PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

GISLAINE CARVALHO RASI

ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS: CONCEPÇÕES DE ALUNOS DE ENSINO FUNDAMENTAL

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo
2009

GISLAINE CARVALHO RASI

ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS: CONCEPÇÕES DE ALUNOS DE ENSINO FUNDAMENTAL

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.***

PUC
2009

Banca Examinadora

____

____

____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

Dedico este trabalho ao meu pai.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva, que tanto contribuiu para a realização deste trabalho com sua dedicação, competência e paciência.

Aos professores-doutores da Banca Examinadora Sandra Maria Pinto Magina e Luzia Aparecida Palaro, pela atenção, comentários e sugestões.

A todos os professores, coordenadores, funcionários e colegas do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, pelo convívio, discussões e incentivo.

À minha coordenadora Professora Ivone Domingues, pelos seus questionamentos que tanto aperfeiçoaram minhas observações e contribuíram com a minha formação.

À professora doutora Patrícia Sadovsky pela oportunidade de conhecer o seu trabalho.

Aos colegas e amigos da Escola da Vila, em particular, minha amiga Carmo, que me fez acreditar na capacidade das crianças compreenderem a Matemática.

À direção, coordenação e alunos da Escola da Vila, onde foi despertado meu interesse e parte desta investigação executada.

À direção, coordenação e aos alunos da Escola Estadual Godofredo Furtado, pela participação nas atividades.

À direção, coordenação e aos alunos da Escola Estadual Professor Emygdio de Barros pela participação nas atividades.

À Capes, pela concessão da bolsa de estudos sem a qual a realização deste trabalho não seria possível.

À minha família, meu carinho especial, aos meus pais que sempre me incentivaram e acreditaram em mim.

Ao Alexandre, meu amor e gratidão, pela compreensão e, sobretudo por ter me apoiado neste estudo.

Àquelas pessoas que direta, ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho: Juli, Lara, Célia, Ângela, Fernanda, Fabiana...

A meus avós, minha eterna saudade...

RASI, Gislaine Carvalho. **Estruturas multiplicativas: concepções de alunos de Ensino Fundamental**. Dissertação (mestrado profissional em Ensino de Matemática). PUC/SP, São Paulo, Brasil, 2009, 91f.

RESUMO

Esta pesquisa aborda as estruturas multiplicativas e tem como objetivo investigar as concepções que os alunos do sétimo ano mobilizam quando estabelecem relações ternárias e o cálculo relacional. Procuramos, especialmente, verificar como esses alunos tratam as relações multiplicativas que envolvem noções de transformação e de composição binária e como utilizam as propriedades da multiplicação. Nossa fundamentação teórica apóia-se nas contribuições de Vergnaud (1991, 1996) apresentadas na Teoria dos Campos Conceituais e no Campo Conceitual Multiplicativo, sobretudo, nas noções de relação e cálculo relacional que permitiram a elaboração das atividades e a análise dos resultados. Quanto à metodologia, escolhemos o estudo de caso que possibilitou uma melhor compreensão das relações estabelecidas pelos alunos durante a resolução de problemas multiplicativos, propiciando o alcance de nosso objetivo. Como instrumentos de coleta de dados, fizemos observações durante a aplicação das atividades, em dois grupos de estudo e recolhemos o registro escrito pelas crianças da resolução dessas atividades. Na análise dos dados constatamos que os alunos apresentam alguma dificuldade ao compor duas transformações e uma concentração no estabelecimento das relações ternárias que envolvem a noção de transformação. Estas constatações demonstraram a importância da ampliação do trabalho com as estruturas multiplicativas, de modo a promover grande variedade de situações e relações que dizem respeito ao Campo Conceitual Multiplicativo, em especial, às relações ternárias, como uma lei de composição binária com suas propriedades.

PALAVRAS-CHAVE: Estruturas multiplicativas. Relações ternárias. Cálculo relacional.

ABSTRACT

This research comprehends the multiplicative structures and its objective is to investigate the conceptions the seventh grade students put in motion when they establish ternary relations and the relational calculus. We especially search to verify how these students deal with the multiplicative relations which involve notions of transformation and binary composition, and how they make use of the properties of multiplication. Our theoretical approach is based upon Vergnaud's contributions (1991, 1996) presented in the Conceptual Fields Theory and in the Multiplicative Conceptual Field, mainly on the notions of relation and relational calculus which allowed the elaboration of activities and the results analysis. As for the methodology adopted, we chose the case study, which allowed a better comprehension of the relations established by students during the resolution of multiplicative problems, and thus contributing to the achievement of our objective. With instruments of data collection, we made observations during the activities accomplishment, in two study groups and we collected the children's written record of these activities resolution. We verified, in the data analysis, that students have a certain difficulty in composing two transformations and a concentration in the establishment of ternary relations which involve the transformation notion. These observations demonstrated the importance of improving the work with multiplicative structures in a way to promote a good variety of situations and relations regarding the Multiplicative Conceptual Field, especially the ternary relations, as a law of binary composition with its properties.

KEY-WORDS: Multiplicative structures. Ternary relations. Relational calculus.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A construção do Campo Multiplicativo com os alunos começa nas séries iniciais do Ensino Fundamental e deve ser ampliada no decorrer dessa fase da escolaridade. No entanto, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) apontam que há uma predisposição dos professores dos 6º e 7º anos no trabalho com revisões de conteúdos anteriores e uma tendência muito forte no trabalho com a multiplicação como um caso particular da adição não promovendo, dessa forma, uma ampliação do conceito multiplicativo.

No entanto, um conceito não se refere apenas a um tipo de situação nem uma simples situação pode ser analisada, tendo em vista apenas um único conceito. Além disso, essa aprendizagem constitui-se pelo sentido que o aluno adquire progressivamente, mediante a resolução de diferentes tarefas com distintos níveis de complexidade. Neste sentido, na ampliação do Campo Multiplicativo são necessários o trabalho com as propriedades e o estabelecimento de relações.

Diante da situação, nossa pesquisa trata das estruturas multiplicativas e tem como objetivo investigar as concepções que os alunos do sétimo ano mobilizam quando estabelecem relações ternárias e o cálculo relacional, conforme a Teoria dos Campos Conceituais apresentada por Vergnaud (1996). Procuramos, especialmente, verificar como esses alunos lidam com as relações multiplicativas, envolvendo as noções de transformação e composição binária, e como utilizam as propriedades multiplicativas.

No Capítulo 1, apresentamos nossa problemática e uma revisão bibliográfica de pesquisas já realizadas, com alunos e professores sobre as estruturas multiplicativas. O leitor também encontrará no capítulo, a delimitação de nosso problema com o levantamento das primeiras hipóteses, além da descrição dos procedimentos metodológicos utilizados neste estudo.

No Capítulo 2, apresentaremos o estudo teórico fundamentado em Vergnaud (1988; 1991; 1994; 1996), o objeto matemático, as estruturas multiplicativas e a noção de relação. Neste capítulo, o leitor, também, encontrará a proposta oficial apontada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o desenvolvimento do trabalho com Números e Operações.

No capítulo 3, descrevemos o desenvolvimento e análise do estudo. Nesse momento, apresentaremos as etapas do trabalho com as análises das atividades a priori e a posteriori.

Por fim, submeteremos nossas considerações finais, procurando responder às questões de pesquisa que motivaram o desenvolvimento deste estudo.

CAPÍTULO 1: Problemática

O capítulo inicia-se apresentando a justificativa de nosso interesse pelo estudo das Estruturas Multiplicativas. Na seqüência, faremos um recorte das pesquisas realizadas até o momento que tratam das estruturas multiplicativas e do Campo Multiplicativo. Finalizamos, delimitando a pesquisa e exibindo as primeiras hipóteses, questão e metodologia.

1.1 Justificativa

Quando iniciei o mestrado, o meu desejo era aproximar a pesquisa acadêmica da sala de aula e buscar, nessa formação um aprofundamento nas leituras de produções científicas e estudos teóricos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem da Álgebra, em especial, o estudo das estruturas multiplicativas e sua contribuição para a passagem da Aritmética para a Álgebra.

Este desejo despontou, após a participação, em um curso promovido por uma escola da rede particular de ensino, situada na zona oeste de São Paulo, ministrado pela Prof. Dra. Patrícia Sadovsky, pesquisadora de Didática da Matemática, da Universidade de Buenos Aires. O curso, além de contribuir para uma maior reflexão das práticas aritméticas e algébricas em sala de aula, colocou-nos sob a perspectiva de iniciar o ensino da Álgebra com alunos de 6º e 7º anos, tendo como via de entrada a Aritmética.

Desta forma, como resultado das experiências vividas no trabalho com alunos de sétimo ano de uma escola particular; fui convidada a organizar e ministrar cursos de formação continuada para um grupo de professores das redes particular de ensino e pública do município de Barueri, tendo como proposta a iniciação do estudo da Álgebra, mediante o estudo das estruturas multiplicativas.

Durante esses cursos, com a análise das estratégias de resolução mobilizadas pelos professores na resolução de problemas multiplicativos e sua comparação com as produções realizadas por alunos de sétimo ano, verifiquei, uma ruptura na natureza dos procedimentos utilizados nos dois grupos. Com os alunos identifiquei em suas estratégias o apoio na Aritmética e com os professores um foco algébrico. Por isso, envolvo-me e preocupo-me com o ensino e a aprendizagem das estruturas multiplicativas e a passagem da Aritmética para a Álgebra.

Como o campo conceitual multiplicativo é motivo de preocupação e objeto de investigação em várias pesquisas, nesta investigação, pretendo aprofundar o estudo das estruturas multiplicativas, no que se referem ao estabelecimento de relações, sobretudo, como os alunos de sétimo ano entendem tais ações, mediante a análise qualitativa das estratégias que mobilizam na resolução de problemas, buscando identificar nesses registros quais as relações e noções estabelecidas. As análises serão realizadas sob o ponto de vista do cálculo relacional apresentado em Vergnaud (1991; 1996). No que segue, mostrarei o estudo da teoria que subsidiará esta pesquisa.

1.2 Revisão Bibliográfica

Para ampliar este estudo, procurei e selecionei algumas pesquisas em Educação Matemática que foram realizadas com alunos e professores multiplicativas abordando diferentes situações e envolvendo o Campo Conceitual Multiplicativo.

Inicio com o estudo de Cunha (1997) que investigou as concepções de 32 alunos, na faixa etária entre 11 e 14 anos, de 5ª e 7ª séries, da Rede Particular de São Paulo, a respeito das operações de multiplicação e divisão. Em sua pesquisa algumas relações do Campo Conceitual Multiplicativo foram enfatizadas, entre elas, a descontinuidade da relação entre adição e multiplicação e as possíveis relações entre o dividendo, divisor, quociente e o resto no algoritmo da divisão. Este estudo constituiu-se de três partes: teste diagnóstico, oficina e teste final.

No teste diagnóstico realizado com 32 alunos, Cunha (1997) observou duas dificuldades dos alunos: operar a multiplicação com o multiplicador menor do que zero e estabelecer relações entre os termos da divisão. Segundo esta pesquisadora, a maioria das respostas dadas indicou uma ausência de significado para o algoritmo da divisão, com frases do tipo: “fizemos a prova real”, “quando tenho o dividendo e o quociente, eu divido para saber qual é o divisor” e “quando eu tenho o divisor e o quociente, eu multiplico para saber qual é o dividendo.” Para a pesquisadora, os livros didáticos, muitas vezes, contribuem para esta concepção, pois apresentam o algoritmo da divisão de forma desvinculada do conceito de multiplicação, não propiciando o estabelecimento de relações entre as duas operações.

Com o objetivo de superar tais dificuldades a pesquisadora desenvolveu uma sequência de atividades com os alunos e, em seguida, aplicou um novo teste. Com os novos resultados, Cunha (1997) verificou que todos os alunos da sétima série não apresentavam dificuldades para reconhecer as relações entre os termos da divisão com números naturais. Embora tenham apresentado em suas justificativas indícios de memorização de regras, tais como: “se a conta é de dividir, e o contrário da conta de dividir é multiplicar, então, devemos fazer o contrário da conta.” No entanto, os alunos de quinta série não conseguiam estabelecer todas as relações possíveis entre os termos da divisão, sobretudo, nas situações em que o valor do elemento desconhecido era solicitado, com a necessidade da operação inversa. Além disso, Cunha (1997) verificou na operação de multiplicação frases do tipo: “Multiplicação sempre aumenta, e divisão sempre diminui” que apontam uma continuidade do raciocínio aditivo no multiplicativo.

Por outro lado, Canoas (1997) investigou as representações de professores de primeira a quarta séries do Ensino Fundamental, licenciados em Matemática e do último ano do curso de magistério a respeito do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas. Seu estudo procurou entender como esse professor trabalha com a continuidade e descontinuidade do raciocínio aditivo e multiplicativo e as relações estabelecidas por ele entre os termos presentes nesse campo. Para isso, dois estudos foram elaborados com o objetivo de levantar as concepções e competências desses professores.

O Estudo I foi desenvolvido em duas etapas: a primeira, com 28 professores consistia na resolução de um teste diagnóstico para, em uma segunda etapa com 44 professores, desenvolver uma oficina. No teste diagnóstico, foram verificadas algumas situações que envolviam as estruturas multiplicativas, dentre elas, a divisão partitiva[1], a divisão quotitiva[2], a divisão com resto diferente de zero, a definição algébrica da operação de multiplicação (relação binária) e a regra de três.

A partir da análise do Estudo I, Canoas (1997) observou que os professores apresentavam dificuldades para lidar com o conteúdo de Matemática, sendo levantadas novas hipóteses para o Estudo II, dentre elas: *"Será que o professor percebe que as relações entre os termos do campo multiplicativo são quaternárias e não somente ternárias?"*. No Estudo II, participaram 18 professores. Ao final desse estudo, a pesquisadora constatou que os professores não compreendem o conceito de razão, não mobilizam o fator funcional para resolver relações quaternárias nem identificam a pertinência das variáveis em uma situação, apresentando dificuldades para trabalhar com os quatro termos de uma situação multiplicativa. A pesquisadora aponta ainda que muito provavelmente, tal fato, possa bloquear os alunos no estudo das funções, no qual eles poderão encontrar dificuldades para lidar com o conceito de relação.

Canoas (1997) percebeu, também, uma facilidade dos professores para trabalhar com a operação inversa da multiplicação envolvendo números inteiros e a repetição memorizada de regras, tais como as apresentadas pelos alunos no estudo de Cunha (1997) que, normalmente, aparecem nos livros didáticos.

Além disso, apontou uma deficiência dos professores com relação ao Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, sobretudo, no que se refere a situações de formulação e interpretação de problemas ao expressar a operação de divisão, como uma distribuição de partes iguais e a operação de multiplicação, como uma soma de partes iguais, revelando, assim, uma limitação dos professores na ampliação do sentido multiplicativo.

Na mesma linha de Cunha (1997), Barreto (2001) analisou os procedimentos mobilizados por 119 alunos, de quinta série, de duas escolas públicas de São

---

[1] Partitiva ou por partição – quando são dados a quantidade de inteiros e o número de partes em que se quer dividir essa quantidade igualmente e pede-se o valor de cada parte.
[2] Por cotas – quando são dados a quantidade de inteiros e o valor de cada parte e pede-se a quantidade de partes possíveis.

Paulo, na resolução de problemas multiplicativos de quarta - proporcional. Em sua análise, a pesquisadora procurou evidenciar níveis de desenvolvimento cognitivo com relação ao domínio do campo multiplicativo, com a intenção de refletir sobre como se constituem os procedimentos de resolução em uma relação de proporcionalidade.

Na elaboração do instrumento, Barreto (2001) focou a escolha das situações em três grandes fatores de complexidade cognitiva: as situações interpretativas, os valores numéricos e o domínio de experiência.

Para a aplicação final, os problemas de proporcionalidade foram separados em dois grupos. O primeiro envolveu apenas uma transformação, foram propostos seis problemas que envolviam grandezas discretas e situações de multiplicação, divisão por quota e divisão por partição, em contextos de revenda (quantidade de carrinhos e preço) e de empacotamento (quantidade de objetos e de pacotes). E como o objetivo de diagnosticar quais os procedimentos mobilizados pelos alunos, para depois, comparar com os adotados na resolução dos problemas do segundo grupo.

O segundo grupo compôs-se de dez problemas, com outro grau de dificuldade, envolvendo uma combinação com duas operações. Oito destes problemas abordaram a relação de múltiplos e divisores, solicitando a imagem de um múltiplo, a imagem de um divisor e vice-versa. Dois deles não abordaram nenhuma destas relações para a determinação da imagem.

Na análise qualitativa, a pesquisadora verificou uma heterogeneidade de procedimentos não canônicos mobilizados pelos alunos na resolução desses problemas. Identificando em muitos deles a estratégia de operador escalar. Segundo a investigadora, o fato, evidencia a complexidade desse conceito e a necessidade da diversidade de situações.

Outra importante constatação apontada por Barreto (2001) refere-se à grande quantidade de erros para efetuar uma única operação nos problemas que apresentam duas operações, limitando-se ao uso da estratégia de valor unitário. Tal erro, segundo Barreto (2001), revela uma compreensão parcial das relações colocadas em jogo e, eventualmente, uma incompreensão da multiplicação.

Castela (2005) pesquisou um grupo de 28 alunos, na faixa etária entre 11 e 13 anos, de sexta série (sétimo ano) do Ensino Fundamental da Rede Pública Estadual de São Paulo. Nesse estudo, a pesquisadora diagnosticou as concepções desses alunos a respeito da divisão de números naturais, procurando responder três questões: se os alunos conheciam a técnica de divisão; se os alunos utilizavam a divisão como ferramenta para a resolução de problemas e se relacionavam os termos: dividendo, divisor, quociente e resto.

Segundo ela, um estudo piloto foi aplicado antes do estudo principal com alunos da 6ª série de uma escola particular com objetivo de verificar possíveis mudanças no instrumento final. O instrumento diagnóstico continha quatro questões em contextos de situações cotidianas, quatro questões correspondentes as estas e formais (envolvendo a aplicação direta ou inversa da operação de divisão) e quatro questões formais.

Feitos os ajustes para uma versão final e depois de sua aplicação no estudo principal, a pesquisadora constatou que a maior parte dos alunos pesquisados estabelece alguma relação, mesmo que parcial, entre o dividendo, divisor, quociente e resto, aplicando a “prova real”. A maioria sabe que o quociente é “o resultado da divisão” e que o resto é “o que sobra”. No entanto, a relação totalmente correta entre os termos é apresentada, apenas, pelos alunos que conhecem a técnica de divisão e aplicam a operação inversa denominada “prova real”. Outro aspecto evidenciado, por Castela (2005), é que a maioria dos alunos apresenta dificuldades para relacionar o resto com os outros termos da divisão, sobretudo quando o resto é diferente de zero.

A pesquisa de Bonanno (2007) apresenta um estudo a respeito do cálculo operatório no campo multiplicativo com 21 alunos de quinta série (sexto ano) do Ensino Fundamental, na faixa etária entre 11 e 12 anos, da Rede Pública Estadual de Ensino, do Estado de São Paulo. O objetivo deste estudo foi identificar quais os conhecimentos desses alunos a respeito de dois aspectos de grande expectativa de aprendizagem para esta etapa da escolaridade: a análise, interpretação e resolução de problemas multiplicativos e o desempenho em cálculo mental e escrito (exato ou aproximado) em operações de multiplicação e divisão.

O estudo foi desenvolvido em quatro etapas, cada uma consistiu na proposição de quatro situações-problema, quatro atividades de cálculo mental ou de estimativa e duas atividades envolvendo técnicas operatórias. As situações-problema apresentadas foram decompostas em quatro subclasses: multiplicação, divisão por partição, divisão por quota e proporcionalidade simples que abordaram conceitos de múltiplo, divisor, operador, etc. As atividades de cálculo mental e escrito trataram de algumas propriedades da multiplicação, entre elas: a existência de um elemento neutro, distributiva da multiplicação em relação à adição e multiplicador zero, além do uso de técnicas operatórias.

Os resultados apresentados revelaram que os alunos possuíam uma compreensão pouco satisfatória com relação ao campo multiplicativo no que se refere aos diferentes significados das operações de multiplicação e divisão. Para Bonanno (2007), tal desempenho, pode ser explicado pela falta de experiência do aluno para resolver dada situação. Assim, eleger uma operação adequada, embora, os alunos tenham apresentando um bom desempenho nas situações que envolviam proporcionalidade simples de razão dois e quatro e nas situações de multiplicação com a ideia de configuração retangular. O desempenho mais preocupante, em torno de 10% de acertos apontados pela pesquisadora, foi com relação às situações multiplicativas envolvendo a ideia de operador; observado nas questões: "*Multipliquei certo número por 18 e o resultado foi 2.700*. *Que número é esse?*" e "*Dividi um certo número por 35 e o quociente foi 17. Que número era esse?".* A maioria dos erros analisados nestas questões, cerca de 52%, indicou as dificuldades dos alunos para estabelecer a operação inversa às operações de multiplicação e divisão.

Com relação ao desempenho em cálculo, Bonanno (2007) considerou razoável, no caso da multiplicação. Mas, aponta um grande número de questões em branco e dificuldades dos alunos para atribuir significado ao algoritmo da divisão.

Sob o ponto de vista do cálculo relacional, foram verificadas nos estudos de Canoas (1997), Barreto (2001) e Bonanno (2007), que as estratégias mobilizadas pelos sujeitos, tanto alunos como professores de séries iniciais, na resolução de problemas, envolvendo a relação de proporcionalidade com números múltiplos e divisores apontam a ideia de operador escalar e a noção de correspondência entre duas quantidades. No entanto, em seu estudo Barreto (2001) considera que a compreensão desta relação de correspondência é parcial, uma vez que os sujeitos apresentam dificuldades ao lidar com situações envolvendo duas operações. Indica como necessárias outras investigações no âmbito do cálculo relacional que visem à identificação de procedimentos e estratégias do tipo funcional, envolvendo as relações quaternárias.

Além disso, nas duas situações citadas por Bonanno (2007) que as situações consideradas de baixo desempenho envolvem a ideia de operador, tornando-se evidente a compreensão parcial do aluno frente à situação e uma dificuldade no estabelecimento de uma relação de reciprocidade quando são dados a transformação e o estado final e solicita-se o estado inicial.

Sob o ponto de vista das situações, na pesquisa de Bonanno (2007), destaca-se um bom desempenho dos alunos na resolução de problemas multiplicativos que envolvem a ideia de configuração retangular. Nas situações de cálculo escrito, em especial, no algoritmo da divisão euclidiana foi observado, apenas, o estabelecimento de relações entre três termos da divisão exata, no caso, entre o dividendo, divisor e quociente; não sendo investigada a relação entre os quatro termos, incluindo o resto.

Diferente desta pesquisadora, o estudo de Castela (2005) diagnosticou as relações entre os quatro termos de uma divisão euclidiana, com resto diferente de zero e a noção de função, em situações nas quais eram solicitados o dividendo correspondente a um dado divisor, quociente e resto. No entanto, as pesquisas de Cunha (1997) e de Bonanno (2007) apontam que a maior dificuldade dos alunos é atribuir significado a esta relação e, conseqüentemente, apresentar uma memorização de regras e propriedades. Tal dificuldade também é identificada no estudo de Canoas (1997) com professores das séries iniciais. Neste estudo, os professores apresentaram uma preocupação excessiva com o treino de habilidades.

Desta forma, a seguir, é apresentada a delimitação de nosso problema.

1.3 Delimitação do Problema

Nas pesquisas de Castela (2005), como de Cunha (1997) e de Barreto (2001), observamos um diagnóstico das relações quaternárias apresentadas em problemas do tipo isomorfismo de medidas em que as relações são estabelecidas por meio de uma correspondência entre quatro elementos. Em todas elas, foram apontadas dificuldades dos alunos para atribuir significado ao operador escalar e ao conceito de razão. Nossa hipótese é que tal dificuldade possa ser explicada quando esta relação quaternária é analisada como uma relação ternária, conforme podem ser vistas nos estudos complementares, com a aplicação de uma ou mais transformações. Neste caso, deduzimos que os alunos tenham dificuldades para estabelecer nas relações ternárias noções de transformação.

Nos estudos de Castela (2005) e Bonanno (2007) percebemos que nas situações que abordaram o algoritmo da divisão euclidiana, com e sem resto; os alunos demonstraram decorar regras, sugerindo uma ausência da noção de função e propriedades. Assim como sugerido por Barreto (2001), outros problemas enfocando a noção de função devem ser investigados. Entendemos, também, que outras formas de apresentação do problema, no que se referem à linguagem e ao simbolismo, possam promover uma ampliação da investigação sobre o campo multiplicativo no que se refere ao cálculo relacional.

Neste sentido, decidimos aprofundar nossos estudos a respeito das estruturas multiplicativas e do cálculo relacional, analisando o estabelecimento de relações ternárias, a noção de transformação e composição binária, com alunos na faixa etária entre 11 e 13 anos, estudantes do 6º e do 7º ano do Ensino Fundamental. Julgamos relevante nossa investigação, tendo em vista, que amplia o estudo sobre o cálculo relacional e as relações ternárias e promove uma reflexão a respeito de deficiências no ensino e aprendizagem do campo multiplicativo.

Desse modo, pretendemos diagnosticar com esta pesquisa, se:

Alunos, entre 11 e 13 anos, estabelecem uma relação ternária com a noção de transformação? Se estabelecem relações ternárias em situações que envolvem as propriedades da multiplicação?

Para isso, procuramos responder à questão com a metodologia e procedimentos que veremos no que segue.

1.4 Metodologia e Procedimentos

Para esta pesquisa optamos por um estudo de caso que segundo Pontes (2006), tem o objetivo de compreender por profundidade o “como” e o “por quê” de uma determinada questão, procurando conhecer sua identidade e características. Para este autor, em Educação Matemática, os estudos de casos são usados para investigar questões de aprendizagem dos alunos, bem como as do conhecimento e das práticas profissionais dos professores. Neste sentido, o objetivo principal deste tipo de investigação é promover uma melhor compreensão de uma determinada situação, em especial, sua história, como ela se desenvolveu e em que contexto se caracterizou, buscando identificar elementos exteriores a esta situação.

Fiorentini e Lorenzato (2006) recomendam o estudo de caso para a construção de hipóteses e a confirmação ou reformulação de um problema. Para estes autores, o caso pode ser qualquer sistema delimitado (pessoa, grupo de pessoas, escola, programa) que apresenta algumas características peculiares merecedoras de uma investigação.

Desta forma, esta pesquisa utilizará o estudo de caso para analisar de forma mais profunda as relações ternárias estabelecidas pelos alunos com uma abordagem qualitativa.

Para isso, elaboramos um questionário com duas atividades, baseadas em Vergnaud (1991), Broitman (2005) e Sadovsky (2004;2007). Cada atividade foi analisada, antes de sua aplicação, tendo em vista, as respostas e relações estabelecidas pelos alunos, procurando, desse modo, antever deduções e raciocínios. Um questionário piloto foi aplicado antes para possíveis ajustes no material, em particular, para a escolha do contexto, do campo numérico e seleção dos alunos. Com o questionário final, foram obtidos os dados por meio da produção escrita dos alunos e das observações feitas durante a aplicação das atividades.

No próximo capítulo, mostraremos nossos estudos complementares e os Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental.

CAPÍTULO 2: Estudos Complementares

Para o desenvolvimento desta pesquisa baseamo-nos nos estudos do psicólogo francês Gèrard Vergnaud sobre o campo conceitual das estruturas multiplicativas. Neste tópico, serão apresentadas suas principais contribuições fazendo um paralelo com as contribuições da Matemática, de modo a promover uma maior reflexão sobre o Ensino da Matemática. Finalizamos o capítulo considerando alguns aspectos apontados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Ensino Fundamental (Brasil, 1998) a respeito de nosso tema.

2.1 Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas

A Teoria dos Campos Conceituais, apresentada por Vergnaud (1996), é uma teoria cognitivista e busca explicar o processo de construção de conceitos por um sujeito.

Para isso, Vergnaud (1996) destaca alguns princípios fundamentais para o estudo do desenvolvimento e aprendizagem de um conceito, a análise de um conjunto triplo **C (S, I, s)** em que **S** é um conjunto de situações que dá sentido ao conceito (a referência); **I** é um conjunto de invariantes que é reorganizado e analisado pelo sujeito no domínio destas situações e **s** é um conjunto de representações simbólicas usadas para representar esses invariantes.

Desta forma, o autor considera um Campo Conceitual como um conjunto de situações, tarefas e um conjunto de conceitos, propriedades e teoremas que podem ser verificados nessas situações e representados de maneiras diferentes. Sugerindo numa abordagem: [...] se a primeira entrada de um campo conceitual é a das situações, podemos identificar também uma segunda entrada, a dos conceitos e dos teoremas.” (VERGNAUD,1996, p.168) Assim, o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas é denominado, simultaneamente, por um conjunto de situações ou tarefas, cujo tratamento exige uma multiplicação, ou uma divisão, ou uma combinação das duas operações e, por um conjunto de conceitos, propriedades e teoremas que pode ser explorado, a partir, dessas situações, envolvendo diferentes representações.

O conjunto de situações é representado por um número de tarefas classificadas e analisadas dentro de um Campo Conceitual que podem variar em sua complexidade, mas, sempre com o objetivo de descrever em uma hierarquia as competências cognitivas que serão desenvolvidas pelos alunos. Neste caso, Vergnaud (1991) afirma que contexto deve ser observado no que se insere a situação, ou seja, se a situação é familiar ou não; qual o campo numérico e o domínio de validade das propriedades envolvidas nesse campo; quais relações são estabelecidas entre os elementos e quais as formas de representações (linguagem natural, linguagem algébrica, plano cartesiano, tabelas...).

Para Vergnaud (1996; 1998), o conjunto de invariantes é denominado “teorema- em-ato” e “conceito-em-ato” e permite a ação operatória nos esquemas do sujeito. Os invariantes operatórios são considerados o conhecimento implícito contido nos esquemas. Segundo Trouche (2004), um esquema pode ser comparado a um iceberg em que a parte visível são os gestos (comportamento elementar que pode ser observado no sujeito) e a parte submersa, os invariantes operatórios. Desta forma, os invariantes operatórios contidos nos esquemas guiam os gestos, promovendo uma relação dialética entre atividade e pensamento. Para este autor, a repetição dos gestos para uma determinada situação pode indicar uma acomodação de um conhecimento particular.

Magina (2001) acrescenta que um esquema representa a forma com que a pessoa organiza seus invariantes e tem como características: ser local, isto é, refere-se ao entendimento de uma ação em uma dada situação; ser organizadores dos invariantes; e atuar em determinada situação de maneira implícita.

Contudo, Vergnaud (1996) classifica os invariantes operatórios em três tipos lógicos:

a) De tipo “Proposições**”**, os teorema-em-ato são invariantes desse tipo suscetíveis de serem verdadeiros ou não. Por exemplo:

> [ ] muitos alunos compreendem que, se a quantidade de objetos vendáveis for multiplicada por 2,por 3, por 4, por 5,por 10,por 100 ou por um número simples, o seu preço será 2,3,4,5,10 ou 100 vezes superior. Este conhecimento pode ser expresso através de um teorema-em-ato, f(nx)=nf(x) para n inteiro e simples.(VERGNAUD, 1996, p.163).

b) De tipo "Função Proposicional", o conceito-em-ato que constitui tijolos indispensáveis à construção de proposições e da conceituação. Para este pesquisador, na conceituação das estruturas aditivas é fundamental o conceito de cardinal, o conceito de estado inicial e de transformação. Os invariantes desse tipo por não serem proposições, não são suscetíveis de serem verdadeiros ou falsos.

Além disso, o pesquisador considera que as funções proposicionais podem ter: um argumento (propriedade), como por exemplo, "é azul"; dois argumentos (relações binárias), "está à direita de"; três argumentos (relações ternárias), "a soma de... e.....é..."; quatro argumentos, como a proporcionalidade e mais de quatro argumentos. No entanto, para este autor, existe uma relação dialética entre funções proposicionais e proposições, em que uma não existe sem a outra. Neste sentido, Vergnaud (1996) estabelece uma estreita interação entre conceitos-em-atos e teoremas-em-ato.

c) Do tipo "Argumento": para o pesquisador "quem diz função proposicional e proposição, diz argumento" (p 164). O autor baseado nos lógicos clássicos afirma que

> [ ] Eram então argumentos a,b,c (instanciações das variáveis x,y,z), objetos materiais como o livro, a mesa, a personagem Paulo; e funções proposicionais das propriedades e das relações P,R_2,R_3, como aquelas que vimos atrás. Por exemplo, "Paulo coloca o livro sobre a mesa" pode escrever-se: R_3 (Paulo, livro, mesa), proposição que resulta da instanciação dos argumentos da função proposicional $R_3(x,y,z)$,"x coloca y sobre z",na qual x é uma pessoa,y um pequeno objeto material manipulável e z, um suporte possível." (VERGNAUD, 1996, p. 164).

Segundo o autor, em Matemática, os argumentos podem ser objetos materiais (o barco está à direita do farol), números ($4+3=7$), relações ("é maior que") e proposições ("8 é um divisor de 24" e a recíproca de "24 é um múltiplo de 8").

Desta forma, Vergnaud (1996) afirma que os conceitos e teoremas explícitos constituem apenas a parte visível do iceberg da conceitualização, sem a parte escondida, os invariantes operatórios, nada seriam. Além disso, afirma que para falarmos dos invariantes operatórios precisamos do auxílio das proposições, funções proposicionais e argumentos.

De acordo com Domingues e Iezzi (2003), na Matemática, os termos proposição e função proposicional estão relacionados à demonstração cujo processo ocorre em uma sucessão articulada de raciocínios em que é necessário lidar e operar constantemente com proposições (sentenças declarativas que se pode atribuir um valor lógico – verdadeiro ou falso) e funções proposicionais (sentenças declarativas que envolvem variáveis).

> Consideremos as sentenças: 2 é um número primo, $\sqrt{2}$ é um número racional e x é um número maior que 1. Como se vê, são sentenças declarativas. Mas, embora se possa dizer que a primeira é verdadeira e a segunda é falsa, nenhum valor lógico se pode atribuir à terceira, já que ela envolve uma variável em $\Re$ (conjunto dos reais). As duas primeiras são, pois, proposições, ao passo que a terceira é uma função proposicional (na variável x). (DOMINGUES, IEZZI, 2003, p.18).

Por exemplo, se $p(x) = \{x \in R / x^2 \geq 4\}$ é a função proposicional que torna a proposição verdadeira ou não. Quando x assume valores numéricos reais, por exemplo, se $x=3$, $p(3)$ é verdadeira, pois $3^2 \geq 4$ e, se $x=1$ é falsa para $p(1)$, pois $1^2 \geq 4$. Desta forma, podemos denominar o conjunto verdade da proposição aquele formado por todos os elementos de N, que tornam esta afirmação verdadeira. Logo, o conjunto verdade para a função proposicional $p(x) = \{x \in R / x^2 \geq 4\}$ é $\{2,3,4,5...\}$.

Ao tratar do conjunto das representações simbólicas, Vergnaud (1994; 1996) evidencia que, no estudo do Campo Conceitual, não podemos minimizar o papel da linguagem e dos símbolos. Consequentemente, convém, também, classificá-las e analisá-las dentro de uma variedade de símbolos e significados linguísticos que podem ser usados quando falamos e pensamos em determinado campo.

Para Vergnaud (1994;1996), do ponto de vista conceitual, o campo Multiplicativo envolve as operações de multiplicação e divisão; funções lineares e bilineares; razão, taxa, fração e números racionais; análise dimensional, etc. Para este autor, os problemas multiplicativos podem ser classificados em duas categorias. A primeira denominada isomorfismo de medidas, é caracterizada por uma situação que envolve uma relação quaternária, isto é, uma relação entre quatro quantidades; sendo duas delas medidas de um mesmo tipo, e as outras duas, medidas de outro tipo. Por exemplo.

1º exemplo: *Tenho três pacotes de iogurte. Em cada pacote, há 4 iogurtes. Quantos iogurtes tenho?* Para Vergnaud (1991), a análise desta situação pode ser representada pelo esquema apresentado na Figura 1.

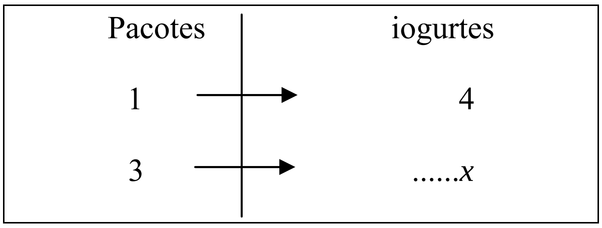


Figura 1. Esquema para exemplo 1 de isomorfismo de medidas

Fonte: Vergnaud, 1991, p. 199.

Este esquema, segundo o autor, representa uma parte de um quadro de correspondência estabelecida entre dois tipos de quantidade. No exemplo, podemos verificar com a Figura 2 a tradução de um problema do tipo isomorfismo de medidas entre dois tipos de medidas:

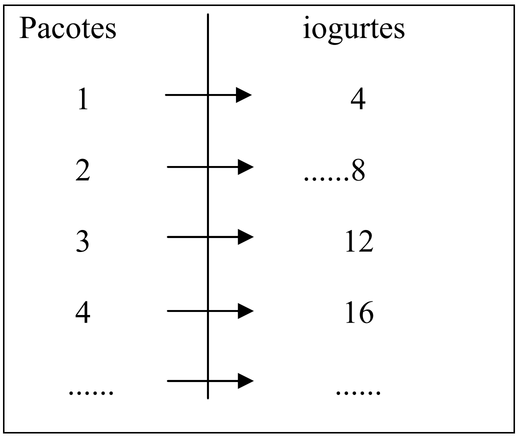


Figura 2. Esquema completo para o exemplo 1

Fonte: Vergnaud, 1991, p. 199

2º exemplo: *Paguei 12 reais por 3 garrafas de suco. Qual o preço de uma garrafa.* Nesta situação, para a determinação do preço de uma garrafa, é necessário o estabelecimento de uma relação quaternária entre a quantidade paga em reais e a quantidade de garrafas compradas.

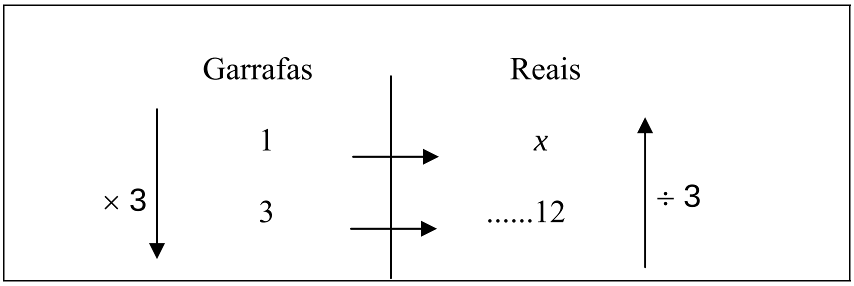


Figura 3. Esquema para exemplo 2 de isomorfismo de medidas

Para Vergnaud (1991), o operador $(\div 3)$ expressa a passagem de três garrafas para uma garrafa, e o operador inverso $(\times 3)$, a passagem de uma garrafa para três garrafas, como mostra a Figura 3. Podemos encontrar isomorfismo de medidas, sobretudo, em problemas que se resolvem por uma multiplicação, uma divisão ou por uma regra de três.

A segunda categoria de problemas multiplicativos denominada por Vergnaud (1991) de problemas do tipo produto de medidas é uma situação caracterizada por uma relação ternária em que é estabelecida uma relação entre três quantidades, e uma delas é formada pelo produto das outras duas, tanto no plano numérico como no dimensional. Por exemplo.

1º exemplo: *Três meninos e quatro meninas querem dançar. Cada menino pode dançar com uma menina e cada menina com um menino. Quantos pares podemos formar com estas crianças*?

			F		
		f	g	h	i
	a	(a,f)	(a,g)	(a,h)	(a,i)
G	b	(b,f)	(b,g)	(b,h)	(b,i)
	c	(c,f)	(c,f)	(c,g)	(c,i)

Figura 4. Esquema para o exemplo 1 de produto de medidas

Fonte: Vergnaud, 1991, p. 212

Para a análise deste exemplo, o pesquisador denomina por $G = \{a, b, c\}$, o conjunto de meninos e, por $F = \{f, g, h, i\}$, o conjunto de meninas e o conjunto C dos pares possíveis. O conjunto C é o produto cartesiano do conjunto de meninos e o conjunto de meninas, representado por $C = G \times F$, como mostra a Figura 4. Isto é, o número de pares formados é igual ao produto do número de meninos pelo número de meninas e pode ser determinado por, 3×4.

No 2º exemplo: *Uma peça retangular tem 4 metros de comprimento e 3 metros de largura. Qual é a medida de sua área?* A medida da área da peça é obtida mediante o estabelecimento de uma relação ternária entre duas medidas de mesma grandeza; neste caso, a quantidade em metros dos lados de um retângulo. Para Vergnaud (1991), se decompusermos esse retângulo em quadrados com um metro de lado, a medida da superfície é o produto das medidas das duas dimensões, tanto no plano numérico, 3×4, como no dimensional, $m \times m = m^2$, como observamos na Figura 5. Entendemos que, deste modo, fica descaracterizado o m^2, como unidade de medida.

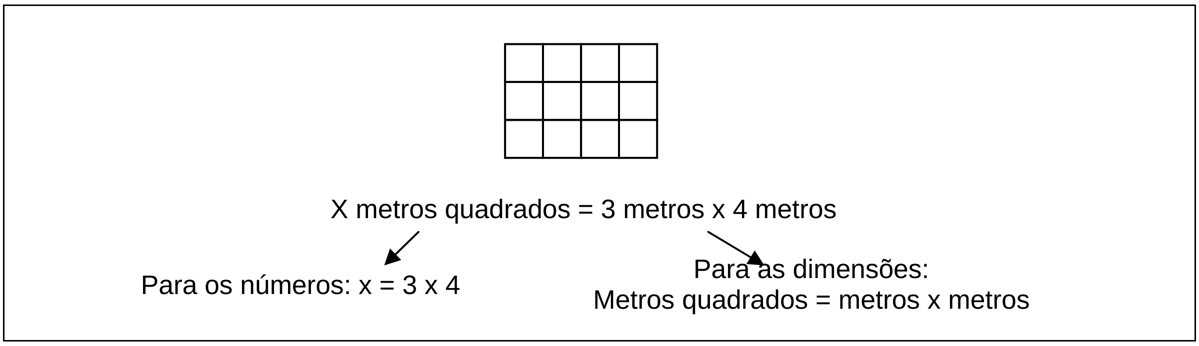


Figura 5. Esquema para exemplo 2 de produto de medidas

Fonte: Vergnaud, 1991, p. 213.

Desta forma, Vergnaud (1996) destaca como papel fundamental do investigador, em Educação Matemática, a análise de uma grande variedade de situações, relações e condutas que dizem respeito a um determinado conceito, do ponto de vista cognitivo, a fim de obter melhor compreensão de seu desenvolvimento e aprendizagem. Para Magina (2001) três aspectos nos permitem analisar a conduta dos alunos: a análise do acerto e do erro, a análise do tipo de estratégia mais econômica, rápida, eficiente e a capacidade de escolher o melhor método para resolver.

No que segue, apresentaremos a noção de relação e de cálculo relacional na análise de tarefas.

2.2 Noção de relação e cálculo relacional

Ao discutir o processo de desenvolvimento de um conceito e seu funcionamento Vergnaud (1991; 1996) destaca a importância da noção de Relação no Ensino da Matemática. Segundo este pesquisador, o conhecimento consiste em grande parte no estabelecimento de relações e sua organização em esquemas. Do mesmo modo, o conhecimento matemático é caracterizado por um conjunto de noções, de relações e sistemas relacionais apoiados uns nos outros.

Sob esta perspectiva, Vergnaud (1991) considera como fundamental o estudo das relações no Ensino de Matemática que abrange, tanto as atividades mais simples, como as atividades mais elaboradas. Para o autor, cada situação remete o aluno a uma determinada tarefa, seja ela, o estudo de uma nova situação ou uma manipulação operativa, ou uma discussão coletiva, ou até mesmo um exercício, que requer o estabelecimento de uma ou várias relações. No entanto, estas relações só são apropriadas pelo sujeito, progressivamente, ao longo do tempo, mediante a resolução de diferentes situações.

Para este autor, na Psicologia, as relações podem ser estabelecidas entre objetos no espaço, entre quantidades físicas, entre fenômenos biológicos, sociais e psicológicos e são entendidas como simples comprovações da realidade. São categorizadas de acordo com a quantidade de elementos que se relacionam, sendo, assim, denominadas: binárias, ternárias e quaternárias. Para Vergnaud (1991), as relações:

- **Binárias**: são as que relacionam dois elementos. Por exemplo, **Pedro** está ao lado de **Clara**. **Sete** é **maior** que **três;**
- **Ternárias**: são as que relacionam três elementos. Por exemplo, **Clara** está entre **Leonardo** e **Pedro**. **Seis** multiplicado por **cinco** são **trinta;** e

- **<u>Quaternárias</u>**: são as que relacionam quatro elementos. Por exemplo: **Buenos Aires** está para a **Argentina** assim como **Paris** está para a **França**. **O preço de seis garrafas** está para o **preço de uma garrafa**, assim como **a quantidade de seis garrafas** está para **a quantidade de uma garrafa**.

Na Matemática, o estudo das relações centraliza, apenas, a relação binária, embora as outras sejam estudadas sem a referência de serem relações quaternárias, como é o caso da proporcionalidade.

Para Domingues e Iezzi (2003), a relação binária é a que pode ser estabelecida entre dois elementos de um mesmo conjunto ou entre dois elementos de conjuntos distintos. Por exemplo, dados dois conjuntos E e F, não vazios, o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) com x em E e y em F é chamado de produto cartesiano de E por F, indicado pela notação $E \times F$. Se $E = \{0, 1\}$ e $F = \{1, 2\}$ então para $E \times F = \{(0, 1); (0, 2); (1, 1); (1, 2)\}$, qualquer subconjunto de $E \times F$ é considerado uma relação de E em F. Sendo assim, são exemplos de relações: $R = \{(0, 1); (1, 2)\}$ e $R' = \{(1, 1)\}$.

Desta forma, estes autores definem a relação binária, R, de E em F é um subconjunto $E \times F$, isto é, $R \subset E \times F$. Além disso, determinam que um sistema relacional entre dois conjuntos é constituído por um conjunto de partida E; um conjunto de chegada F; e uma sentença $p(x, y)$ em que x é uma variável em E e y uma variável em F, de tal forma que, para todo par ordenado (x, y) pertencente à $E \times F$, a proposição $p(x, y)$ pode ser verdadeira ou falsa. Quando $p(x, y)$ é verdadeira, dizemos que "x está relacionado com y, mediante a relação R". Quando $p(x, y)$ é falsa, dizemos que "x não está relacionado com y mediante a relação R".

Na Matemática, o domínio de uma relação é representado por $D(R)$ e constitui-se pelos elementos, x, pertencente ao conjunto de partida que tem relação com os elementos, y, do conjunto de chegada. A imagem de uma relação $Im(R)$ é constituída pelo conjunto de elementos do conjunto de chegada para os quais se verifica a validade da relação. No exemplo anterior, se R é uma relação entre o conjunto de partida $E = \{0, 1\}$ no conjunto de chegada $F = \{1, 2\}$ sob a função proposicional $R = \{(x, y) \in E \times F \,/\, y = x\}$, então $R = \{(1, 1)\}$ com o $D(R) = \{1\}$ e a $\mathrm{Im}(R) = \{1\}$.

Desta forma, Vergnaud (1991) distingue o cálculo numérico que envolve as operações fundamentais de multiplicação, adição, subtração, divisão; do cálculo relacional que envolve as operações do pensamento que promovem uma análise das relações e das propriedades. Todavia, o autor destaca, ainda, a importância do trabalho com as relações e o cálculo relacional na Educação Matemática, não só a partir de situações simples em que as relações estabelecidas entre os elementos são verificadas e constatadas; mas também em situações nas quais seja necessário estimar e antever resultados, o que propicia ao aluno o trabalho com deduções, inferências e construções. Segundo o pesquisador, há duas formas de dedução para o sujeito.

A primeira consiste em deduzir uma conduta ou uma regra de conduta das relações verificadas e aceitas. Tal dedução pode ser verificada quando o aluno compreende, por exemplo, a razão entre o preço de seis garrafas e o preço de uma garrafa, é a mesma razão que entre a quantidade de seis garrafas e de uma garrafa. Deduz que para determinar o preço de seis garrafas precisa aplicar ao preço de uma garrafa o operador $\times 6$ o que se torna uma única conduta. A segunda consiste em deduzir novas relações, a partir de relações verificadas ou aceitas que podem ser verificáveis ou não. Tal dedução acontece, quando diante da seguinte situação: *“Pedro acaba de jogar duas partidas de bolinha de gude. Perdeu 13 bolinhas na primeira partida, ganhou 7 na segunda e agora tem 45. Quantas bolinhas Pedro tinha antes de começar o jogo?”.* Na análise desta situação, Vergnaud (1991) apresenta o esquema mostrado na Figura 6.

Assim, das relações estabelecidas e aceitas perde 13 bolinhas e ganha sete bolinhas, deduz uma nova relação equivalente a perder seis bolinhas. Neste caso, para Vergnaud (1991) estabelece-se a noção de cálculo relacional por conta de dois aspectos: a composição de duas relações (perder 13 bolinhas e ganhar 7 bolinhas equivale a perder 6 bolinhas) e a aceitação da recíproca de uma relação (perder 6 bolinhas da quantidade inicial é o mesmo que ganhar 6 bolinhas na quantidade final).

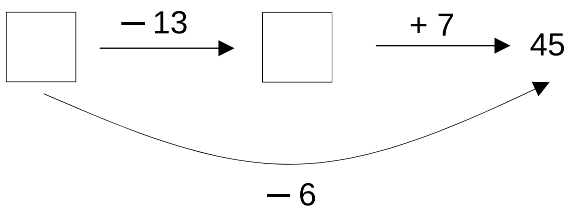


Figura 6. Esquema para o cálculo relacional com duas transformações

Para o autor, o cálculo relacional pode ser aplicado a todas as classes de relações sejam elas, binárias, ternárias ou quaternárias porque permitem deduções próprias e mantêm laços estreitos com a noção de regra de conduta.

> [ ] o aluno como toda pessoa, rege sua conduta de acordo com as relações que aprende e com o cálculo relacional que pratica. A noção de cálculo relacional contribui para clarear e fazer explícita a noção, demasiado vaga, de raciocínio. (VERGNAUD, 1991, p.98, tradução nossa).

Tanto para Vergnaud (1991) como para a Matemática, uma mesma relação pode ser representada de diversas maneiras, seja ela na linguagem natural, na linguagem algébrica, no plano cartesiano, na forma sagital ou ainda com o diagrama de Venn.

2.3 Relações Binárias e suas propriedades

Segundo Vergnaud (1991), os cálculos relacionais só são possíveis e só têm validade, quando apoiados nas propriedades das relações. As mais importantes destacadas pelo autor, para as relações binárias são:

(a) **Simétrica**: quanto à relação binária entre um elemento x e um elemento y é a mesma que entre o elemento y e o elemento x. Por exemplo, se Eduardo está ao lado de Daniela, então, Daniela está ao lado de Eduardo. Neste caso, a relação “está ao lado de “verifica a propriedade. Para o autor, uma relação binária é antissimétrica quando x se relaciona com y e y não se relaciona com x. Por exemplo, se Eduardo está à esquerda de Daniela, então, Daniela não está à esquerda de Eduardo. Neste caso, a relação “está à esquerda de” não verifica a propriedade simétrica, recebendo por isso o nome de antissimétrica.

Para Domingues e Iezzi (2003), na Matemática, uma relação é considerada simétrica em um mesmo conjunto E quando satisfaz a seguinte condição: $(\forall x, y \in E)(xRy \Rightarrow yRx)$, isto é, para quaisquer x e y pertencentes a um mesmo conjunto, quando x se relaciona com y, y se relaciona com x. Por exemplo, sejam x e y elementos do conjunto dos números inteiros, se $a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2$. A relação é antissimétrica se $x = y$, sempre que x se relaciona com y e y se relaciona com x.

(b) **Transitiva**: Vergnaud (1991) denomina uma relação transitiva quando existe uma relação entre um elemento x e um elemento y, e entre o elemento y e um elemento z, então, existe a relação entre um elemento x *e* o elemento z*.* Por exemplo, se Eduardo chegou antes de Alexandre e Alexandre chegou antes de Leonardo, então, Eduardo chegou antes de Leonardo. Ou com números, se $4 > 3$ e $3 > 1$ logo $4 > 1$. E a antitransitiva, um elemento x relaciona-se com um elemento y e o elemento y relaciona-se com um elemento z, e não existe a relação entre um elemento x. *e* o elemento z,. Por exemplo, Se Dino é pai de Silvio e Silvio é pai de Eduardo, Dino não é pai de Eduardo. Se Eduardo está à esquerda de Daniela e Daniela está à esquerda de Alexandre, Alexandre não está à esquerda de Eduardo.

Na Matemática, Domingues e Iezzi (2003), definem uma relação transitiva em um conjunto E, como uma relação que satisfaz a seguinte condição: $(\forall x, y, z \in E)\ (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$. Isto é, se x se relaciona com y e y se relaciona com z, então, x se relaciona com z. Por exemplo, a relação "menor que ou igual" é transitiva porque dados três números naturais, x, y e z se $x \leq y$ e $y \leq z$, $x \leq z$". A propriedade antitransitiva definida por Vergnaud (1991) é apresentada na Matemática como um exemplo de uma relação que não é transitiva quando x. se relaciona com y, y se relaciona com z, mas x não se relaciona com z.

(c) **Reflexiva**: Para Vergnaud (1991), na propriedade reflexiva todo elemento x está necessariamente em relação consigo mesmo. Por exemplo: "Vivem na mesma cidade... É tão grande como... e 3 = 3". Já, na antirreflexiva, se, e só se, nenhum elemento relaciona-se consigo mesmo, como por exemplo, Rita está ao lado de Rita ou Silvio não é marido de Silvio.

Para Domingues e Iezzi (2003), uma relação é reflexiva quando satisfaz a condição: $\forall x \in E \Rightarrow xRx$. Isto é, para essa relação, todo elemento do conjunto de partida relaciona-se com ele mesmo. Por exemplo, a relação menor ou igual é reflexiva para $\forall x \in E, x \leq x$. Para os autores, uma relação não é reflexiva quando existe um elemento x tal que x não se relaciona com x.

Vergnaud (1991), também, considera as relações de equivalência e ordem. Da mesma forma que, na Matemática, Vergnaud (1991) estabelece que, para uma relação ser de equivalência, devem ser válidas as propriedades reflexivas, transitiva e simétrica. Para este autor, essa relação pode ser estabelecida entre elementos de conjuntos diferentes ou entre os elementos de um único conjunto. Como por exemplo, a relação de igualdade no conjunto dos números naturais, pois vale a propriedade simétrica (se $3+4=7$,então, $7=4+3$), transitiva (se $3+4=7$ e $7=5+2$, então, $3+4=5+2$) e reflexiva ($3+4=3+4$)

Na Matemática, uma relação binária, em um determinado conjunto não vazio, é uma relação de equivalência se e somente se a relação for reflexiva, simétrica e transitiva. Isto é, se as seguintes afirmações são verdadeiras: é transitiva, $(\forall x \forall y \forall z)(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$; é reflexiva, $(\forall x)(x \in E \Rightarrow xRx)$; e é simétrica $(\forall x \forall y)(xRy \Rightarrow yRx)$.

Para a relação de ordem estrita, Vergnaud (1991) afirma que é uma relação para a qual valem as propriedades (anti-simétrica, antitransitiva e antissimétrica). Isto é, xRy e y não se relaciona com x, $xRy \wedge yRz$, mas x não se relaciona com z.

Na Matemática, segundo Domingues e Iezzi (2006) uma relação *R* sobre um conjunto E não vazio é chamada de ordem parcial sobre E se, e somente se, *R* é reflexiva, anti-simétrica e transitiva, isto é, são verdadeiras as sentenças: $(\forall x \in E) \Rightarrow xRx)$; $(\forall x, y \in E)(xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$ e $(\forall x, y, z \in E)(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$.

Quando dois elementos quaisquer de E forem comparáveis pela relação R então dizemos que R é uma relação de ordem total sobre E e E é chamado então de conjunto totalmente ordenado. Como por exemplo, de ordem total temos a relação R sobre os reais definida por $xRy \Leftrightarrow x \leq y$, $x \leq x$, $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$.

Para Vergnaud (1991), a verificação desta três propriedades caracteriza as relações de ordem amplo.

2.4 Relações Ternárias e a Noção de Transformação

Para Vergnaud (1991), as relações estabelecidas entre três elementos podem ser representadas por dois modelos. O primeiro deles, é chamado de lei de composição binária. Neste modelo, a composição de dois elementos, a e b, dá origem a um terceiro elemento, c que pode ser representado no Campo Multiplicativo pela escrita $a \times b = c$ em que os símbolos "$\times$" e "=" são identificados como sinais dessa composição. No Campo Aditivo, teríamos $a + b = c$, e os símbolos de "+" e "=" indicam a composição. Vemos, desta forma, que as operações de multiplicação e adição são consideradas relações ternárias.

Em Matemática, Domingues e Iezzi (2003) definem uma operação ou lei de composição interna como uma aplicação e esta, por sua vez, é uma relação. Dessa forma, se f é uma relação de E em F, conjuntos não vazios, f será uma aplicação (ou função) de E em F ($f : E \to F$) se, e somente se, o domínio de f é E ($D(f) = E$) e dado um elemento $a \in D(f)$ é único o elemento $b \in F$ tal que $(a,b) \in f$. Para estes autores, se f é uma aplicação de E em F, podemos escrever $b = f(a)$ isto é, b é imagem de a pela f.

Assim, uma operação ou uma lei de composição binária interna em E, um conjunto não vazio, é toda aplicação, $f : E \times E \to E \,/\, f(x,y) = x * y$. O símbolo $*$ representa a operação em que os termos x e y e $x * y$, o composto. A operação de multiplicação pode ser representada por $x.y = x \times y$. O símbolo desta operação é "$\times$", (3×4), ou ainda, ". ", $(2 \cdot x)$. Os termos x e y são chamados de fatores e o composto $x \times y$ recebe o nome de produto.

Para Domingues e Iezzi (2003), uma operação ou lei de composição binária em um determinado conjunto respeita algumas propriedades. No caso da multiplicação no conjunto dos números naturais, valem as propriedades.

a) Associativa, para quaisquer que sejam $a,b,c \in N$, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. A validade desta propriedade garante que a multiplicação de mais de dois elementos pode ser representada sem o uso de parênteses. Por exemplo, $(3 \times 2) \times 4 = 3 \times (2 \times 4) = 3 \times 2 \times 4$.

b) Comutativa, para quaisquer que sejam $a,b,c \in N$, $a \times b = b \times a$. Por exemplo: $4 \times 5 = 5 \times 4$.

c) Elemento Neutro, para a operação de multiplicação em N existe um único elemento neutro, o número 1, isto é, para qualquer $a \in N, a \times 1 = a = 1 \times a$. A distributiva da multiplicação em relação à adição, para quaisquer $a,b,c \in N$, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$. Por exemplo: $3 \times (2 + 5) = 3 \times 2 + 3 \times 5$.

d) Elementos Regulares, dizemos que um elemento $a \in \mathrm{N}$ é regular para a operação de multiplicação se, para quaisquer $a,b,c \in N$ tais que $a \times c = b \times c$ e $c \times a = c \times b$,vale que $a = b$ .Por exemplo: se $3 \times a = 3 \times b \Rightarrow a = b$.

Vemos que o primeiro modelo de relação ternária apresentado por Vergnaud (1991) é o das operações que são da mesma forma, definidas em Matemática, bem como suas propriedades com exceção da propriedade dos elementos regulares, não citadas por este autor.

O segundo modelo de relação ternária apresentada é chamado de *Elemento, Relação-Elemento, Elemento*. Neste modelo, o pesquisador considera os elementos como estados iniciais e finais, e a *relação- elemento*, uma transformação que permite passar de um estado para outro. Desta forma, a relação-elemento opera, transformando um dos elementos, inicial ou final, de modo a obter o outro elemento, final ou inicial, respectivamente. Como verificamos na Figura 7.

Elemento Inicial	$\rightarrow$	Elemento Final
	Transformação	

Figura 7. Esquema para o segundo modelo: elemento - relação-elemento - elemento

No entanto, este modelo permite uma análise mais fina de relações e de problemas que podem ser abordados e representados por uma ou mais transformações. Como pode ser visto na Figura 7 que representa esta transformação ternária.

Para Vergnaud (1991), todas as situações de transformação expressam um cálculo relacional em que no mais simples ocorre apenas uma transformação. O autor identifica três categorias de problemas, para esse caso.

a) São dados o estado inicial e a relação, e pede-se o estado final

Como por exemplo: "No início do jogo, Leonardo tinha 20 figurinhas. No final, acabou com o triplo delas. Com quantas figurinhas Leonardo ficou?

20	$\xrightarrow{\times 3}$	……
estado inicial		estado final

Figura 8. Esquema para o exemplo (a) de cálculo relacional

O cálculo relacional que permite resolver o problema para a obtenção do estado final é a associação de "o triplo de" com a aplicação da transformação $(\times 3)$ sobre o estado inicial, 20, como mostra a Figura 8. Percebe-se que a transformação solicitada neste problema é a operação de multiplicação com apenas uma transformação.

b) São dados o estado final e a relação, pede-se o estado inicial

Por exemplo: "No início do jogo, Leonardo tinha certa quantidade de figurinhas. No final, acabou com o triplo delas, totalizando 60 figurinhas. Quantas figurinhas Leonardo tinha no início do jogo?"

……	$\xleftarrow{\div 3}$	60
estado inicial		estado final

Figura 9. Esquema para o exemplo (b) de cálculo relacional

Neste caso, o cálculo relacional que resolve o problema para a obtenção do estado inicial é a associação do inverso "do triplo de" a "terça parte de" com a aplicação da transformação $(\div 3)$ sobre o estado final, 60, como mostra a figura 9. A transformação solicitada neste problema é a operação de divisão.

c) São dados o estado inicial e o final, pede-se a relação

Como por exemplo: “No início do jogo, Leonardo tinha 20 figurinhas. No final, acabou com 60 figurinhas. O que aconteceu com a quantidade de figurinhas durante o jogo: duplicou, triplicou, quadruplicou, ficou a metade?”

$$\begin{array}{ccc} 20 & \xrightarrow{?} & 60 \\ \text{estado inicial} & & \text{estado final} \end{array}$$

Figura 10. Esquema para o exemplo (c) de cálculo relacional

Para resolver o problema e determinar a *relação-elemento*, cujo esquema aparece na Figura 10, é a constatação de que o estado final é o triplo do estado inicial e, neste caso, o cálculo relacional é feito com a aplicação do operador $\times 3$ ou, ainda, constatar que o estado inicial é a terça parte do estado final, aplicando-se o operador $\times \frac{1}{3}$ ou ($\div 3$). Percebe-se que a transformação solicitada neste problema é uma operação de multiplicação ou uma de divisão.

Além disso, Vergnaud (1991) apresenta para os casos mais complexos em que são apresentadas sucessivas transformações, e o problema pede a composição de transformações. Para estes casos, o autor identifica em dois casos.

d) São dadas duas transformações sucessivas, e pede-se um dos estados

Por exemplo: “Alexandre tinha 10 figurinhas, no decorrer do jogo sua quantidade de figurinhas dobrou e depois triplicou. No final do jogo, com quantas figurinhas Alexandre ficou?”

$$\begin{array}{ccccc} 10 & \xrightarrow{\times 2} & \cdots\cdots & \xrightarrow{\times 3} & \cdots\cdots \\ \text{estado inicial} & & \xrightarrow[\times 6]{} & & \text{estado final} \end{array}$$

Figura 11.Esquema para o exemplo (d) cálculo relacional

Nesta situação, o cálculo relacional que resolve o problema e obtém o estado final é a transformação do estado final, “no dobro de“ e depois, “no triplo de”. Ou ainda, a composição das duas transformações, $\times 2 \times 3 = \times 6$. Neste caso, a transformação solicitada neste problema é a composição de duas transformações, representadas na Figura 11.

e) São dados os estados iniciais e finais e uma das transformações e pede-se a outra transformação

Neste caso, o problema pode informar a respeito dos estados, por exemplo: “Alexandre começou o jogo com 10 figurinhas, na primeira rodada sua quantidade de figurinhas dobrou. Depois da segunda rodada, ele terminou o jogo com 60 figurinhas. O que aconteceu na segunda rodada com a quantidade de figurinhas, dobrou, triplicou, quadruplicou?”

$$\underset{\text{estado inicial}}{10} \xrightarrow{\times 2} \cdots\cdots \xrightarrow{\times ?} \underset{\text{estado final}}{60}$$

Figura 12. Esquema para o exemplo (e) de cálculo relacional

O cálculo relacional promove uma transformação do estado inicial $(\times 2)$ em um estado final intermediário e a determinação de uma *relação-elemento* entre o estado final e o intermediário, sugerindo uma composição de duas operações, como exemplificado na Figura 12.

O problema pode, ainda, não apresentar informações a respeito dos estados, como por exemplo: “Alexandre tinha certa quantidade de figurinhas. Na primeira rodada a sua quantidade de figurinhas duplicou e, no final, ele terminou com o sêxtuplo da quantidade inicial. O que aconteceu com a quantidade de figurinhas na segunda rodada; duplicou, ficou a metade, triplicou? O que aconteceu?

$$\begin{array}{ccccc} \cdots\cdots & \xrightarrow{\times 2} & \cdots\cdots & \xrightarrow{\times ?} & \cdots\cdots \\ \text{estado inicial} & & \xrightarrow[\times 6]{} & & \text{estado final} \end{array}$$

Figura 13.Esquema para o exemplo (f) de cálculo relacional

No último exemplo, representado na Figura 13, a relação pode ser traduzida pela notação $a \times 6 = a \times 2 \times 3$, com a representando a quantidade inicial de figurinhas determinando que a quantidade foi triplicada. Nos exemplos de transformações apresentados por Vergnaud (1991), observamos uma relação em que o conjunto de partida e o conjunto de chegada é o mesmo, neste caso, o conjunto de figurinhas é quantificado pelo conjunto dos números naturais.

Além de tratar dos dois modelos: operação e transformação para as relações ternárias, Vergnaud (1991) discute a noção de função baseado nas relações quaternárias que apresentaremos no que segue.

2.5 Relações Quaternárias

Para Vergnaud (1991), uma relação quaternária, usualmente, é apresentada da seguinte forma: "a **está para** b**, assim como** c **está para** d". O que significa dizer, que a relação entre a e b é a mesma que a relação entre c e d. Em Matemática, as relações quaternárias seriam, então, representadas por uma igualdade de duas razões chamadas $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ com $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

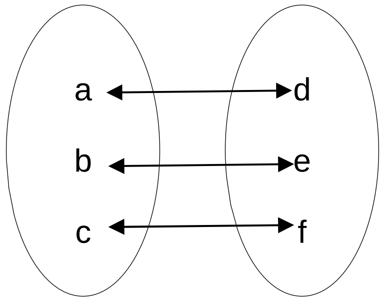
Nas relações quaternárias, Vergnaud (1991) coloca em jogo dois conjuntos de referência e uma correspondência entre eles. Como o exemplo apresenta: "Uma garrafa de suco custa quatro reais. Qual o preço de cinco garrafas de suco?". Neste caso, relaciona o conjunto de garrafas e o conjunto de moedas utilizadas para pagar, no caso, reais; o primeiro conjunto é quantificado no conjunto N e o segundo, no conjunto Q. Para a determinação do preço das cinco garrafas estabelece-se uma correspondência entre as quantidades, no caso, uma garrafa custa 4 real, então, 5 garrafas custarão 5×4 de reais. Na Matemática, esse tipo de problema pode ser resolvido, também, por uma regra de três:

Para Vergnaud (1991), podem existir relações quaternárias entre objetos de naturezas diferentes, como vimos no exemplo anterior, mas também entre objetos de mesma natureza. Quando a relação quaternária envolve a noção de correspondência, o autor apresenta alguns casos.

(a) Correspondência Biunívoca (unívoca nos dois sentidos)

Nesta correspondência, cada elemento do primeiro conjunto corresponde a um, e somente um elemento do segundo conjunto e, ainda, vale a recíproca.

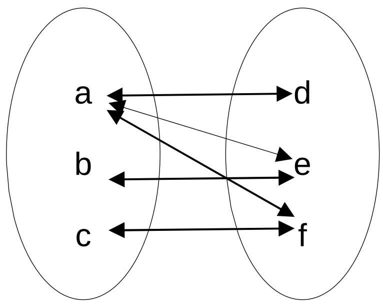
> entre um conjunto de pesos e um conjunto de volumes de um mesmo material, existe uma correspondência biunívoca: um peso dado corresponde a um volume e, somente um; e um volume dado corresponde a um único peso. (VERGNAUD, 1991, p. 58,tradução nossa).



b) Correspondência Bimultívoca (multívoca nos dois sentidos)

Neste caso, Vergnaud (1991) diz que cada elemento do primeiro conjunto pode corresponder a um ou a vários elementos do segundo conjunto, e, um segundo conjunto pode corresponder a um ou a vários elementos do primeiro conjunto.

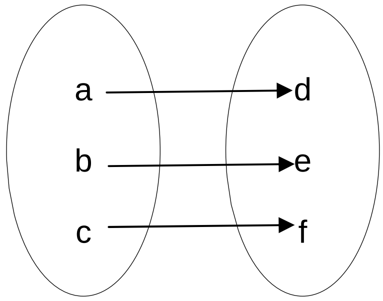
> [...] entre o conjunto de distâncias percorridas normalmente pelo carro e o conjunto de consumos de gasolina correspondentes há uma correspondência bimultívoca: cada distância percorrida pode corresponder a vários consumos de gasolina possíveis (segundo o caminho, a velocidade, o dia, a hora e o tempo); e cada consumo de gasolina pode corresponder a várias distâncias. (VERGNAUD, 1991, p.59,tradução nossa).



(c) Correspondência Counívoca (unívoca em um só sentido)

Conforme Vergnaud (1991) está correspondência acontece segundo este pesquisador, acontece quando um elemento de um conjunto corresponde a um elemento do segundo conjunto, porém a recíproca não é verdadeira.

> [...] entre o conjunto de pequenas quantidades de dinheiro que uma criança pode dispor e o conjunto das quantidades de doces que pode comprar com estas quantias existe uma correspondência counívoca: a uma dada quantidade de dinheiro corresponde uma quantidade de caramelos e somente uma; mas, reciprocamente, uma quantidade de caramelos corresponde a várias quantidades de dinheiro diferentes." (VERGNAUD, 1991,p.60,tradução nossa)



Vergnaud (1991, p.61,tradução nossa) refere que a noção de função é discutida, sob esta perspectiva como uma relação de correspondência unívoca entre dois conjuntos. Desta forma, o autor define função como uma relação de correspondência em que: "Todo elemento do primeiro conjunto corresponde a um elemento, e somente, um do segundo conjunto."

Ao estabelecer uma correspondência unívoca, cada elemento do primeiro conjunto, de garrafas, por exemplo, corresponde a um único elemento do segundo conjunto, moedas em reais. Neste caso, Vergnaud (1991) afirma que os cálculos dedutivos são considerados mais simples à medida que podemos estar seguros de que cada elemento de um conjunto corresponde a somente um elemento do segundo conjunto determinado. Assim, se x representa a quantidade de garrafas e y a quantidade paga em reais, no conjunto dos reais teremos $f : N \rightarrow N \,/\, y = 4 \times x$.

Para Vergnaud (1991), a linguagem das correspondências e das funções é a mais indicada para a análise de relações binárias entre objetos de conjuntos distintos e, por isso, o estudo das relações ternárias e quaternárias remete ao estudo das relações binárias, consideradas o núcleo fundamental do cálculo relacional, posto que permite a exploração de situações com diferentes níveis de complexidade.

No que segue, apresentaremos a proposta dos parâmetros curriculares para o desenvolvimento das estruturas aditivas.

2.6 Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) indicam como orientações didáticas para o ensino da Matemática para alunos do primeiro e segundo ciclos, o trabalho com a construção de diferentes significados das operações que envolvem números naturais. Segundo esse documento, o professor deverá propiciar situações, sejam elas aditivas ou multiplicativas, que possibilitem ao aluno o desenvolvimento de raciocínios mais complexos e permitam o estabelecimento de relações, inferências e deduções.

Para o estudo das estruturas aditivas, é apresentada uma classificação das situações, conforme suas dificuldades lógicas e em diferentes níveis de complexidade, às ideias: de combinar dois estados para obter um terceiro; de transformar, alterando um estado inicial; de comparar; e com mais de uma transformação. *"Embora todas estas situações façam parte do campo aditivo, elas colocam em evidência níveis de complexidade."* (PCN, 1998, p.71).

Ao tratar da multiplicação e divisão, o documento destaca uma forte tendência dos professores para trabalhar a multiplicação como um caso particular da adição. Alerta que este tipo de abordagem não é suficiente para que os alunos compreendam satisfatoriamente as situações multiplicativas que envolvem outras ideias, como as de: comparação; proporcionalidade (razão), configuração retangular e combinatória.

Desta forma, os PCN (1998) assinalam a importância do reconhecimento de diferentes níveis cognitivos, a partir da análise de situações, tanto para a exploração de situações aditivas, como às multiplicativas; ampliando esse trabalho para alunos de terceiro e quarto ciclos.

> Por isso, nos 3º e 4º ciclos os trabalhos com os conteúdos relacionados aos números e operações devem privilegiar as atividades que possibilitem ampliar o sentido numérico e a compreensão do significado das operações, ou seja, atividades que permitam estabelecer e reconhecer relações entre os diferentes tipos de número e entre as diferentes operações. (Brasil, 1998, p.95-96)

Ainda mais, ao discutir o ensino e a aprendizagem para o terceiro ciclo (sexto e sétimo anos), os PCN (1998) apontam que, no sexto ano, há uma predisposição para o trabalho com a revisão de conteúdos. Esta tendência é com frequência justificada pelos professores pela falta de domínio dos alunos. O documento afirma que nessa retomada de conteúdos o nível de aprofundamento em que os alunos se encontram não é analisado; o que gera um total desinteresse deles e uma sensação de repetição de conteúdos anteriores nessa fase da escolaridade.

Segundo o documento, no sétimo ano, novos conteúdos são abordados e a Matemática começa a se configurar como algo distante da realidade dos alunos, impossível de se entender, pouco útil a vida cotidiana e feita para poucos. Tal configuração conduz a uma ruptura entre o aluno e o conhecimento matemático.

Neste sentido, destaca-se como fundamental a promoção de um trabalho que amplie os significados que os alunos já possuem a respeito dos números e das operações, buscando estabelecer relações entre eles; de modo a aprimorar sua capacidade de análise para a tomada de decisões e para exploração de regularidades e propriedades numéricas. No que se refere ao cálculo operatório da multiplicação e divisão, destacam a importância em superar a memorização de regras e algoritmos, por meio da exploração de problemas qualitativos e quantitativos que visem à predição.

> Nesta fase do desenvolvimento dos alunos, ampliam-se as capacidades de estabelecer inferências e conexões lógicas para tomar algumas decisões, para abstrair significados e ideias de maior complexidade para argumentar, expressando ideias e pontos de vista com maior clareza. (Brasil,1998, p.62).

A partir de nosso estudo teórico, apresentaremos o desenvolvimento da presente pesquisa.

Capítulo 3: Desenvolvimento e análise do estudo

Neste capítulo, descreveremos os sujeitos da pesquisa, a aplicação das atividades e as análises "a priori" e "a posteriori" de cada situação. Finalizamos o capítulo com a análise das relações estabelecidas nos dois grupos de estudo e nossas conclusões.

3.1 Os Sujeitos da Pesquisa

Essa pesquisa foi realizada com dez alunos, na faixa etária entre 11 a 13 anos, estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental que foram selecionados em três escolas: uma particular e duas escolas públicas, todas localizadas na zona oeste de São Paulo. A escola da rede particular de ensino possui alunos de ensino fundamental, de primeiro a nono ano, e ensino médio. As duas escolas da rede pública oferecem aulas aos alunos do ensino fundamental, de sexto ao nono ano, e ensino médio.

O estudo piloto foi aplicado em dois alunos de uma escola pública, um de sexto ano e o outro de sétimo ano. Para o estudo principal, oito alunos foram escolhidos em outras duas escolas. Quatro deles pela própria pesquisadora, professora da escola particular e, os outros quatro, pelo diretor e coordenador da escola pública.

Todos os alunos do estudo principal foram selecionados considerando o seu bom desempenho na área de Matemática. Assim foram constituídos dois grupos que denominamos de Estudo I, grupo de alunos da escola particular: José, Cássia, Rita e Sara e Estudo II, grupo de alunos da escola pública: Yuri, Ana, Guilherme e Lilian.

Com relação ao campo multiplicativo, os alunos do Estudo I já haviam trabalhado com situações semelhantes, envolvendo as estruturas multiplicativas e suas propriedades no primeiro trimestre de 2008. Os alunos da escola pública, segundo o professor de sala, haviam trabalhado, no mesmo período, com as estruturas multiplicativas no conjunto dos números inteiros.

3.2 Descrição da Aplicação

As atividades foram aplicadas em dois momentos: no estudo piloto e no estudo principal. No Estudo Piloto, foram propostas para dois alunos, um menino do sexto ano e uma menina do sétimo ano, na faixa etária entre 11 e 13 anos. Nesta etapa inicial, nosso objetivo era avaliar as atividades, verificando a necessidade ou não, de possíveis ajustes para a aplicação final com alunos do sétimo ano, nessa mesma faixa etária, das outras duas escolas.

As atividades foram analisadas com base nas dificuldades apresentadas por esses alunos durante a resolução, sobretudo em função da escolha das seguintes variáveis: familiaridade com o contexto, ordem de grandeza dos números e linguagem do enunciado.

Depois de feito alguns ajustes, as atividades foram aplicadas em quatro alunos da escola particular, Estudo I e quatro alunos da escola pública, Estudo II, com o objetivo de aprofundar o estudo das estruturas multiplicativas no que se refere ao estabelecimento de relações ternárias, em especial, de como elas são estabelecidas pelos alunos de sétimo ano durante a resolução de problemas multiplicativos.

A duração da aplicação das atividades, em todas as etapas, foi de uma hora de resolução individual do aluno. Os alunos foram comunicados, logo no início, da necessidade do registro completo e da possibilidade de tirar dúvidas com a pesquisadora durante a resolução, se necessário. Além disso, foi permitido o uso da calculadora.

A seguir, apresentaremos as atividades com suas análises “a priori” e a “posteriori”.

3.3 Análise das Atividades

As atividades tratam das estruturas multiplicativas e foram elaboradas em duas partes. A primeira atividade envolveu problemas multiplicativos do tipo produto de medidas com noções de transformação e de composição binária; a segunda atividade envolveu a composição binária, a multiplicação e suas propriedades.

As análises "a priori" dos possíveis procedimentos de resolução dos alunos e as análises "a posteriori" fundamentam-se no referencial teórico de Vergnaud (1991; 1996), tendo como foco o cálculo relacional nas relações estabelecidas pelos alunos.

3.3.1 Atividade 1

Problema 1: Em um cinema, há 13 fileiras com 15 cadeiras cada uma

a) Qual a quantidade total de cadeiras desse cinema?

b) Se duplicarmos a quantidade inicial de cadeiras de cada fileira; duplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

c) Se duplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e duplicarmos a quantidade de fileiras; duplicará a quantidade de total de cadeiras? O que acontecerá?

d) Se triplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e triplicarmos a quantidade de fileiras, triplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

e) Se aumentarmos uma fileira, o que acontecerá com a quantidade total de cadeiras do salão? Aumentará ou diminuirá? Quanto?

f) Se aumentarmos uma cadeira em cada fileira, o que acontecerá com a quantidade total de cadeiras? Aumentará ou diminuirá? Quanto?

A atividade 1 é um problema multiplicativo do tipo produto de medidas. Para Vergnaud (1991), neste tipo de situação, estabelece-se uma relação ternária entre três elementos sendo um deles formado baseado na composição dos outros dois. A composição de quantidade de cadeiras por fileira com a quantidade de fileiras determina a quantidade total de cadeiras do cinema.

O objetivo da atividade 1 (a) é verificar quais relações são estabelecidas pelos alunos na resolução desse tipo de situação, envolvendo o campo multiplicativo. Acreditamos que a maioria dos alunos resolva-o mobilizando uma relação ternária. Segundo Bonanno (2007), os alunos, na faixa etária, entre 11 e 12 anos, apresentam um bom desempenho na resolução de problemas envolvendo a multiplicação e a ideia de configuração retangular.

Neste caso, o aluno poderá apresentar duas formas de raciocínio.

i) O estabelecimento de uma relação ternária com a combinação de dois elementos pertencentes ao mesmo conjunto, a quantidade de fileiras, com $x \in N$, e de cadeiras por fileira, com $y \in N$, representada pela operação de multiplicação em que $x \times y = 13 \times 15 = 15 \times 13 = 195$, obtendo a quantidade total de cadeiras do cinema.

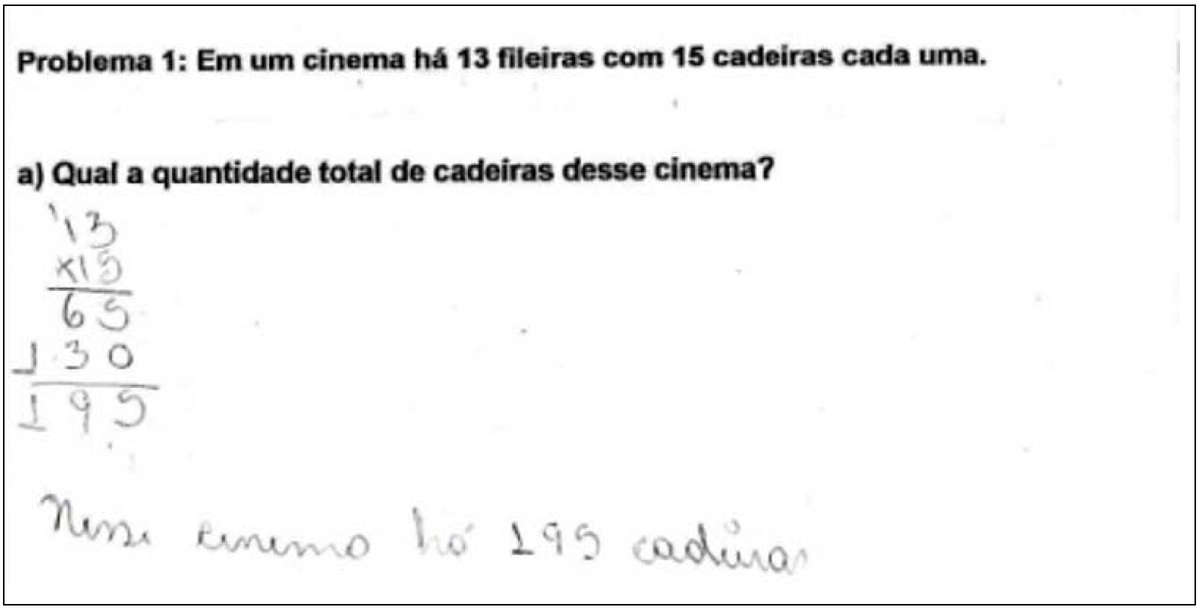
ii) O estabelecimento de uma relação quaternária apresentando noções de correspondência entre conjuntos e dentre conjuntos de mesma natureza.

Neste caso, a relação entre a quantidade inicial de fileiras e a quantidade final de fileiras é a mesma que entre a quantidade inicial de cadeiras por fileira e a quantidade total de cadeiras do cinema. Esta relação pode ser representada por uma leitura vertical da relação $\frac{1}{13} = \frac{15}{15 \times 13}$ e representada por 15×13.

Quando a relação entre a quantidade inicial de fileiras e a quantidade de cadeiras por fileira é a mesma que entre a quantidade total de fileiras e a quantidade total de cadeiras do cinema. Esta relação pode ser representada por uma leitura horizontal da relação $\frac{1}{13} = \frac{15}{13 \times 15}$ e representada por 13×15.

Assinalamos também que as resoluções podem apresentar filiações com o campo aditivo $(15 + 15 + 15 ..... + 15 = 195)$ sendo utilizadas como ferramentas de controle no processo de contagem. Há também a possibilidade de utilização da propriedade comutativa da multiplicação com a notação $13 \times 15 = 15 \times 13$.

Na análise dos protocolos, verificamos que a maioria dos alunos tanto do Estudo I como do Estudo II apresentou a mesma notação, 13×15, para a determinação da quantidade total de cadeiras do cinema. No entanto, ao entrevistarmos alguns alunos verificamos raciocínios diferentes ora com o estabelecimento de relações ternárias, ora quaternárias como ilustraremos nos protocolos das Figuras 14 e 15.


Problema 1: Em um cinema há 13 fileiras com 15 cadeiras cada uma.

a) Qual a quantidade total de cadeiras desse cinema?

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 15 \\ \hline 65 \\ 130 \\ \hline 195 \end{array}$$

Nesse cinema há 195 cadeiras

Figura 14. Protocolo da aluna Ana, estudo II

Em um primeiro momento, analisamos nos registros da aluna Ana o estabelecimento de uma relação ternária com a composição de dois elementos, fileiras e cadeiras por fileiras, para a determinação do terceiro elemento, a quantidade total de cadeiras do cinema. Identificando, assim, o estabelecimento da relação $h : N \times N \to N \ / \ h(x, y) = x \times y$, com x, representando as fileiras, y, as cadeiras e $h(x, y)$, o total de cadeiras do cinema. Contudo, durante a execução da atividade, à medida que se tornavam mais explícitas as operações da aluna, identificamos em seu raciocínio indícios do estabelecimento de uma relação quaternária.

Pesquisadora: "*Como você pode estar segura de que este procedimento está correto?Por que com ele consigo determinar a quantidade total de cadeiras?*

Ana: "*Somando a quantidade de 15 cadeiras para cada fileira repetida, 13 vezes*", e mostra: 15 + 15+ 15 *...., tenho a quantidade total de cadeiras".*

Na explicação dada pela aluna, observamos que ela mobiliza uma relação quaternária em que uma fileira está para 15 cadeiras, assim como 13 fileiras estão para 13×15 cadeiras. Identificamos filiações com o campo aditivo ao somar 13 vezes a quantidade de cadeiras por fileira. Desta forma, para a relação $g : N \to N / g(x) = 15 \times x$, com x representante das fileiras, teremos $g(1) + g(1) + g(1)....(13 vezes)$ que é a mesma coisa que

$g' : N \to N / g(n \times x) = n \times g(x)$ para qualquer n inteiro em que teremos $13 \times g(1) = 13 \times 15 \times 1$.

No protocolo da aluna Lilian, Estudo II, verificamos a mesma representação 13×15 e um possível estabelecimento de uma relação ternária.

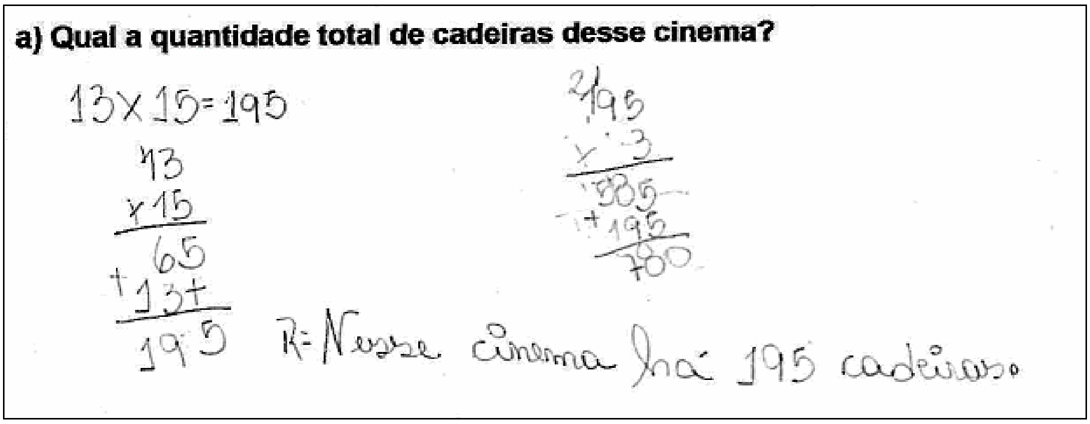


Figura 15.Protocolo da aluna Lilian, estudo II

Pesquisadora: "*Como você pode estar segura de que este procedimento está correto? Por que com ele consigo determinar a quantidade total de cadeiras?*

Lilian: "Porque 13 x15= 195."

No entanto, a aluna não consegue explicitar seu raciocínio de forma clara. Assim, a hipótese que a relação é ternária, só poderá ser validada, a partir da análise dos próximos itens da atividade.

Na análise do protocolo, identificamos outro registro na resolução da aluna $195 \times 3 = 780$. Acreditamos que ele esteja relacionado à atividade 1(c) que será discutida posteriormente.

Diferentemente dos registros anteriores, identificamos de imediato, pela notação do protocolo do aluno Guilherme (Figura 16) o estabelecimento de uma relação quaternária entre os elementos do problema.

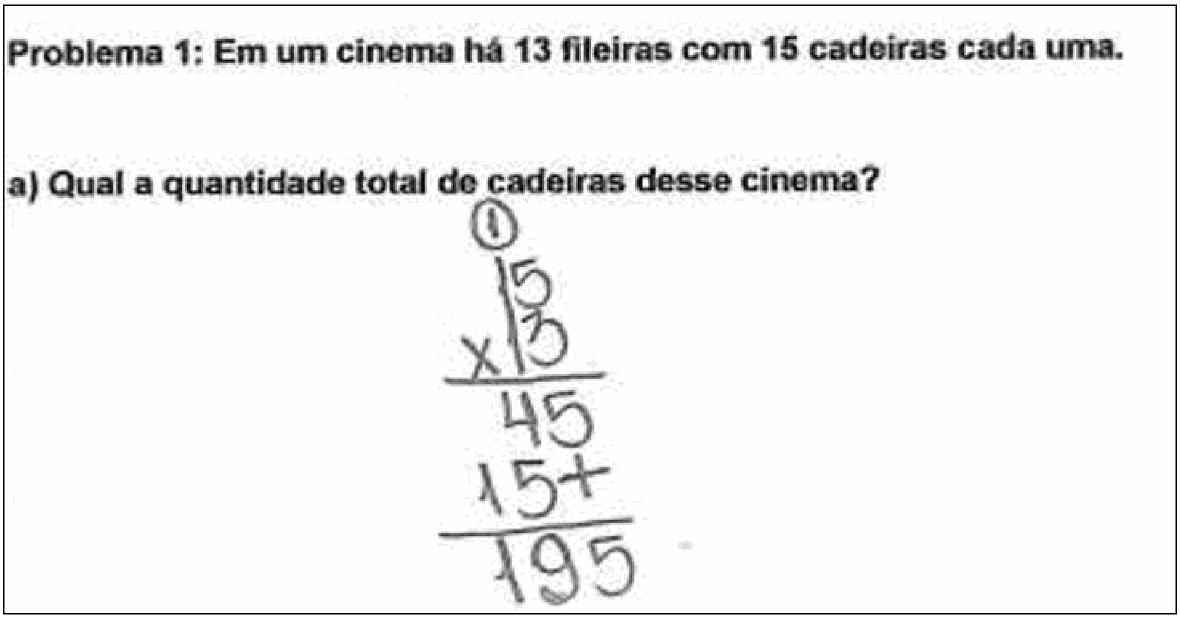


Figura 16.Protocolo do aluno Guilherme,estudo II

Esta relação foi confirmada pelo aluno durante a execução da atividade.

Pesquisadora: “Como você pode estar seguro de que este procedimento está correto? *Por que com ele consigo determinar a quantidade total de cadeiras?*

Guilherme: “Em uma 1 fileira, tem 15 cadeiras, em 13 fileiras temos 15×13 cadeiras. É isso.”

Neste caso, verificamos a mobilização de uma relação quaternária apresentada na seguinte relação: uma fileira está para 15 cadeiras, assim como 13 fileiras estão para 15×13 cadeiras.

Nos protocolos, observamos que nos alunos do Estudo II, para a composição dos dois elementos e obtenção numérica da quantidade total de cadeiras, alguns alunos utilizaram a conta armada (algoritmo de multiplicação), outros efetuaram cálculos na calculadora e outros usaram os dois procedimentos. Nos dois grupos, não foram observados registros de cálculo e o uso das propriedades multiplicativas. Como por exemplo, $(10+3)\times 15 = 150+45 = 195$ ou $(10+5)\times 13 = 130+65 = 195$.

Nos itens seguintes da atividade 1 (b), 1(c) e 1(d), nosso objetivo é verificar se os alunos utilizam as propriedades comutativa e associativa da multiplicação, reconhecendo nas atividades que, ao variar um dos elementos da composição, no caso, os fatores, o seu composto, produto, o terceiro elemento modifica-se proporcionalmente. Na variação de um dos fatores teremos $(a \times c) \times b = a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ e na variação de dois fatores, teremos $(a \times c) \times (b \times d) = a \times b \times c \times d = (a \times b) \times (c \times d)$. Nestas três situações, pretendemos, conforme Vergnaud (1991) verificar se os alunos mobilizam uma relação ternária e as propriedades de uma lei de composição binária.

Diferente das atividades 1 (c) e 1 (d), a atividade 1 (b) solicita apenas uma transformação em um dos elementos. No caso, a transformação da quantidade inicial de cadeiras, como nos outros itens 1 (c) e 1(d) ocorrem duas transformações da quantidade inicial de cadeiras e da quantidade de fileiras.

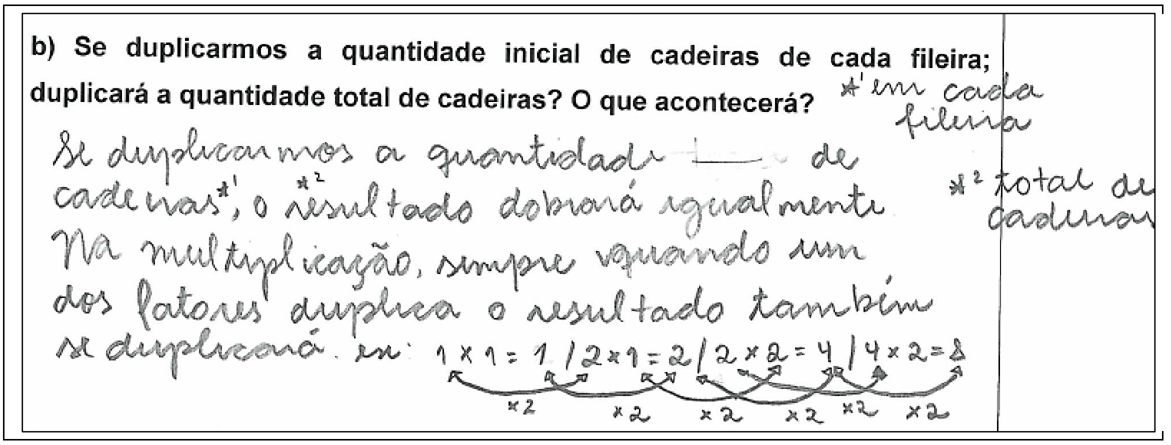
Na atividade 1 (b), três estratégias podem ser mobilizadas pelos alunos, todas levando a mesma conclusão que a quantidade total de cadeiras será duplicada. Assim, podem aparecer os seguintes raciocínios:

i) O estabelecimento de relações ternárias do tipo *Elemento, Relação-*Element*o, Elemento,* na qual o aluno determina a quantidade final de cadeiras com a transformação da quantidade inicial de cadeiras, $15 \times 2 = 30$. Depois, efetua uma nova combinação binária da quantidade de cadeiras e de fileiras para a determinação de uma nova quantidade total de cadeiras do cinema, ou seja, $30 \times 13 = 390$. Por último, verifica-se quantas vezes a quantidade inicial de cadeiras cabe na quantidade total de cadeiras, $390 \div 195 = 2$, ou seja, determina qual a transformação, relação-elemento, estabelecida entre a quantidade final do total de cadeiras e a inicial, obtendo o operador $(\times 2)$.

ii) O estabelecimento de uma relação ternária envolvendo o modelo de uma composição binária e o uso das propriedades comutativa e associativa em que $15 \times 2 \times 13 = (15 \times 13) \times 2$ =195×2, na qual o aluno reconhece que, ao variar um dos fatores, o produto variará proporcionalmente.

iii) O estabelecimento de uma relação quaternária envolvendo a noção de correspondência em que 13 fileiras estão para 13×2 fileiras, assim como 195 cadeiras estão para 195×2 cadeiras.

Na resolução da atividade 1 (b), os alunos do Estudo I aplicaram a propriedade associativa da multiplicação utilizando diferentes representações. Tal fato, ilustrará nos protocolos das Figuras 17 e 18.


b) Se duplicarmos a quantidade inicial de cadeiras de cada fileira; duplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá? *1 em cada fileira

Se duplicarmos a quantidade de cadeiras*1, o resultado*2 dobrará igualmente. *2 total de cadeiras

Na multiplicação, sempre quando um dos fatores duplica o resultado também se duplicará. ex: $1\times1=1$ / $2\times1=2$ / $2\times2=4$ / $4\times2=8$

×2 ×2 ×2 ×2 ×2 ×2

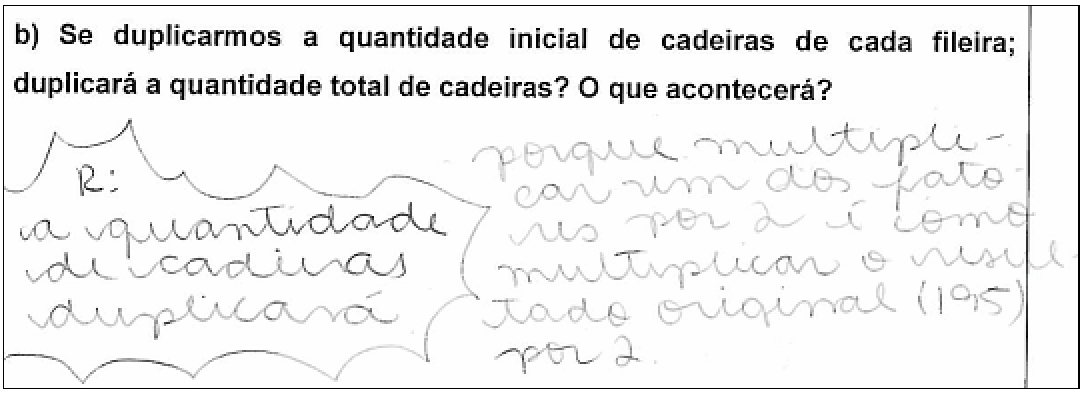
Figura 17.Protocolo do aluno José,estudo I

Neste caso, observamos que o aluno José faz uso da propriedade associativa da multiplicação. Sob o ponto de vista do cálculo relacional, o aluno reconhece que a transformação sofrida em um dos elementos de uma composição binária implica a transformação proporcional de seu produto.

No registro do aluno (Figura 17) reconhecemos na frase: *"Se duplicarmos a quantidade de cadeiras em cada fileira, o total de cadeiras dobrará igualmente",* reconhecemos o estabelecimento de uma relação ternária com o uso correto de suas propriedades. Assim, na relação $g: NXN \rightarrow N / g(a,b) = a \times b$, em que a representa as fileiras e b, as cadeiras com a transformação em um dos elementos, no caso, as cadeiras, uma nova relação é estabelecida expressa por $g': NXN \rightarrow N / g(2\times a, b) = (2\times a)\times b = 2\times(a\times b)$.

Verificamos que o aluno expressa seu raciocínio na linguagem natural. Na primeira resolução, explicita seu raciocínio relacionando as transformações com a situação dada, quantidades de cadeiras e de fileiras para depois estabelecer uma relação com o conceito matemático, utilizando termos da multiplicação. O aluno apresenta representações na forma sagital para indicar as transformações.

No protocolo da aluna Cássia (Figura 18) este mesmo raciocínio também é identificado


b) Se duplicarmos a quantidade inicial de cadeiras de cada fileira; duplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

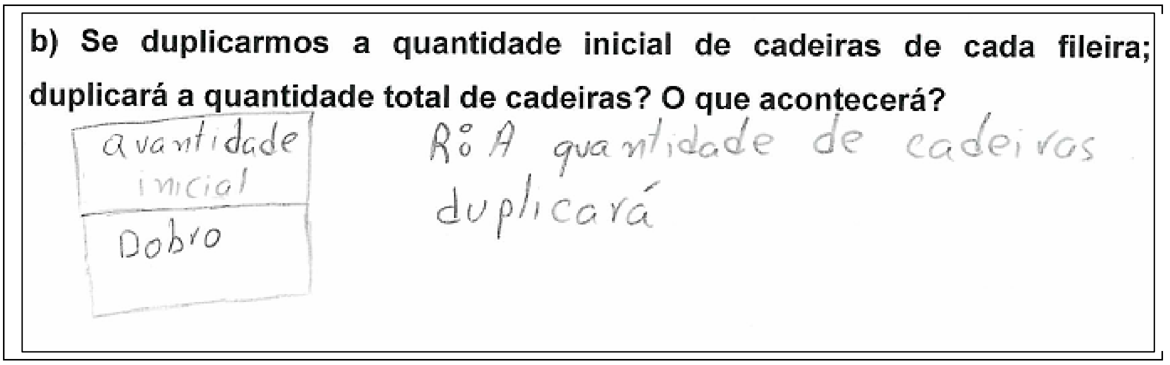
R: a quantidade de cadeiras duplicará

porque multiplicar um dos fatores por 2 é como multiplicar o resultado original (195) por 2.

Figura 18. Protocolo da aluna Cássia, estudo I

Neste caso, a relação ternária e o uso da propriedade são explicitados na linguagem natural podendo ser representados por $2 \times x \times y = (2 \times x) \times y = 2 \times (x \times y)$.

Nesse grupo, outras formas de registro foram identificadas. No protocolo da Figura 19, a aluna expressa a transformação dos elementos e sua composição binária na forma figural.


b) Se duplicarmos a quantidade inicial de cadeiras de cada fileira; duplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

a quantidade inicial
Dobro

R: A quantidade de cadeiras duplicará

Figura 19.Protocolo da aluna Rita,estudo I

Ao ser questionada pela pesquisadora sobre o porquê da sua representação com figuras, a aluna justificou com o registro apresentado na figura 20.

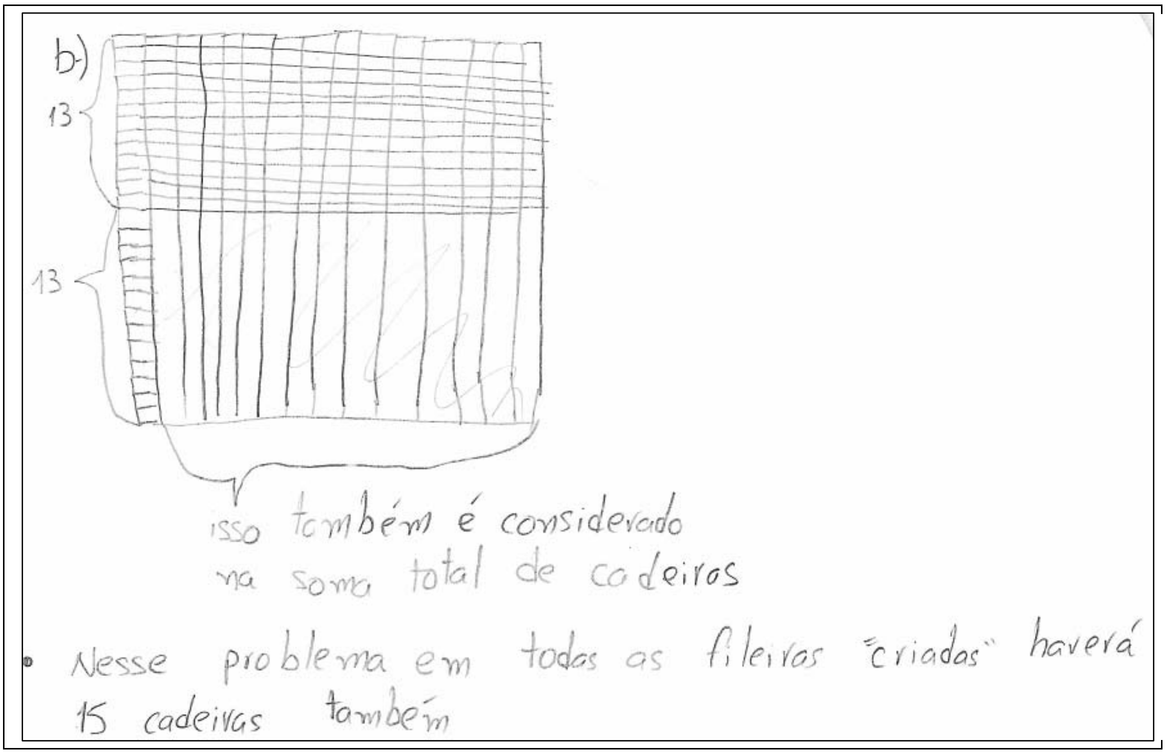
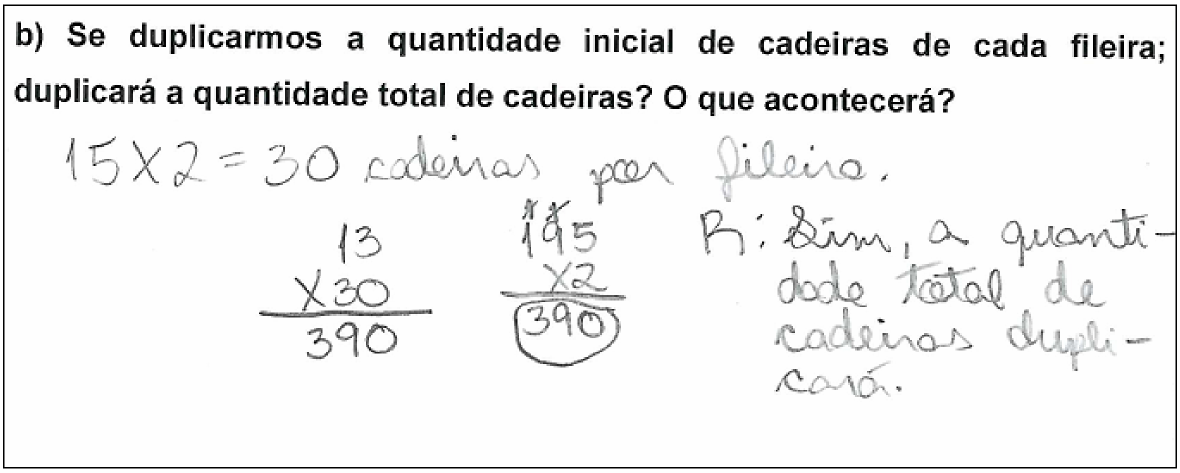


Figura 20. Protocolo da aluna Rita, estudo I

No entanto, nesse registro constatamos que a aluna transforma as fileiras, e não as cadeiras, como solicitado no enunciado do problema. Nesse caso, verifica-se a propriedade comutativa: *"A ordem dos fatores não altera o produto"*.

Só uma aluna do Estudo I (Figura 21) mobilizou várias relações ternárias envolvendo uma relação elemento e uma lei de composição binária. Primeiro, a aluna estabelecem a relação elemento $h: N \to N \,/\, h(x) = 2 \times x$, para efetuar a transformação da quantidade inicial de cadeiras, x, e determinar $h(x)$, a quantidade transformada de cadeiras. Depois com uma operação de composição $h': N \times N \to N \,/\, h(2 \times x, y) = 2 \times x \times y$ para $2 \times x$, cadeiras e y, fileiras, determina $h(2x, y)$, a quantidade total de cadeiras do cinema. Com uma nova relação ternária, efetua a transformação da quantidade total inicial de cadeiras, x, e determina $g(x)$, a quantidade final de cadeiras, aplicando a relação $g: N \to N \,/\, g(x) = 2 \times x$. Por último, estabelece outra relação ternária entre a quantidade total inicial de cadeiras e a quantidade total final e uma transformação com o operador $(\times 2)$ verificando, assim, se a hipótese levantada no enunciado *"duplica a quantidade total de cadeiras"* é válida.


b) Se duplicarmos a quantidade inicial de cadeiras de cada fileira; duplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

15 X 2 = 30 cadeiras por fileira.

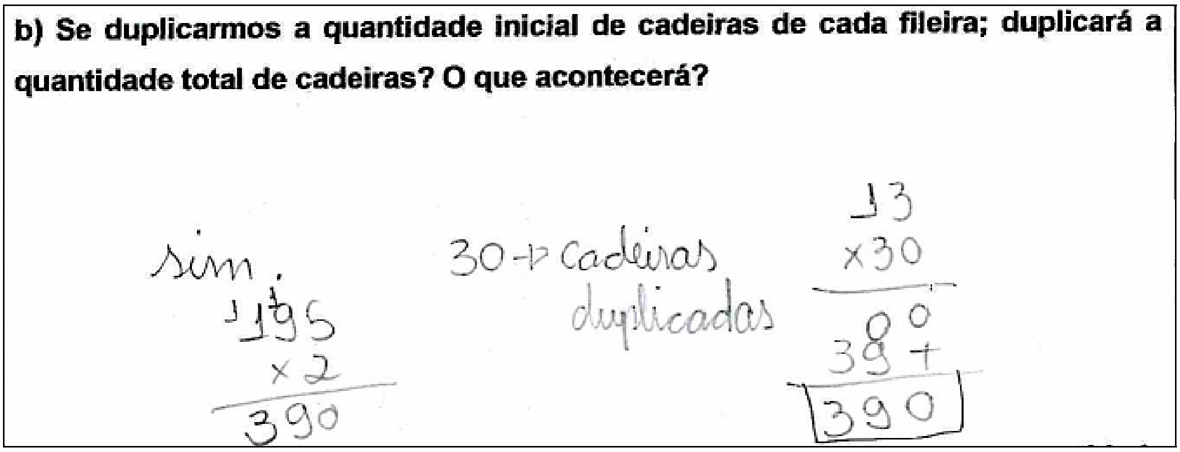
13 × 30 = 390

195 × 2 = 390

R: Sim, a quantidade total de cadeiras duplicará.

Figura 21.Protocolo da aluna Sara, estudo I

Todos os alunos do Estudo II apresentaram um raciocínio semelhante ao da aluna Sara, estabelecendo mais de uma relação ternária, como constatamos no protocolo da Figura 22.


b) Se duplicarmos a quantidade inicial de cadeiras de cada fileira; duplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

sim.

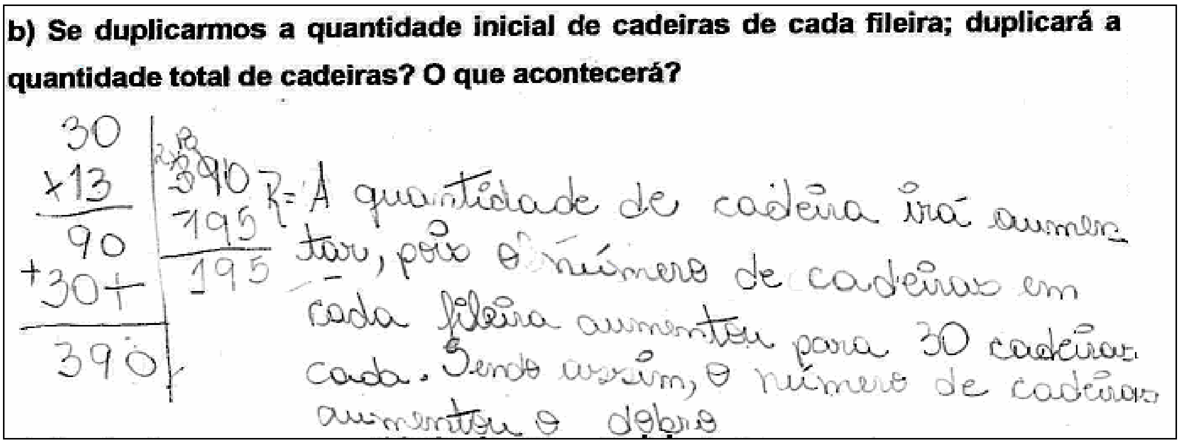
195 × 2 = 390

30 → cadeiras duplicadas

13 × 30: 00 + 39 = $\boxed{390}$

Figura 22.Protocolo do aluno Yuri, estudo II

Diferente dos protocolos das Figuras 21 e 22, no protocolo da aluna Lilian, Estudo II, identificamos, por último, uma relação ternária envolvendo uma transformação aditiva (soma do oposto de 195) para a determinação da *Relação-Elemento* com o operador $+(-195)$. Como observado na Figura 23.



b) Se duplicarmos a quantidade inicial de cadeiras de cada fileira; duplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

30
×13
90
+30
390

390 | 195
195

R= A quantidade de cadeira irá aumentar, pois o número de cadeiras em cada fileira aumentou para 30 cadeiras cada. Sendo assim, o número de cadeiras aumentou o dobro

Figura 23.Protocolo da aluna Lilian, estudo II

A resolução da atividade 1 (c) solicita duas transformações, uma em cada elemento da composição, favorecendo a aplicação das propriedades comutativa e associativa da multiplicação. Nesta situação, a transformação da quantidade inicial de cadeiras e a quantidade inicial de fileiras implica uma transformação proporcional na quantidade total de cadeiras do cinema.

Na atividade 1 (c), duas estratégias podem ser mobilizadas pelos alunos e estas relações podem aparecer:

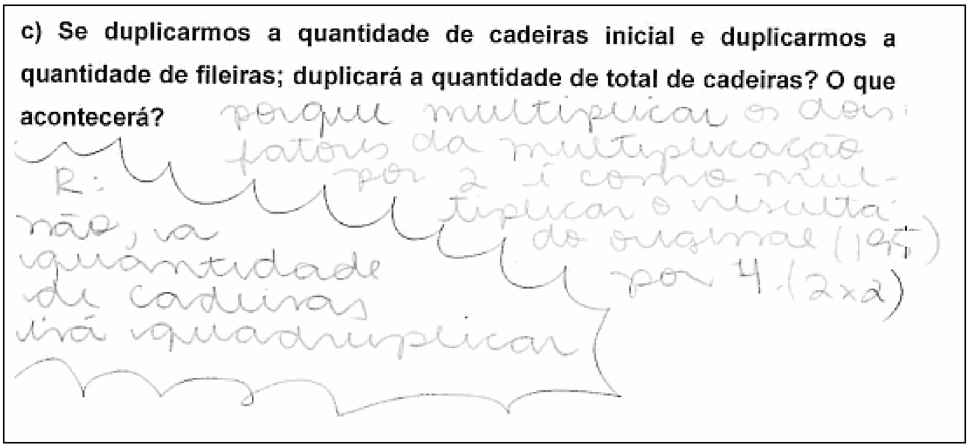
i) Com o estabelecimento de várias relações ternárias envolvendo uma transformação, determina-se a quantidade de cadeiras e de fileiras, após as transformações realizadas $(15 \times 2 = 30, 13 \times 2 = 26)$. Em seguida, estabelece-se uma relação ternária envolvendo uma composição binária para a determinação do terceiro elemento, a quantidade total de cadeiras $(30 \times 26 = 780)$. Verifica-se qual a transformação sofrida na quantidade total inicial de cadeiras, ou seja, determina a *relação-elemento* entre 780 e 195 obtendo como resolução o quádruplo da quantidade total de cadeiras no cinema, $(780 \div 195 = 4)$.

b) Duplica-se a quantidade de cadeiras em cada fileira e a quantidade de fileiras. Depois aplicando as propriedades comutativa e associativa da multiplicação, $15 \times 2 \times 13 \times 2 = 13 \times 2 \times 15 \times 2 = 2 \times 2 \times 15 \times 13 = (2 \times 2) \times (13 \times 15) = 4 \times 195$ obtemos um aumento de quatro vezes na quantidade total e inicial das cadeiras do cinema. Neste raciocínio, observa-se uma composição de duas transformações $(2 \times 2 = 4)$.

No entanto, erros podem surgir no estabelecimento das composições dessas transformações associadas à ideia de uma transformação equivalente àquela sofrida pelos elementos da composição $(x \times y)$, como por exemplo, a quantidade total de cadeiras será duplicada, obtendo $15 \times 13 \times 2 = 390$.

Na análise dos protocolos do Estudo I, constatamos diferentes representações de uma mesma relação ternária, indicando a aplicação correta das propriedades da multiplicação.

Como podemos observar no protocolo da Figura 24.


c) Se duplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e duplicarmos a quantidade de fileiras; duplicará a quantidade de total de cadeiras? O que acontecerá?

porque multiplicar os dois fatores da multiplicação por 2 é como multiplicar o resultado do original (195) por 4.(2x2)

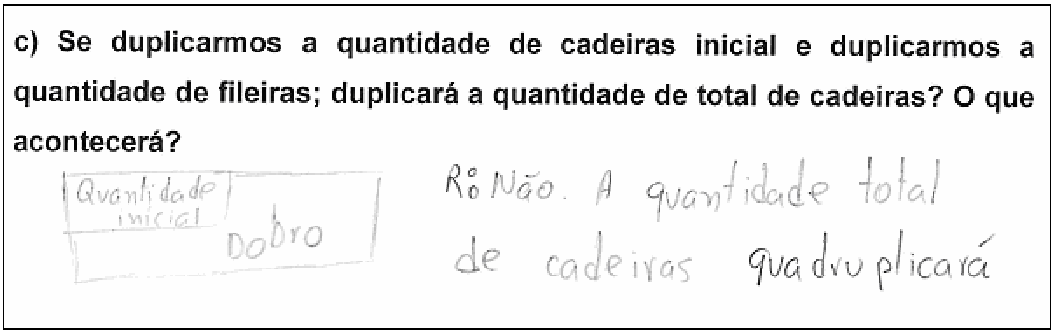
R: não, va quantidade de cadeiras irá quadruplicar

Figura 24.Protocolo da aluna Cássia, estudo II

No registro da aluna, reconhecemos o estabelecimento de uma relação ternária, envolvendo uma composição binária e as propriedades comutativa e associativa representadas na linguagem natural, a notação $a \times 2 \times b \times 2 = a \times b \times 4$ em que a e b são denominados fatores.

No protocolo da Figura 25, encontramos, novamente, o uso da linguagem figural na resolução da atividade 1 (c). Na representação da aluna, identificamos um aumento de cada lado da figura representando o dobro de cada elemento, ou seja, o dobro da quantidade de cadeiras e o dobro da quantidade de fileiras. Observamos, que a aluna reconhece a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição uma visto que considera a variação do quádruplo na quantidade total inicial de cadeiras.

Neste caso, aumentando a quantidade de fileiras no dobro, teríamos o dobro da quantidade total de cadeiras no cinema.


c) Se duplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e duplicarmos a quantidade de fileiras; duplicará a quantidade de total de cadeiras? O que acontecerá?

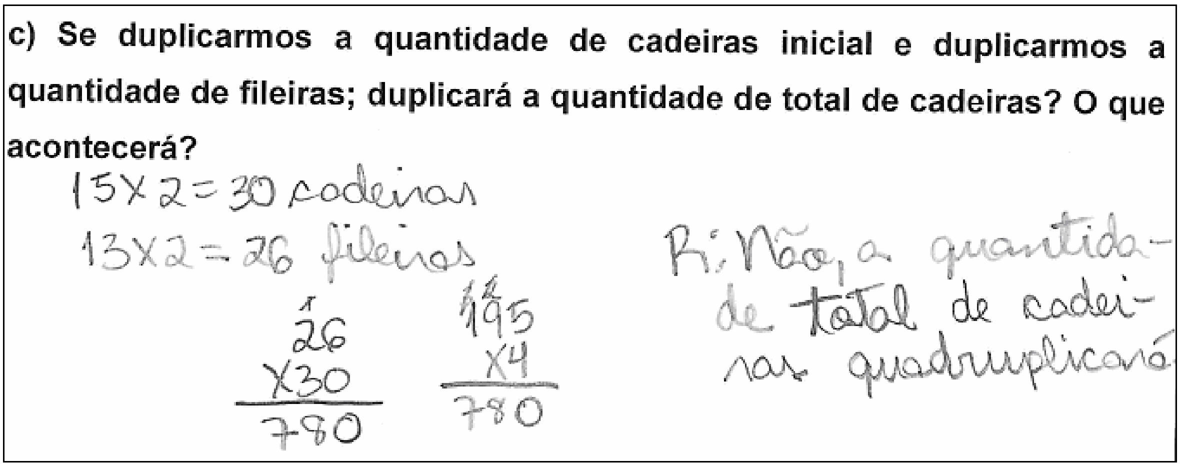
Quantidade inicial

Dobro

R: Não. A quantidade total de cadeiras quadruplicará

Figura 25.Protocolo da aluna Rita, estudo I

Somente um aluno do Estudo I(Figura 26) e todos os alunos do Estudo II mobilizaram várias relações ternárias, envolvendo uma única transformação. Primeiro, os alunos aplicaram a relação $h: N \rightarrow N \;/\; h(x) = 2 \times x$, transformando as quantidades iniciais de cadeiras e fileiras. Depois com a relação $g: N \times N \rightarrow N / g(2 \times x, 2 \times y) = 2 \times x \times 2 \times y$, efetuaram uma combinação binária. Para verificar no final o que aconteceu com a quantidade total de cadeiras do cinema, após todas estas transformações, aplicaram uma transformação, com operador $(\times 4)$ na composição inicial de cadeiras do cinema, com a relação $h': N \rightarrow N / h'(x) = 4 \times x$, x representando a quantidade inicial de cadeiras do cinema e $h'(x)$, a quantidade final de cadeiras do cinema.


c) Se duplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e duplicarmos a quantidade de fileiras; duplicará a quantidade de total de cadeiras? O que acontecerá?

15X2=30 cadeiras

13X2=26 fileiras

26 X30 = 780

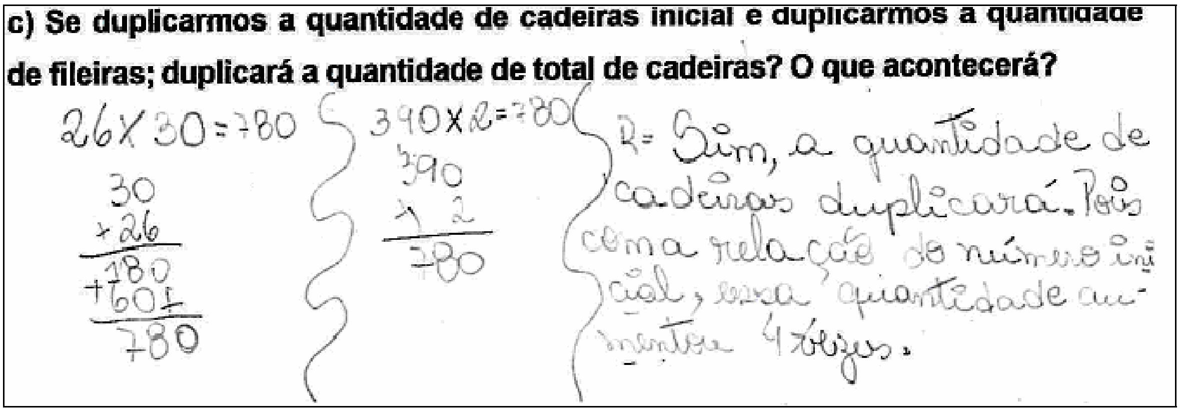
195 X4 = 780

R: Não, a quantidade total de cadeiras quadruplicará

Figura 26.Protocolo da aluna Sara, estudo I

Por último, verificaram numericamente a equivalência numérica das duas relações.

No protocolo da aluna Lilian, observamos registros de transformações nas quantidades iniciais para uma nova composição binária dos elementos. No entanto, para a determinação da variação sofrida na quantidade total inicial de cadeiras, verificamos (na Figura 27) o estabelecimento de uma relação ternária com uma transformação com o operador $(\times 2)$ na quantidade total de cadeiras do item anterior, representada por $h : N \rightarrow N / h(x) = 2 \times x$, com x representando o total de cadeiras antes da transformação.



c) Se duplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e duplicarmos a quantidade de fileiras; duplicará a quantidade de total de cadeiras? O que acontecerá?

26X30=780
30
x26
180
+601
780

390X2=780
390
x 2
780

R= Sim, a quantidade de cadeiras duplicará. Pois com a relação do número inicial, essa quantidade aumentou 4 vezes.

Figura 27.Protocolo da aluna Lilian, estudo II

Observamos que a aluna em sua resposta final reconhece uma composição das duas transformações e sua implicação na variação da quantidade total de cadeiras com a frase: *"com relação à quantidade do número inicial, essa quantidade aumentou 4 vezes".*

Alguns alunos do Estudo II estabeleceram relações com o item 1 (a) da estruturado em itens. Ilustramos o fato com os protocolos das Figuras 28 e 29 em que podemos observar uma duplicação da quantidade total de cadeiras, e não da quantidade inicial de 15 cadeiras.

Com a intervenção da pesquisadora, os alunos retomaram em voz alta a leitura do problema e sua resolução. Esta estratégia possibilitou-lhes a identificação de tal dificuldade no enunciado, com a leitura da quantidade inicial de cadeiras, em lugar da quantidade total de cadeiras. No próprio protocolo das Figuras 28 e 29, observamos novos registros com uma nova resolução para o problema.

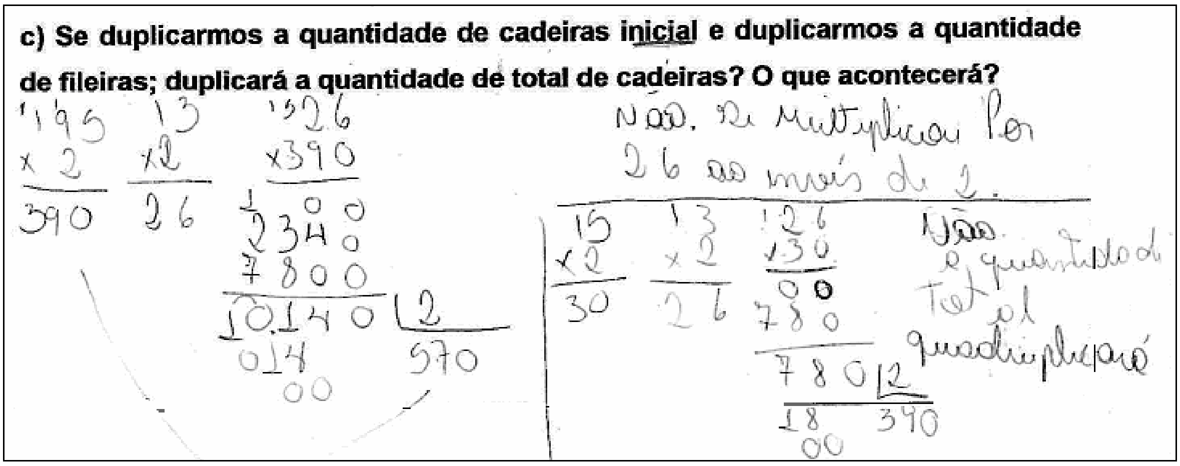


Figura 28.Protocolo da aluna Ana, estudo II

No primeiro registro da aluna Ana, antes da intervenção da pesquisadora, a aluna determina uma transformação na quantidade total de cadeiras, (195×2) e na quantidade de fileiras, 13×2. Depois, estabelece uma composição desses dois elementos, 195×26 e determina a *relação-elemento,* utilizando a operação inversa da multiplicação com o operador $(\times \frac{1}{2})$, transformando o estado final no estado inicial, $10140 \div 2 = 570$. Uma vez que obtém 570 cadeiras, constata que a quantidade de 390 cadeiras não é duplicada, identificada na seta, mas sim multiplicada por 26.

No registro final, após a intervenção da pesquisadora, a aluna procede da mesma forma, mas desta vez, verifica que a quantidade obtida é o dobro da quantidade total anterior e compondo as duas transformações determina que a quantidade inicial de cadeiras do cinema quadruplicará.

No protocolo da Figura 29, apesar do aluno não responder o que acontecerá com a quantidade total de cadeiras, ele demonstrou ao explicitar sua nova resolução para a pesquisadora, observar nos grifos circulares, que o dobro de 2 e o dobro de 2 implica o quádruplo da quantidade total de cadeiras.

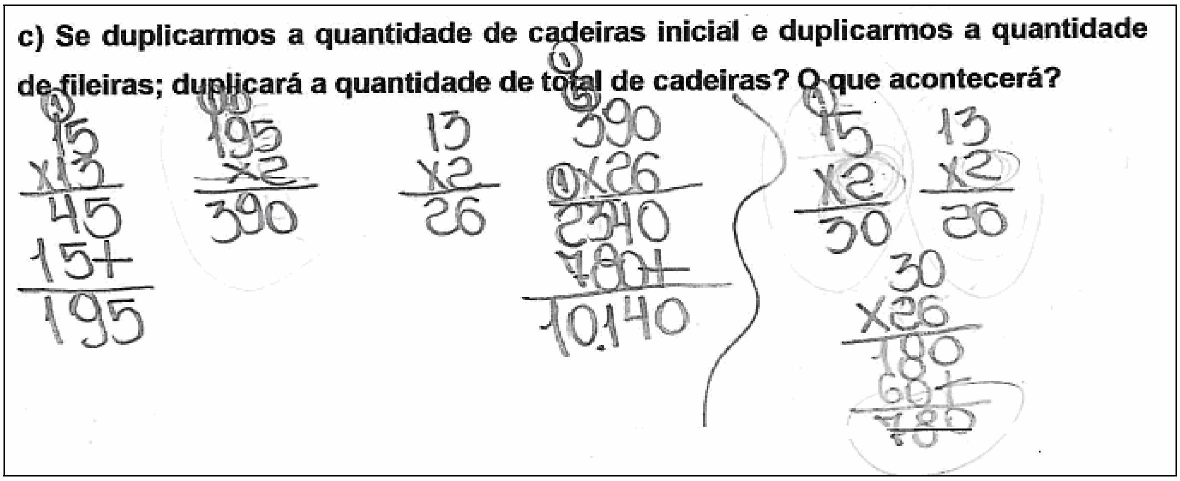
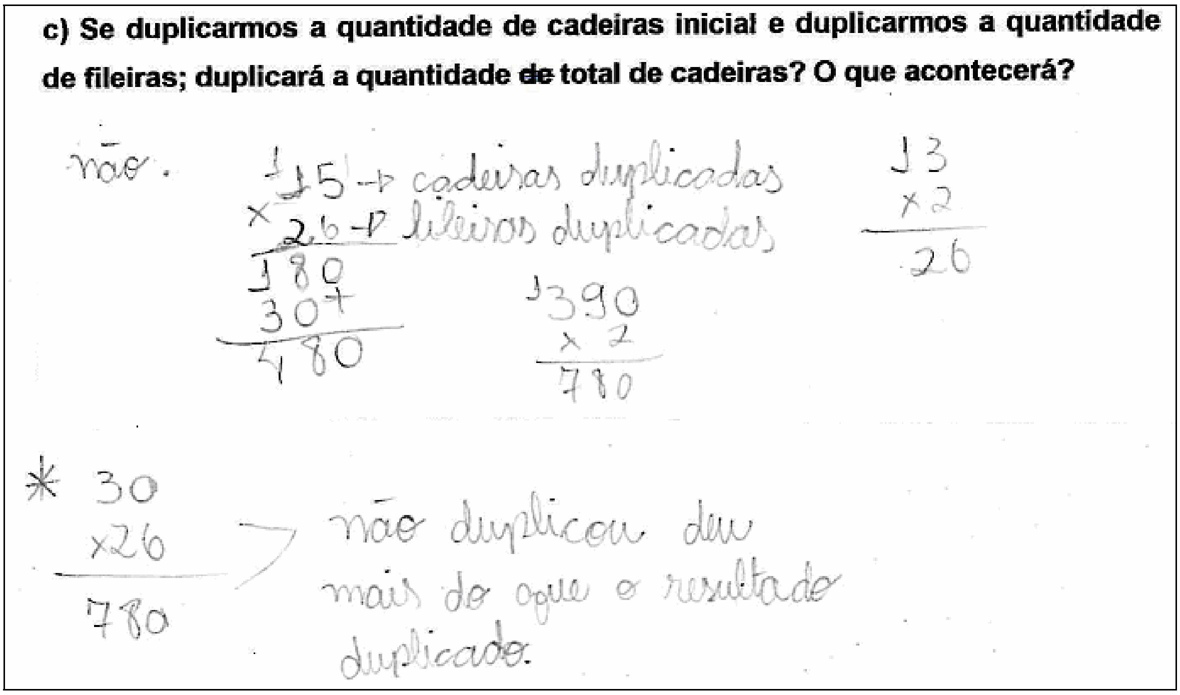

c) Se duplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e duplicarmos a quantidade de fileiras; duplicará a quantidade de total de cadeiras? O que acontecerá?

Figura 29.Protocolo do aluno Guilherme, estudo II

No protocolo seguinte, Figura 30, observamos que o aluno não duplica a quantidade de cadeiras, apesar de indicar cadeiras duplicadas e erra nos cálculos da composição, $15 \times 26 = 480$. Depois da revisão indicada com um asterisco ele constata apenas que a quantidade total de cadeiras é maior do que o dobro da quantidade total inicial de cadeiras, não estabelecendo relação com a quantidade total de 195 cadeiras.


c) Se duplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e duplicarmos a quantidade de fileiras; duplicará a quantidade ~~de~~ total de cadeiras? O que acontecerá?

não.

15 → cadeiras duplicadas

26 → fileiras duplicadas

não duplicou deu mais do que o resultado duplicado.

Figura 30.Protocolo do aluno Yuri, estudo II

Desta forma, no Estudo II, verificamos que embora alguns alunos reconheçam a composição das transformações (Figuras 28 e 29), eles não estabelecem essa relação como uma propriedade de uma lei de composição binária. Isto é, não reconhecem que, ao variar um dos elementos da composição, seu produto varia proporcionalmente.

Assim como na atividade do item anterior, a atividade 1 (d) trata da composição de duas transformações. Os alunos podem apresentar duas formas de raciocínio.

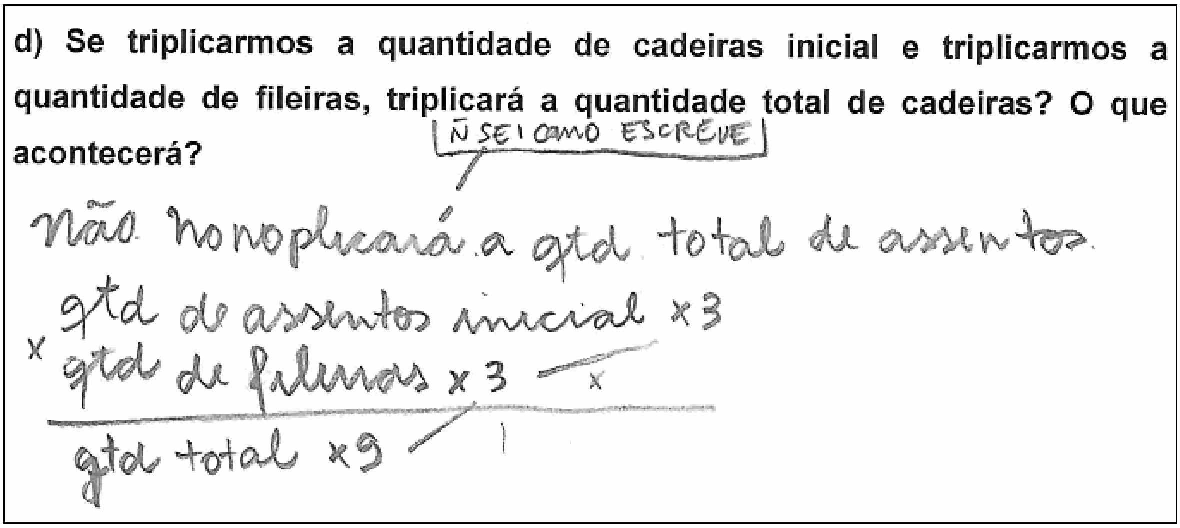
i) Aplica-se uma transformação nas quantidades iniciais de fileira e de cadeira por fileira, $15 \times 3 = 45$ e $13 \times 3 = 39$. Depois, estabelece-se uma combinação binária com estas duas quantidades transformadas, $45 \times 39 = 1.755$, determinando a quantidade total de cadeiras do cinema. Por último, verifica-se quantas vezes a quantidade final total de cadeiras foi transformada da quantidade inicial total de cadeiras $(1.755 \div 195 = 9)$,determinando a relação elemento $(\times 9)$.

ii) Triplicando a quantidade de cadeiras em cada fileira e a quantidade de fileiras teremos com a utilização das propriedades comutativa e associativa da multiplicação, $15 \times 3 \times 13 \times 3 = 13 \times 3 \times 15 \times 3 = 13 \times 15 \times 3 \times 3 = 13 \times 15 \times 9$ implicando aumento de nove vezes na quantidade inicial total de cadeiras no cinema.

O objetivo principal desta atividade é verificar se os alunos estabelecem corretamente a composição de duas transformações multiplicativas. Observamos ainda que nestes itens, 1 (c) e 1 (d), os alunos podem apresentar erros nas composições estabelecendo transformações aditivas, $(\times 3) + (\times 3) = \times 6$), em lugar das multiplicativas, ($\times 3 \times 3 = \times 9$).

No Estudo I, todos os alunos estabeleceram corretamente as relações com mais de uma transformação apresentando diferentes registros, como verificamos nas Figuras 31,32 e 33.

Neste caso, o aluno utiliza uma lei de composição binária e a propriedade associativa da multiplicação. Ao triplicar a quantidade de fileiras e a quantidade de cadeiras por fileira, a quantidade total de cadeiras aumentará ($\times 9$), ou seja, ($\times 3 \times 3$). Observamos que o aluno reconhece que ao variar um dos elementos, o composto terá uma variação proporcional.



d) Se triplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e triplicarmos a quantidade de fileiras, triplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

Ñ SEI COMO ESCREVE

não nonoplicará a qtd total de assentos.

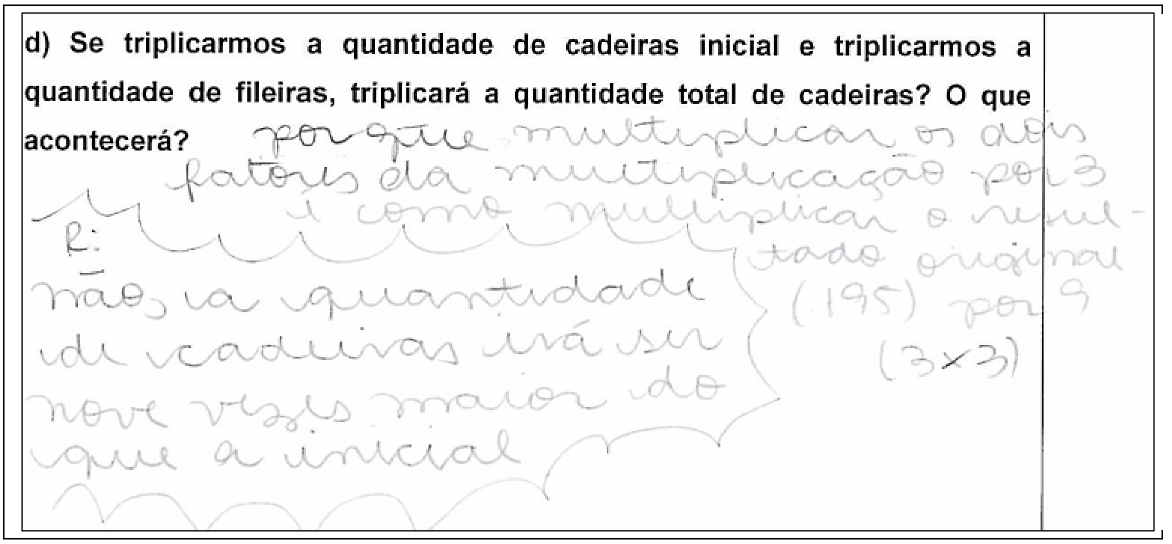
qtd de assentos inicial x3

x qtd de fileiras x 3

qtd total x9

Figura 31.Protocolo do aluno José, estudo I

No registro da Figura 32, a aluna também reconhece na composição binária o uso das propriedades, evidenciando que na variação dos fatores na operação de multiplicação ocorre uma variação proporcional em seu produto.



d) Se triplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e triplicarmos a quantidade de fileiras, triplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

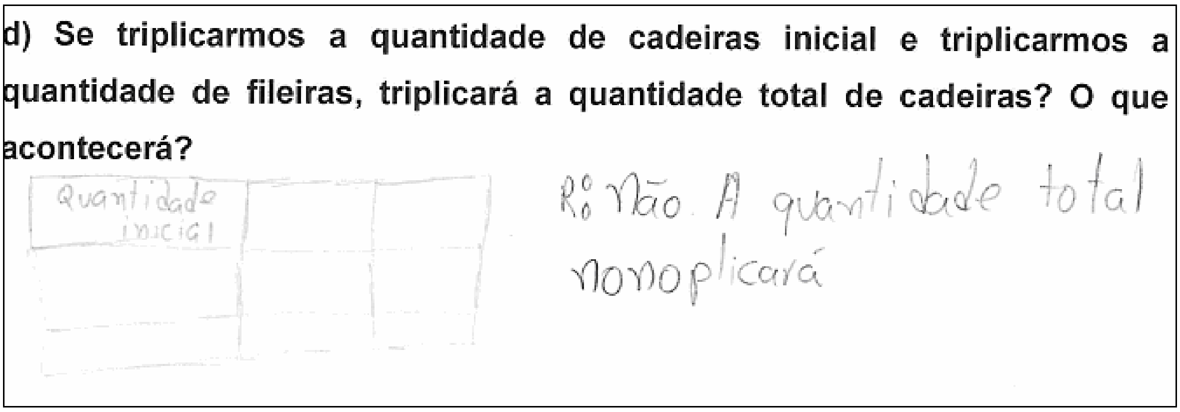
porque multiplicar os dois fatores da multiplicação por 3 é como multiplicar o resultado original (195) por 9 (3x3)

R: não, a quantidade de cadeiras irá ser nove vezes maior do que a inicial

Figura 32.Protocolo da aluna Cássia, estudo I

Neste estudo, constatamos outras formas de representação na composição de duas transformações. Na Figura 33, a aluna utilizou a linguagem figural.

Neste registro, identificamos a transformação em três vezes da quantidade de fileiras e da quantidade de cadeiras por fileira e o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, em que acrescentando 1 à quantidade de cadeiras ou à quantidade de fileiras teremos: $(b+b)\times a = a\times b + a\times b = 2\times a\times b$ e para $(b+b+b)\times(a+a+a) = 9\times(a\times b)$.

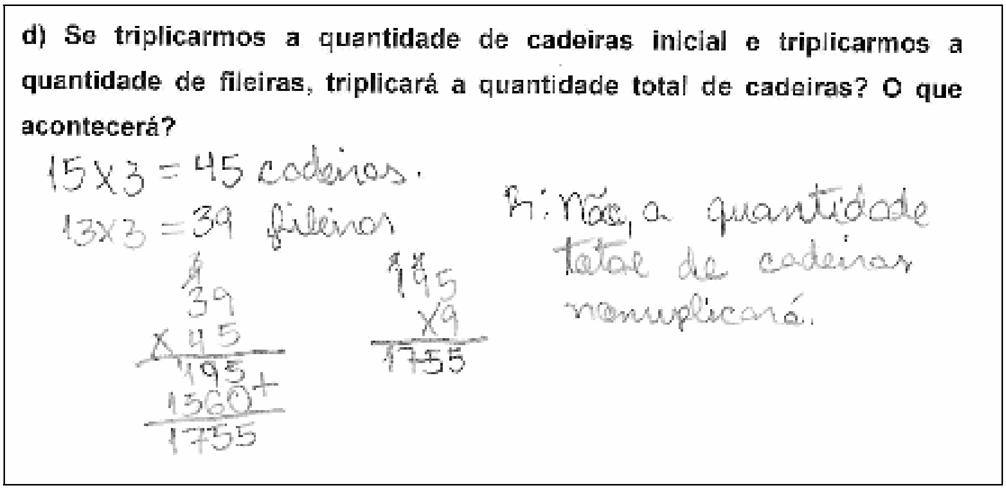

d) Se triplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e triplicarmos a quantidade de fileiras, triplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

Quantidade inicial

R: Não. A quantidade total nonoplicará

Figura 33.Protocolo da aluna Rita, estudo I

Apenas uma aluna do Estudo I (Figura 34) registrou várias relações de transformações e depois uma composição. Primeiro, a aluna mobiliza uma transformação nas quantidades iniciais de fileiras e cadeiras por fileira com a relação $g: N \to N \,/\, g(x) = 3 \times x$, com x, cadeiras ou fileiras iniciais. Depois aplica uma composição binária com as quantidades transformadas em que $h: N \times N \to N \,/\, h(x,y) = x \times y$ e, por fim, estabelece uma *relação-elemento* com a transformação em nove vezes, operador $(\times 9)$, da quantidade total inicial de cadeiras, x, com a relação $k: N \to N \,/\, k(x) = 9 \times x$, verificando que a quantidade é nove vezes a quantidade inicial.


d) Se triplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e triplicarmos a quantidade de fileiras, triplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

15x3 = 45 cadeiras.
13x3 = 39 fileiras

39 x 45 = 195 + 1560 = 1755

195 x 9 = 1755

R: Não, a quantidade total de cadeiras nonuplicará.

Figura 34.Protocolo da aluna Sara,estudo I

No protocolo da Figura 35, reconhecemos no registro da aluna do Estudo II o mesmo raciocínio apresentado no protocolo anterior, com uma composição correta das duas transformações. Observamos que a aluna transforma a quantidade total inicial de cadeiras com o operador $(\times 3)$ para verificar se a quantidade será triplicada, o que mostra não ser válido. Na resposta final, a aluna compõe as duas transformações, indicando $3 \times 3 = \times 9$:

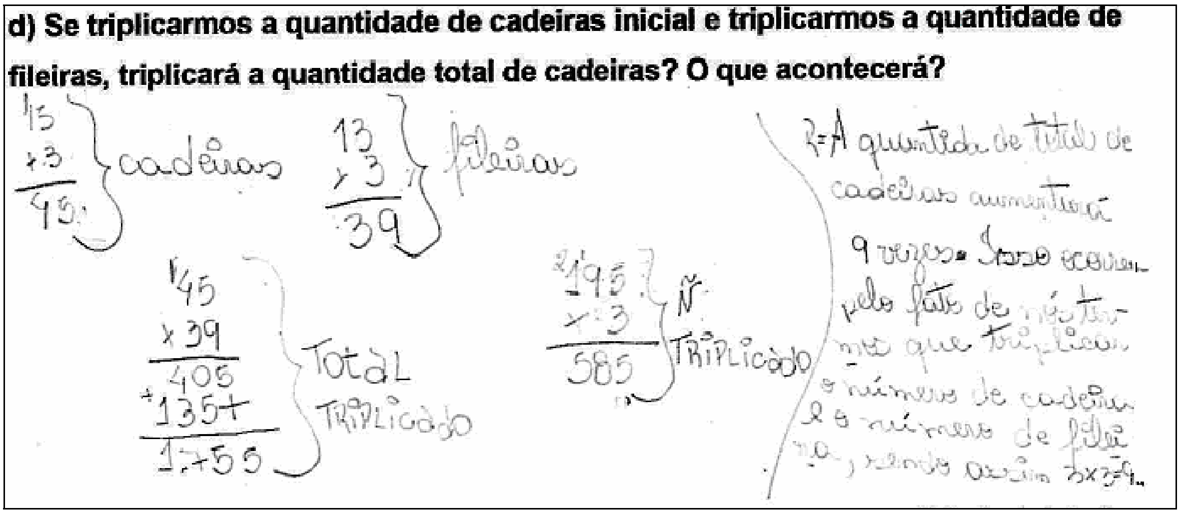
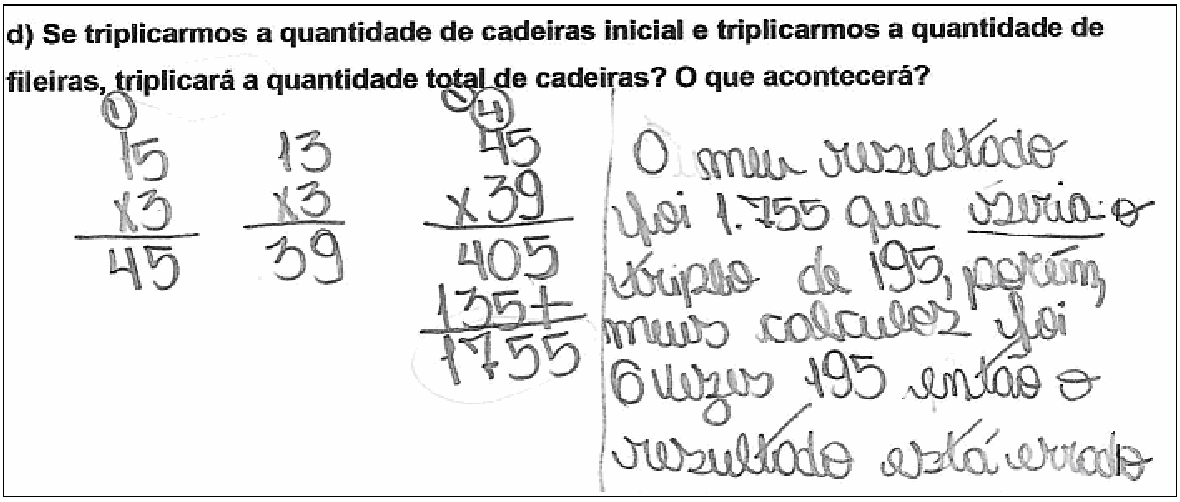

d) Se triplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e triplicarmos a quantidade de fileiras, triplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

Figura 35.Protocolo da aluna Lilian, estudo II

No entanto, também, verificamos dificuldades dos alunos do Estudo II para compor as duas transformações, como já esperado na análise a priori.

No protocolo da Figura 36, identificamos uma transformação aditiva na composição das duas transformações, $3+3=6$. Neste caso, verificamos que o aluno reconhece um erro, mas não consegue reorganizar seu raciocínio e determinar a resposta esperada.

Outro erro identificado no Estudo II com a composição das duas transformações apresenta filiações com as transformações dos elementos iniciais, como mostra a Figura 37, ao triplicar a quantidade de cadeiras por fileiras e triplicar a quantidade de fileiras o aluno triplica a composição desses dois elementos fazendo $a \times b \times 3$. Neste caso, “*triplicando a quantidade de fileiras e de cadeiras por fileiras, triplicamos a quantidade total de cadeiras do cinema.*”



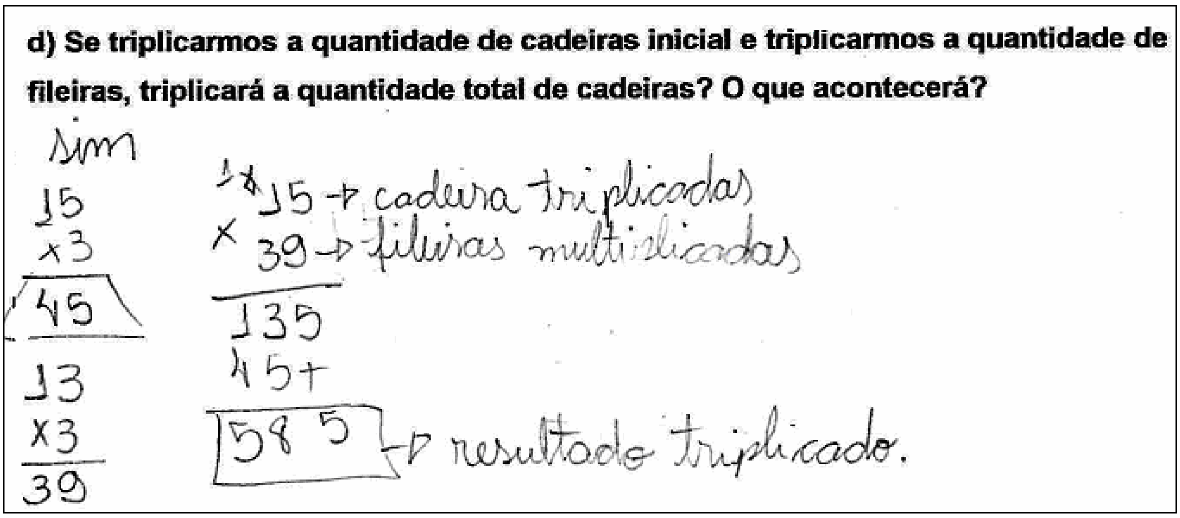
d) Se triplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e triplicarmos a quantidade de fileiras, triplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

15 × 3 = 45
13 × 3 = 39
45 × 39: 405, 135+, 1755

O meu resultado foi 1.755 que seria o triplo de 195, porém meus calculos foi 6 vezes 195 então o resultado está errado

Figura 36.Protocolo do aluno Guilherme, estudo II

Com as atividades 1(e) e 1(f), pretendemos investigar se o aluno estabelece uma relação ternária envolvendo uma lei de composição binária e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Nestes casos, verifica-se a transformação aditiva em um dos elementos da composição em uma unidade a mais (seja na quantidade de fileiras ou na quantidade de cadeiras por fileira) acarretando uma variação no produto desta composição, ou seja, na quantidade total de cadeiras. Desta forma, se *"a"* é a quantidade de fileiras*, "b",* a quantidade de cadeiras por fileiras e *"c"* a quantidade total de cadeiras, teremos $a \times b = c; (a+1) \times b = a \times b + b = c + b$ e $a \times (b+1) = a \times b + a = c + a$.



d) Se triplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e triplicarmos a quantidade de fileiras, triplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

Sim

15 × 3 = 45
13 × 3 = 39

15 → cadeira triplicadas
× 39 → fileiras multiplicadas
135
45+
585 → resultado triplicado.

Figura 37.Protocolo do aluno Yuri, estudo II

As atividades 1 (e) e 1(f) podem ser resolvidas de duas maneiras:

i) Com o estabelecimento de uma relação ternária e uma transformação aditiva na quantidade de fileiras ou na quantidade de cadeiras por fileiras, $h: N \to N / h(x) = x + 1$. Depois, com a composição dos elementos, determinando a quantidade total de cadeiras. Desta forma, teremos 14×15, no item (e) e 13×16, no item f. A partir destas operações, verificam-se quantas cadeiras foram acrescidas na quantidade total de cadeiras inicial mediante a determinação da *relação-elemento* entre as quantidades total de cadeiras inicial e final. Obtendo um aumento de 15 cadeiras, no item (e) e de 13 cadeiras, no item (f).

ii) Com o estabelecimento de uma relação ternária e a propriedade distributiva da multiplicação em relação á adição, quando aumentamos uma fileira, aumentamos mais 15 cadeiras na quantidade total de cadeiras inicial. Isto é, $(13+1)\times 15 = 13 \times 15 + 15$. Quando aumentamos uma cadeira por fileira, $(15+1)\times 13 = 15 \times 13 + 13$, aumentamos em 13 cadeiras a quantidade total de cadeiras no cinema.

Na resolução da atividade 1 (e), a maioria dos registros dos alunos do Estudo I apresenta indícios da aplicação de uma lei de composição binária e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Como observado no protocolo da Figura 38.

e) Se aumentarmos uma fileira, o que acontecerá com a quantidade total de cadeiras do salão? Aumentará ou diminuirá? Quanto?

Rº A quantidade de cadeiras aumentará em 15 lugares a mais

Figura 38.Protocolo da aluna Rita, estudo I

A aluna estabelece na composição dos elementos a propriedade distributiva $(a+1)\times b = a \times b + b$ em que "a" representa as fileiras, "b", as cadeiras por fileira e "$a \times b$" a composição dos elementos representando a quantidade total de cadeiras do cinema. Com o aumento de mais uma fileira, $a \times b + b$, ocorre um aumento de 15 cadeiras.

Apenas uma aluna do Estudo I (Figura 39) registrou todas as relações estabelecidas durante a resolução.

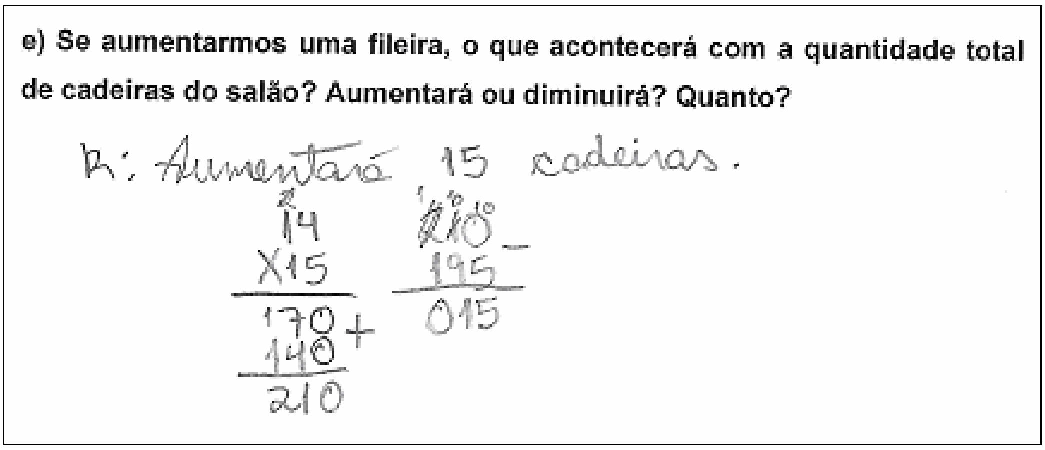


Figura 39.protocolo da aluna Sara, estudo I

Neste caso, identificamos as seguintes relações ternárias: como uma transformação aditiva em $h: N \to N / h(x) = x+1$, com x, representando as fileiras; como uma composição binária $g: N \times N \to N / g(x, y) = x \times y$, com x, representando as fileiras transformadas e y, as cadeiras por fileira e; como uma transformação aditiva $t: N \to N / t(x) = x - 195$, com x, representando a quantidade total de cadeiras.

O mesmo raciocínio apareceu na maioria dos registros dos alunos do Estudo II como exemplificamos no protocolo da Figura 40.

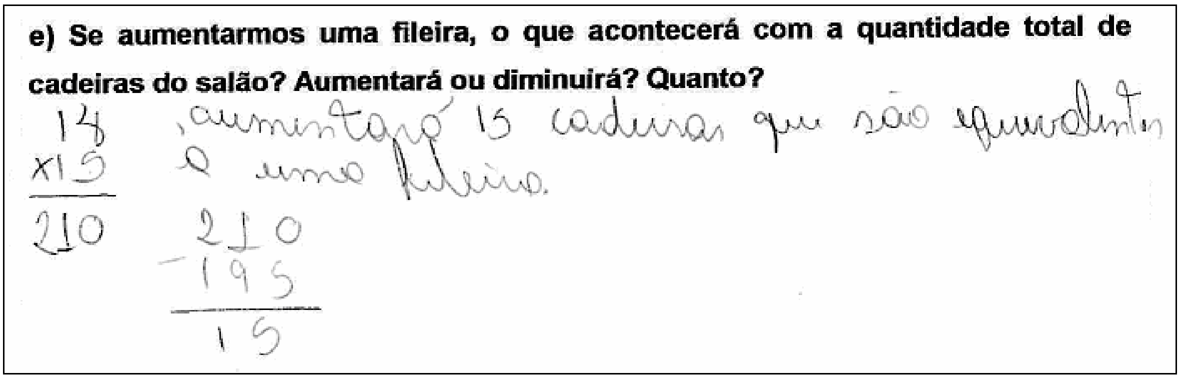
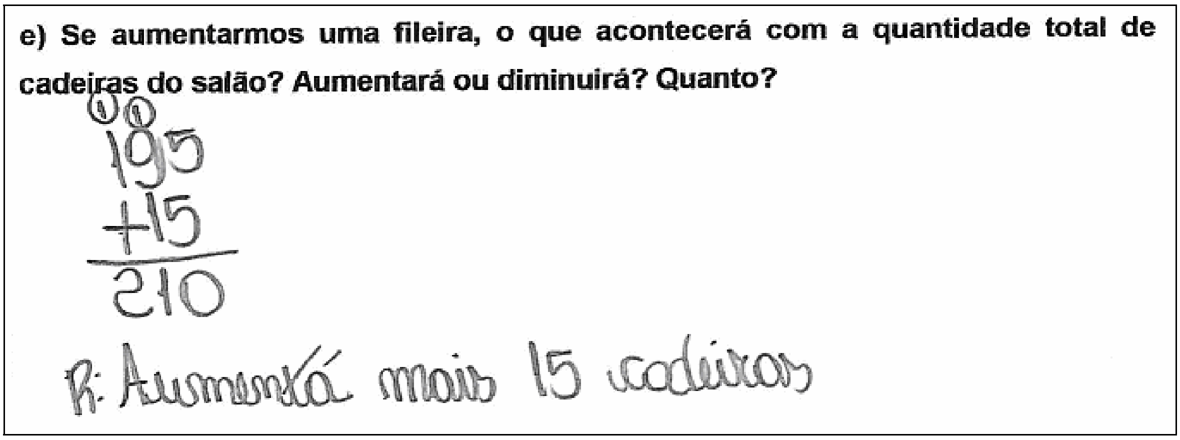


Figura 40.Protocolo da aluna Ana, estudo II

Só um aluno do Estudo II (Figura 41) reconheceu na lei de composição binária a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Neste caso, ao adicionar ao composto, $x \times y = 195$, a quantidade de 15 cadeiras.



e) Se aumentarmos uma fileira, o que acontecerá com a quantidade total de cadeiras do salão? Aumentará ou diminuirá? Quanto?

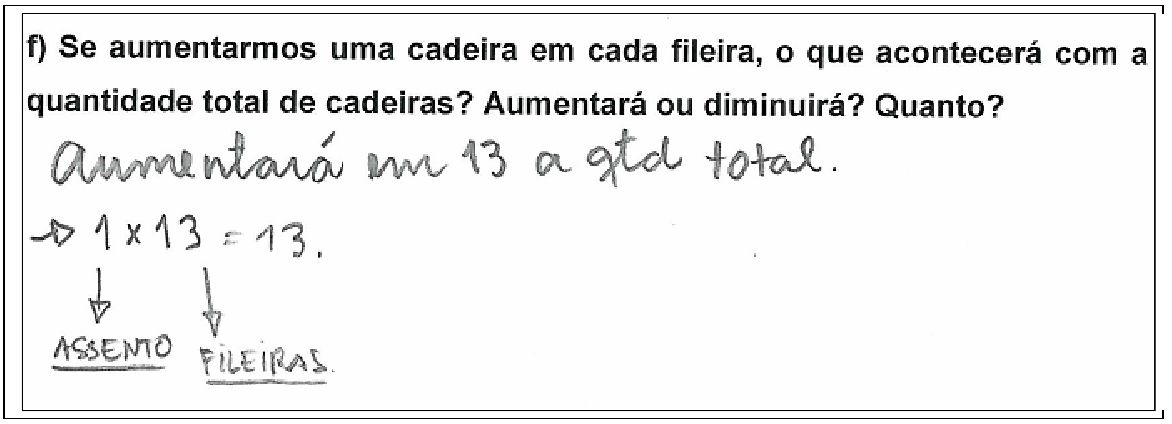
195
+15
210

R: Aumentará mais 15 cadeiras

Figura 41.protocolo do aluno Guilherme, estudo II

Já na resolução da atividade 1 (f), a maioria dos alunos do Estudo I estabeleceu uma composição binária e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

No registro apresentado pelo aluno José (Figura 42), verificamos que ao acrescentar um assento em cada fileira, a quantidade total de cadeiras é aumentada em sua quantidade em 13 cadeiras. Isto é, $a \times (b+1) = a \times b + a$, para "$a$", representando as fileiras, "b", as cadeiras por fileira e "$a \times b$" a composição dos elementos. Neste caso, indicando um aumento de b, cadeiras.



f) Se aumentarmos uma cadeira em cada fileira, o que acontecerá com a quantidade total de cadeiras? Aumentará ou diminuirá? Quanto?

aumentará em 13 a qtd total.

→ 1 x 13 = 13.

ASSENTO FILEIRAS.

Figura 42.Protocolo do aluno José, estudo I

A maioria dos alunos do Estudo II e apenas um aluno do Estudo I mobilizaram duas relações ternárias. Inicialmente com a transformação da quantidade de cadeiras por fileiras e, em seguida, com a composição binária dos elementos, por fim, determinaram a *relação-elemento* transformada na quantidade total de cadeiras inicial e final, no caso, 13 cadeiras.

Como podemos examinar no protocolo da Figura 42, o aluno estabelece a relação $h: N \to N / h(x) = x + 1$ para transformar a quantidade de cadeiras por fileira. Depois, efetua a combinação binária das quantidades, $g: NXN \to N / g(x, y) = x \times y$, com x, representando as cadeiras transformadas e y, as fileiras. No final, determina na transformação aditiva a *relação-elemento* transformada entre a quantidade inicial e final de cadeiras.

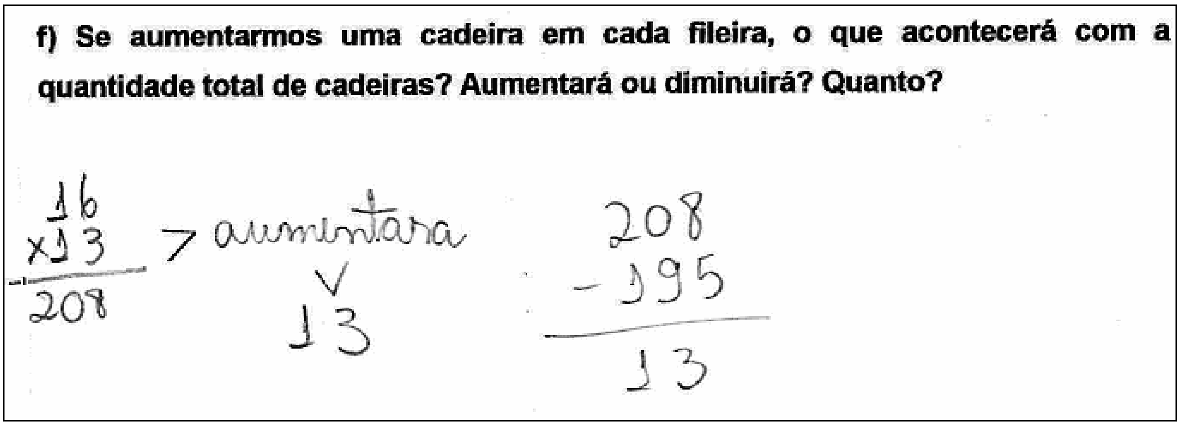

f) Se aumentarmos uma cadeira em cada fileira, o que acontecerá com a quantidade total de cadeiras? Aumentará ou diminuirá? Quanto?

Figura 43.Protocolo do aluno Yuri, estudo II

Apenas um aluno do Estudo II apresentou dificuldades para resolver a questão. Analisando seu registro (Figura 44), verificamos uma transformação na quantidade inicial de cadeiras e a aplicação de uma combinação binária. Mas, identificamos um erro do aluno, neste caso, ao estabelecer uma relação entre a quantidade total inicial de cadeiras e a quantidade total final.

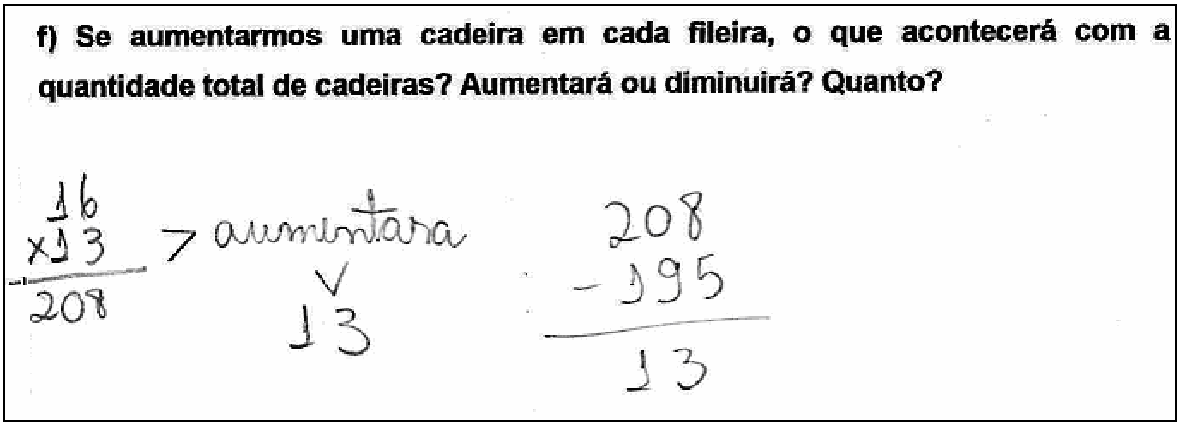

f) Se aumentarmos uma cadeira em cada fileira, o que acontecerá com a quantidade total de cadeiras? Aumentará ou diminuirá? Quanto?

Figura 44.Protocolo do aluno Guilherme, estudo II

Observamos que essa representação apresenta indícios de uma concentração em atividades envolvendo o algoritmo e a operação inversa.

Neste sentido, apresentamos no Quadro 1 (Figura 45) os resultados dos dois grupos investigados. Para a análise utilizamos o quadro, indicando no estabelecimento de uma relação ternária como uma lei de composição binária (CB) e como um *elemento, relação elemento, elemento* (R).

Aluno	1 (a)	1 (b)	1 (c)	1 (d)	1 (e)	1(f)
Cássia	15×13	CB	CB	CB	CB	CB
Sara	13×15	R/CB	R/CB	R/CB	R/CB	R/CB
José	13×15	CB	CB	CB	CB	CB
Rita	13×15	CB	CB	CB	CB	CB

Figura 45. Quadro 1 - análises relações ternárias, estudo I

Observamos que a maioria dos alunos do Estudo I apresenta em seus registros o estabelecimento de apenas uma relação ternária envolvendo uma composição de dois elementos e suas propriedades. Apenas uma aluna apresenta o estabelecimento de duas relações, envolvendo uma relação elemento e uma composição.

No Estudo II (Figura 46), o quadro mostra que todos os alunos apresentaram duas relações ternárias na resolução das atividades, em nenhuma delas com o uso das propriedades da multiplicação.

Aluno	1(a)	1 (b)	1 (c)	1 (d)	1 (e)	1 (f)
Guilherme	15×13	R/CB	R/CB	R/CB	CB	R/CB
Yuri	13×15	R/CB	R/CB	R/CB	R/CB	R/CB
Ana	13×15	R/CB	R/CB	R/CB	R/CB	R/CB
Lilian	13×15	R/CB	R/CB	R/CB	R/CB	R/CB

Figura 46. Quadro 2-análise relações ternárias, estudo II

Apenas o aluno Guilherme na atividade 1 (e) apresentou uma única relação, envolvendo uma lei de composição binária e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Comparando os dois estudos, na atividade 1, verificamos que o uso das propriedades da multiplicação só foi observado no grupo do estudo I. Levando-nos a considerar que tal procedimento não é intuitivo por parte do aluno, necessitando da mediação do professor. Continuaremos com a análise da atividade dois.

3.3.2 Atividade 2

Nesta segunda parte, as atividades são semelhantes às da primeira no que se refere ao estabelecimento de relações ternárias, envolvendo a noção de transformação e a lei de composição binária com suas propriedades.

Problema 2

a) Multiplicando dois números naturais obtemos como resultado 20. É possível saber qual é o produto do dobro do primeiro número pelo triplo do segundo número? Como? Quanto será?

b) Sabendo que o produto de dois números é 20. Qual será o resultado, se somarmos uma unidade ao primeiro dos números e depois multiplicarmos pelo segundo?

Diferente das atividades anteriores, os problemas desta etapa não informam os dois elementos iniciais que compõem o terceiro elemento da composição binária, enunciam apenas as transformações realizadas com cada um desses elementos e solicita a determinação do composto final.

Esta diferença possibilita um foco na relação ternária envolvendo uma lei de combinação binária e suas propriedades, visto, que a *relação-elemento* e suas transformações não poderão ser realizadas com a ausência do estado inicial.

O objetivo da atividade 2 é verificar se os alunos estabelecem uma composição binária na aplicação das propriedades comutativa, associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição.

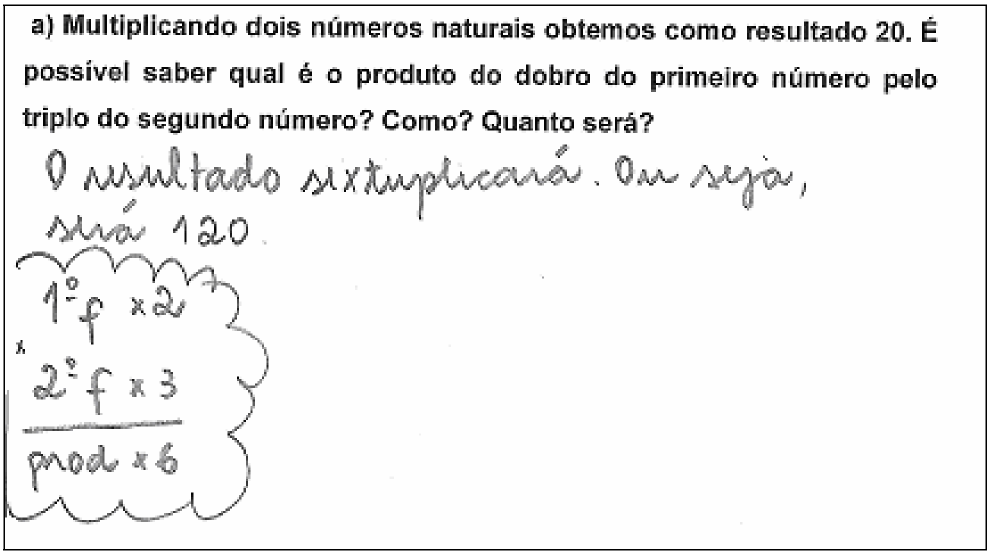
A atividade 2 (a) poderá ser resolvida de duas maneiras diferentes.

i) Com o estabelecimento de uma relação ternária, envolvendo a noção de transformação e de combinação. Para isso, determinam-se dois números naturais cujo produto é 20. Como por exemplo, 1 e 20, 2 e 10, 5 e 4, considera-se, portanto, casos particulares de números para a composição do terceiro elemento. A partir destes números, o primeiro fator é dobrado (1×2) e o segundo triplicado (20×3), com a aplicação das duas transformações, determina-se uma nova composição (2×60).

ii) Aplicam-se as propriedades comutativa e associativa em uma lei de composição binária. Desta forma, dobrando o primeiro fator e triplicando o segundo, teremos uma variação proporcional $(\times 6)$ em seu produto final. Assim, considerando a,b os fatores e $a\times b$, o produto da composição, teremos com a aplicação das propriedades comutativa e associativa da multiplicação, $a\times 2\times b\times 3 = a\times b\times 2\times 3 = a\times b\times 6$, obtendo, neste caso, o produto, 120.

Além disso, analisamos que alguns alunos podem justificar como não sendo possível determinar o valor do produto, pois, os elementos desta composição não são conhecidos.

No Estudo II, a maioria dos alunos estabeleceu uma composição binária e o uso de suas propriedades, comutativa e associativa, da multiplicação. Como constatamos no protocolo da Figura 47. Observamos que o aluno reconhece na combinação dos dois fatores uma variação de $(\times 2\times 3 = \times 6)$ em seu produto.

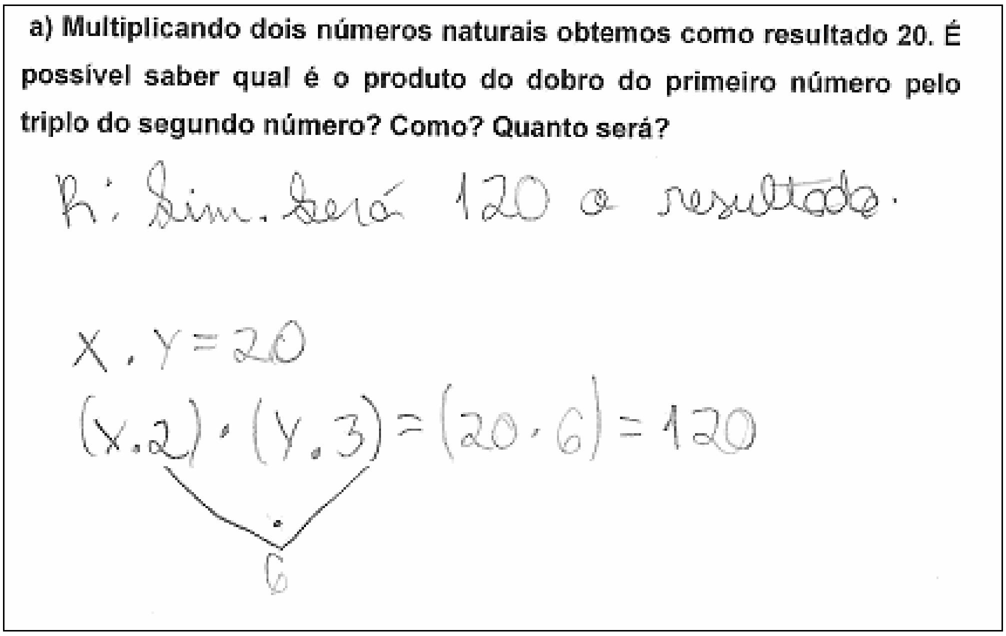

a) Multiplicando dois números naturais obtemos como resultado 20. É possível saber qual é o produto do dobro do primeiro número pelo triplo do segundo número? Como? Quanto será?

O resultado sixtuplicará. Ou seja, será 120.

1º f ×2
2º f ×3
prod ×6

Figura 47.Protocolo do aluno José, estudo I

No próximo protocolo da Figura 48, a aluna é mais explicita em seu registro indicando na composição de quaisquer dois elementos cujo produto é 20, ao variar um de seus elementos ocorre uma variação proporcional em sua composição, representada por $x \times y$, verificando, neste caso, a propriedade associativa da multiplicação.


a) Multiplicando dois números naturais obtemos como resultado 20. É possível saber qual é o produto do dobro do primeiro número pelo triplo do segundo número? Como? Quanto será?

R: Sim. Será 120 o resultado.

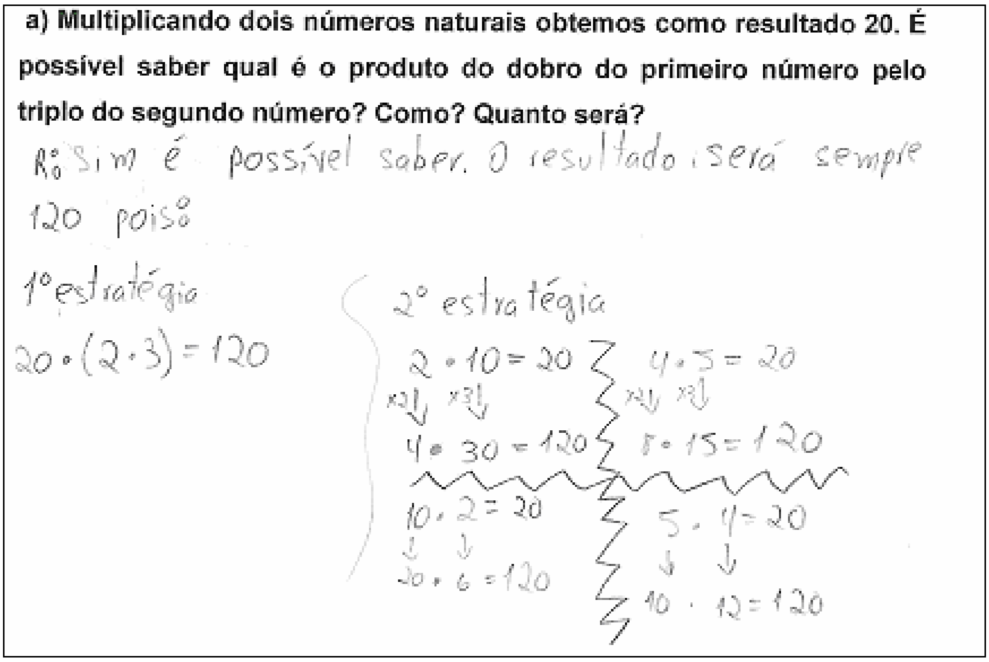
$X \cdot Y = 20$

$(X \cdot 2) \cdot (Y \cdot 3) = (20 \cdot 6) = 120$

6

Figura 48.Protocolo da aluna Sara, estudo I

Em apenas uma aluna do Estudo I (Figura 49), verificamos os dois raciocínios. Na primeira estratégia, ela apresenta o produto de uma composição binária 20 e a propriedade associativa da multiplicativa com as composições das transformações.


a) Multiplicando dois números naturais obtemos como resultado 20. É possível saber qual é o produto do dobro do primeiro número pelo triplo do segundo número? Como? Quanto será?

R: Sim é possível saber. O resultado será sempre 120 pois:

1º estratégia

$20 \cdot (2 \cdot 3) = 120$

2º estratégia

$2 \cdot 10 = 20$; $4 \cdot 5 = 20$

x2, x3 ; x2, x3

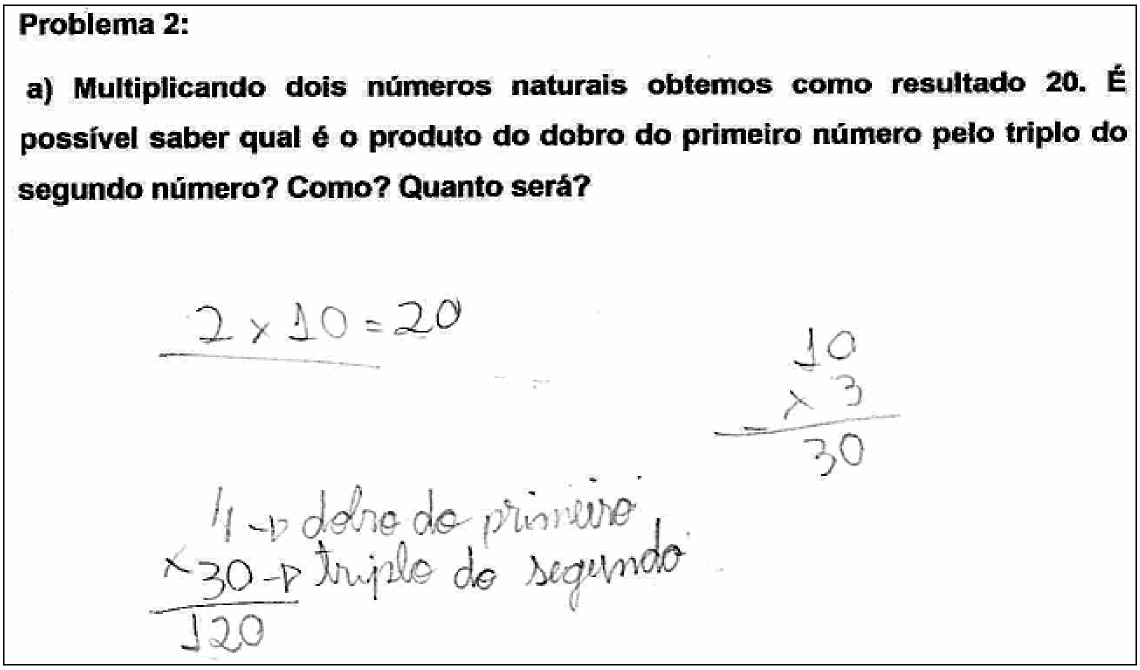
$4 \cdot 30 = 120$; $8 \cdot 15 = 120$

$10 \cdot 2 = 20$; $5 \cdot 4 = 20$

$20 \cdot 6 = 120$; $10 \cdot 12 = 120$

Figura 49.Protocolo da aluna Rita, estudo I

Já, na sua segunda estratégia, a aluna apresenta várias multiplicações, composições binárias com produto 20. Em um processo de investigação, com as transformações dos fatores, elementos da composição, ela obtém em todos os casos a quantidade final de 120. No Estudo II, a maioria dos alunos determinou dois números cujo produto é 20. Depois aplicou uma transformação aditiva em cada um dos números com o operador $\times 2$ e $\times 3$.



Problema 2:

a) Multiplicando dois números naturais obtemos como resultado 20. É possível saber qual é o produto do dobro do primeiro número pelo triplo do segundo número? Como? Quanto será?

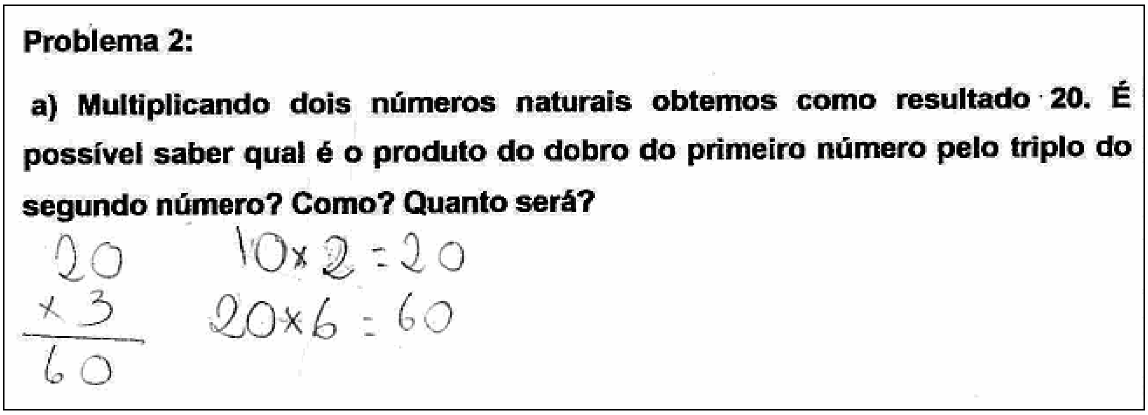
$2 \times 10 = 20$

$10 \times 3 = 30$

4 -> dobro do primeiro
×30 -> triplo do segundo
120

Figura 50.Protocolo do aluno Yuri, estudo II

E depois aplicou uma nova composição obtendo o produto final, como verificamos na Figura 50.



Problema 2:

a) Multiplicando dois números naturais obtemos como resultado 20. É possível saber qual é o produto do dobro do primeiro número pelo triplo do segundo número? Como? Quanto será?

$20 \times 3 = 60$

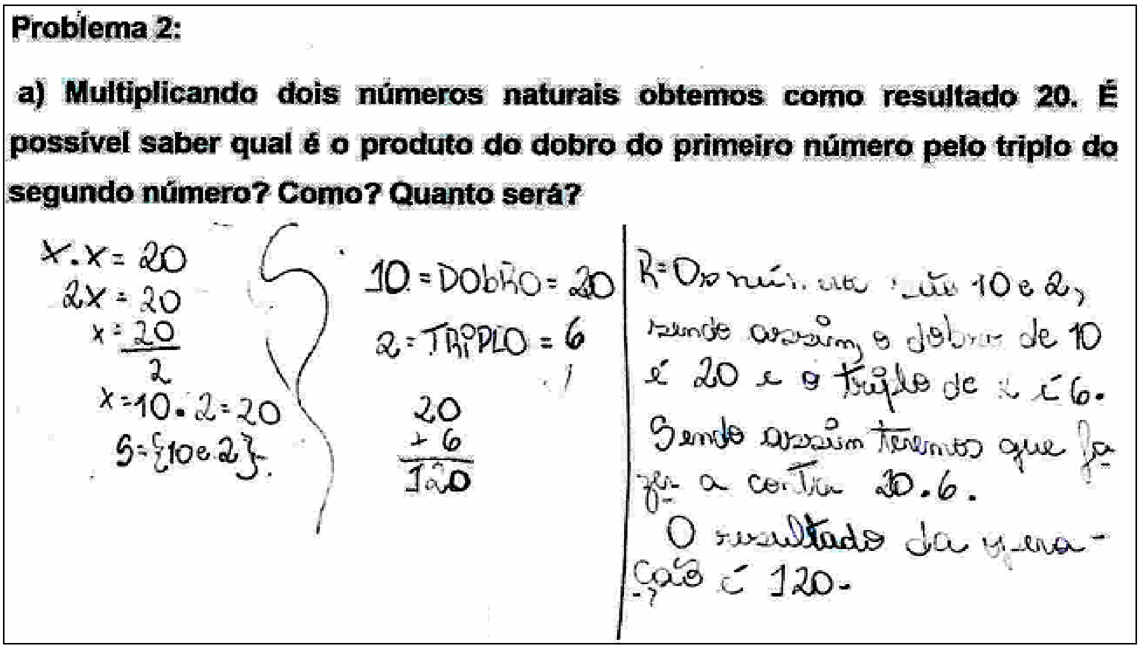
$10 \times 2 = 20$

$20 \times 6 = 60$

Figura 51.Protocolo da aluna Ana, estudo II

No protocolo da Figura 51, verificamos que a aluna apesar de estabelecer estas mesmas relações, erra no cálculo, considerando $20 \times 6 = 60$.

Além disso, observamos no protocolo da Figura 52 uma resolução de natureza algébrica para a determinação dos números cujo produto é 20. Mas a aluna erra ao representar dois números distintos com a mesma letra x. Sugerindo uma ausência de significado para a letra.



Problema 2:

a) Multiplicando dois números naturais obtemos como resultado 20. É possível saber qual é o produto do dobro do primeiro número pelo triplo do segundo número? Como? Quanto será?

$x . x = 20$
$2x = 20$
$x = \frac{20}{2}$
$x = 10 . 2 = 20$
$S = \{10 e 2\}$.

10 = DOBRO = 20
2 = TRIPLO = 6
20
x 6
120

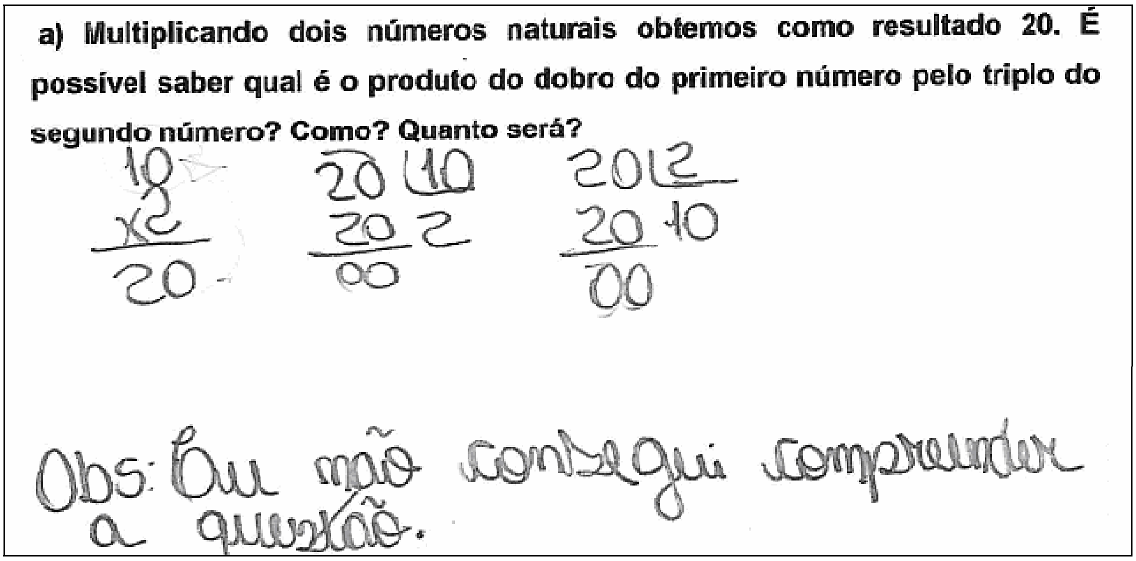
R= Os números são 10 e 2, sendo assim o dobro de 10 é 20 e o triplo de 2 é 6. Sendo assim teremos que fazer a conta 20.6. O resultado da operação é 120.

Figura 52.Protocolo da aluna Lilian, estudo II

Apenas um aluno apresentou dificuldades o enunciado (Figura 53) ao resolver a atividade com o raciocínio, uma composição binária, se *10 x 2 = 20 e* a *relação-elemento* recíproca se *20 é o dobro de 10, então, 10 é o dobro de 20.*

Observamos que o aluno não consegue chegar ao final da resolução. Deste modo, verifica-se que ele utiliza o cálculo relacional com a recíproca de uma relação.

Na atividade 2 (b), o objetivo é identificar quais relações os alunos estabelecem em um problema envolvendo uma composição binária e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Os dados iniciais não são fornecidos como no item anterior. Esperamos que os alunos mobilizem duas formas de raciocínio.


a) Multiplicando dois números naturais obtemos como resultado 20. É possível saber qual é o produto do dobro do primeiro número pelo triplo do segundo número? Como? Quanto será?

Obs: Eu não consegui compreender a questão.

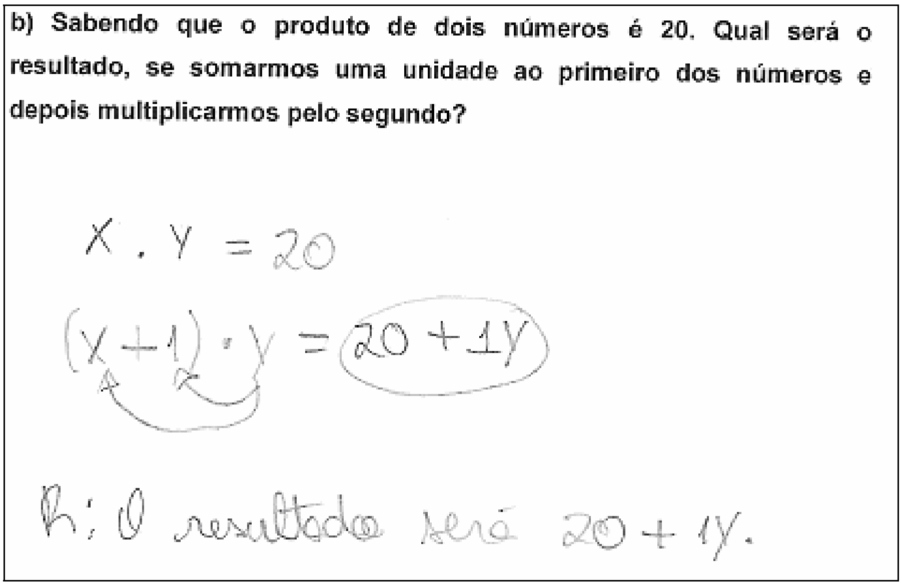
Figura 53.Protocolo do aluno Gustavo, estudo II

i) Com o estabelecimento de relações ternárias envolvendo a noção de transformação e a composição binária, determinam-se dois números naturais cujo produto é 20. Como por exemplo, 1 e 20, 2 e 10 , 5 e 4, considerados, portanto, casos particulares de números que compõe o terceiro elemento, 20. A partir destes números, o primeiro fator é acrescido em uma unidade ($1+1$ ou $2+1.....$) e o segundo elemento se mantém. Depois, com uma nova composição dos elementos, obtém-se um novo produto (2×20 e $3\times 10...$).Por último, verifica-se que a variação do produto é proporcional à variação em um dos fatores.

ii) Aplica-se uma composição binária e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Aumentando em uma unidade um dos fatores, o produto final será acrescido em seu produto inicial do valor correspondente ao outro fator. Desta forma, teremos: $(a+1)\times b = a\times b + b$ ou $a\times(b+1) = a\times b + a$.

Novamente, alguns podem justificar como não sendo possível determinar o valor do produto, visto que os elementos desta composição não são conhecidos.

Todos os alunos do Estudo I aplicaram uma composição binária e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Verificamos nos registros apresentados no protocolo (Figura 54), que a aluna representa a transformação de uma unidade em um dos fatores e a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para determinar que o produto final, é a composição $(x \times y)$ acrescida do fator y. Neste caso, observa-se a relação $g: NxN / N \rightarrow g(x+1, y) = (x+1) \times y = x \times y + y$.



b) Sabendo que o produto de dois números é 20. Qual será o resultado, se somarmos uma unidade ao primeiro dos números e depois multiplicarmos pelo segundo?

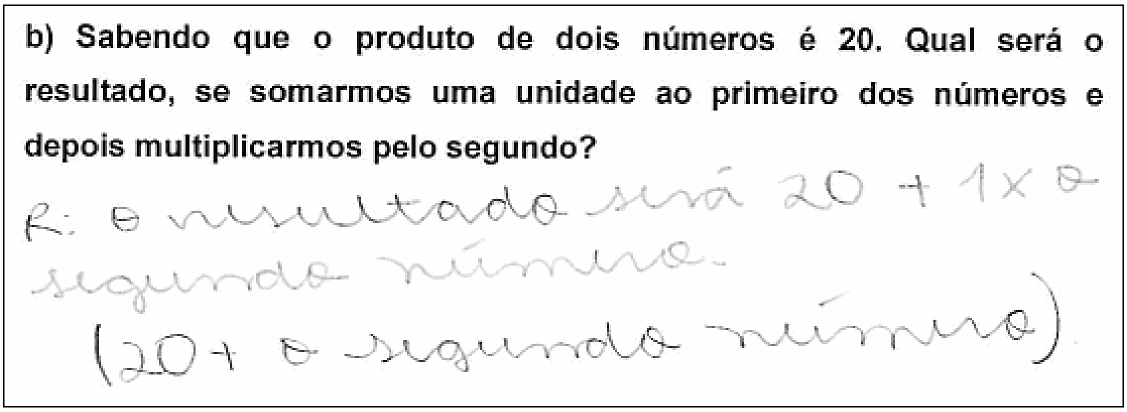
$X . Y = 20$

$(X+1) . Y = 20 + 1Y$

R: O resultado será 20 + 1Y.

Figura 54.Protocolo da aluna Sara, estudo I

O mesmo raciocínio foi verificado no protocolo da aluna Cássia (Figura 55), mas sem o registro completo do raciocínio:



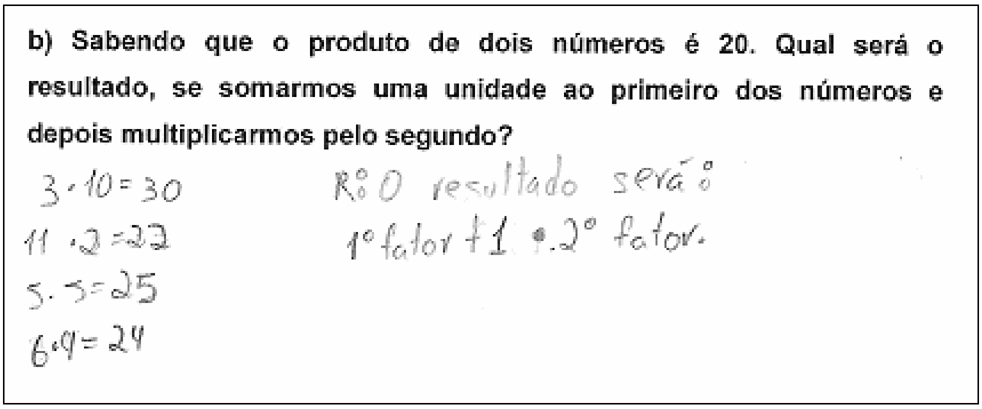
b) Sabendo que o produto de dois números é 20. Qual será o resultado, se somarmos uma unidade ao primeiro dos números e depois multiplicarmos pelo segundo?

R: o resultado será 20 + 1 x o segundo número.

(20 + o segundo número)

Figura 55.Protocolo da aluna Cássia, estudo I

Apenas uma aluna do Estudo I (Figura 56) e todos os alunos do Estudo II determinaram dois números naturais cujo produto é 20, efetuaram uma transformação aditiva do primeiro fator em uma unidade e depois aplicaram uma nova composição binária dos números.

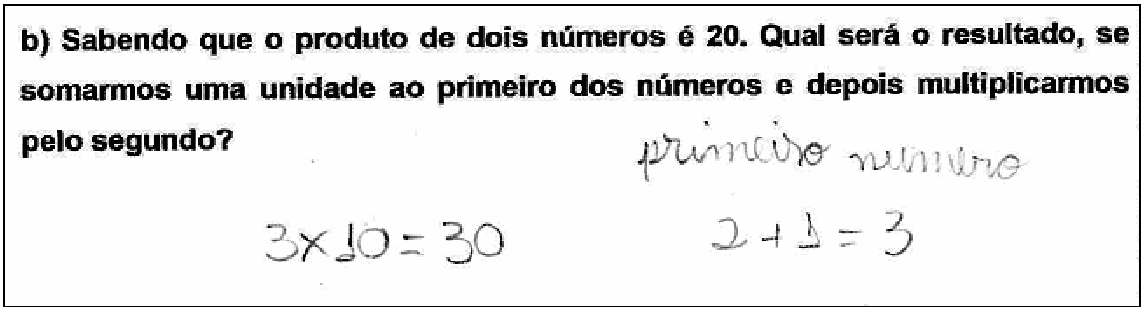

b) Sabendo que o produto de dois números é 20. Qual será o resultado, se somarmos uma unidade ao primeiro dos números e depois multiplicarmos pelo segundo?

3·10=30
11·2=22
5·5=25
6·4=24

R: O resultado será o 1° fator +1 ·2° fator.

Figura 56.Protocolo da aluna Rita, estudo I

No entanto, na resposta final da aluna do Estudo II não identificamos o reconhecimento da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Já no Estudo II, os alunos apresentaram apenas um caso particular cujo produto é 20 não verificando a possibilidade para qualquer outro caso. Também não foram encontrados registros de aplicação da propriedade distributiva em relação à adição como verificamos na Figura 57.

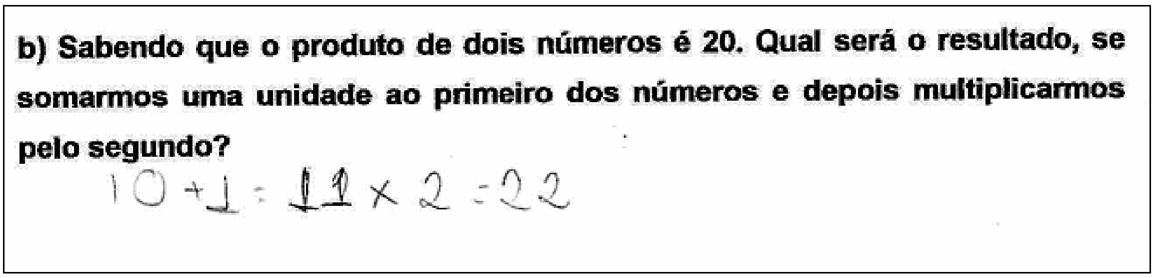

b) Sabendo que o produto de dois números é 20. Qual será o resultado, se somarmos uma unidade ao primeiro dos números e depois multiplicarmos pelo segundo?

primeiro numero

3x10=30   2+1=3

Figura 57.Protocolo do aluno Yuri, estudo II

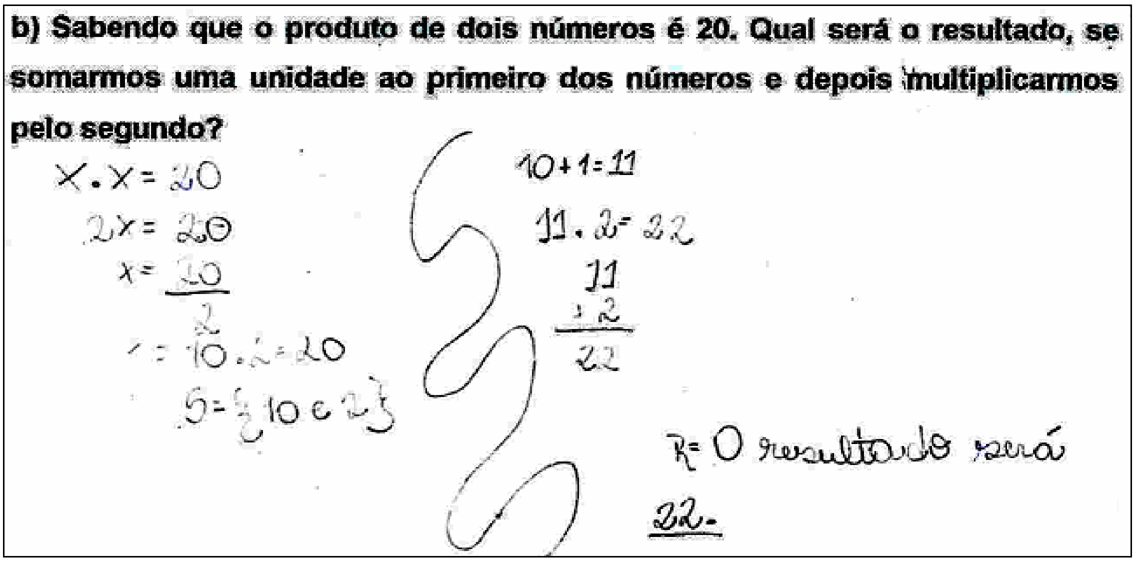
Neste outro caso, o aluno acrescenta uma unidade a um dos fatores e depois efetua a operação de multiplicação (Figura 58).


b) Sabendo que o produto de dois números é 20. Qual será o resultado, se somarmos uma unidade ao primeiro dos números e depois multiplicarmos pelo segundo?

10+1=11x2=22

Figura 58.Protocolo da aluna Larissa, estudo II

Verificamos que a aluna não atribui sentido a relação de equivalência ao escrever *10 + 1 = 11 x 2 = 22*, indicando erradamente a relação de equivalência em *10+1=22.* Mais uma vez, a mesma aluna apresenta uma resolução de natureza algébrica, como observamos na Figura 59.



b) Sabendo que o produto de dois números é 20. Qual será o resultado, se somarmos uma unidade ao primeiro dos números e depois multiplicarmos pelo segundo?

$x \cdot x = 20$

$2x = 20$

$x = \frac{20}{2}$

$x = 10 \cdot 2 = 20$

$S = \{10 \text{ e } 2\}$

$10+1=11$

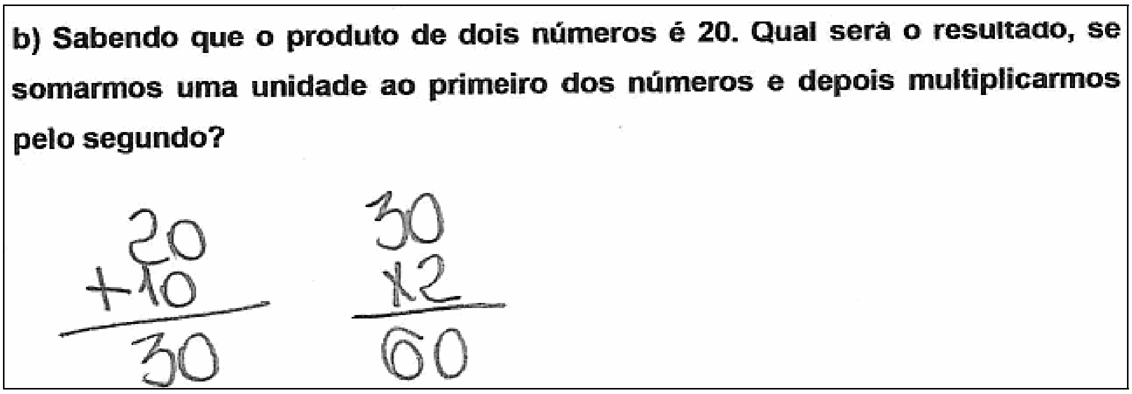
$11 \cdot 2 = 22$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 2 \\ \hline 22 \end{array}$$

R= O resultado será 22.

Figura 59.Protocolo da aluna Lilian, estudo II

Só um aluno do Estudo II (Figura 60) apresentou dificuldades no entendimento do enunciado, mostrando uma transformação aditiva de uma dezena de unidades em um dos fatores e depois uma composição binária.



b) Sabendo que o produto de dois números é 20. Qual será o resultado, se somarmos uma unidade ao primeiro dos números e depois multiplicarmos pelo segundo?

$$\begin{array}{r} 20 \\ +10 \\ \hline 30 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30 \\ \times 2 \\ \hline 60 \end{array}$$

Figura 60.Protocolo do aluno Guilherme, estudo II

No Quadro da Figura 61, apresentamos a análise da atividade 2 no que se refere ao estabelecimento de relações ternárias, utilizaremos, novamente, para o estabelecimento de uma lei de composição binária (CB) e como um *elemento, relação-elemento,elemento* (R).

Aluno	2 (a)	2 (b)
Cássia	CB	CB
Sara	CB	CB
José	CB	CB
Rita	CB/R	CB/R

Figura 61.Quadro 2-análises relações ternárias, estudo 1

Novamente, observamos que a maioria dos alunos estabelece uma relação ternária e uma lei de composição binária com suas propriedades. Apenas uma aluna na atividade 2 (a) e (b) apresentou uma relação, envolvendo uma lei de composição binária e uma transformação. No entanto, no Quadro 2 (Figura 62) verificamos que todos os alunos do Estudo II, estabeleceram uma transformação e uma combinação binária.

Aluno	2 (a)	2 (b)
Guilherme	R/CB	R/CB
Yuri	R/CB	R/CB
Ana	R/CB	R/CB
Lilian	R/CB	R/CB

Figura 62. Quadro 2-análise relações ternárias, estudo II

Com relação a um aspecto do cálculo relacional, apontado por Vergnaud (1991), a composição de duas transformações, apresentaremos no Quadro da Figura 63, o uso correto na composição de duas transformações (CT).

Aluno	1 (c)	1(d)	2(a)
Cássia	CT	CT	CT
Sara	-	-	CT
José	CT	CT	CT
Rita	CT	CT	CT

Figura 63.Quadro cálculo relacional, estudo I

Dentre os procedimentos mobilizados pelos alunos do Estudo I, foi observado um grande número de composição de duas transformações.

Aluno	1 (c)	1(d)	2(a)
Guilherme	-	-	-
Yuri	CT	-	-
Ana	CT	CT	-
Lilian	CT	CT	-

Figura 64.Quadro cálculo relacional, estudo II

No Estudo II (Figura 64) foram identificadas a composição das transformações apenas na atividade 1 em que os estados iniciais eram dados. Na observação da execução da atividade verificamos que tal dedução foi propiciada pela sequência das atividades que permitiu nas resoluções anteriores o controle das respostas. Novamente identificamos a necessidade da promoção desse tipo de dedução por parte do professor.

Desta forma, retomando as questões que nortearam nosso trabalho de investigação sobre o Campo Multiplicativo as consideramos:

"*Se alunos, entre 11 e 13 anos, estabelecem uma relação ternária com a noção de transformação?"*

No que se refere ao estabelecimento de relações ternárias com a noção de transformação, constatamos que todos os alunos apresentam um desempenho satisfatório ao resolver situações, envolvendo uma transformação dos elementos iniciais, determinando corretamente os elementos finais e a *relação-elemento*. Mas, diferente dos alunos do Estudo I, os alunos do Estudo II não estabeleceram, de imediato, uma composição de duas transformações mobilizando mais que uma relação. Quanto a segunda questão: S*e estabelecem relações ternárias em situações que envolvem as propriedades da multiplicação?"*

Verificamos que todos os alunos do Estudo II não estabeleceram relações ternárias, envolvendo uma lei de composição binária com o uso das propriedades da multiplicação.

Assim, acreditamos que sua mobilização não seja imediata, necessitando de uma análise mais detalhada a respeito do estudo das relações

Considerações Finais

Nesta pesquisa, decidimos aprofundar nossos estudos a respeito das estruturas multiplicativas e o cálculo relacional investigando como os alunos de sétimo ano mobilizam as relações ternárias. Ao analisar o seu desenvolvimento, entendemos que a metodologia aplicada favoreceu na busca de respostas para nossa questão, embora, estas não favoreçam a generalização dos casos estudados, para isso seriam necessárias outras pesquisas com metodologias apropriadas.

Sob o ponto de vista teórico, destacamos Vergnaud (1996) e os princípios fundamentais para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de um conceito. Dentre as diferentes situações que envolvem um campo conceitual, uma delas deve ser chamada a atenção, o estudo das relações e sua ordem de complexidade. Acreditamos que as relações são construídas progressivamente pelo aluno, das mais simples às mais complexas. Elas não se desenvolvem isoladamente; mas sim relacionadas a vários tipos de situação e com a ajuda de diversas representações.

Nesta pesquisa, procuramos delimitar uma parte destas situações propondo atividades que tratam dos problemas multiplicativos do tipo produto de medidas que envolvem o conceito da multiplicação e suas propriedades. No entanto, entendemos que outras pesquisas possam ser investigadas envolvendo as relações e outras situações que permitem o trabalho com a análise dimensional; a combinatória, a razão e comparação; e os números fracionários, decimais e inteiros como composição de transformações.

Neste caso, destacamos um dos problemas considerados por Vergnaud (1991), como o mais importante da didática da Matemática, conhecer a ordem em que as noções e as relações podem ser adquiridas pelos alunos. Neste sentido, este autor ressalta a importância do papel do professor e do pesquisador na análise das tarefas matemáticas no que se refere à promoção destas relações pelos alunos e o cálculo relacional. Percebemos que outras pesquisas e cursos de formação, envolvendo o estudo das relações e os professores possam ser promovidos.

No entanto, para Vergnaud (1991) na análise destas tarefas devem ser selecionadas não somente as situações em que as relações entre os elementos são verificadas e constatadas com uma única regra, mas também situações em que é necessário estimar e antever resultados propiciando, desta forma, o trabalho com as deduções, inferências e construções ao aluno.

Além disso, analisando o conjunto de invariantes e deduções possíveis, observamos que alguns alunos do Estudo II, ao longo da atividade, nunca tinham passado por este tipo de tarefa, mesmo assim, conseguiram generalizar a partir da sequência de atividades, de um caso particular para um geral, tornando as proposições uma função proposicional, evidenciando a importância da análise das atividades. Desta forma, acreditamos também que o estudo das relações possa contribuir para novas pesquisas referentes ao raciocínio algébrico investigando as relações entre as atividades aritméticas e as algébricas, além do significado do símbolo.

Observamos que alguns alunos usam implicitamente o conceito de função ao estabelecer relações. Vergnaud (1991) afirma que nas relações quaternárias, aparecem noções de correspondência e funções, assim, entendemos que a noção de correspondência possa ser identificada como uma transformação de um elemento inicial em um elemento final. Neste sentido, acreditamos que pesquisas para a análise das relações quaternárias mobilizadas pelos alunos precisam ser investigadas de modo a compreender melhor os problemas do tipo isomorfismo de medida.

No que se refere às representações, utilizamos no enunciado: o dobro, o triplo, quadruplicar e omitimos alguns elementos. Na atividade 2, em particular, o enunciado pode não ter favorecido a resposta esperada pelo pesquisador, uma vez que era solicitado como fazer e determinar o quanto seria o novo produto. Em nossa análise, o fato pode não ter favorecido o estabelecimento de relações ternárias e a lei de composição binária. Todos os alunos do Estudo II resolveram esta atividade a partir de um caso particular e apresentaram a resposta correta, sem compor as transformações. Como um objetivo da atividade era verificar o estabelecimento de relações ternárias em uma composição binária, observamos que este objetivo não foi atingido. Com relação às outras atividades, todos os objetivos foram atingidos; no entanto, ajustes devem ser feitos na atividade 2.

Durante a aplicação das atividades, identificamos na postura dos alunos um interesse em assumir a atividade como um diagnóstico, atendendo, desta forma, às perguntas da pesquisadora e procurando registrar seu raciocínio da forma mais completa possível. No entanto, encontramos dificuldades para lidar com o tempo e a disponibilidade dos alunos na escola. Acreditamos que um aumento no tempo de entrevista possa melhorar a coleta de dados. Seria interessante, também, convidarmos os alunos para fazer a atividade na universidade.

Outro aspecto importante foi observado, nos alunos da escola pública, um constrangimento em utilizar à calculadora, visto que não estão acostumados a utilizá-la como uma ferramenta que possibilite a pensar nas operações do pensamento e não simplesmente, no cálculo numérico.

Desta forma, acreditamos que esta pesquisa possa contribuir para mais um caminho em direção a outros estudos a respeito das relações ternárias, quaternárias e noção de função. Além disso, possibilita maior reflexão para possíveis deficiências ou melhorias para o ensino e aprendizagem da Matemática, sobretudo, no que se refere ao estudo das estruturas multiplicativas e o cálculo relacional tanto na formação de alunos como de professores, bem como, na análise de livros didáticos e avaliações.

Poderemos, ainda, explorar com este estudo, pesquisas futuras com a iniciação do estudo algébrico tendo como via de entrada a Aritmética e o trabalho com deduções. Sob esta perspectiva, é de nosso interesse continuar estes estudos na investigação com das relações quaternárias e noção de função.

Referências

BARRETO, I. **Problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional: a diversidade de procedimentos de resolução**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, 2001.

BONANNO, A. **Um estudo sobre o cálculo operatório no campo multiplicativo com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, 2007.

Brasil -MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, Secretaria de Educação Fundamental, Parâmetros Curriculares Nacional. 1ª a 4ª série. Brasília, MEC/SEF, 1998

Brasil -MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. Secretaria de Educação Fundamental, Parâmetros Curriculares Nacional. Terceiro e Quarto ciclo Brasília, MEC/SEF, 1998

BROITMAN, C. et al, **Estudiar Matemática** em 6º :libro del docente, Buenos Aires: Santillana, 2005.

_____**Estudiar Matemática** em 7º :libro del docente, Buenos Aires: Santillana, 2005.

CANOAS, S. **O campo conceitual multiplicativo na perspectiva do professor das séries iniciais (1ª a 4ª série).** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, 1997).

CASTELA, C. **Divisão de números naturais: concepções de alunos de 6ª série**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, 2005.

CUNHA, C. **As operações de multiplicação e divisão junto a alunos de 5ª e 7ª séries.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, 1997.

DOMINGUES, H. e IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 2ª ed, São Paulo: Atual Editora, 1982.

_____. **Álgebra Moderna**, 4ª ed, São Paulo: Atual Editora,2003.

FIORENTINI, D. e LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos metodológicos, Editora Autores Associados, 2006

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando adição e subtração: Contribuições das Teorias dos Campos Conceituais**, São Paulo, Brasil, Proem, 2001.

PONTE, J. P. O Estudo de Caso na Investigação em Educação Matemática. 1994. Quadrante, 3 (1), p. 3-18.Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/94-Quadrante(Estudo%20caso).doc> Acesso em 01/10/2008.

VERGNAUD G. Multiplicative Strutures.In: M Behr and J Hiebert. Number **Concepts and Operations in the Middle Grades**, p.141-160. **Reston: National Council of Theacher of Mathematics,** 1988.

________. **El nino, las matematicas y la realidad: problemas de la ensenanza de las matematicas en la escola primaria**. México: Trillas, 1991.

__. Multiplicative Conceptual Field What and Why?.In:G Harel e J Confrey. **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics,** p.41-59, 1994.

_____. A Teoria dos Campos Conceituais..In: J Brun. **Didactica das Matematicas**, p.155-191, Lisboa, Instituto Piaget,1996.

______ A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education, **Journal of Mathematical behavior**,17(2),167-181, 1998

SADOVSKY, P. **O ensino da Matemática hoje. Enfoques, sentidos e desafios**; tradução Antonio de Padua Danesi. São Paulo: Atica, 2007.

_____. **Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre praticas aritméticas y praticas algebraicas.** Tese (Doutorado em Educação Matemática)- Universidade de Buenos Aires, 2004.

Trouche, L.Managing the complexity of human/machine in computerized learning environments:guding sutdent´s command process thought instrumental orchestrations. **Internacional Jounal of Computers for Mathematic Learning** 9:281,307,2004.

Anexo A: Teste Piloto

Nome: ....

Idade: ....

Problema 1: Num salão há 35 fileiras com 25 cadeiras cada uma.

a) Qual a quantidade total de cadeiras nesse salão?

b) Se duplicarmos a quantidade de cadeiras de cada fileira; duplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

c) Se duplicarmos a quantidade de cadeiras e duplicarmos a quantidade de fileiras; duplicará a quantidade de total de cadeiras? O que acontecerá?

d) Se triplicarmos a quantidade de cadeiras e triplicarmos a quantidade de fileiras, triplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

e) Se aumentarmos uma fileira, o que acontecerá com a quantidade total de cadeiras do salão? Aumentará ou diminuirá? Quanto?

f) Se aumentarmos uma cadeira em cada fileira, o que acontecerá com a quantidade total de cadeiras? Aumentará ou diminuirá? Quanto?

Problema 2:

a) Sabendo que a x b = 450 (a e b são dois números naturais). A partir deste dado, é possível saber qual é o produto do dobro do primeiro número pelo triplo do segundo número? Como?

b) Sabendo que o produto de dois números é 450. Qual será o resultado, se somarmos uma unidade ao primeiro dos números e depois multiplicarmos pelo segundo?

Problema 3a: Encontre contas de dividir na qual o divisor seja 34, o quociente 18 e o resto 12. Quantas contas são possíveis? Mostre-as.

Problema 3b: Encontre contas de dividir na qual o divisor seja 32 e o resto 27. Quantas contas são possíveis? Mostre-as.

Problema 3 c: Encontre contas de dividir na qual o quociente seja 43 e o resto 27. Quantas contas existem? Mostre-as.

Problema 3d: Como podemos aproveitar esta informação 917= 45 x19+62 para determinar o quociente e o resto da divisão 917 : 45?

ANEXO B: Teste Final

Nome: ....
Idade: ....

Problema 1: Em um cinema há 13 fileiras com 15 cadeiras cada uma.

a) Qual a quantidade total de cadeiras desse cinema?

b) Se duplicarmos a quantidade inicial de cadeiras de cada fileira; duplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

c) Se duplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e duplicarmos a quantidade de fileiras; duplicará a quantidade de total de cadeiras? O que acontecerá?

d) Se triplicarmos a quantidade de cadeiras inicial e triplicarmos a quantidade de fileiras, triplicará a quantidade total de cadeiras? O que acontecerá?

e) Se aumentarmos uma fileira, o que acontecerá com a quantidade total de cadeiras do salão? Aumentará ou diminuirá? Quanto?

f) Se aumentarmos uma cadeira em cada fileira, o que acontecerá com a quantidade total de cadeiras? Aumentará ou diminuirá? Quanto?

Problema 2:

a) Multiplicando dois números naturais obtemos como resultado 20. É possível saber qual é o produto do dobro do primeiro número pelo triplo do segundo número? Como? Quanto será?

b) Sabendo que o produto de dois números é 20. Qual será o resultado, se somarmos uma unidade ao primeiro dos números e depois multiplicarmos pelo segundo?