,80. Sei também que entre cervejas e refrigerantes comprei 25 litros.

Objetivo da questão: verificar se o aluno faz a conversão da língua natural para sentenças matemáticas. Essa questão foi dividida em quatro itens, com graus de dificuldades diferentes.

Comentário *a priori* da questão 1: Duval chama a atenção para o fato de que a conversão é pouco levada em consideração pelo educador em vista do tratamento, porém a conversão é independente e diferente da atividade do tratamento, portanto a nossa proposta é apresentar essa questão com diferentes itens e em cada item diferenciar o grau de dificuldade.

O item (a), apesar de ser uma conversão da linguagem natural para a sentença matemática, pode ser confundido com uma codificação, visto que o aluno relaciona: número desconhecido com a letra “x”, multiplicação deste número por 6 (6 . x), subtração de 72 (x. 6 – 72) e o resultado com a igualdade, formando assim a sentença. Vale ressaltar que Duval chama a atenção para a diferença entre conversão e a codificação. Para ele : “... *a codificação é a transcrição de uma representação em outro sistema semiótico*...”(Duval, 1993, p.43), enquanto que a conversão é a transformação da representação em uma outra usando outro registro.

O item (b) aumenta o grau da dificuldade, pois não é mais uma igualdade e sim uma desigualdade. Portanto, para que o aluno não aplique apenas “regras decoradas” há a necessidade da **identificação** do objeto matemático (inequações do 1º grau) e do conhecimento dos sinais usados para a conversão.

O item (c) também pode ser confundido com a codificação, principalmente quando o aluno escreve em forma de duas desigualdades. A maior dificuldade que acreditamos que os alunos irão encontrar ao escrever a situação em uma única sentença será a representação correta do sinal de maior (considerando o seu sentido invertido).

O item (d) é o que apresenta o maior grau de dificuldade a nosso ver, pois apresenta o problema com duas variáveis e não existe a linearidade de leitura que pode ser usada nos outros itens.

Item (a) - Pensei em um número, multipliquei-o por 6 e subtraí 72 do resultado. Obtive 66.

Solução nossa: $6x - 72 = 66$

Resultado:

Acertou	Errou	Branco	Total
24	7	2	33

Observações:

-22 alunos escreveram a sentença de acordo com a escrita na língua natural: $x \cdot 6 - 72 = 66$;

- 01 aluno escreveu a sentença: $6x - 72 = 66$;

- 01 aluno escreveu: $x \cdot 6 = y \rightarrow y - 72 = 66$ (A13)

Erros:

- 01 aluno escreveu a sentença errada e calculou: “x – 6 = 72 → 72 – 6 = x → x = 6”;

- 05 alunos tentaram descobrir aritmeticamente o número; e

- 01 aluno escreveu: (x.3) = (x-72 =);

Item (b) - Somando um número real ao 3, o resultado é maior que o da multiplicação do mesmo número real por 3.

Solução nossa: x + 3 > 3x

Resultado:

Acertou	Errou	Branco	Total
9	20	4	33

Observações:

- 03 alunos escreveram a sentença: x + 3 > x3 (uma leitura linear);

- 04 alunos escreveram a sentença: x + 3 > 3x (uma leitura com interpretação);

- 01 aluno escreveu: x + 3 = y → y > x.3 (A13);

- 01 aluno escreveu: { R + 3 > R . 3} (A23).

Erros:

- 01 aluno escreveu: x + 3 = y. 3 = 0 (A21);

- 01 aluno escreveu: x + 3 = y (A24);

- 01 aluno escreveu: x + 3 > 6 (A05);

- 04 alunos escreveram: x + 3 ≥ x.3;

- 02 alunos escreveram: x + 3 = < x.3;

- 02 alunos escreveram: x + 3 > 3;

- 02 alunos escreveram: $x + 3 < 3x$;

- 01 aluno escreveu: $x + 3 = x.3$;

- 01 aluno escreveu: $x + 3 = y . 3$;

- 01 aluno escreveu $x + 3 = 2x$;

- 01 aluno escreveu: $x + 3 = 10$ $(3 . 3 = 9)$;

- 01 aluno escreveu apenas o número 9; e

- 02 alunos escreveram expressões aritméticas: $1 \times 3 = 3$; $7 + 3 = 3$.

Item (c) : Pensei em um número maior que –7 e menor ou igual a 10.

Solução nossa: $-7 < x \leq 10$

Resultado:

Acertou	Errou	Branco	Total
5	25	3	33

Observações:

- 03 alunos escreveram a sentença: $-7 < x \leq 10$;

- 02 alunos escreveram a sentença $\begin{cases} x > -7 \\ x \leq 10 \end{cases}$

Erros:

- 15 alunos erraram na posição dos sinais: ($-7 > x \leq 10$);

- 05 alunos consideraram apenas alguns números:

    - todos os números positivos: 1,2,3,4,5,6,7,8.... (A25);

    - um único número pertencente ao intervalo: (A29, A32 e A09);

- somente os números inteiros → "x = (8,9,10)". (Vale ressaltar que apesar de não estar escrito no enunciado, foi comentado que estávamos considerando o conjunto dos números reais);

- 05 alunos escreveram o sistema de inequações de forma errada, invertendo os sinais e não considerando a chaves.

Item (d): Gastei R$22,00 na compra de refrigerantes e cervejas, sendo que cada litro de cerveja custa R$1,00 e cada litro de refrigerante custa R$0,80. Sei também que entre cervejas e refrigerantes comprei 25 litros.

Solução nossa: $\begin{cases} x + 0{,}80y = 22 \\ x + y = 25 \end{cases}$

Resultado:

Acertou parcialmente	Errou	Branco	Total
1	14	18	33

Observações:

01 aluno escreveu x.1,00 + y.0,80 = 22, uma das equações e consideramos o acerto parcial.

Erros:

- A grande maioria dos alunos escreveu qualquer equação que continha todos os valores juntos e duas variáveis. Exemplo: " 25(1.x + 0,80.y) = 22".

Outros erros:

- " 25,00 . 1,00 = 22,00 e 25,00 . 0,80 = 22,00" (A22) " 25 : 1,80 = 22,00";

- "22,00 . 1 = 25 . 8";

- "(25. 1). 80 = 22";

- “25,00 . 1,00 = 22,00 e 25,00 . 0,80 = 22,00”

Comentários a posteriori da questão 1:

Percebemos, com essa questão, a dificuldade dos alunos em fazer a conversão entre a linguagem natural e a sentença matemática. No decorrer do teste, observamos que muitos alunos que sabem tratar certas equações e até mesmo inequações, não conseguem fazer a conversão, confirmando o que Duval diz: que a conversão é uma atividade diferente e independente da atividade de tratamento e pouco explorada no processo de ensino e aprendizagem. Questionamos alguns dos alunos a respeito dos erros do item (d). Os alunos disseram que não sabiam a resposta, mas que o professor disse sempre escrever algo, pois poderia ser considerado na nota. Podemos relacionar esse comportamento dos alunos com o que Brousseau (apud, Silva, 1999) chama de contrato didático[5].

Por tratarem o teste-diagnóstico como uma “prova”, mesmo que procurássemos esclarecer que não era, os alunos buscaram escrever qualquer informação na questão, na tentativa de ir ao encontro das expectativas do professor.

[5]Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor, que são esperados pelos alunos, e o conjunto de comportamentos do aluno, que são esperados pelo professor...Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro. (apud, Silva, 1999, pg. 43-44).

2ª Questão: Considerando o plano cartesiano e o conjunto dos números reais, represente graficamente as seguintes situações:

(a) $x + y = 5$

(b) $x \geq 1$

(c) $y \leq 6$

(d) A região do plano que tem pontos (x,y) com abscissa positiva.

Objetivo da questão: verificar se o aluno faz a conversão da sentença matemática para o gráfico, porém, em cada item, propusemos uma situação diferente.

Comentário a priori da questão 2: essa questão nos mostra a diferença entre o tratamento e a conversão de registros, pois muitos alunos que sabem fazer o tratamento de equações ou mesmo inequações algebricamente ou geometricamente, não têm habilidade em converter do registro algébrico para o geométrico. Duval aponta como causas dessas dificuldades o não-tratamento de atividades no processo ensino e aprendizagem que contemplem diferentes formas de apresentação de atividades relacionadas à representação gráfica (pontuação, traços e interpretação global), explicitação das variáveis visuais e seus significados (símbolos de relações, operações variáveis, coeficientes e constantes) e atividades que permitam que o aluno interprete e relacione gráficos com sentenças matemáticas e situações contextualizadas da vida real.

O item (a) é do qual esperamos o menor número de erros, pois é uma atividade que é explorada nos livros didáticos; o item (b) foi proposto para observar como o aluno trata a atividade de dividir o plano em dois semiplanos; o **c** tem a mesma finalidade do item anterior mudando a variável. O item **d** diferencia dos anteriores em razão de a proposição ser feita em língua natural, apresentar o ponto genérico (x,y) e deixar claro novamente que é um plano, esperando assim que os alunos representem regiões. Duval aplicou o item (d) em 105 alunos e 67% deles acertaram.

Item (a) x + y = 5

Resultado:

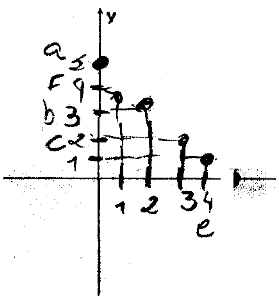
Acertou	Errou	Branco	Total
1	12	20	33

Observações:

Apenas um aluno representou a reta certa. (A32)

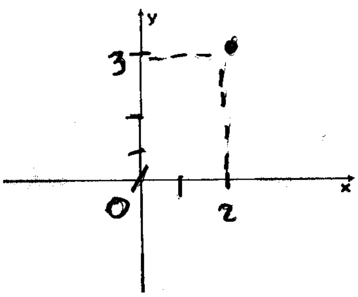
Erros:

(A11): Representou apenas alguns pontos pertencentes à reta. (Figura 1).



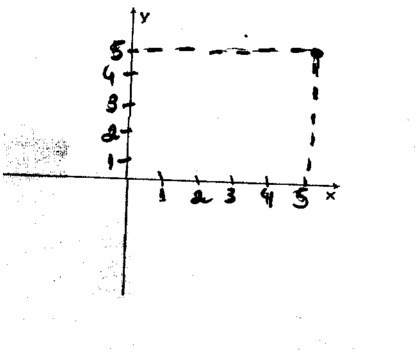
(Figura 1)

(A16), (A31), (A27), (A29), (A21) e (A05) representaram apenas um ponto que pertence à reta. Exemplo: (Figura 2).



(Figura 2)

(A24), (A14), (A13), (A10) e (A17) representaram apenas um ponto que não pertence à reta. Exemplo:



(Figura 3)

item (b) x ≥ 1

Resultado:

Acertou	Errou	Branco	Total
4	13	16	33

Erros:

- (A20), (A11), (A09), (A23) e (A08) representaram apenas os pontos x ≥ 1 pertencentes à abscissa. (Figura 2b1).

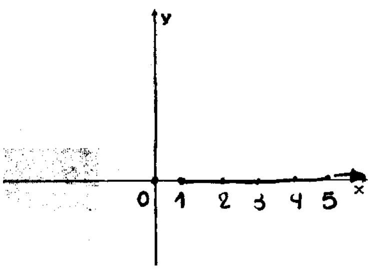
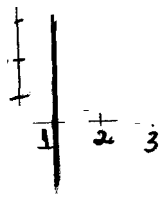


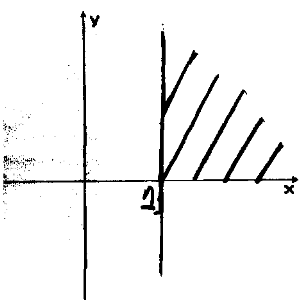
Figura 2b1

- (A10) representou a reta que contém os pontos (1,y). (Figura 2b2).



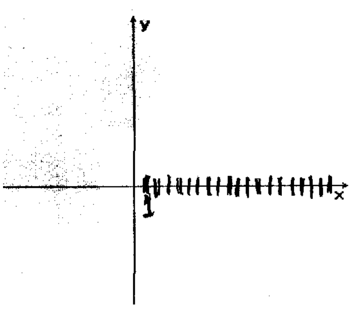
(Figura 2b2)

- (A12) e (A15) representaram a região que tem abscissa maior que 1 e ordenada maior que zero. (Figura 2b3).



(Figura 2b3)

(A02) representou vários pontos no eixo das abscissas com $x \geq 1$. (Figura 2b4).



(Figura 2b4)

(A05): representou a região com abscissa maior que um e ordenada menor que zero;

(A19): representou a região $x \leq 1$;

(A27): marcou o ponto (-1,1) no gráfico;

(A29): marcou o ponto (1,1) no gráfico;

item (c) $y \leq 6$

Resultado:

Acertou	Errou	Branco	Total
4	17	12	33

Observação: os quatro alunos que acertaram o item **c** foram os mesmos que acertaram o (b).

Erros: (os erros, na maioria, foram dos mesmos tipos do item **b**).

(A15), (A10) e (A05): representaram a reta passando por seis na ordenada. (Figura 2c1).

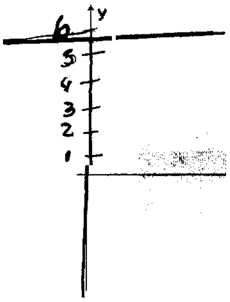


Figura 2c1

(A22), (A07), (A20) e (A11): representaram o segmento de 0 a 6 no eixo das ordenadas. (Figura 2c2).

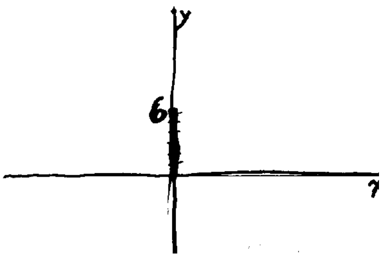


Figura 2c2

(A25), (A19), (A09) e (A02): representaram alguns pontos do eixo das ordenadas. (Figura 2c3).

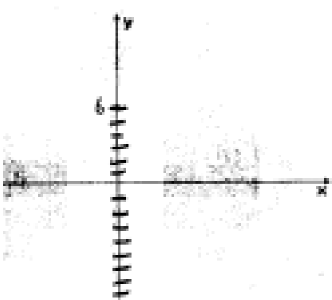


Figura 2c3

(A26) representou uma reta paralela ao eixo das abscissas e passando por -6 nas ordenadas;

(A08), (A23) e (A17): representou a semi-reta contida no eixo das ordenadas com origem em 6 e sentido infinito negativo;

(A21): representou o ponto (6,2);

(A18): representou a região y ≤ -6.

Item (d) A região do plano que tem pontos (x,y) com abscissa positiva.

Resultado:

Acertou	Errou	Branco	Total
1	20	12	33

Observações:

(1) O único aluno que acertou foi o mesmo que solucionou corretamente todos os itens desta questão; e,

(2) durante a aplicação, um aluno questionou o que era abscissa. O pesquisador foi à lousa e mostrou em um sistema cartesiano e em um par ordenado os pontos que representavam a abscissa.

Erros:

(A08), (A25), (A19), (A12), (A14) e (A13): representaram a região do 1º quadrante. (Figura 2d1).

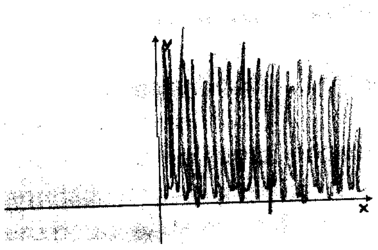


Figura 2d1

(A15), (A20), (A07), (A22), (A11), (A02) e (A09): representaram a semi-reta contida no eixo das abscissas. (Figura 2d2).

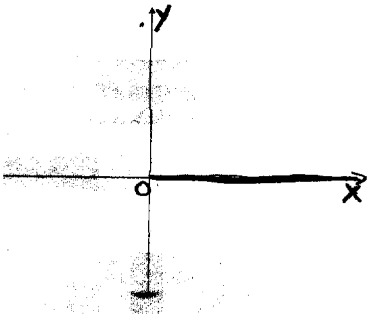


Figura 2d2

(A29), (A27), (A31), (A24), (A06), (A26) e (A21): representaram apenas um ponto no 1º quadrante.

Comentário a posteriori da questão 2:

Essa questão nos permitiu observar que alguns alunos provavelmente não têm o conceito de sistema de inequações do 1º grau, apresentam dificuldades na conversão da sentença matemática para sua representação gráfica e, principalmente, na não-diferenciação ao representar pontos na reta real e pontos no plano. Percebemos essas dificuldades quando os alunos consideram em suas respostas apenas parte da região: os pontos sobre o eixo e não a região toda.

3ª Questão: Encontre o ponto de intersecção das retas representadas pelo sistema de equações abaixo e mostre no gráfico esse ponto.

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Objetivo da questão: verificar como o aluno resolve o sistema de equações e se ele sabe fazer a leitura e interpretação do gráfico, representando graficamente e encontrando a solução.

Comentário a priori da questão 3: essa questão é importante, pois permite ao aluno fazer uma interpretação da resposta de um sistema de equações lineares e sua representação gráfica. (Uma solução possível e determinada implica em retas concorrentes).

Resultado:

Acertou	Errou	Branco	Total
11	12	10	33

Observação: os alunos que acertaram, resolveram o sistema pelo método da adição e mostraram o ponto no gráfico.

Erros:

(A14), (A12), (A15), (A07) e (A28): erraram algebricamente e representaram corretamente o ponto encontrado. Esses alunos cometeram o mesmo erro. (Figura 3.1).

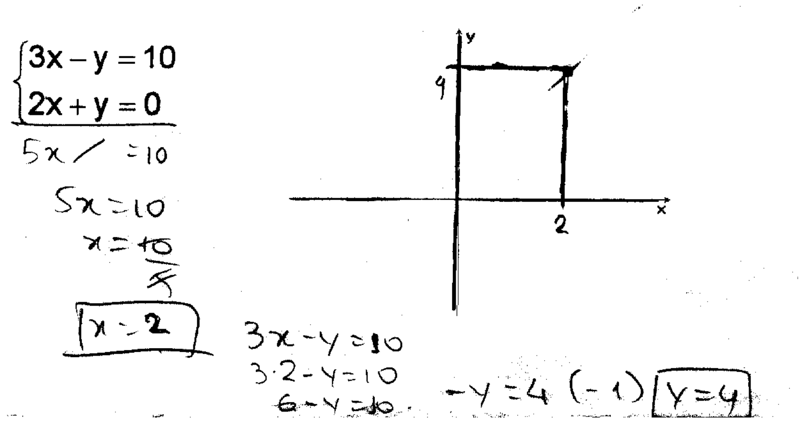


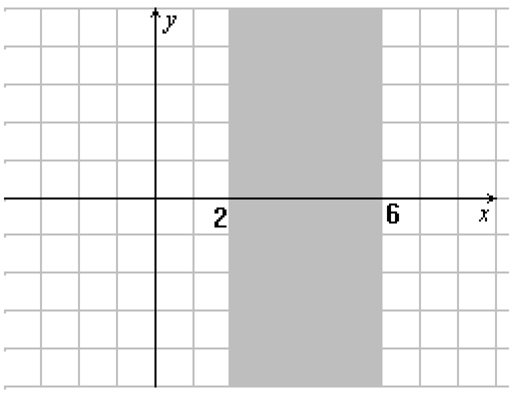
Figura 3.1

Os outros alunos que erraram mostraram qualquer ponto no gráfico sem explicitar os cálculos.

Comentários a posteriori da questão 3:

Essa questão mostrou que alguns alunos sabem tratar do sistema de equações e representar sua solução no gráfico. Esperávamos este resultado positivo, pois são atividades de tratamento essas de resolver equações e representar pontos no gráfico, sobre as quais Duval já ressaltou que são as mais levadas em consideração no processo ensino e aprendizagem. O erro no tratamento da equação: $-y = 4 \Rightarrow y = 4$, acreditamos que aparece pelo fato de o aluno não relacionar a resolução da equação com as propriedades da adição e multiplicação, pois a eles são apresentadas as regrinhas do “passa-para-lá-e-passa-para-cá, trocando de sinal” pelos professores, sem antes saberem os significados dessas regras.

4ª Questão: Considerando a região hachurada no plano cartesiano, marque 3 pontos pertencentes a essa região no gráfico e:



(a) escreva 3 pontos que pertençam a essa região

_______________________________.

(b) represente algebricamente a região hachurada

__________________________.

Objetivo da questão: verificar se o aluno sabe fazer a leitura e interpretação do gráfico quando se trata de uma região.

Comentário a priori da questão 4: estamos considerando essa questão dividida em duas partes: - primeiramente é solicitado no enunciado para representar três pontos pertencentes a essa região no gráfico, depois, a segunda parte é formada pelos itens **a** e **b**. De acordo com a nossa análise dos livros didáticos, observamos que a primeira parte da questão é uma atividade que sempre é explorada, portanto esperamos um grande número de acertos; porém a segunda parte é composta por atividades pouco solicitadas, por isso esperamos menos sucesso.

Resultado da primeira parte:

Acertou	Errou	Branco	Total

15	00	18	33

Observação: consideramos que o número de alunos que deixou a questão em branco foi alto por pensar que era somente os itens (a) e (b) para resolver.

Item (a)

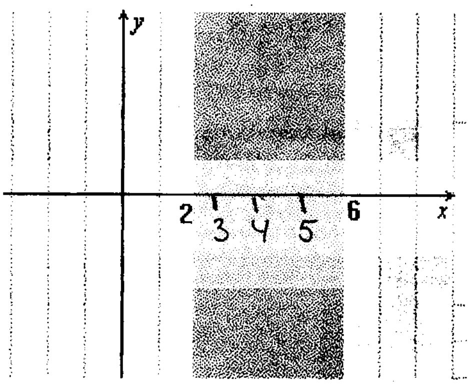
Resultado:

Acertou	Errou	Branco	Total
29	00	04	33

Observações:

- Dentre os alunos que acertaram, um deles considerou qualquer ordenada: "(3,y), (4,y) e (5,y)" e o outro determinou (3,4); e

- os outros 27 alunos representaram pontos sobre a abscissa. (Figura 4.1).



(Figura 4.1)

Item (b)

Resultados:

Acerto	Errou	Branco	Total
04	22	7	33

Erros:

- 05 alunos escreveram a resposta com erros de sintaxe;

Exemplos: (A13): $\geq 2 \leq 6$; (A15): $2 \leq x \geq 6$; (A20): $x \geq 2 \geq 6$.

- 03 alunos responderam alguns números. Exemplo: A31 (3,4,5)

- 14 alunos cometeram erros diversos.

Comentários a posteriori da questão 4:

A primeira parte da questão 4 mostrou que o desenvolvimento deste tipo de atividade nas aulas fez com que o número de acertos fosse grande. Percebemos também a dificuldade dos alunos em tratar com símbolos da matemática (<, >, = ...).

5ª Questão Um jovem atleta sente-se atraído pela prática de dois esportes: natação e ciclismo. Sabe-se por experiência que:

A natação exige um gasto em mensalidade do clube e deslocamento até a piscina que pode ser expresso em um custo médio de R$ 3,00 por sessão de treinamento de uma hora.

O ciclismo mais simples acaba custando R$ 2,00 a sessão de uma hora.

O orçamento do rapaz dispõe de R$ 72,00 para seu treinamento.

Sabendo-se que, por questões de saúde, o rapaz poderá fazer no máximo 18 horas de ciclismo por mês, qual é a quantidade de natação e ciclismo que ele poderá fazer de modo que tenha o maior número possível de horas de treinamento?

Objetivo da questão: verificar a estratégia de resolução usada pelo aluno para abordar e resolver um Problema com um contexto da vida real.

Comentário a priori da questão 5: Não esperamos um alto número de sucesso na resolução do problema visto que, apesar de ser possível resolvê-lo aritmeticamente, pois uma das respostas foi dada no enunciado - 18 horas -, o fato de ser proposto em língua natural, ser um enunciado extenso e ser uma das últimas questões pode fazer com que os alunos não se dediquem a ele. Consideramos que todas as soluções com sucesso devem ser as que os alunos abordarem aritmeticamente e não algebricamente ou geometricamente.

Resolução nossa:

Aritmético:

A hora de treinamento da natação é de menor custo do que a de ciclismo. Para conseguir o maior número possível de horas de treinamento, deve-se fazer o máximo de ciclismo - 18 horas -, isso representa R$ 36,00. Como o orçamento dispõe de R$ 72,00, fazendo R$ 72,00 – R$ 36,00, encontramos a quantia que sobra de dinheiro para a natação. Dividindo R$ 36,00 por R$ 3,00 (preço da hora de natação), encontramos a quantidade máxima de horas de natação, que são 12 horas. A resposta do problema é: 18 horas de ciclismo, mais 12 horas de natação, totalizando 40 horas de treinamento.

Algébrico

x → quantidade de horas de natação;
y → quantidade horas de ciclismo;

G → gasto com o treinamento.

$G = 3x + 2y \quad (G = 72)$

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 72 \\ y \leq 18 \end{cases}$$

Algébrica: como o ciclismo tem um custo menor que a natação, a vantagem é fazer o máximo de ciclismo possível, que são 18 horas, e completar com as horas de natação.

$3x + 2(18) = 72 \Rightarrow x = 12$

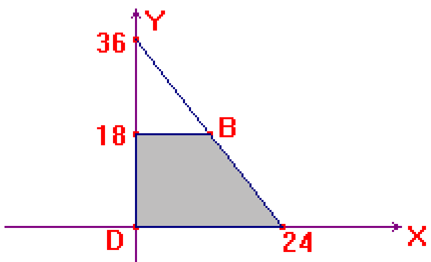
O maior número possível de horas de treinamento: 18 horas de ciclismo e 12 horas de natação.

Geométrico:

Temos:

$G = 3x + 2y \quad (G = 72)$

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 72 \\ y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Representando geometricamente:

Os vértices do polígono formado pelos segmentos que limitam a região das possíveis respostas são: D = (0,0); A = (0,18); B = (24,0) e C = (12,18). Entre eles o que oferece o maior número possível de horas de treinamento é o (12,18). Portanto, a resposta é: 18 horas de ciclismo e 12 horas de natação.

Resultado da questão 5:

Acertou	Errou	Branco	Total
14	05	14	33

Observação:

Estratégias ou formas de apresentação dos alunos que acertaram:

A15 – escreveu: “ se poderá fazer no máximo 18 h de ciclismo gastará R$ 36,00 então sobrará R$ 36,00 do orçamento que, portanto, poderá fazer 12 h de ciclismo”. (Mantemos a redação original).

-09 alunos mostraram as operações 18 x 2 = 36; 72 – 36,00 = 36,00 e $\frac{36,00}{3}$ = 12 e, em seguida, a resposta.

-04 alunos só apresentaram a resposta.

O número de sucesso nessa questão foi alto, pois a solução aritmética era simples e, os alunos que a perceberam, com apenas duas operações resolveram. Os alunos que tentaram resolver algebricamente não obtiveram sucesso e nenhum aluno abordou geometricamente nem algebricamente.

Erros:

(A19): “18 x = 3 $\Rightarrow$ x = $\frac{3}{18}$ $\Rightarrow$ x = 6 , resposta: 4 horas de natação e 18 horas de ciclismo”;

(A18): “12 + 8 = 20 horas mensais → resposta: 20 horas mensais e 52,00 por mês” ;

(A22): “2,00 . 72 = 60 → 3,00 x = 60 → x = $\frac{60}{3,00}$ → x = 20,00”;

(A06): “29 horas”;

(A05): “3x = 72 → 216” .

Comentários a posteriori da questão 5:

A questão 5 nos surpreendeu pelo alto número de sucesso, pois mesmo sendo um problema que não traz nenhum fator complicador para sua resolução, o fato de o enunciado ser longo e vir após uma seqüência de questões cujo sucesso foi baixo, esperávamos que os alunos acreditassem ser uma questão difícil e nem tentassem resolver. Foi importante constatar que o enunciado não afasta a tentativa de resolução por parte do aluno e que, mesmo sem deixar explícitas as sentenças matemáticas, quando o problema permite um raciocínio aritmético, o aluno resolve.

6ª **Questão** Um comerciante vende dois tipos de artigos, **A** e **B**. Na venda do artigo **A**, obtém um lucro de R$ 20,00 por unidade e, na venda do artigo **B**, um lucro de R$ 30,00. Em seu depósito só cabem 100 unidades e sabe-se que, por compromissos já assumidos, ele venderá pelo menos 15 unidades do artigo tipo A e 25 do artigo tipo B. O distribuidor pode entregar ao comerciante, no máximo, 60 artigos A e 50 artigos B. Quantos artigos de cada tipo, o comerciante deverá encomendar ao distribuidor para que, supondo que os venda todos, obtenha o lucro máximo?

Objetivo da questão: verificar a estratégia de resolução usada pelo aluno para abordar e resolver um Problema de Programação Linear.

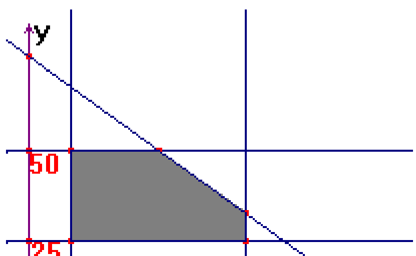
Comentários a priori sobre a questão 6: apesar de a questão 6 ser proposta da mesma forma da 5, por meio de um enunciado na língua natural, acreditamos que o número de sucesso seja menor, pois na questão 5 uma das variáveis foi fornecida (18 h) e nesta questão não. Acreditamos que os alunos que obtiverem sucesso na resolução irão usar estratégias aritméticas para resolvê-la.

Resolução nossa: poderíamos abordar usando outras estratégias para resolver esse problema, até mais econômicas em termos de cálculos, porém, como nosso interesse está nas conversões e nas articulações entre registros, vamos resolvê-lo articulando os registros algébricos e gráficos.

Considerando: x → quantidade de unidades do produto A;

y → quantidade de unidades do produto B;

temos:



$$\begin{cases} x + y \leq 100 \\ x \geq 15 \\ y \geq 25 \\ x \leq 60 \\ y \leq 50 \end{cases}$$

Sabendo-se que: Lucro (L) = 20x + 30 y

Representaremos o sistema acima graficamente:

Vértices do Polígono: (15,25); (15,50), (50,50), (60,40) e (60,25).

Como um deles é a solução do problema, temos que: (50,50) é a solução, pois é o que oferece o maior lucro e atende a todas as restrições. Portanto, a nossa resposta é 50 unidades de cada, obtendo assim um lucro de R$ 2.500,00.

Resultado da questão 6:

Acertou	Errou	Branco	Total
00	03	30	33

Observações: (1) Nenhum aluno apresentou qualquer rascunho com indícios de ter pensado em uma estratégia gráfica para resolução; (2) Alguns alunos apresentaram apenas os dados do problema e consideramos isso como resposta em branco .

Erros:

(A15): "se o distribuidor, no máximo, entrega 60 artigos do tipo A e 50 do tipo B; o total de encomenda será de 110 artigos para obter o lucro máximo."

(A25): "Deve encomendar 210 unidades, pois 100 são para o seu depósito e o resto para vender".

-08 alunos apresentaram apenas os dados e uma resposta errada sem a justificativa.

Comentários a posteriori da questão 6:

Observamos a falta de articulação entre as formas de registros dos alunos. Eles retiraram os dados, fizeram uma operação e apresentaram o resultado sem ter a volta ao registro na língua natural para observar que as respostas acima de 100 unidades não seriam válidas, pois no depósito cabe, no máximo, essa quantidade.

7ª Questão: Resolva o sistema de inequações, considerando o conjunto dos números reais como universo:

$$\begin{cases} x - y \geq 2 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$

Objetivo da questão: verificar se o aluno resolve o sistema de inequações e qual é a estratégia de resolução.

Comentário a priori da questão: Esperamos que os alunos abordem a questão usando a estratégia de resolver algebricamente, como se fosse um sistema de equações, e depois analisem e apresentem o resultado.

Resultado:

Acertou	Errou	Branco	Total
00	11	22	33

Observação: Nenhum dos alunos que tentou resolver a questão usou a estratégia geométrica.

Erros:

(A16), (A15), (A25) e (A01): resolveram a questão como se fosse um sistema de equações e encontraram as respostas: $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{-1}{2}$;

-A24: usou a mesma estratégia do A16, porém usou o sinal $\leq$ e não o sinal de =, a resposta apresentada foi: $x \leq \frac{3}{2}$ e $y \leq \frac{-1}{2}$;

- 06 alunos não explicitaram as estratégias e apresentaram respostas erradas.

Comentários *a posteriori* da questão 7:

Muitos alunos erraram a questão 7, por utilizarem a estratégia de resolução de um sistema de equações para resolver um sistema de inequações, e não consideraram as diferenças entre eles. Este tipo de erro pode estar relacionado ao que Brousseau diz: "*o erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se crê nas teorias empíricas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seus sucessos, e que agora se revela falso, ou simplesmente mal adaptado".* (apud, Igliori, 1999, pg.99-100).

6.2 Análise final do teste diagnóstico:

Podemos, de um modo geral, observar que apesar dessa turma estar no final do Ensino Médio e ter estudado, segundo a professora, o conteúdo sistema de inequações do 1º grau, os alunos não têm o conceito desse objeto matemático e apresentam dificuldades tais como:

- conversão de linguagem natural para sentença matemática;
- conversão de sentenças matemáticas para a sua representação gráfica;
- leitura e interpretação de gráficos;
- representação gráfica de inequações; e
- resolução de sistemas de inequações.

Também observamos que não faz parte das estratégias dos alunos usar, na tentativa de resolução dos problemas ou mesmo dos sistemas, o recurso gráfico. A grande maioria fica na busca de cálculos algébricos e aritméticos usando os dados do problema e as palavras-chave.

Por meio do teste diagnóstico pudemos perceber que, apesar de os alunos terem algumas noções sobre os conceitos necessários para resolver alguns dos problemas de programação linear, eles não articulam nem disponibilizam esses conhecimentos no momento da abordagem dos problemas.

7- Seqüência Didática

Elaboramos a seqüência didática baseada na teoria de Duval que trata das conversões e coordenações dos registros de representações.

(A) Objetivos da seqüência didática:

I. Propor atividades que permitam ao aluno estudar o objeto sistema de inequações do 1º grau com as conversões entre os seus registros de representação:

   i. Língua corrente para sentença matemática;

   ii. Sentença matemática para gráficos;

   iii. Gráficos para língua corrente.

II. Propor atividades de coordenação entre registros de representação:

1. Resolução de problemas por uma estratégia algébrica e geométrica concomitantemente.

(B) Descrição do experimento:

Nossa seqüência didática foi desenvolvida para ser trabalhada com alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola estadual do Estado de São Paulo. Os alunos trabalharam em duplas. A experimentação realizou-se em seis sessões de sessenta minutos cada.

Houve um observador na experimentação que, juntamente com o pesquisador, esteve atento à resolução e às reações dos alunos e da professora. Ambos anotaram as observações as quais foram utilizadas na análise dos resultados. O observador e o pesquisador não tiraram dúvidas, nem indicaram soluções aos alunos, porém o pesquisador conversou com a professora antes de cada sessão.

Na conversa entre o pesquisador e a professora foram destacados os seguintes pontos:

- Como seria desenvolvida a seqüência; (o desenvolvimento da seqüência deverá ser feito em duplas);
- O objetivo da seqüência;
- Quais os conteúdos matemáticos que apareceriam nas atividades e que deveriam ser discutidos; e
- A ordem das atividades.

Vale ressaltar que a professora da turma está na carreira do magistério há 15 anos e acredita que a metodologia de buscar problema para explorar os conceitos matemáticos envolvidos é uma boa alternativa para o processo ensino-aprendizagem, porém diz que suas aulas são baseadas no livro didático e "só dá tempo de propor alguns desafios para a turma, no máximo duas aulas do mês, pois, caso contrário, o conteúdo atrasa".

(c) Grupo pesquisado

Participaram das atividades doze duplas, com idades que variavam entre 17 e 23 anos, porém consideramos para a nossa análise apenas 5 duplas. O único critério para analisar apenas as cinco duplas foi o fato de que, nas outras duplas, um ou os dois participantes faltaram em uma ou mais sessão. Nenhum dos participantes havia sido reprovado na 2ª ou 3ª série do Ensino Médio.

A experimentação aconteceu durante as aulas de matemática e foi afirmado aos alunos que seria um objeto de pesquisa para uma dissertação de mestrado, porém, deixado claro que não seriam divulgados resultados com identificações. A professora comentou que a participação deles estaria sendo avaliada como em qualquer outro momento de aula.

(D) Justificativas

Buscamos elaborar uma seqüência didática considerando as recomendações de Duval para o processo de ensino-aprendizagem, isto é, levar em consideração as atividades de conversão, tratamento e coordenação dos registros de representação de um determinado objeto matemático. Porém, como o nosso objetivo é investigar se a inserção dessas atividades e dos problemas de otimização contribuem com o processo ensino-aprendizagem, nós não interferimos na elaboração das sessões 2 e 3, que foram propostas pela professora e com poucas variações em relação às aulas que ela propôs para a turma (A), no ano anterior.

Também iniciamos a nossa seqüência propondo problemas que poderiam ser resolvidos com os conceitos e procedimentos que seriam estudados. É grande a importância da resolução de problema no processo ensino-aprendizagem, pois: "*... é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente".* (PCN, p.251).

(E) Etapas da seqüência:

1ª etapa: Proposição de problemas que podem ser resolvidos usando como ferramenta o objeto sistema de inequações – essa foi a nossa atividade introdutória e durou uma sessão de 60 minutos;

2ª etapa: a aula ministrada pela professora da turma sobre sistema de inequações, com exemplos e exercícios – foram duas sessões de 60 minutos cada;

3ª etapa: atividades complementares propostas por nós: foram duas sessões de 60 minutos.

4ª etapa: Pós-teste – uma sessão de 60 minutos.

Sessão 1: Atividade Introdutória

Análise a priori

Objetivo: observar as estratégias que os alunos irão utilizar para resolver os problemas, quais são as ferramentas que eles têm disponíveis e, a partir dessas observações, introduzir o objeto matemático sistema de inequações do 1º grau.

Nossas considerações:

Buscamos, nesta atividade, introduzir o conceito de sistemas de inequações do 1º grau. Estamos iniciando a seqüência didática, propondo problemas em língua natural, pela importância que eles têm no processo ensino-aprendizagem, visto que o estudo por diletantismo é um atrativo para algumas pessoas, mas não para todas. De fato, a maioria das pessoas sente-se mais motivada ao estudo quando é capaz de perceber que o conhecimento adquirido será útil para sua vida.

Escolhemos o exercício (1) por ser um problema de otimização que pode ser resolvido usando o sistema de inequações do 1º grau, porém pelo número reduzido de restrições, o aluno poderá resolvê-lo usando os seus conhecimentos aritméticos.

O exercício (2) também é um problema de otimização, porém por ter um número maior de restrições, aumenta a dificuldade. Possivelmente, algumas duplas tentarão resolver aritmeticamente, mas o nosso interesse maior é que a professora, após as duplas discutirem as possibilidades de resoluções, interfira dando “dicas” para sugerir a resolução por meio de sistemas de inequações do 1º grau.

O nosso interesse em estimular os alunos a resolverem o problema por meio de sistemas de inequações, além de introduzir a importância do estudo desse assunto, está em seguir a recomendação de Duval no sentido de apresentar diversos registros de representações algébricos e geométricos concomitantemente e discutir as sua diferenças. A importância de ter diversas estratégias de resolução, segundo Duval (1988), permiti ao aluno escolher por estratégias mais “econômicas” em relação ao cálculo e que permita uma maior possibilidade de acerto. Teremos, nesse exercício, a possibilidade de discutir as diferentes representações gráficas de acordo com as suas diferentes representações algébricas, por exemplo:

- restrição apenas para a ordenada: y   200;

- um intervalo com restrições: 200   x   900;

- uma inequação com duas variáveis: x + y   1.200.

Vale ressaltar que, devido ao tempo de cada sessão e ao conteúdo de nosso interesse, escolhemos problemas em que as restrições e a função objetivo podem ser representadas por inequações e equações do 1º grau e a região do gráfico que contém a resposta é limitada. O procedimento de resolução que será focado é o da “regra do polígono”, isto é, um dos vértices do polígono formado pela região limitada é solução do problema.

Exercício 1:

Um sitiante está planejando sua estratégia de plantio para o próximo ano. Por informações obtidas nos órgãos governamentais, sabe que as culturas de trigo e arroz serão as mais rentáveis na próxima safra. Sendo a área cultivável do sítio de 10.000 m^2 e para atender as demandas internas do sítio, é imperativo que se plantem 1.000 m^2 de trigo e 3.000 m^2 de arroz, e o lucro por kg de produção seja de aproximadamente R$ 10,00 o do trigo e R$ 4,00 o do arroz. Supondo que o sitiante venda toda sua produção, responda:

(a) Quantos metros quadrados de trigo e de arroz, o sitiante deverá plantar de modo que atenda às necessidades do sítio e obtenha o maior lucro possível? Qual será esse lucro?

Resolução nossa:

Como o trigo é o produto que tem o lucro maior na venda, devemos plantar o máximo de trigo e o suficiente de arroz para atender à demanda do sítio. Portanto, devemos plantar 3.000 m^2 de arroz e 7.000 m^2 de trigo. O lucro será: 4,00 x 3.000 + 12,00 X 7.000 = R$ 82.000,00

(b) Supondo que o sitiante saiba que irá vender no máximo a produção correspondente a 4.000 m^2 da área de plantação de trigo, qual deverá ser a sua nova divisão de plantação para obter o maior lucro possível? Qual será esse lucro?

Resolução nossa:

Deverá novamente priorizar a plantação de trigo que oferece um lucro maior, mas, considerando que no máximo serão vendidos 4.000 m^2, deverá plantar: 6.000 m^2 de arroz e 4.000 m^2 de trigo.

Lucro: 6.000 x 4,00 + 4.000 x 7,00 = R$ 52.000,00

O problema que resolvemos acima é estudado pela disciplina de Pesquisa Operacional. Podemos caracterizar esse problema como sendo de otimização ou programação linear, pois as suas variáveis são todas lineares e estamos buscando otimizar uma situação que pode ser escrita na forma de uma função do 1º grau.

Vamos resolver outro:

Exercício (2):

Um determinado laboratório produz dois tipos de medicamentos: tipo **A** e **B**. Por mês ele tem garantida a venda de, no mínimo, 200 litros e, no máximo, 900 litros do medicamento **A**. Em relação ao medicamento **B** tem garantida a venda de, no mínimo, 200 litros, e, no máximo, 500 litros. A produção máxima por mês do laboratório é de 1.200 litros de medicamento. Temos que a Receita (lucro – despesa) por litro do medicamento **A** é de R$ 400,00 e do **B** é R$ 800,00. Considerando as condições acima e supondo que o laboratório venda tudo que produzir, responda:

(a) Qual deverá ser a produção mensal do laboratório para obter o maior lucro possível?

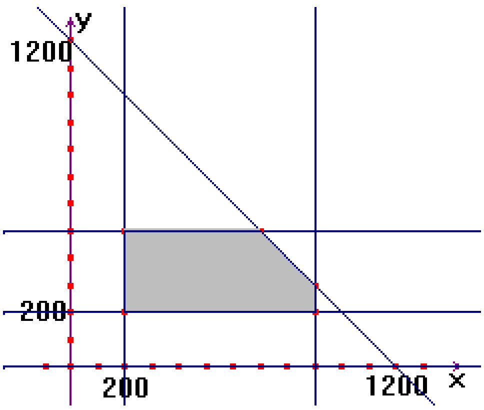
(b) Qual será o lucro do laboratório considerando apenas a venda garantida?

Resolução nossa:

(1) Escrevendo as restrições:

$$\begin{cases} 200 \leq x \leq 900 \\ y \geq 200 \\ y \leq 500 \\ x + y \leq 1.200 \end{cases}$$

(2) Representando em um sistema cartesiano as restrições:



(3) Encontrando os vértices do polígono:

A = (200,200); B = (200,500); C = (700,500) e D = (900,300).E=(900,200)

(4) Substituindo na função objetivo: R = 400 . x + 800 . y

R = 400 x 200 + 800 x 200 = R$ 240.000,00

R = 400 x 200 + 800 x 500 = R$ 480.000,00

R = 400 x 700 + 800 x 500 = R$ 680.000,00

R = 400 x 900 + 800 x 300 = R$ 600.000,00

R = 400 X 900 + 800 X 200 = R$ 520.000,00

(5) Respostas:

a. Para obter o maior lucro possível, deverá produzir 500 litros do medicamento A e 700 litros do medicamento B.

b. Se produzir 200 litros de cada medicamento, atenderá à venda garantida e terá o lucro de R$ 240.000,00.

Observação: Sempre que temos um problema de programação linear com soluções possíveis em uma região limitada por segmentos formando um polígono, o ponto de máximo ou de mínimo é um dos vértices do polígono.

Comentário sobre a sessão:

Antes de iniciar a primeira sessão, conversamos com a professora da turma sobre o objetivo da atividade: introduzir o estudo de sistemas de inequações do 1º grau. Solicitamos que o trabalho fosse desenvolvido em dupla e que os próprios alunos escolhessem os seus pares. Recomendamos que, depois que os alunos resolvessem o exercício (1), fosse feita uma discussão sobre a possibilidade de uma resolução usando as estratégias de construção de gráficos e algébrica concomitantemente.

Conforme o recomendado a professora fez após 15 minutos do início do exercício (1), até então os alunos tinham começado a tirar os dados do problema e esboçar uma tentativa de resolução aritmética, uma discussão usando a lousa e mostrando as diferentes representações de restrições no plano cartesiano e as resoluções dos alunos. A estratégia de resolução proposta pelos alunos, conforme observações, ficou restrita à aritmética.

Após a discussão do exercício (1), foi proposto iniciar o (2). Das oito duplas que estavam presentes, observamos que apenas duas abordaram o problema por meio da estratégia aritmética, mas desistiram antes de completar. As seis duplas restantes começaram a escrever algumas das restrições e esboçar os gráficos, porém também não obtiveram sucesso. Após 20 minutos de tentativas e discussões entre os alunos, a professora centralizou a discussão e foi à lousa: buscando sugestões dos alunos, escreveu todas as restrições e esboçou o gráfico.

A maior dúvida dos alunos foi em representar a região (x + y ≤ 1.200), a professora sugeriu que transformassem em uma equação, representassem a reta da equação e substituíssem pontos de um dos semiplanos para observar se satisfazia a inequação dada. Para atender às recomendações de Duval, sugerimos à professora que enfatizasse as diferenças nos registros de representações gráficos de acordo com as variações nas expressões algébricas. Também, mostrado-os os semiplanos a partir de inequações com uma variável ou duas variáveis (reta horizontal ou inclinada), a diferença entre inequações e sistemas de inequações e a representação gráfica entre os números reais (reta) e pares ordenados (plano cartesiano). Nesse mesmo exercício, a professora mostrou a regra dos vértices do polígono para encontrar o ponto de máximo ou de mínimo.

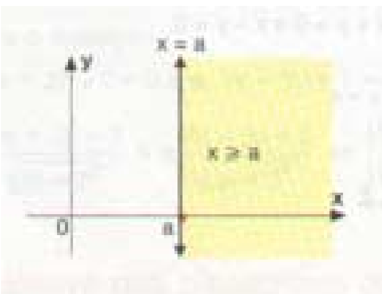
Sessões 2 e 3

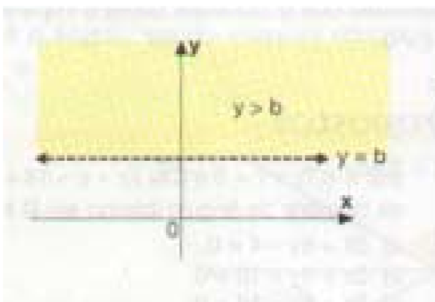
Essa sessão foi preparada pela professora, sem a nossa interferência. Solicitamos a ela que preparasse uma aula de sistema de inequações do 1º grau da sua maneira habitual. A única recomendação que fizemos foi que iniciasse a aula resgatando os problemas da sessão anterior.

Tendo como objetivo verificar se os problemas de programação linear e algumas atividades complementares contribuem com a aprendizagem do objeto sistema de inequações, optamos por não interferir na elaboração da sessão 2 e 3, na tentativa de deixar a aula com menos variáveis em comparação com a aula ministrada pela professora no ano anterior na turma (A).

A professora iniciou a aula resgatando a discussão da aula anterior (exercício 2). Em seguida construiu alguns exemplos de gráficos e mostrou quais eram as inequações e equações:

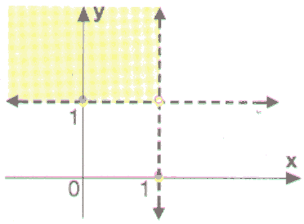
Exemplos:



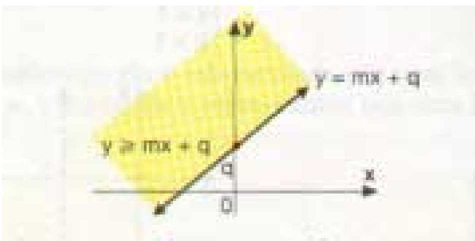


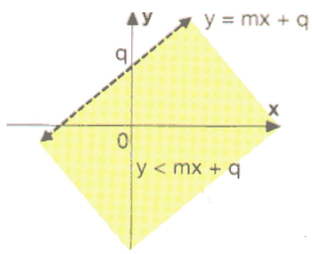
Também questionou nos gráficos acima se alguns pontos pertenciam às regiões. Em seguida mostrou outro exemplo (citado abaixo) e junto com os alunos escreveu o sistema de inequações.

$$\begin{cases} x < 1 \\ y > 1 \end{cases}$$



Mostrou os dois gráficos a seguir e comentou que as inequações que representam esses gráficos são da forma: $ax + by + c \geq 0$ ou $ax + by + c \leq 0$.

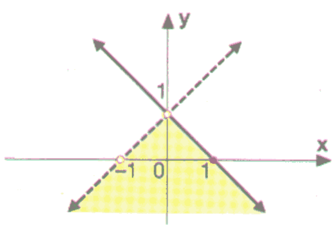




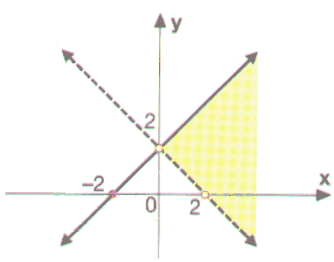
Em seguida passou exemplos, para representar graficamente as regiões do plano, e comentou que as regiões estavam sendo dadas na forma de um sistema de inequações do 1º grau.

- Exemplos resolvidos pela professora:

$$\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ x + y - 1 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < x + 1 \\ y \leqslant 1 - x \end{cases}$$



$$\begin{cases} x - y + 2 \geqslant 0 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leqslant x + 2 \\ y > 2 - x \end{cases}$$



Encerrou o assunto propondo uma lista de exercícios e solicitou que os alunos resolvessem em casa, pois seria corrigido na aula seguinte.

Iniciou a aula seguinte corrigindo a lista de exercícios. Resolveu todos na lousa, explicando os procedimentos.

Lista de exercícios:

(1) Represente graficamente os pontos do plano tal que:

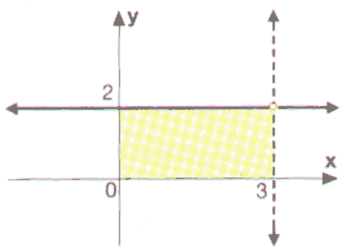
(a) $x \geq 1$ (b) $x < 2$ (c) $2x - 3 > 0$ (d) $-1 \leq x < 2$

(e) $y + x < 0$ (f) $y - 2x \leq 0$

(2) Represente graficamente os pontos do plano que são soluções dos sistemas de inequações:

(a) $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \leq 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x > 1 \\ y < 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x + y - 3 < 0 \\ x - y - 3 > 0 \end{cases}$

(3) Determine um sistema de inequações que represente os pontos (x,y) pertencentes à região assinalada:



Comentário nosso:

A professora utilizou para elaborar a sua aula o livro didático Matemática – Série Novo Ensino Médio – Marcondes, Gentil e Sérgio e o seguinte processo metodológico: mostrar a definição, fazer alguns exemplos utilizando o objeto matemático estudado e propor uma lista de exercícios conforme os exemplos.

Durante a aula, pudemos observar que em nenhum momento foi feita a discussão das diferenças entre os registros de representações algébricos e suas implicações em diferentes registros de representações gráficos, por exemplo: as representações gráficas de $x > 0$ ou $x < 0$; $x > 0$ ou $y > 0$; ou mesmo $x + y > 0$ e $x > 0$. Cada exemplo era discutido como se fosse uma outra atividade.

Também observamos que apesar de a professora ter solicitado que os alunos resolvessem a lista para a aula seguinte, nenhuma dupla havia resolvido, e mesmo assim a professora iniciou a correção em lousa e resolveu todos.

Sessões 4 e 5: (Atividade Complementar)

A partir de uma observação dos exercícios propostos pela professora em aula e percebendo que não haviam sido discutidas as diferenças entre os registros de representações e as implicações dessas diferenças nas conversões e que também não haviam sido explicitadas algumas das variáveis visuais e seus significados simbólicos, elaboramos a atividade complementar com a finalidade de completar com alguns exercícios que permitissem essas discussões que, segundo Duval, são fundamentais no processo de ensino-aprendizagem.

Objetivos:

(1) Propor atividades que permitam ao aluno fazer a conversão do registro de representação proposto em língua corrente para sentença matemática, desse para o gráfico, e do gráfico para sentença matemática;

(2) Permitir aos alunos comparar as variações nos registros gráficos de acordo com as variações nos registros algébricos;

(3) Propor problemas que permitam a interpretação e a coordenação entre os registros de representação de um sistema de inequações do 1º grau, reconhecer alguns problemas de programação linear e a estratégia geométrica e algébrica, concomitantemente, de resolução de sistemas de inequações do 1º grau.

Nossas considerações:

A atividade complementar é formada por oito exercícios. Os exercícios (1) e (2) propõem a conversão entre o registro de representação da língua corrente para a simbólica. Observamos, no teste-diagnóstico e nas atividades iniciais propostas, que as duas turmas têm dificuldades em trabalhar com essas conversões. Duval cita que a atividade de conversão é pouco levada em consideração no processo de ensino-aprendizagem, em vista das atividades de tratamento.

Os dois primeiros exercícios de conversão propostos por nós na atividade têm graus de dificuldades diferentes, visto que, apesar de a conversão ser uma atividade diferente da codificação, quanto mais próxima da codificação mais fácil é a conversão. Por exemplo, no exercício (1), basta ter conhecimento do significado dos sinais < e > e da sintaxe da matemática para escrever a sentença. Já no exercício (2) é necessária a interpretação, para depois escrever as sentenças.

O exercício (3) solicita a construção de uma tabela a partir de informações na língua corrente, depois escrever a sentença matemática e resolver; portanto, além da conversão entre os registros de representação, também pede o tratamento.

O exercício (4) propõe a conversão da língua corrente para o registro de representação gráfico. Buscamos nesse exercício considerar a recomendação de Duval que mostra a necessidade de propor diferentes apresentações das atividades relacionadas às representações gráficas, por exemplo, as que permitem uma interpretação global das propriedades das figuras. Essas atividades são as que permitem ao aluno perceber que a modificação da escrita algébrica implica na mudança da representação gráfica.

O exercício (5) solicita ao aluno as conversões da língua natural para o sistema de inequações do 1º grau e desses para o registro de representação gráfico.

Enquanto que o exercício (6) solicita a leitura e interpretação de um sistema de inequações proposto na forma de gráfico e sua conversão para o registro de representação algébrico. O exercício (7) busca mostrar em um mesmo sistema de inequações algumas variações, buscando seguir a recomendação de Duval de propor atividades que permitam a associação entre as variáveis visuais e suas representações.

Encerramos a atividade propondo o exercício (8), pois, segundo Duval, os registros de representação que têm como partida um enunciado em linguagem corrente ou texto são os mais complexos, e uma forma de apresentação desses registros, para ele, são os problemas de "matematização", "... *que são aqueles que visam a descobrir a aplicação de tratamentos matemáticos já adquiridos a questões imersas em situações não- matemáticas....*"(Duval,1993,pág.62).

Para Duval, as resoluções desses problemas dependem primeiramente da compreensão do enunciado e da conversão das informações pertinentes que são apresentadas:

> *"... trata-se de passar de uma descrição discursiva dos objetos, elevando do campo da questão posta a uma escrita simbólica (numérica ou literal) de suas relações que são marcadas lingüisticamente, e freqüentemente de forma muito variável, no texto do enunciado".(Duval, 1993-pág 62).*

A partir da interpretação dos enunciados em língua corrente e da conversão deles para a escrita simbólica é que os tratamentos matemáticos podem ser aplicados. Sendo assim, a efetuação desses tratamentos não depende apenas do conhecimento das operações matemáticas, mas também da interpretação dos dados do problema e a conversão da língua corrente para a simbólica.

O exercício (8) é um problema de programação linear, que pode ser resolvido usando o sistema de inequações como ferramenta e permite a variação entre os registros de representação e coordenação deles, recomendada por Duval.

Devido ao tempo que será determinado para o desenvolvimento da seqüência inteira, não esperamos esgotar todas as atividades necessárias para uma compreensão global do conceito de construção de gráficos a partir de sistemas de inequações, visto que acreditamos na necessidade de sempre retomarmos os conteúdos matemáticos já estudados em diversos momentos. Estamos também selecionando as seguintes condições para o problema proposto:

(1) duas variáveis;

(2) variáveis contínuas; e

(3) a solução estar em uma região limitada.

Exercício 1:

Uma indústria embala seus produtos em caixas. Escreva a sentença matemática em cada caso:

(a) Por razões econômicas, não deve haver menos de 20 unidades numa caixa. $X \geq 20$.

(b) Para que os produtos não fiquem amontoados, recomenda-se colocar no máximo 50 unidades por caixa. $X \leq 50$

(c) Em cada caixa podem-se colocar entre 20 e 50 unidades. $20 \leq x \leq 50$

Exercício 2:

Uma determinada empresa vende dois tipos de produtos: A e B. Considerando que ao vender o produto A tenha um lucro de R$ 7,00, ao vender o produto B um lucro de R$ 10,00 e “x” e “y” representam as quantidades do produto A e B vendidos, resolva:

(a) Supondo que o comerciante venda 5 produtos A e 10 produtos B, qual será o lucro do comerciante? Escreva uma única expressão aritmética mostrando como você chegou ao resultado.

$5 \times 7 + 10 \times 10 =$ R$ 135,00

(b) O lucro (L) depende das quantidades vendidas de A e B. Escreva uma sentença matemática que mostre essa situação para qualquer quantidade de vendas.

$L(x,y) = 7x + 10y$

Exercício 3:

Usando as palavras: segundo, lápis, sim, calcular, boneca, pé e casa:

(a) construa uma tabela colocando numa coluna as palavras e na outra a quantidade de letras de cada palavra.

Palavras	Quantidade de letras
Lápis	5

Segundo	7
Sim	3
Calcular	8
Boneca	6
Pé	2
Casa	4

(b) Chamaremos de x a quantidade de letras dessas palavras. Descubra qual é a palavra a partir das seguintes informações: o dobro do nº de letras desta palavra mais um é igual a quantidade de letras da palavra "segundo". Escreva uma sentença que traduza essa situação e escreva qual é a palavra. $2x + 1 = 7 \Rightarrow x = 3$. Sim.

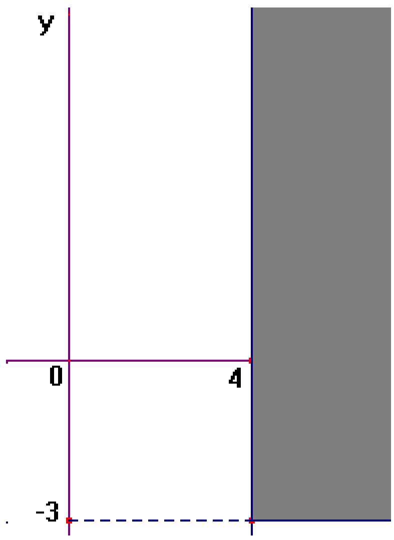
(c) Seja y a quantidade de letras de uma das palavras restantes. Se $y – 3 > 4$, qual é essa nova palavra? Calcular.

(d) Ainda não foram usadas 4 palavras. A quantidade de letras de uma delas será z. Se $3z + 4 = 19$, qual é essa palavra? Lápis.

Exercício 4:

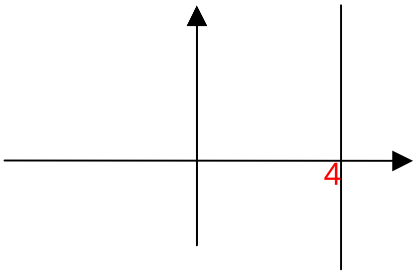
(a) Represente em um plano cartesiano todos os pontos com abscissa maior ou igual a 4 e ordenada maior ou igual a –3.

Resolução nossa:



(b) Represente em um plano cartesiano a reta cuja equação é x = 4.

Resolução nossa:



Exercício 5: Um determinado posto de gasolina vende apenas gasolina comum e aditivada. Para que no final do dia se tenha lucro, é necessário vender no mínimo 10.000 litros de gasolina comum e 5.000 litros de aditivada.

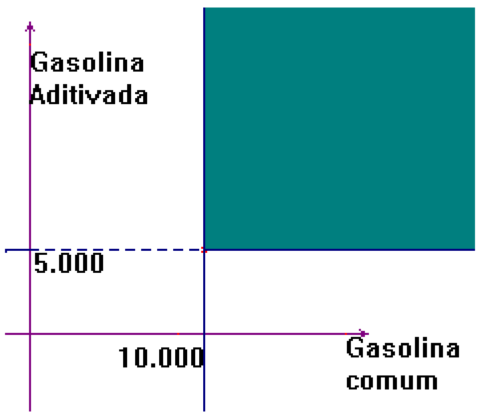
(a) Considerando que o posto de gasolina venda no mínimo as quantidades para que o posto tenha lucro. Escreva as sentenças matemáticas que representam essas quantidades, formando um sistema de inequações.

Considerando (x) a quantidade de gasolina comum e (y) a quantidade de gasolina aditivada, temos:

$$\begin{cases} x \geq 10.000 \\ y \geq 5.000 \end{cases}$$

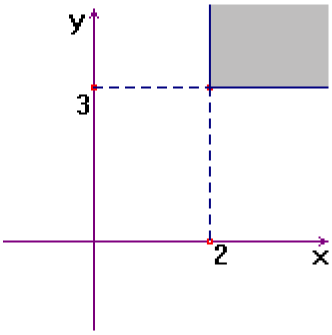
(b) Represente o sistema de inequações acima em um mesmo sistema cartesiano.

Resolução nossa:



Exercício 6: Observe os gráficos abaixo e faça:

(I)



(a) Cite 3 pontos que pertençam à região hachurada: (3,4) , (4,5) e (6,7)

(b) Explicite a restrição que devemos colocar para as abscissas, de modo que o ponto pertença à região hachurada ? $x \geq 2$

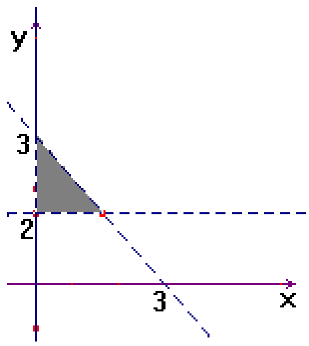
(c) Determine a restrição que devemos colocar para as ordenadas, de modo que o ponto pertença à região hachurada ? $y \geq 3$

(d) Escreva em forma de um sistema de inequações todos os pontos que pertencem à região hachurada:

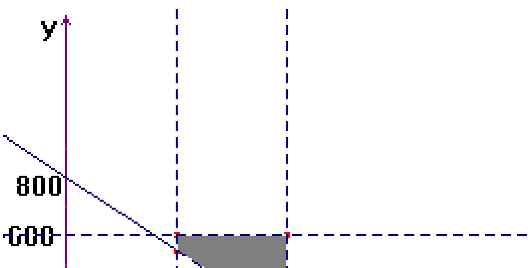
$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 3 \end{cases}$$

Exercício 7: Represente os sistemas de inequações no plano cartesiano e pinte a região que contém os pontos que são a solução do sistema.

(a) $\begin{cases} x + y < 3 \\ x > 0 \\ y > 2 \end{cases}$ Resolução nossa:



(b) $\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$



250 < x < 500
y < 600
x + y > 800

Resolução nossa:

Exercício 8:

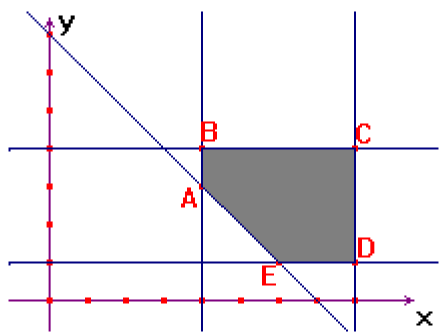
Um determinado produto **P** deverá ser composto no mínimo por 7 mg entre as vitaminas **A** e **B**. Sabendo-se que o recomendável é, no mínimo, 4 mg e, no máximo, 8 mg da vitamina A e entre 1 mg e 4 mg da vitamina B, e, que o custo da vitamina **A** é de R$ 3,00 cada miligrama e da **B** R$ 7,50, que quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia com mínimo custo?

Resolução nossa:

Custo → C(x,y) = 3,00. x + 7,50. y

$$\begin{cases} x + y \geq 7 \\ 2 \leq x \leq 8 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Representar no sistema de eixo cartesiano:



-Encontrar os pontos do vértice do polígono e substituir na função Custo:

(A) (4,3) ⇒ Custo = 4 x 3 + 3 x 7,50 = 12 + 22,50 = R$ 34,50

(B) (4,4) ⇒ Custo = 4 x 3 + 4 x 7,50 = 12 + 30 = R$ 42,00

(C) (8,4) ⇒ Custo = 8 x 3 + 4 x 7,50 = 24 + 30 = R$ 54,00

(D) (8,1) $\Rightarrow$ Custo = 8 x 3 + 1 x 7,50 = 24 + 7,50 = R$ 31,50

(E) (6,1) $\Rightarrow$ Custo = 6 x 3 + 1 x 7,50 = 18 + 7,50 = R$ 25,50

Portanto, para obter o menor custo, deverá ter 6 mg da vitamina **A** e 1 mg da vitamina **B.**

Comentário sobre a sessão:

Nessa atividade, a professora interferiu de acordo com o aparecimento das dúvidas, porém, por recomendação nossa, ela buscou fazer uma discussão maior na implicação dos diferentes registros de representação algébrico e os seus representantes gráficos e explicitou as variáveis visuais das inequações e os seus significados simbólicos.

A partir desta atividade, passamos a observar apenas cinco duplas. A nossa escolha por essas duplas foi o fato de nenhum dos elementos da dupla ter faltado nas sessões anteriores.

Os alunos tiveram dificuldades em escrever as sentenças matemáticas do exercício (1). A professora questionou da seguinte forma: “Considerando x a quantidade de produtos, e sabendo-se que não pode haver menos de 20 produtos, quanto deverá ser x ?” . As cinco duplas conseguiram escrever as sentenças depois da questão da professora.

No exercício (2) a dificuldade foi em saber como era escrever em uma expressão aritmética. A professora falou: “ ... é quando escrevemos as operações apenas com números e o sinal de igualdade, sem usar letras.” Todas as duplas observadas escreveram corretamente.

Os exercícios (3), (4) e (5) foram resolvidos pelas duplas com total independência da professora e com sucesso. No exercício (6) alguns alunos escreveram os pontos do plano sem considerar a ordenada. Neste mesmo exercício, algumas duplas sentiram dificuldades em escrever as restrições, questionaram o que era região hachurada e abscissas, apesar da professora já ter comentado a respeito desses termos.

Na questão (7) apenas uma dupla representou a região errada e uma outra dupla pintou a região certa, porém usou as retas cheias.

As cinco duplas analisadas por nós abordaram o exercício (8) da forma algébrica e geometricamente concomitantemente. Fizeram algumas confirmações com a professora, como por exemplo: “Está certa a função que mostra o custo?”, se os pontos que eram para serem substituídos eram os vértices do polígono e se as inequações escritas estavam corretas. A professora fez essa questão na lousa, mas, antes, as cinco duplas analisadas por nós já haviam feito com sucesso a questão.

Sessão 6: Pós-teste

O Pós-teste foi aplicado em uma única sessão de 60 minutos. Durante o pós-teste os alunos trabalharam individualmente e a professora não tirou dúvidas. Os alunos resolveram como se fosse uma avaliação. Consideramos uma interferência que influenciou no resultado da questão (03) o fato de um aluno questionar com a professora que o conteúdo cobrado nessa questão não havia sido estudado e ela respondeu para a sala toda que se eles não soubessem poderiam deixar em branco que não influenciaria na nota.

Iremos apresentar a seguir a questão acompanhada de resultado e com comentários a respeito dos principais erros. Não mostraremos a análise *a priori* visto que o pós-teste é o mesmo que o teste-diagnóstico, tendo assim a mesma análise.

Apesar de dezenove alunos terem feito o pós-teste, iremos analisar apenas os dos alunos cuja a dupla participou de todas as sessões, isto é, dez alunos.

Para identificar os alunos com as duplas, estabelecemos um código para cada aluno. Por exemplo: B11→ o B é devido a ele pertencer à turma B, o primeiro número é a dupla e o segundo número é o elemento da dupla. Então temos: B11, B12, B21, B22, B31, B32, B41, B42, B51 e B52.

1ªQuestão: Represente as situações abaixo escrevendo sentenças matemáticas:

Item (a): Pensei em um número, multipliquei-o por 6 e subtraí 72 do resultado. Obtive 66.

Item (b): Somando um número real ao 3, o resultado é maior que o da multiplicação do mesmo número real por 3.

Item (c): Pensei em um número maior que –7 e menor ou igual a 10.

Item (d): Gastei R$22,00 na compra de refrigerantes e cervejas, sendo que cada litro de cerveja custa R$1,00 e cada litro de refrigerante custa R$0,80. Sei também que entre cervejas e refrigerantes comprei 25 litros.

Resultado:

Questão 1	Item (a)	Item (b)	Item (c)	Item (d)
Acertou	09	04	03	01
Errou	01	04	07	04
Branco	00	02	00	05 *

* os alunos que só retiraram os dados da questão foram considerados como em branco.

Item (a):

Observação:

- B12 e B22 escreveram a sentença de acordo com a língua natural: x.6 –72 = 66.

- B11, B21, B31, B32, B42, B51 e B52 escreveram 6x – 72 = 66.

Podemos considerar que os alunos B12 e B22 trataram a questão como se fosse uma codificação, porém, segundo Duval, são distintas.

Comentários sobre os erros:

B41: “6.12 = 72-6 = 66”: o aluno tentou encontrar o número que solucionava o problema e não escrever a sentença como foi solicitado. Além disso, podemos observar o erro de abuso do sinal de igualdade e interpretação da questão.

Item (b)

Observação:

- B11, B12, B31, B42, B51 e B52 escreveram: $x + 3 > 3x$.

Comentários sobre os erros:

B21: escreveu $x + 3 = 3$. Possivelmente o aluno não tenha diferenciado uma equação de uma inequação, também não considerou a multiplicação no segundo membro.

B22 escreveu $x + 3 < 3x$. Errou o sinal de >.

Item (c)

Observações:

- B31 e B52 escreveram: $-7 < x \leq 10$.

- B11 escreveu: $x > -7$ e $x \leq 10$.

Comentários sobre os erros:

- B41 e B42 apresentaram números como resultados;

- B12, B21, B22, B32 e B51 : escreveram as inequações com erros de sintaxe, por exemplo, B12 : $x > -7 \geq 10$.

Item (d)

Observações:

- B42: escreveu as duas equações corretamente.

Comentários sobre os erros:

- B11; escreveu uma das equações corretamente: “ x + y = 25”.

- B51; escreveu “x > 13 e y > 12”;

- B22: “x + y = 22”;

- B21: “22 < = 1 – 80 > 25”.

Questão (1)- Comparação entre as turmas (A) e (B)

	Turma A	Turma B
	Acertou	Acertou
Q1 a	72%	90%
Q1 b	27%	40%
Q1 c	15%	30%
Q1 d	3%	10%

Apesar do aumento no número de sucesso dos itens (b) e (c) ter sido grande, percebemos que os alunos continuaram com dificuldades principalmente em utilizar os símbolos matemáticos adequados para escrever as sentenças.

Em relação ao item (d), já esperávamos um menor índice de sucesso, pois não foi estudado na seqüência sistema de equações.

2ª Questão: Considerando o plano cartesiano e o conjunto dos números reais, represente graficamente as seguintes situações:

(a) $x + y = 5$

(b) $x \geq 1$

(c) $y \leq 6$

(d) A região do plano que tem pontos (x,y) com abscissa positiva.

Resultado:

Questão 2	Item (a)	Item (b)	Item (c)	Item (d)
Acertou	04	05	03	04
Errou	06	03	05	01
Branco	00	02	02	05

Item (a):

Observação:

- B31, B42, B51 e B52 usaram a estratégia de encontrar dois pontos diferentes, atribuindo valores para “x”.

Comentários sobre os erros:

- B21: traçou a reta correta, porém pintou a região abaixo da reta; (não diferencia os conceito de equações e inequações).

- B11, B12, B22, B32, B41: apenas marcaram o ponto (5,5).

Item (b)

Observação:

- B11, B31, B42, B51e B52 representaram corretamente a região.

Comentários sobre os erros:

B21 – traçou a reta (1,y).

B22 – considerou a região x ≥ 1 e y ≥ 1.

B32 – marcou três pontos no gráfico considerando x > 1.

Item (c)

Observações:

- B11, B31 e B52 acertaram o exercício.

Comentários sobre os erros:

- B42 e B51 consideraram y ≥ 6.

- B21 e B32 marcaram três pontos com y < 6.

- B22 considerou a região y ≤ 6, x ≤ 6 , y ≥ 0 e x ≥ 0.

Item (d)

Observações:

- B11, B22 e B32 acertaram os exercícios.

Comentários sobre os erros:

B51 e B52 consideraram a região y ≥ x.

Questão (2)- Comparação entre as turmas (A) e (B)

	Turma A	Turma B
	Acertou	Acertou
Q2 a	3%	40%
Q2 b	12%	50%
Q2 c	12%	30%
Q2 d	3%	30%

Fazendo uma comparação entre os resultados das duas turmas pudemos confirmar a importância em considerar, no processo ensino-aprendizagem, atividades que permitam uma discussão entre as variações dos registros de representações algébricos e suas implicações nos registros de representações gráficos visto que a turma (B), que fez essas discussões, obteve um maior número de sucesso nas resoluções.

3ª Questão: Encontre o ponto de intersecção das retas representadas pelo sistema de equações abaixo e mostre no gráfico esse ponto.

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Resultado:

Questão 3	Acertou	Errou	Branco
Nº Alunos	00	02	08

Comentários sobre os erros:

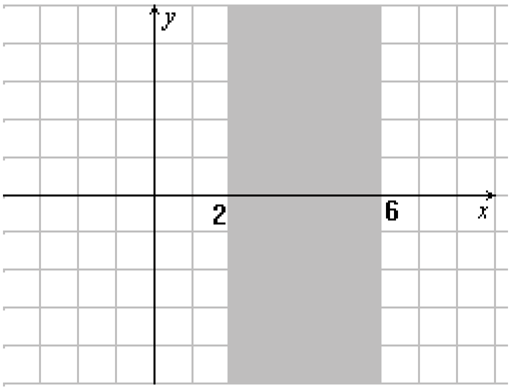
B51 e B52 traçaram a reta y = x.

Questão (3)- Comparação entre as turmas (A) e (B)

	Turma A	Turma B
	Acertou	Acertou
Q3	34%	0%

O baixo índice de sucesso nessa questão pode ter sido pela interferência da professora durante a aplicação do pós-teste visto que um dos alunos questionou que não havia sido estudado o conteúdo sistema de equações, portanto não era justo ser cobrado na avaliação. A professora respondeu para que eles fizessem o que sabiam e, caso não respondessem essa questão, ela não consideraria na nota da avaliação.

4ª Questão: Considerando a região hachurada no plano cartesiano:
(a) Marque 3 pontos pertencentes a essa região no gráfico e responda:



(b) Escreva 3 pontos que pertençam a essa região ____________________.

(c) Represente algebricamente a região hachurada ____________.

Resultado:

Questão 4	Acertou	Errou	Branco
(a)	10	00	00
(b)	09	00	01
(c)	05	02	03

Item (c)

Observações:

- B11, B22, B31, B32 e B42 acertaram os exercícios.

Comentários sobre os erros:
- B12 escreveu: “ 2 > 6”;
- B41 escreveu: “2 > 6 ou 6 < 2”.

Questão (4)- Comparação entre as turmas (A) e (B)

	Turma A	Turma B
	Acertou	Acertou
Q4	45%	100%
Q4 a	88%	90%
Q4 b	12%	50%

O item (a), segundo Duval, é uma atividade bastante trabalhada no processo ensino-aprendizagem. Atribuímos a esse fato o alto índice de sucesso da turma (B). Em relação ao item (b) dessa questão, percebemos que apesar de ter aumentado o índice de sucesso, a maioria dos alunos deixou esse item em branco. Possivelmente esse resultado deve-se ao fato de não ter sido discutido com ênfase na seqüência-didática a conversão do registro de representação gráfico para o algébrico no caso de um intervalo.

5ª Questão: Um jovem atleta sente-se atraído pela prática de dois esportes: natação e ciclismo. Sabe por experiência que:

A natação exige um gasto em mensalidade do clube e deslocamento até a piscina que pode ser expresso em um custo médio de R$ 3,00 por sessão de treinamento de uma hora.

O ciclismo mais simples, acaba custando R$ 2,00 a sessão de uma hora. O orçamento do rapaz dispõe de R$ 72,00 para seu treinamento.

Sabendo-se por questões de saúde o rapaz poderá fazer no máximo 18 horas de ciclismo por mês, qual será a quantidade de natação e ciclismo que ele poderá fazer de modo que tenha o maior número possível de horas de treinamento?

Resultado:

Questão 4	Acertou	Errou	Branco
Nº Alunos	07	01	02

Observações:

- B11, B12, B22, B31, B42, B51 e B52 acertaram os exercícios. Somente o B 51 escreveu a equação 3x + 2y = 72, substituiu o y por 18 e encontrou o valor de x. os demais calcularam aritmeticamente.

Comentários sobre os erros:

B32: não deixou registrados os cálculos, apenas respondeu 6 horas.

Questão (5)- Comparação entre as turmas (A) e (B)

	Turma A	Turma B
	Acertou	Acertou
Q5	42%	70%

Apesar de nenhum dos alunos ter abordado essa questão usando a estratégia algébrica e geométrica concomitantemente, acreditamos que a seqüência tenha contribuído no processo ensino-aprendizagem, pois permitiu uma interpretação do problema em relação aos dados, aumentado o número de sucessos.

6ª Questão: Um comerciante vende dois tipos de artigos, **A** e **B**. Na venda do artigo **A**, obtém um lucro de R$ 20,00 por unidade e, na venda do artigo **B**, um lucro de R$ 30,00. Em seu depósito só cabem 100 unidades e sabe-se que, por compromissos já assumidos, ele venderá pelo menos 15 unidades do artigo tipo A e 25 do artigo tipo B. O distribuidor pode entregar ao comerciante, no máximo, 60 artigos A e 50 artigos B. Quantos artigos de cada tipo o comerciante deverá encomendar ao distribuidor para que, supondo que os venda todos, obtenha o lucro máximo?

Resultado:

Acertou	Errou	Branco
03	04	03

Observações:

- B11, B42 e B52 acertaram o exercício usando a estratégia algébrica e geométrica concomitantemente e a regra do polígono. (Conforme apresentado na resolução nossa).

-B22, B31, B32 e B41 – escreveram as restrições e representaram no gráfico a região corretamente, porém não fizeram os cálculos para responder o exercício.

Questão (6)- Comparação entre as turmas (A) e (B)

	Turma A	Turma B
	Acertou	Acertou
Q6	0%	30%

Apesar do número de sucesso ter sido menor que a metade, consideramos bom o resultado visto que mais 40% dos alunos, apesar de não terem concluído a atividade, escreveram corretamente as restrições em forma de um sistema de inequações e sua representação gráfica.

7ª Questão: Resolva o sistema de inequações, considerando o conjunto dos números reais como universo:

$$\begin{cases} x - y \geq 2 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$

Resultado:

Acertou	Errou	Branco	Total
06	03	01	10

Observação:

- B11, B31, B32, B41, B42 e B52 acertaram o exercício utilizando a estratégia geométrica para resolver e responder.

Comentários sobre os erros:

- B12, B22 e B51 representaram região errada. Vale ressaltar que mesmo os alunos que erraram não tentaram resolver algebricamente.

Questão (7)- Comparação entre as turmas (A) e (B)

	Turma A	Turma B
	Acertou	Acertou
Q7	0%	60%

Esse foi o dado mais significativo para nós no sentido de ter indícios de que os problemas de programação linear podem contribuir no processo ensino-aprendizagem. Apontamos como principal causa desta contribuição à motivação dos alunos para resolverem e a possibilidade de abordarem o sistema de inequações com uma estratégia gráfica.

7.2 Análise Quantitativa Individual (aluno/questão)

	B11	B12	B21	B22	B31	B32	B41	B42	B51	B52
Q1 a	c	c	c	C	C	c	x	c	c	c
Q1 b	c	c	x	X	C	b	b	c	c	c
Q1 c	c	x	x	X	C	x	x	x	x	c
Q1 d	x	b	x	X	B	b	b	c	x	x
Q2 a	x	x	x	X	C	x	x	c	c	c
Q2 b	c	b	x	X	C	x	b	C	c	c
Q2 c	c	b	x	X	C	x	b	x	x	c
Q2 d	c	b	b	C	B	c	b	b	x	x
Q3	b	b	b	B	B	b	b	b	x	x
Q4 a	c	c	c	C	C	c	c	c	c	c
Q4 b	c	c	c	C	C	c	b	c	b	c
Q4 c	c	x	b	c	C	c	x	c	b	b
Q5	c	b	b	c	C	x	b	b	c	c
Q6	c	b	b	x	X	x	x	c	b	c
Q7	c	x	b	x	C	c	c	c	x	c

Após a análise quantitativa individual pudemos perceber que a maior dificuldade dos alunos que fizeram o pós-teste foi em fazer a conversão da língua natural para a sentença matemática. Porém também pudemos constatar que a seqüência permitiu um maior número de sucesso dos alunos da turma B em relação aos alunos da turma A. Permitindo assim considerar que a seqüência-didática possibilitou uma significativa evolução no processo ensino-aprendizagem.

A seguir iremos apresentar uma leitura mais detalhada da comparação entre as duas turmas e as nossas considerações finais.

8- Considerações Finais

Encerramos o nosso trabalho apresentando as considerações finais que iremos mostrar as conclusões às quais pudemos chegar, relacionando o resultado da experimentação com os fundamentos que utilizamos para elaborar nossa seqüência didática. Procuramos responder às nossas questões de pesquisa e deixamos, também, algumas sugestões de questões para novos trabalhos.

Iniciamos a nossa pesquisa propondo uma metodologia diferenciada em relação ao que os alunos estavam habituados, por isso propusemos inicialmente dois problemas para que os alunos resolvessem e durante a resolução deles discutimos os procedimentos e conceitos que poderiam ser usados nas estratégias de resolução. Apesar de esperarmos algumas resistências por parte dos alunos, fomos surpreendidos por um interesse geral em resolver os problemas. Pudemos observar também a importância do trabalho em grupo, pois essa forma de trabalhar permitiu que os alunos discutissem os procedimentos, elaborassem hipóteses, questionassem erros na tentativa de resolver os problemas.

Na expectativa de responder a nossa questão exploratória - Será que os alunos que estão completando o Ensino Médio resolvem alguns dos problemas de otimização? - que consideramos como hipótese de pesquisa que os alunos têm dificuldades em resolver problemas de otimização e nos propusemos a elaborar e aplicar um teste diagnóstico para uma turma do final da 3ª série do Ensino Médio (turma A), para validar ou refutar a hipótese. Após a aplicação do teste diagnóstico pudemos confirmar a nossa hipótese visto que nenhum aluno obteve sucesso na resolução da atividade (6) do teste diagnóstico nem na atividade (7).

Pudemos constatar, a partir dos resultados encontrados, que os alunos que abordaram a questão (7) do teste diagnóstico usaram a estratégia algébrica. Buscaram transferir os procedimentos de resolução de um sistema de equações para resolver um sistema de inequações, porém não consideraram as diferenças entre eles, formulando a resposta como se fosse um sistema de equações, não considerando outros pontos possíveis para resposta.

Também percebemos com os resultados do teste-diagnóstico que os alunos apresentam dificuldades em fazer a:

- conversão de linguagem natural para sentença matemática;
- conversão de sentenças matemáticas para a sua representação gráfica;
- leitura e interpretação de gráficos;
- representação gráfica de inequações; e
- resolução de sistemas de inequações.

A partir dessas respostas e buscando responder a nossa questão de pesquisa: -Será que se inserirmos no processo ensino-aprendizagem do objeto matemático sistema de inequações do 1º grau algumas atividades que focalizem o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros de representação algébrico, gráfico e língua natural, essas atividades proporcionarão aos alunos condições favoráveis para a apreensão desse objeto? E elaboramos a nossa seqüência didática.

Tínhamos como hipótese para a nossa questão de pesquisa que se fossem propostas no processo ensino-aprendizagem atividades que permitissem o tratamento, a conversão e a coordenação de registros de representação, essas atividades poderiam gerar condições favoráveis para a apreensão desse objeto. Também consideramos a hipótese de que esse objeto pode ser usado pelo aluno como ferramenta na estratégia de resolver alguns problemas.

Após elaboração e desenvolvimento da seqüência didática, aplicamos o pós-teste. Fazendo uma comparação entre os resultados obtidos pela turma (A) no teste-diagnóstico e pela turma (B) no pós-teste, observamos que:

- o aluno teve uma atitude diferente frente aos problemas de otimização, pois no pós-teste o índice de questões em branco foi menor;
- percebemos também no pós-teste turma (B) que apesar de os alunos terem uma porcentagem de sucesso ou não nas questões, a maioria demonstrou saber identificar o sistema de inequações em diversos registros de representações e ter noções sobre esse objeto matemático, enquanto que na turma (A) a maioria não identificou alguns dos registros de representação do sistema de inequações e não mostrou ter noções sobre esse objeto.

A seguir iremos mostrar uma análise comparativa entre o teste-diagnóstico turma (A) e o pós-teste turma (B) visto que as duas turmas estudaram o objeto sistemas de inequações, porém com metodologia e atividades diferenciadas:

- Questão (1): solicitava a conversão da língua natural para sentenças matemáticas. Os itens que tratavam de inequações (b) e (c), obtiveram os seguintes resultados de sucessos: turma (A) 27% e 15%, enquanto que a turma B 60% e 30% respectivamente. Com esses resultados pudemos observar que houve uma evolução no número de sucesso ao resolver a questão. Pelos erros cometidos pelos alunos da turma A em comparação com os erros da turma B, pudemos perceber que os da turma A não relacionaram a questão com o objeto matemático inequações, isto é, não identificaram o objeto matemático, enquanto que os alunos da turma B que erraram um foi pela não identificação e os outros foram pela dificuldade em tratar com os símbolos matemáticos.

- A questão (2): os itens (b), (c) e (d) solicitavam a conversão da sentença matemática ou língua natural para a representação no plano cartesiano. A turma (A) obteve 12%, 12% e 3% de sucesso, enquanto que a turma (B) obteve 50%, 30% e 30% respectivamente. Nesse item também observamos, nos tipos de erros cometidos, que os alunos da turma (B) sentiram mais dificuldade em identificar e tratar o objeto inequações, visto que seus erros não eram de regiões erradas e sim por representarem as inequações como se fossem equações, enquanto que os erros da turma (B) foram relacionados às regiões. Podemos ter como hipótese para esses erros o fato de a nossa seqüência didática ter focado mais as atividades que envolvem o 1º quadrante, pois os problemas de otimização estudados por nós na seqüência didática ficam restritos a esse quadrante.

- Questão (4): a turma A obteve 45%, 88% e 12%, enquanto que a turma (B) obteve 100%, 90% e 50% de sucesso respectivamente. Essa questão solicitava que a partir da representação de uma região no plano cartesiano encontrassem e escrevessem pontos pertencentes nessa região. Acreditamos que o fato de a metade dos alunos continuar errando na conversão proposta nesse item, foi devido à dificuldade em tratar com os símbolos matemáticos quando tratamos de intervalos. A nossa seqüência didática não focou esse tratamento.

- Questão: (6) nenhum aluno da turma (A) obteve sucesso, enquanto que os da turma (B) obtiveram 30% sucesso. Todos os alunos que obtiveram sucesso na turma (B) usaram a estratégia algébrica e geométrica concomitantemente para resolver o problema. Essa questão nos mostrou que é possível evolução no número de sucesso e, principalmente, no número de abordagem da atividade na tentativa em resolver foi devido a nossa seqüência didática ser iniciada com os problemas de programação linear e permitir ao aluno fazer a ligação da resolução deles usando os sistemas de inequações como estratégia de resolução. Apesar de apenas 30% ter tido sucesso na resolução, mais 40% abordaram o problema para resolver e apresentaram o sistema de inequações e a sua representação gráfica corretamente, mas não concluíram a resposta enquanto que na turma (A) apenas 10% abordaram o problema na tentativa de resolução e usaram estratégia aritmética.

- A questão (7) o resultado da turma (A) foi de 0% de sucesso. Na mesma questão, a turma (B) obteve 60% de sucesso. Pudemos observar por meio dessa questão a evolução que a seqüência didática permitiu visto que na turma (A) apenas 33% tentaram resolver o problema e a maioria usou a estratégia algébrica, isto é, resolver como se fosse um sistema de equações, enquanto na turma (B) todos que obtiveram sucesso nessa questão usaram a estratégia da construção dos gráficos. Portanto a seqüência didática permitiu evidenciar a estratégia geométrica na resolução de sistemas de inequações do 1º grau.

Diante de toda a análise feita, consideramos que os alunos avançaram em seus conhecimentos em relação ao sistema de inequações do 1º grau e em suas atitudes, autonomia e habilidade ao resolver problemas de otimização. Quanto especificamente ao sistema de inequações do 1º grau, nós percebemos que os alunos evoluíram em seus conhecimentos e demonstraram compreender melhor:

- a identificação,o tratamento e a coordenação dos registros de representação do sistema de inequações;

- a aplicação do sistema de inequações na resolução de problemas;

- a estratégia por meio de gráficos para resolver um sistema de inequações.

Considerando essas evoluções, pudemos assim confirmar a nossa hipótese de que ao considerar, no processo de ensino-aprendizagem do objeto sistema de inequações do 1º grau, atividades que permitam o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros de representação, o aluno terá condições mais favoráveis para a apreensão desse objeto.

Também percebemos que é possível inserir no processo de ensino-aprendizagem problemas de otimização e que esses problemas podem contribuir com o processo ensino-aprendizagem do objeto matemático sistema de inequações do 1º grau, pois, ao utilizar a estratégia de construção de gráficos para resolvê-lo, o aluno pode observar as diferentes variações das inequações e suas implicações na representação gráfica. Porém, vale ressaltar, que os problemas de programação usados na seqüência-didática estão sendo trabalhados sempre no primeiro quadrante e com coeficientes positivos.

Não podemos, por meio dos resultados e análises feitas, garantir a construção do conceito de sistema de inequações por parte dos alunos que estudaram usando a seqüência-didática, mas sim a evolução de seus conhecimentos e uma maior competência ao utilizar deles na resolução de problemas.

Deixamos como sugestão aos professores que pretenderem usar a nossa seqüência didática, que iniciem conforme o proposto na sessão 1, porém, nessa mesma sessão, quando sugerirem a estratégia da utilização de gráficos para resolver o exercício (2), já busquem discutir a divisão do plano em dois semiplanos, mostrando as possibilidades de diferentes inequações e sistemas de inequações e suas variações gráficas, visto que só trabalhamos no 1º quadrante.

Também sugerirmos uma alteração na forma de propor a lista de exercícios da sessão 3. No nosso ponto de vista, essa lista poderá ser reduzida aos exercícios 1 (a), 1(d), 1 (f), 2 (a), 2 (d) e 3, e ser trabalhada em grupo na sala de aula. Em relação às sessões 2 e 3,sugerimos uma metodologia diferenciada da proposta pela professora.

Nós não consideramos a nossa pesquisa terminada, mas, sim, completada uma etapa, portanto iremos tecer uma idéia, um comentário, e uma questão para futuras pesquisas:

Idéia: podemos inserir algumas outras atividades e problemas na seqüência didática para trabalhar nos outros quadrantes (2º, 3º e 4º quadrantes).

Comentário: possivelmente uma grande parte dos professores de matemática não estão preparados para inserir esses problemas no Ensino Fundamental e Médio devido a sua formação.

Questão: Será possível abordarmos esses mesmos problemas no Ensino Fundamental ao estudarmos os sistemas de equações e concomitantemente estudarmos os sistemas de inequações?

9- Bibliografia

ACKOFF, R.L., SASIENI, M.W.. 1977. *Pesquisa operacional*. Tradução: José L. Moura Marques, Cláudio Graell Reis. Revisão: Antonio Garcia de Miranda Netto. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos.

ALMOULOUD, S.A.. 1997. *Fundamentos da didática da matemática e metodologia de pesquisa.* Vol. III. São Paulo: CEMA-PUC.

ARTIGUE, M. 1990. *Épistémologie et didactique*. Recherches em didactique des mathématiques, Vol. 10, nº 23, pp.241-286.

BICUDO, M.A.V. (org.). 1999. *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP.

BIEMBENGUT, M.S., HEIN, N.. 2000. *Modelagem matemática no ensino.* São Paulo: Contexto.

BOAVIDA, A.M. 1992 *Resolução de problemas: que rumos para a educação matemática?* In: Educação Matemática. J.P. Pontes (org.). Instituto de Inovação Educacional, pp.115-122.

BREGALDA, P.F., OLIVEIRA, A.A.F., BORnstein, C.T. 1988 *Introdução à Programação Linear.* 3ª edição, Campus Editora, Rio de Janeiro.

CALTELNUOVO, E., 1985. *La Matemática: la geometria*. Firenze: La nuova Italia.

DAMM, R..1995. *Compreensão e resolução de problemas aditivos*. Vol. 2. CEMA-PUC/SP.

DANTE, L.R.. 1999. *Matemática: contexto e aplicações*. V 2. São Paulo: Ática.

DOUADY, R.. 1986. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. Recherches em didactique des mathématiques, Vol. 7, nº2, pp. 5-31.

DUVAL, R..1988. Graphiques et équations: l'articulation de deux registres. Annales de didactique et de sciences cognitives 5. IREM de Strasbourg.

DUVAL R.. 1993 *Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5. IREM de Strasbourg, pp.37-65.

GOLDBARG, M.C.. LUNA, H.P.L.. 2000. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos.* Rio de Janeiro: Campos.

IGLIORI, S.B.C.,1999. *A noção de "obstáculo epistemológico" e a educação matemática* in: Educação matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC.

KRULIK, S., REYS, R.E.. (orgs.). 1997. *A resolução de problemas na matemática escolar. Tradução*: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual.

MACHADO, S.D.A. et al., 1999. *Educação matemática: uma introdução. Engenharia didática* in: Educação matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC

MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA, 1999. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio, ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* Brasília: Ministério da ducação/ Secretaria de Educação Média e Tecnológicas.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1980. *An Agend for Action: Recommendations for school mathematics of the 1980's.* Reston, VA: Autor.

POLYA, G..1987. *On learning, teaching and learning teaching*. Em F.R. Curcio (ed.) Teaching and learning: Council of Teachers of Mathematics.

POZO, J.I., (org.). 1998. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.* Tradução: Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Art Med.

SANTOS, C.A.M.. et al., 2000. *Matemática*. São Paulo: Ática.

SCHOENFELD, A.A..1985. *Mathematical problem solving.* New York, NY: Academic Press.

SHAMBLIN, J.E. e STEVENS, G.T.JR.. 1989. *Pesquisa Operacional: uma abordagem básica.* Editora Atlas, São Paulo.

10- Anexos

10.1 Teste-Diagnóstico

Nome: ____ Data: ____/____

1ªQuestão: Represente as situações abaixo escrevendo sentenças matemáticas:
Item (a): Pensei em um número, multipliquei-o por 6 e subtraí 72 do resultado. Obtive 66.
Item (b): Somando um número real ao 3, o resultado é maior que o da multiplicação do mesmo número real por 3.
Item (c): Pensei em um número maior que –7 e menor ou igual a 10.
Item (d): Gastei R$22,00 na compra de refrigerantes e cervejas, sendo que cada litro de cerveja custa R$1,00 e cada litro de refrigerante custa R$0,80. Sei também que entre cervejas e refrigerantes comprei 25 litros.

2ªQuestão: Considerando o plano cartesiano e o conjunto dos números reais, represente graficamente as seguintes situações:

(a) $x + y = 5$

(b) $x \geq 1$

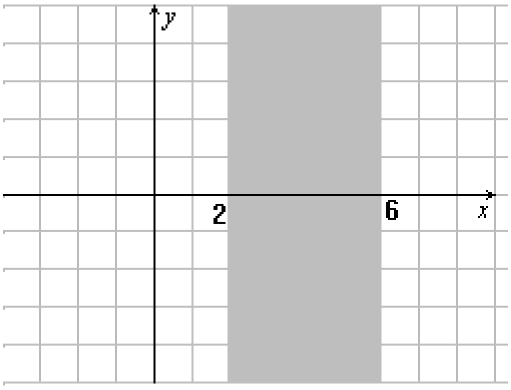
(c) $y \leq 6$

(d) A região do plano que tem pontos (x,y) com abscissa positiva.

3ª Questão: Encontre o ponto de intersecção das retas representadas pelo sistema de equações abaixo e mostre no gráfico esse ponto.

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

4ª Questão: Considerando a região hachurada no plano cartesiano: (a) Marque 3 pontos pertencentes a essa região no gráfico.



(b) Escreva 3 pontos que pertençam a essa região ____________________________.

(c) Represente algebricamente a região hachurada ________________________.

5ª Questão: Um jovem atleta sente-se atraído pela prática de dois esportes: natação e ciclismo. Sabe por experiência que:

A natação exige um gasto em mensalidade do clube e deslocamento até a piscina que pode ser expresso em um custo médio de R$ 3,00 por sessão de treinamento de uma hora.

O ciclismo mais simples acaba custando R$ 2,00 a sessão de uma hora. O orçamento do rapaz dispõe de R$ 72,00 para seu treinamento.

Sabendo-se por questões de saúde o rapaz poderá fazer no máximo 18 horas de ciclismo por mês, qual será a quantidade de natação e ciclismo que ele poderá fazer de modo que tenha o maior número possível de horas de treinamento?

6ª Questão Um comerciante vende dois tipos de artigos, A e B. Na venda do artigo A tem um lucro de R$ 20,00 por unidade e na venda do artigo B, um lucro de R$ 30,00. Em seu depósito só cabem 100 unidades e sabe-se que por compromissos já assumidos ele venderá pelo menos 15 unidades do artigo tipo A e 25 do artigo tipo B. O distribuidor pode entregar ao comerciante, no máximo, 60 artigos A e 50 artigos B. Quantos artigos de cada tipo deverá o comerciante encomendar ao distribuidor para que, supondo que os venda todos, obtenha o lucro máximo?

7ª Questão: Resolva o sistema de inequações, considerando o conjunto dos números reais como universo:

$$\begin{cases} x - y \geq 2 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$

10.2 Seqüência didática

Nome da Dupla: ________________________________ **Data** ___/___/___

____

Exercício 1:

Um sitiante está planejando sua estratégia de plantio para o próximo ano. Por informações obtidas nos órgãos governamentais, sabe que as culturas de trigo e arroz serão as mais rentáveis na próxima safra. Sendo a área cultivável do sítio de 10.000 m^2 e para atender as demandas internas do sítio, é imperativo que se plantem 1.000 m^2 de trigo e 3.000 m^2 de arroz, e o lucro por kg de produção seja de aproximadamente R$ 10,00 o do trigo e R$ 4,00 o do arroz. Supondo que o sitiante venda toda sua produção, responda:

(a) Quantos metros quadrados de trigo e de arroz deverá plantar de modo que atenda às necessidades do sítio e obtenha o maior lucro possível? Qual será esse lucro?

(b) Supondo que o sitiante saiba que irá vender no máximo a produção correspondente a 4.000 m^2 da área de plantação de trigo, qual deverá ser a sua nova divisão de plantação para obter o maior lucro possível? Qual será esse lucro?

O problema que apresentamos acima é estudado pela disciplina de Pesquisa Operacional. Podemos caracterizar esse problema como sendo de programação linear, pois as suas variáveis são todas lineares e estamos buscando otimizar uma situação que pode ser escrita na forma de uma função do 1º grau.

Vamos resolver outro:

Exercício (2):

Um determinado laboratório produz dois tipos de medicamentos: tipo **A** e **B**. Por mês ele tem garantida a venda de, no mínimo, 200 litros e, no máximo, 900 litros do medicamento **A**. Em relação ao medicamento **B** tem garantida a venda de, no mínimo, 200 litros, e, no máximo, 500 litros. A produção máxima por mês do laboratório é de 1.200 litros de medicamento. Temos que a Receita (lucro – despesa) por litro do medicamento **A** é de R$ 400,00 e do **B** é R$ 800,00. Considerando as condições acima e supondo que o laboratório venda tudo que produzir, responda:

(a) Qual deverá ser a produção mensal do laboratório para obter o maior lucro possível?

(b) Qual será o lucro do laboratório considerando apenas a venda garantida?

Lista de exercícios:

(1) Represente graficamente os pontos do plano tal que:

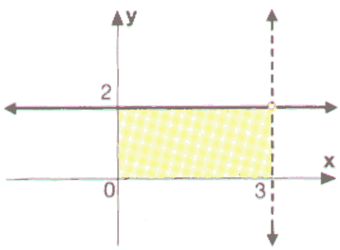
(a) $x \geq 1$ (b) $x < 2$ (c) $2x - 3 > 0$ (d) $-1 \leq x < 2$

(e) $y + x < 0$ (f) $y - 2x \leq 0$

(2) Represente graficamente os pontos do plano que são soluções dos sistemas de inequações:

(a) $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \leq 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x > 1 \\ y < 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x + y - 3 < 0 \\ x - y - 3 > 0 \end{cases}$

(3) Determine um sistema de inequações que represente os pontos (x,y) pertencentes à região assinalada:



Atividade complementar

Exercício 1:

Uma indústria embala seus produtos em caixas. Escreva a sentença matemática em cada caso:

(a) Por razões econômicas, não deve haver menos de 20 unidades numa caixa. _________

(b) Para que os produtos não fiquem amontoados, recomenda-se colocar no máximo 50 unidades por caixa. _________

(c) Em cada caixa podem-se colocar entre 20 e 50 unidades. __________

Exercício 2:

Uma determinada empresa vende dois tipos de produtos: A e B. Considerando que ao vender o produto A tenha um lucro de R$ 7,00, ao vender o produto B um lucro de R$ 10,00 e “x” e “y” representam as quantidades do produto A e B vendidos, resolva:

(a) Supondo que o comerciante venda 5 produtos A e 10 produtos B, qual será o lucro do comerciante? Escreva uma única expressão aritmética mostrando como você chegou ao resultado.

O lucro (L) depende das quantidades vendidas de A e B. Escreva uma sentença matemática que mostre essa situação para qualquer quantidade de vendas.

Exercício 3:

Usando as palavras: segundo, lápis, sim, calcular, boneca, pé e casa,

(a) Construa uma tabela colocando numa coluna as palavras e na outra a quantidade de letras de cada palavra.

(b) Chamaremos de x a quantidade de letras dessas palavras. Descubra qual é a palavra a partir das seguintes informações: o dobro do nº de letras desta palavra mais um é igual a quantidade de letras da palavra “segundo”. Escreva uma sentença que traduza essa situação e escreva qual é a palavra.

(c) Seja y a quantidade de letras de uma das palavras restantes. Se y – 3 > 4, qual é essa nova palavra?

(d) Ainda não foram usadas 4 palavras. A quantidade de letras de uma delas será z. Se 3z + 4 = 19, qual é essa palavra?

Exercício 4:

(a) Represente em um plano cartesiano todos os pontos com abscissa maior ou igual a 4 e ordenada maior ou igual a –3.

(b) Represente em um plano cartesiano a reta cuja equação é x = 1.

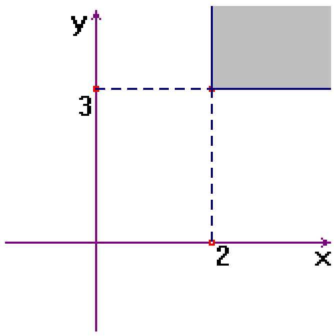
Exercício 5: Um determinado posto de gasolina vende apenas gasolina comum e aditivada. Para que no final do dia se tenha lucro, é necessário vender no mínimo 10.000 litros de gasolina comum e 5.000 litros de aditivada.

(a) Escreva as sentenças matemáticas que representam as quantidades mínimas de gasolinas que devem ser vendidas, formando um sistema de inequações.

(b) Represente o sistema de inequações acima em um mesmo sistema cartesiano.

Exercício 6: Observe os gráficos abaixo e faça:

(I)



(a) Cite 3 pontos que pertençam à região hachurada:

(b) Qual é a restrição que devemos colocar para as abscissas, de modo que o ponto pertença à região hachurada ?

(c) Qual é a restrição que devemos colocar para as ordenadas, de modo que o ponto pertença à região hachurada ?

(d) Escreva em forma de um sistema de inequações todos os pontos que pertencem à região hachurada:

Exercício 7: Represente os sistemas de inequações e equações geometricamente e pinte a região que contém os pontos que são a solução do sistema.

(a) $\begin{cases} x + y < 3 \\ y > 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 250 < x < 500 \\ y < 600 \\ x + y > 800 \end{cases}$

Exercício 8:

Um comerciante vende dois tipos de artigos, **A** e **B**. Na venda do artigo **A** obtém um lucro de 20 por unidade e, na venda do artigo **B**, um lucro de 30. Em seu depósito só cabem 100 artigos e sabe-se que, por compromissos já assumidos e pesquisa de mercado, ele venderá, do tipo **A**, pelo menos 15 artigos e no máximo 50 e, do tipo **B,** pelo menos 25 e no máximo 40. Quantos artigos de cada tipo deverá o comerciante encomendar ao distribuidor para que, supondo que os venda todos, obtenha o lucro máximo?