IEDA MARA OLIVEIRA

A PESQUISA E A PRÁTICA DOCENTE: INVESTIGAÇÃO SOBRE HIPÓTESES QUE ALUNOS DE 5ª SÉRIE FORMULAM A RESPEITO DE ESCRITAS ALGÉBRICAS

Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

PUC – SP

2005

IEDA MARA OLIVEIRA

A PESQUISA E A PRÁTICA DOCENTE: INVESTIGAÇÃO SOBRE HIPÓTESES QUE ALUNOS DE 5ª SÉRIE FORMULAM A RESPEITO DE ESCRITAS ALGÉBRICAS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da **Pontifícia Universidade Católica de São Paulo** como exigência parcial para obtenção do título de **Mestre Profissional em Ensino de Matemática**, sob a orientação da Professora **Doutora Célia Maria Carolino Pires.**

PUC – SP

2005

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura_________________________ Local e Data______________________

Dedico este trabalho

Ao meu marido **Carlos Alberto**, pela paciência, confiança e tolerância que depositou em mim;

Aos meus filhos **Luiz Gustavo** e **Andréia Cristina**, por todo carinho e compreensão pelas horas de ausência.

Agradecimentos

A **Deus**, pelo privilégio de proporcionar-me condições de desenvolver este trabalho.

À professora **Doutora Célia Maria Carolino Pires**, pela bondade, dedicação e amizade dedicadas a mim em sua orientação.

Aos **professores**, à **coordenação do Curso** e à **secretária** da Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, por toda luta para que o curso Mestrado Profissional em Ensino de Matemática pudesse se realizar e pela confiança e oportunidade dadas à primeira turma.

Aos amigos **Aguinaldo, Ana Paula, Alessandra, Edna, Clemente** e a todos da primeira turma do Mestrado Profissional, pelo incentivo profissional.

À **PUC-SP**, por investir na área da educação matemática, oferecendo aos professores de matemática cursos de formação continuada.

À **CAPES**, pela inestimável ajuda financeira, sem a qual não poderia ter realizado mais esta etapa em minha vida profissional.

Gostaria de encontrar um exemplo para a dualidade.

Gostaria de escrever parágrafos e capítulos inteiros, onde aparecessem simultaneamente acordes e desacordes, onde à variedade se unisse a unidade, e à seriedade o humor.

Pois exatamente aí é que para mim reside a vida.

No flutuar entre dois pólos, no ir-e-vir por entre duas colunas que suportam o mundo.

Gostaria de sempre apontar a imensa variedade do mundo e de lembrar que esta variedade repousa sobre a unidade.

(H. Hesse)

RESUMO

No presente trabalho de conclusão do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, intitulado "A pesquisa e a prática docente: investigação sobre hipóteses que os alunos de 5ª série formulam a respeito de escritas algébricas", destacamos nossa preocupação com o ensino e aprendizagem da álgebra, sempre muito presente em nossa prática, que nos levou a procurar conhecer pesquisas desenvolvidas sobre o tema e também estudos históricos sobre o desenvolvimento da álgebra, conhecimentos que fazem muita falta na formação do professor de Matemática. Apresentamos o resultado de uma investigação feita com meus alunos de 5ª série, em que procuramos identificar as hipóteses que eles formulam sobre o uso de letras. Concluímos, procurando estabelecer uma relação entre a realização dessa pesquisa e o nosso desenvolvimento profissional e também destacando a relevância da pesquisa, no âmbito do trabalho do professor, relacionada à construção de uma atitude cotidiana de busca de compreensão dos processos de aprendizagem e de desenvolvimento de seus alunos e à autonomia na interpretação da realidade e dos conhecimentos que constituem seus objetos de ensino. Consideramos também fundamental o conhecimento, por parte do professor, de métodos de investigação utilizados no desenvolvimento de pesquisas em Educação Matemática, com destaque para aquelas que focalizam o conhecimento, a experiência, a formação e o desenvolvimento profissional desse profissional.

Palavras-chave: Álgebra; Uso de letras; Hipóteses de alunos; Desenvolvimento profissional do professor.

ABSTRACT

In this current work of the course of Professional Master of Mathematical Education paper, entitled "Investigations on hypotheses that students formulate about algebraic writings”, we emphasize our concern with the teaching and learning of Algebra, which is always very present in our practice and that led us to look for researches developed about this theme and also historical studies on the development of Algebra, whose knowledge is very needed in the formation of a teacher of Mathematics. We present the results of an investigation performed with my fifth-grade students, in which we tried to identify the hypotheses that they formulate about the use of letters. We conclude, by trying to establish a relationship between the performance of this research and our professional development and also emphasizing the relevance of this research, in the scope of the teacher's work, related to the construction of a quotidian attitude in the search for the comprehension of their students' learning and development processes and to the autonomy in the interpretation of reality and the knowledge that constitutes their teaching objects. We also consider fundamental the knowledge by the teacher, of investigation methods used in the development of researches in Mathematical Education with emphasis on those which focus on the knowledge, the experience, the formation and the professional development as a tesacher.

Key-words: Algebra, Use of letters, hypotheses of students, professional development of the teacher

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Relevância do tema pesquisado

Ao longo de minha trajetória como professora da Educação Básica e também durante o curso de Mestrado Profissional, meu interesse esteve sempre muito voltado para o ensino e a aprendizagem de álgebra, provavelmente porque em minha experiência profissional fui percebendo as grandes dificuldades de ensinar os conteúdos algébricos, assim como dificuldades de aprender apresentadas pelos alunos da Educação Básica.

A leitura de diferentes autores, ao longo do curso, aumentou meu interesse pelo tema. Entre eles, destaco Kieran (1981), para quem três fatores são potenciais contribuintes para as dificuldades que o estudante tem em aprender álgebra: aprendizagem, ensino e conteúdo.

Relativamente ao ensino, Kieran destaca que o volume de pesquisa que tem sido realizada com os professores de álgebra é mínimo. Resultados desses poucos estudos sugerem que suas concepções são estruturais e que essa é a abordagem que eles favorecem em seu ensino. Apesar da natureza do ensino da álgebra, os estudantes raramente parecem capazes de desenvolver concepções estruturais maduras.

Segundo Kieran, a aprendizagem é, em um sentido, o fator mais fácil de se lidar, pois a maioria das pesquisas em álgebra escolar tem se concentrado nessa matéria e, segundo pesquisas, dois temas dominantes emergem: a acessibilidade de interpretações processuais em relação às estruturais e a dificuldade para a aquisição de uma concepção estrutural de álgebra. As evidências sugerem que, primeiramente, maior esforço deve ser investido em ensino em sala de aula a fim de criar uma base sólida para desenvolver concepções estruturais de álgebra, despendendo consideravelmente mais tempo em concepções processuais. Kieran enfatiza que se requer um período prolongado de prática antes que as concepções processuais possam ser transformadas em estruturais.

Finalmente, em termos de conteúdo, Kieran avalia que, se os estudantes sentem dificuldade com a álgebra que é ensinada por seus professores e os professores ensinam a álgebra que é apresentada nos livros didáticos, então o principal fator que vem contribuindo para a dificuldade em álgebra poderia ser atribuído, por falta de outra razão, ao conteúdo da álgebra como disposta na maioria dos livros didáticos.

Um outro autor que nos mostrou a importância das investigações sobre o ensino de álgebra foi House (1994). Ele destaca que, há muito tempo, a álgebra ocupa um lugar de destaque nos currículos de matemática da Educação Básica. No entanto, ele considera que, embora sejam feitas modificações periódicas nas propostas curriculares, muitas vezes o que se faz é um rearranjo dos elementos dos conteúdos do passado.

Para esse autor, duas forças atuam sobre a definição dos conteúdos, sobre o ensino e as aplicações da álgebra. Ele identifica como origens dessas forças as tecnologias da informação e as forças sociais. Com o advento das tecnologias da informação, outras áreas, como ciências sociais e biológicas, tornaram-se altamente dependentes dos processos matemáticos. Nessas áreas, os conceitos e os processos algébricos, como manipulação de variáveis e avaliação de tendências, são de importância fundamental.

Outra implicação das tecnologias da informação nos currículos de álgebra refere-se ao fato de que os algoritmos terão seu papel diminuído e ao mesmo tempo realçado – diminuído em termos de memorização para obter respostas e realçado no que se refere a aprender a planejar e criar algoritmos para execução pelas pessoas e pelo computador.

Por sua vez, as ferramentas tecnológicas certamente suscitam reflexões interessantes: se a tecnologia de computação oferece sua abordagem interativa para aproximar as raízes de uma função com graus de precisão cada vez maiores e num tempo extremamente pequeno, para que ensinar a fatoração de polinômios, simplificação de expressões racionais, fórmulas como a de Bháskara?

House (1994) alerta para o fato de que, desde o Ensino Fundamental, alunos que planejam um fluxograma ou que programam um algoritmo, que coletam dados para a organização de uma tabela, que acham o valor de uma expressão variável ou que formulam perguntas do tipo “e se?” com a planilha eletrônica estão lançando fundamentos importantes para o estudo da álgebra. Concordamos com ele, e acrescentamos que tais fundamentos provavelmente serão muito mais eficazes do que os que hoje são construídos em aulas expositivas, baseadas em um numeroso conjunto de regras. Além disso, a velocidade de cálculo e a exatidão das calculadoras permitirão que dediquemos mais tempo a processos heurísticos, como construção de tabelas, em busca de modelos.

Com relação ao que denomina de forças sociais, House (1994) observa que o impacto das tecnologias sobre praticamente todas as fases da atividade humana criou novas demandas por cidadãos que tenham facilidade para o raciocínio quantitativo e para os processos matemáticos. Essa necessidade inclui o conhecimento de uma série de tópicos, como estatística e probabilidade.

Do ponto de vista dos currículos prescritivos mais recentes, o ensino de álgebra tem merecido especial atenção. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental – PCNEF, os conceitos algébricos constituem parte importante do currículo de Matemática.

O documento destaca que "embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, são especialmente nas séries finais do Ensino Fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis e incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a 'sintaxe' (regras para resolução) de uma equação".

Ao definir objetivos para o quarto ciclo do Ensino Fundamental, os PCNEF incluem o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

– produzir e interpretar diferentes escritas algébricas – expressões, igualdades e desigualdades –, identificando as equações, inequações e sistemas;

– resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;

– observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis;

– resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três;

– representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não-proporcional.

Uma outra orientação importante contida no documento é de que o ensino da álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas que lhes permitam dar significado à linguagem e às idéias matemáticas.

O documento ressalta que, “ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções da álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas)”.

De acordo com os PCNEF, no trabalho com a álgebra são fundamentais a compreensão de conceitos como o de variável e de função, a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica, a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação. Para apoiar a compreensão desses conceitos pode-se lançar mão da construção e interpretação de planilhas, utilizando recursos tecnológicos como a calculadora e o computador.

O trabalho com a álgebra também está presente em atividades e problemas que envolvem noções e conceitos referentes aos demais blocos, como ao generalizar os procedimentos para calcular o número de diagonais para qualquer polígono, ao indicar a expressão que relaciona duas grandezas, ao calcular medidas da tendência central de uma pesquisa.

Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis e incógnitas, tomando contato com fórmulas) e compreenderá a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação. Esse encaminhamento dado à álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilitam a exploração da noção de função no terceiro e no quarto ciclo. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo no Ensino Médio.

Com relação ao terceiro ciclo, que inclui a 5ª e a 6ª série, o documento sugere:

> "No decorrer do trabalho com os números, é fundamental estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em seqüências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas. A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra."

Devido à complexidade que caracteriza os conceitos e procedimentos algébricos não é desejável que no terceiro ciclo se desenvolva um trabalho visando ao aprofundamento das operações com as expressões algébricas e as equações. É suficiente nesse ciclo que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas. É provável que, ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas, o aluno se depare com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita. Nesse caso, o que se recomenda é que os alunos sejam estimulados a construir procedimentos diversos para resolvê-las, deixando as técnicas convencionais para um estudo mais detalhado no quarto ciclo.

Objetivos da pesquisa

Nosso objetivo é analisar aspectos do ensino e da aprendizagem de álgebra e investigar hipóteses de alunos de 5ª série de uma escola pública, em situações de uso de letras. Ou seja, investigaremos respostas de alunos que ainda não realizaram um estudo formal da álgebra.

Destacamos ainda que nosso trabalho insere-se num projeto mais amplo de pesquisa, desenvolvido no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, coordenado pela Profa. Dra. Célia Maria Carolino Pires, denominado "Inovações curriculares nos Ensinos Fundamental e Médio e formação de professores para essa etapa da escolaridade".

Esse projeto tem na organização curricular dos Ensinos Fundamental e Médio seu eixo temático. Inclui análises sobre a trajetória da Matemática na organização curricular brasileira para essas etapas da escolaridade e as atuais propostas de ensino de Matemática para os Ensinos Fundamental e Médio.

Focaliza o processo de desenvolvimento curricular, as variáveis que intervêm em sua formulação e as mudanças que ocorrem nos currículos. Discute como as diretrizes veiculadas por documentos oficiais são traduzidas nos livros didáticos e investiga o "currículo como práxis", identificando como são incorporadas na prática dos professores em sala de aula as orientações dos currículos oficiais. Finalmente, investiga a relação entre processos de formação de professores e os processos de mudança, inovação e desenvolvimento curricular.

Procedimentos metodológicos

Em nosso trabalho, fizemos uso de pesquisa bibliográfica e de pesquisa de campo. A pesquisa bibliográfica foi realizada com a finalidade de fazer um levantamento de alguns estudos já produzidos a respeito do nosso tema de pesquisa e de alguns aspectos da história dos conhecimentos algébricos.

A pesquisa de campo, de natureza qualitativa, foi feita para identificar conhecimentos e procedimentos usados pelos alunos de 5ª série, aos quais apresentamos uma série de questões que envolviam diferentes usos de letras.

Podemos categorizar nosso trabalho como uma pesquisa-ação, na medida em que situamos a professora-pesquisadora como sujeito do processo de produção do conhecimento. Segundo Zeichner (1996), a pesquisa-ação possibilita o desenvolvimento profissional e é diferente das pesquisas realizadas para saber como o professor pensa ou age. O Autor afirma que a pesquisa-ação é um instrumento fundamental para conhecer problemas de ensino, possibilitando reorganizações de políticas educacionais. Na pesquisa-ação, o professor pesquisa sobre sua prática, estratégias de ensino, organização e gestão da sala de aula, condições sociais dos alunos, condições de trabalho etc.

CAPÍTULO 1. ESTUDOS PRELIMINARES SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

1.1. Concepções de álgebra

Uma das aprendizagens do curso de mestrado profissional diz respeito ao contato com pesquisas na área de Educação Matemática, as quais, como professores, geralmente desconhecemos. Ao longo do curso, fomos tomando contato com diferentes artigos e dissertações, em particular com os desenvolvidos no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemáticos da PUC/SP.

Em seus estudos, Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) destacam que as concepções mais freqüentes de álgebra, que aparecem nas diferentes leituras do desenvolvimento histórico a esse respeito, nos levam à seguinte questão: como elas interagem com as concepções dominantes da Educação Algébrica que surgiram ao longo da história da Educação Matemática Elementar?

Segundo esses Autores, uma primeira concepção de Educação Algébrica, presente durante o século XIX e até a primeira metade do século XX, tanto no Brasil como em outros países, é a chamada lingüístico-pragmática. Tal concepção vincula o papel pedagógico da álgebra como instrumento de resolução de problemas às concepções lingüístico-semântico-sintáticas dessa disciplina.

Desse modo, a aquisição de técnicas algébricas, ainda que mecânicas, é suficiente para o aluno resolver problemas, mesmo que artificiais, fabricados com o propósito de utilizar técnicas aprendidas. Em nossa opinião, podemos considerar que ainda há fortes marcas dessa concepção nas práticas docentes presentes hoje nas escolas, em que a aquisição de técnicas algébricas é ainda muito freqüente e o centro das atenções das atividades em sala de aula.

Vejamos um exemplo de tal concepção acima citada:

Produtos Notáveis[1]

Há certos produtos que ocorrem freqüentemente no cálculo algébrico e que são chamados **produtos notáveis**. Vamos apresentar aqueles cujo emprego é mais freqüente.

1) QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

Observe:

$$(a + b)^2 = (a + b) \,.\, (a + b)$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Modo prático:

$$\begin{array}{r} a + b \\ \underline{a + b} \\ a^2 + ab \qquad \\ \underline{+\, ab + b^2} \\ a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Conclusão:

(Primeiro termo + Segundo termo)^2 =

$$= \boxed{\left(\begin{matrix}\text{Primeiro}\\\text{termo}\end{matrix}\right)^2 + 2\left(\begin{matrix}\text{Primeiro}\\\text{termo}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{Segundo}\\\text{termo}\end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix}\text{Segundo}\\\text{termo}\end{matrix}\right)^2}$$

Exemplos:

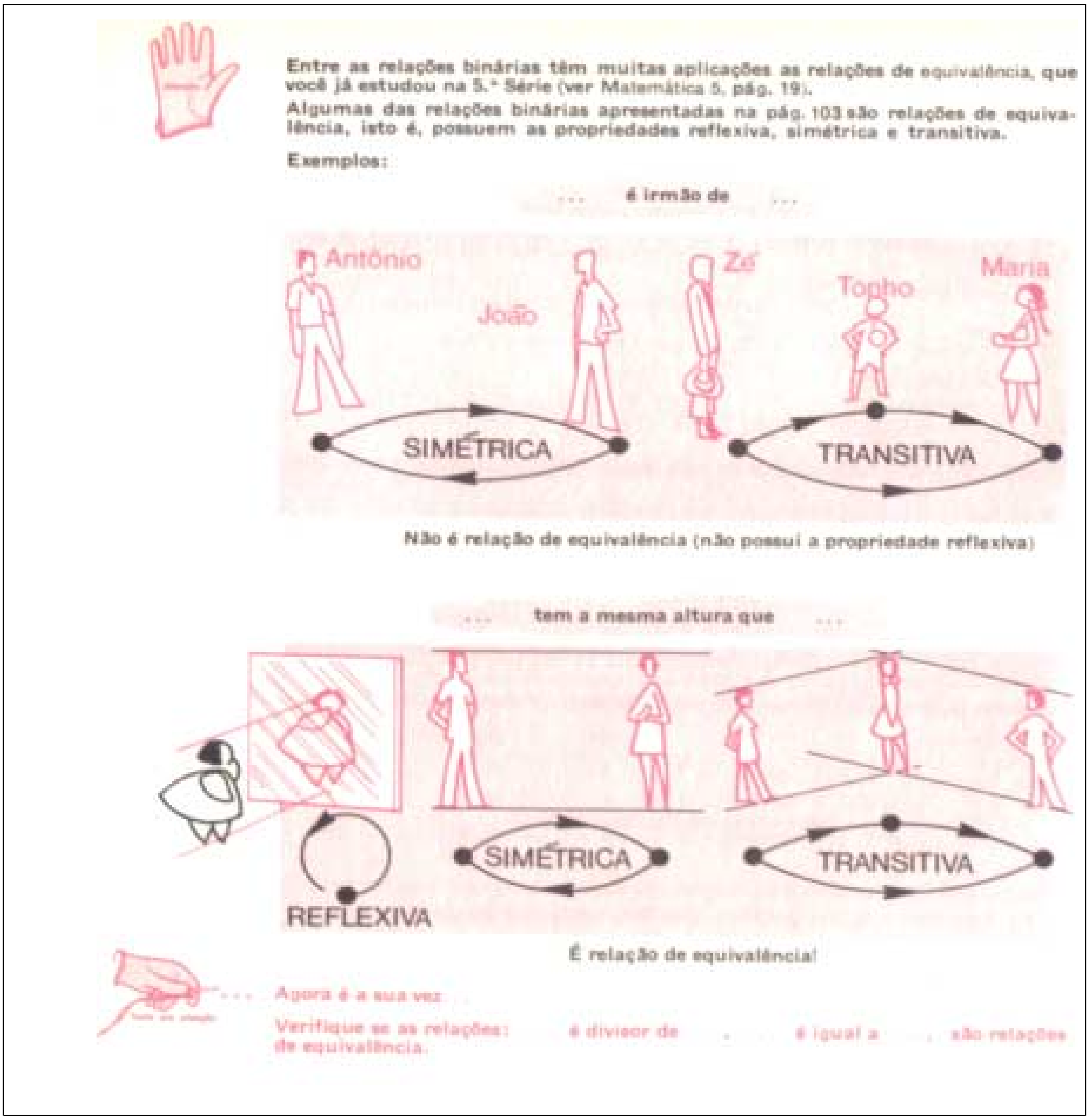
❶ $(5 + x)^2 = 5^2 + 2 \,.\, 5 \,.\, x + x^2$
$= 25 + 10x + x^2$

❷ $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \,.\, (2x) \,.\, (3y) + (3y)^2$
$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

Contrapondo-se a essa concepção, surge uma outra, de cunho lingüístico, denominada fundamentalista-estrutural. Ela se baseia na concepção lingüístico-

1 Exemplo extraído do livro *Praticando Matemática*, de Álvaro Aldrine, p. 68.

postulacional da álgebra, em que a álgebra é tida como fundamentadora dos vários campos da matemática escolar. Nessa concepção, acredita-se que a introdução de propriedades estruturais das operações capacitaria o estudante a identificar e a aplicar essas estruturas nos diferentes contextos em que estivessem subjacentes. Consideramos que sua presença pode ser fortemente identificada no período de influência do Movimento Matemática Moderna. O exemplo abaixo é ilustrativo:[2]

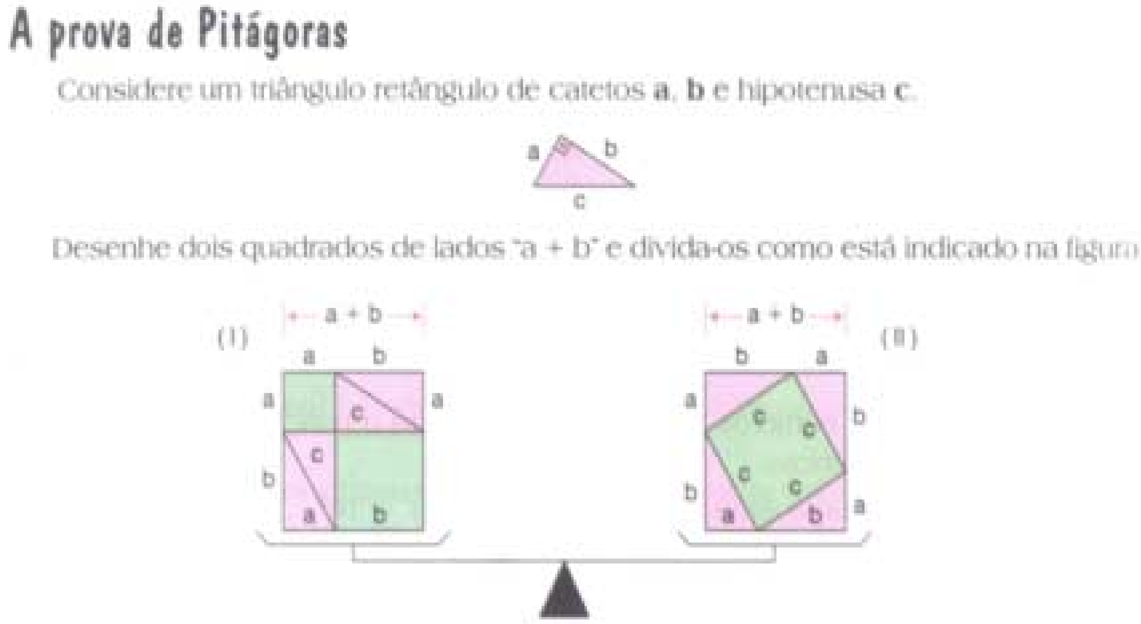

Entre as relações binárias têm muitas aplicações as relações de equivalência, que você já estudou na 5.ª Série (ver Matemática 5, pág. 19).
Algumas das relações binárias apresentadas na pág. 103 são relações de equivalência, isto é, possuem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.
Exemplos:
... é irmão de ...

Não é relação de equivalência (não possui a propriedade reflexiva)
... tem a mesma altura que ...

É relação de equivalência!
Agora é a sua vez
Verifique se as relações: é divisor de , é igual a , são relações de equivalência.

2 Exemplo extraído do livro *Matemática 6*, de Osvaldo Sangiorgi, p. 106.

Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) identificam uma terceira concepção de Educação Algébrica, que denominam fundamentalista-analógica, que procura vincular o papel pedagógico de álgebra como instrumento de resolução de problemas à concepção lingüístico-semântico-sintática dessa disciplina. Para eles, essa concepção tenta efetuar uma síntese entre as duas anteriores, mas não mais de forma lógico-estrutural de justificação das passagens presentes no transformismo algébrico característico da segunda concepção. A nova forma de justificar, na maioria dos casos, baseia-se em recursos analógicos geométricos e, portanto, visuais. Nesse sentido, essa concepção acredita que uma “álgebra geométrica” seria didaticamente superior a qualquer forma de abordagem estritamente lógico-simbólica. Ainda nessa concepção, outro recurso analógico bastante comum é a “justificação” de certas passagens do transformismo algébrico por meio da utilização de leis do equilíbrio físico, recorrendo-se, para isso, a materiais concretos como balanças, gangorras etc., nos quais o “concreto” tem um significado diferente do “concreto” ao qual fazem apelo os recursos estritamente geométrico-visuais. Vejamos um exemplo retirado de um livro didático:[3]



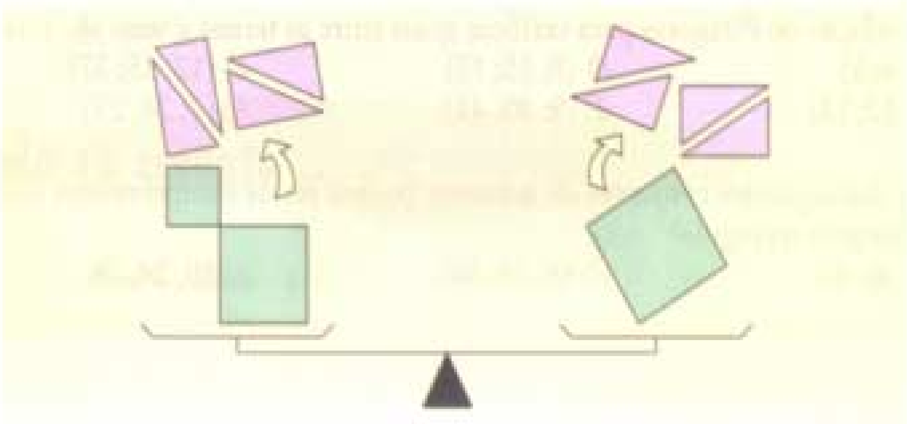
[3] Exemplo extraído do livro *Matemática Hoje é Feita Assim* , de Antonio Jose Bigode, p. 266.

Observe que na figura (I) o quadrado de lados "a + b" foi decomposto em um quadrado de lados **a**, um quadrado de lados **b** e 4 triângulos iguais de lados **a**, **b** e **c**.

Na figura (II), o quadrado de lados "a + b" foi decomposto em 4 triângulos iguais de lados **a**, **b** e **c** e um quadrado central de lados **c**.

Removendo os 4 triângulos na figura (I) restarão os dois quadrados de lados **a** e **b**, respectivamente. Removendo os 4 triângulos na figura (II) restará o quadrado de lados **c**.

Deste fato pode-se concluir que $a^2 + b^2 = c^2$.



Essas concepções de Educação Algébrica tomam como ponto de partida a existência de uma álgebra simbólica já constituída. Segundo Fiorentini, Miguel e Miorim, em todos esses casos, o ensino-aprendizagem da álgebra reduz-se ao "transformismo algébrico".

1.2. A categorização proposta por Usiskin

Outro autor que procura discutir as finalidades do ensino e da aprendizagem da álgebra, os objetivos da formação em álgebra e as concepções que se têm desse corpo de conhecimentos é Usiskin (1994), que identifica quatro concepções de álgebra:

A primeira delas é a álgebra como aritmética generalizada. Dentro dessa concepção de álgebra, as atividades centrais para a aprendizagem são *traduzir e generalizar*. Nessa concepção, é natural pensar as variáveis como generalizadoras de modelos. Por exemplo, a partir de várias situações, como 3 + 5 = 5 + 3, 2 + 4 = 4 + 2 etc., generaliza-se: a + b = b + a. Algumas "traduções" são praticamente automatizadas pelos alunos, como o dobro de um número: 2x; o triplo de um número: 3x; a metade de um número: x/2; o quadrado da soma de dois números: $(a + b)^2$ etc.

A segunda concepção é a que entende a álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, alguns inclusive que podem ter resoluções aritméticas simples. Enquanto na concepção anterior as atividades centrais são traduzir e generalizar, nessa nova concepção as atividades centrais são *simplificar e resolver*. É o caso de problemas como: adicionando 5 ao dobro de um certo número, a soma é 17, qual é esse número?, em que os alunos são estimulados a traduzir para a linguagem algébrica: $2x + 5 = 17$.

A terceira concepção é a que identifica a álgebra como o estudo de relações entre grandezas. Ela se manifesta, por exemplo, pelo estudo de fórmulas, como a fórmula $A = bh$, que fornece a área de um retângulo. Nela se expressa uma relação entre as três grandezas. A distinção crucial entre essa concepção e a anterior é que, neste caso, as variáveis variam. A diferença fundamental entre essas concepções fica evidente pela resposta que os alunos geralmente dão à seguinte pergunta: o que ocorre com o valor de 1/x quando x se torna cada vez maior? Isso parece simples, mas é suficiente para confundir os alunos. Ou seja, x não é incógnita, e só estamos pedindo para que o aluno traduza isso.

Uma quarta concepção é a da álgebra como estudo das estruturas. Nos cursos superiores, o estudo da álgebra envolve estruturas como grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais. Isso parece ter pouca semelhança com a álgebra da Educação Básica. Contudo, reconhecemos a álgebra como o estudo das estruturas pelas propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios. Consideremos um exercício em que se pede para fatorar: $3x^2 + 4ax – 13a^2$. Não se trata de nenhuma função ou relação, a variável não é um argumento. Não há equação alguma a ser resolvida, de modo que a variável não atua como incógnita. Também não há nenhum modelo matemático a ser generalizado.

No quadro abaixo, estão sintetizados as diferentes concepções de álgebra e os diferentes usos de variáveis.

Concepção de Álgebra	Uso das Variáveis
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

1.3. Álgebra processual e estrutural segundo Kieran

Kieran (1992) considera que a proposta de ensino de álgebra, na maioria dos livros didáticos, apresenta uma fachada de abordagens processuais em sua introdução a objetos algébricos, fornecendo alguns poucos exercícios que envolvem substituição em expressões algébricas e várias técnicas aritméticas para resolver equações algébricas – técnicas que permitem aos estudantes, em um sentido, evitar o simbolismo algébrico.

Ela avalia que, contudo, essa simulação desaparece rapidamente quando expressões devem ser simplificadas e equações resolvidas por métodos formais. Os objetivos implícitos da álgebra escolar são estruturais. As exigências cognitivas envolvidas no trabalhar com expressões algébricas como objetos com operações que são distintas das operações da aritmética são claramente remanescentes das lutas intelectuais que ocorreram durante o desenvolvimento histórico da álgebra, quando interpretações processuais abriram caminho para as estruturais.

Em sua análise, Kieran utiliza os termos “processual” e “estrutural” da seguinte forma:

O termo processual refere-se a operações aritméticas realizadas sobre números para produzir números. Por exemplo, se tomarmos a expressão algébrica 3x + y e a substituirmos x e y por 4 e 5, respectivamente, o resultado será 17. Um outro exemplo envolve a resolução de 2x + 5 = 11, substituindo-se vários valores para x até que o correto seja encontrado. Em ambos exemplos, aparentemente algébricos, os objetos que são trabalhados não são as expressões algébricas, mas suas instanciações numéricas. Além disso, as operações que são realizadas nesses números são computacionais – elas produzem um resultado numérico. Assim, esses dois exemplos ilustram uma perspectiva processual em álgebra.

O termo estrutural, por outro lado, refere-se a um conjunto diferente de operações que são levadas a efeito, não sobre números, mas sobre expressões algébricas. Por exemplo, se tomamos a expressão algébrica 3x + y + 8x, ela pode ser simplificada para resultar 11x + y ou ser dividida por x para resultar $\frac{11x+y}{x}$.

Equações como 5x + 5 = 2x – 4 podem ser resolvidas subtraindo 2x de ambos os lados para se obter 5x – 2x + 5 = 2x – 2x – 4, que pode, subseqüentemente, ser simplificada para 3x + 5 = 4. Nesses dois exemplos, os objetos que são trabalhados são as expressões algébricas, não alguma instanciação numérica. As operações que são realizadas não são computacionais. Além disso, os resultados são ainda expressões algébricas.

1.3.1. Uma investigação envolvendo alunos da rede pública estadual de São Paulo

A investigação realizada por Ribeiro (2001) sobre o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em álgebra buscou levantar, identificar e analisar os procedimentos e as estratégias que os alunos das 8as séries do Ensino Fundamental utilizam para resolver questões de Álgebra Elementar.

Com base em uma análise feita nos documentos do SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), edição de 1997, elaborados pela Secretaria Estadual de Educação, o pesquisador aplicou, numa primeira etapa de sua pesquisa, as mesmas questões de álgebra que este exame trazia em uma amostra de 20 alunos da Rede Pública Estadual de São Paulo. Num segundo momento, os alunos puderam trabalhar em pequenos grupos com a participação do pesquisador, na resolução de questões abertas semelhantes àquelas aplicadas na etapa anterior.

Tomando como base os trabalhos de Kieran (1992) e Cortés & Kavafian (1999), foram apresentadas as análises feitas a respeito das estratégias utilizadas pelos alunos dessa amostra, buscando identificar possíveis causas para os erros mais freqüentes.

Em seu trabalho, Ribeiro levanta alguns pontos para uma discussão teórica sobre a importância de trabalhar a álgebra sobre os aspectos processuais e estruturais, bem como de compreender a necessidade de observar e discutir com os alunos os erros que, normalmente, cometem quando estão trabalhando com a álgebra.

Levando em conta os trabalhos de Kieran, o pesquisador procurou identificar se os alunos pesquisados foram capazes de tratar as representações simbólicas como objetos matemáticos, operar sobre as estruturas algébricas e modelar situações-problema em estruturas algébricas.

Utilizou também os estudos de Cortés & Kavafian (1999), como apoio para a classificação e as constatações referentes à persistência de erros que ocorrem no trabalho com a álgebra. Os erros são classificados em cinco categorias, levando-se em conta, por parte dos autores, por um lado, erros conceituais e, por outro, erros gerados pela falta de atenção. As cinco categorias são:

– erros decorrentes da utilização do conceito de equação e incógnita;

– erros de transformações algébricas idênticas nos dois membros das equações;

– erros decorrentes da escolha da operação prioritária;

– erros na escrita de uma nova equação: falta de atenção;

– erros de cálculos numéricos.

O pesquisador conclui que os alunos pesquisados utilizam-se tanto do aspecto estrutural como do processual em suas estratégias de resolução de questões de álgebra como as que foram propostas a eles. Aparentemente, aqueles que possuem um maior grau de “amadurecimento” algébrico e uma certa familiarização com o manuseio das estruturas algébricas recorrem à utilização do aspecto estrutural, obtendo mais sucesso – como Kieran também constatou em seu estudo – do que os demais. Contudo, esses mesmos alunos, em algumas situações, quando a utilização do aspecto processual tornaria a resolução mais rápida e econômica, não o utilizam, fato interessante de ser investigado.

Ribeiro destaca a importância de conseguir identificar os erros cometidos pelos alunos e saber como os trabalhos com esses erros podem fornecer-nos condições de intervir no desempenho deles, como destacam Cortés & Kavafian (1999) em seus estudos. Ele faz um alerta sobre a importância do tipo de atividades que são apresentadas aos alunos: nem sempre trabalhar somente com o aspecto estrutural da álgebra significa promover um desenvolvimento maior ou menor nas habilidades em lidar com estruturas algébricas, pois em diversas situações a resolução pelo aspecto processual torna a solução mais rápida e econômica.

1.4. Relações entre aritmética e álgebra

Em suas reflexões sobre o ensino de álgebra, Lins e Gimenez (1997) fazem considerações no sentido de que a atividade algébrica não é conseqüência natural da aprendizagem da Aritmética. Tais reflexões suscitam uma discussão sobre a educação aritmética e algébrica dentro e fora da escola, como ambas são tratadas pelo “mundo acadêmico”, e sobre como a Educação Matemática pode estar facilitando a produção de significados, para álgebra e aritmética, permitindo que ambas se relacionem entre si, de forma diferente das leituras tradicionais, tais como “álgebra é aritmética generalizada” ou “álgebra é a estrutura da aritmética”.

Nesse estudo, Lins e Gimenez apontam o perigo de severos cortes (momento de seleção) na educação matemática escolar e alertam que a sua introdução na 6º e 7º séries pode ser precoce para a maioria dos alunos, que não teriam alcançado o nível de desenvolvimento intelectual requerido. Cita como exemplo fato já ocorrido em outros países, como a Inglaterra, que tentaram solucionar os problemas de aprendizagem da álgebra adiando a sua introdução em séries posteriores, como se fosse a única solução, obtendo resultados nada positivos.

Lins e Gimenez defendem a necessidade de começar mais cedo o trabalho com álgebra de modo que esta se desenvolva junto com a aritmética, uma implicada no desenvolvimento da outra.

Os Autores destacam que a aritmética encontra-se nos currículos do ensino obrigatório em todos os países, e há muito tempo. As “aritméticas” são os primeiros livros que se publicam na matemática ocidental com o objetivo de ensinar essa “arte”, que contém, originalmente, regras e técnicas.

Os conceitos aritméticos usados na educação matemática têm correspondido a relações quantitativas sobre coleções de objetos e que deram origem a duas visões: uma extremamente formal e outra simplesmente manipulativa.

Assim tem sido freqüentemente esquecido que a aritmética inclui também:

a) representações e significações diversas (ponto de referencia e núcleos, que manipulam a idéia simples do manipulativo);

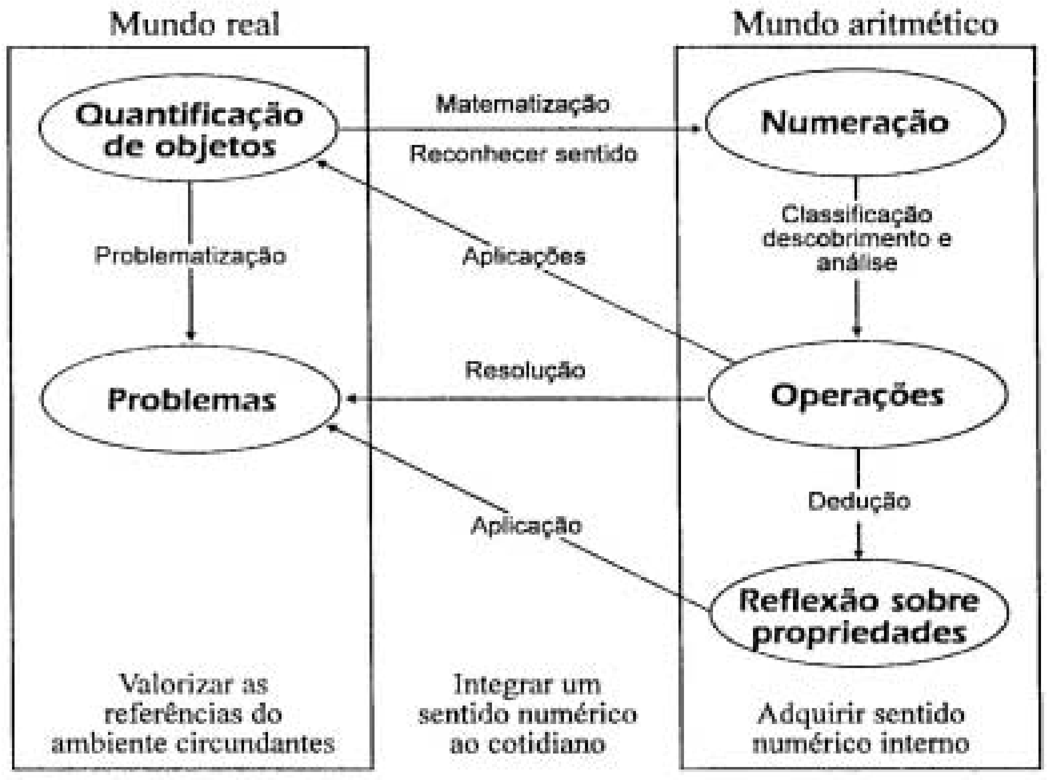
b) análise do porquê dos algoritmos e divisibilidade (elementos conceituais);

c) uso adequado e racional de regras (técnicas, destrezas e habilidades);

d) descobertas ou “teoremas” (descobertas, elaboração de conjecturas e processos de raciocínio).

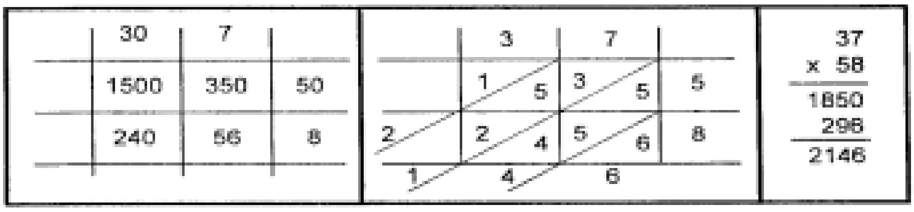
Para os autores, se a aritmética do século XX oferece respostas a problemas teóricos abertos, muito recentes, entre eles a chamada matemática discreta (quem sabe “nova aritmética”, Perspectivas em Aritmética e Álgebra Para o Século XXI ,pág.34), com a criptografia, os problemas de minimização e exploração máxima na economia, a análise numérica, os problemas de interação, por que então reduzi-la a regras escolares? Por que reduzir a aritmética a números naturais?

Argumentam que, se e a aritmética não é somente arte de regras e números, mas “‘algo mais’, se não está desvinculada do trabalho algébrico, se percebe que o mundo real deve formar parte dos núcleos básicos, se isso ocorre, muitas coisas devem funcionar de maneira diferente nas salas de aula”. E afirmam que disso se podem tirar as primeiras reflexões sobre o que deve passar a ser importante na aritmética escolar, buscando vincular a aritmética ao mundo real.



(*Extraído de Perspectivas em Aritmética e Álgebra Para o Século XXI, p. 40.)*

Esses autores fazem uma interessante observação, relacionando um bom trabalho aritmético com a mudança de perspectiva das tarefas do professor. Eles indicam algumas condições: a) reconhecer a necessidade de uma mudança curricular que sirva para desenvolver um sentido numérico, ou seja, colaborar para que o estudante seja capaz de interpretar e formular textos numéricos, reconhecer visualizações, relacionar ao máximo os conteúdos que conhece na prática situada de cada momento, utilizar método originais para distintos tipos de situações, avaliar se são razoáveis e eficazes etc.; b) integrar diversos tipos de raciocínio na produção de conjecturas ante os problemas apresentados, superando os erros, as dificuldades e os obstáculos; c) assumir o papel dos diferentes cálculos, que não se reduzem à obtenção de resultados, contribuindo para aprimorar processos como planificar, desenvolver estratégias diferentes, selecionar as mais adequadas etc., e, por último, d) fomentar uma avaliação que contemple a regulação e o controle constante do processo de ensino proposto. Citam como exemplo o método de multiplicação como o da grade, que favorece a visualização do poder da distributividade.



(Extraído de Perspectivas em Aritmética e Álgebra Para o Século XXI, p. 44.)

No que se refere à álgebra, os autores destacam que não há um consenso a respeito do que seja pensar algebricamente, mas que há um “certo consenso” a respeito de quais são “coisas da álgebra”: equações, cálculo literal, funções. Indagam, por exemplo, se gráficos são ou não parte da álgebra.

Lins e Gimenez colocam uma questão bastante desafiadora relativamente ao que denominam tendências “letristas”: se alguém acredita que atividade algébrica se resume a um “cálculo com letras”, o que poderá propor para a sala de aula? Talvez adote, seguindo algumas péssimas idéias encontradas em propostas para a educação aritmética, a prática de utilizar a “seqüência”, técnica (algoritmo)/prática (exercício). E isso é praticamente tudo que encontramos na maioria dos livros didáticos disponíveis no mercado brasileiro.

Lins e Gimenez (1997) firmam que esse fato é bastante ruim, pois tal prática não se baseia em investigações ou em reflexão de qualquer natureza ou profundidade, mas apenas em uma tradição, que ocorre em todo o mundo, inclusive no Brasil, que já mostrou ser ineficaz e mesmo perniciosa à aprendizagem.

Os autores comentam que seria ingenuidade pensar que a enorme aceitação dessas práticas “letristas” ocorre apenas por resignação dos professores, na verdade elas correspondem a uma certa visão da atividade algébrica, caso contrário, não sobreviveriam.

Destacam que é preciso ter consciência de que qualquer proposta de mudança vai ter de convencer muita gente de que a atividade algébrica não é “cálculo literal”, e isso pressupõe bem mais do que simplesmente pressionar os professores a mudarem de rotina.

Os autores comentam o uso de balanças de dois pratos para “ensinar” resolução de equações e chamam esse tipo de abordagem de “facilitador”, mas não num sentido otimista.

Se, por um lado, é verdade que esses recursos parecem amenizar a tragédia que tem sido o ensino-aprendizagem nas escolas, especialmente por substituir a prática “letrista” tradicional por algo mais agradável, por outro lado apresentam diversos problemas.

Lins e Gimenez afirmam que estudos conduzidos há alguns anos, como o da pesquisadora inglesa K. Hart e sua colega A. Sinkinson, investigaram o que acontece quando as crianças passavam de atividades “concretas” para outras “formais”, relativas ao mesmo conteúdo. O conteúdo escolhido pelas pesquisadoras foi a solução de equações. E, para sua surpresa, as crianças – embora achando o material concreto “útil” – não viam relação entre o que haviam feito no “concreto” e o que haviam feito no “formal”. A conclusão de Hart e Sinkinson foi de que faltava um material intermediário, que “preenchesse o vazio” entre uma coisa e outra.

Lins e Gimenez examinam a visão de educação algébrica ligada ao que se convencionou chamar de “álgebra como aritmética generalizada” e expõem que historicamente os defensores mais sistemáticos dessa proposta são membros de equipe da Open University, da Inglaterra, liderados por John Mason. Essa equipe produziu o livro *Roots of/routes to algebra* (*Raízes da/caminhos para álgebra*), em que a idéia central é de que a atividade algébrica se caracteriza pela expressão da generalidade. Essa generalidade se refere, por exemplo, à relação entre número de ladrilhos brancos e pretos num padrão geométrico.

Para os autores, um aspecto-chave dessa abordagem, representada pelo grupo da Open University, é que a tendência “letrista” é de certa forma compensada por uma ocupação com a “linguagem algébrica” como meio de expressão, e não apenas como objeto a que se aplicam técnicas diversas. Como em outras abordagens de origem britânica, a preocupação maior não é com uma delimitação precisa do que é tratado em cada atividade proposta e, sim, com o envolvimento dos alunos, ativamente, na organização de dados e no estabelecimento de relações, e na procura, quando necessário, de maiores recursos técnicos.

Lins e Gimenez fazem comentários sobre estudos apoiados na Engenharia Didática em que são apresentadas aos alunos seqüências didáticas, cuidadosamente elaboradas, para que se possa tratar de todos os aspectos considerados relevantes em relação a um tema.

Embora naturalmente embasada por resultados de pesquisa, é interessante observar que não é fácil perceber em que uma proposta como a colocada por Aníbal Cortez – colaborador de Vergnaud – difere substancialmente de propostas tradicionais bem organizadas. Isso poderia sugerir que a pesquisa é inútil, mas não é esse o caso. Para Lins e Gimenez, o que um modelo como o de Vergnaud traz, e que deveria ser melhor explorado, é a complexidade do fenômeno, tornando inseparáveis aspectos como notação e os conceitos, e enfatizando, por exemplo, que são problemas que permitem que se produzam significados para eles, e vice-versa.

Lins e Gimenez citam também os estudos do pesquisador russo Davydov, que estabelece uma raiz comum para a álgebra e a aritmética, ou seja, o trabalho com relações quantitativas.

De acordo com Davydov, para ser capaz de resolver o mais simples dos problemas "aritméticos", a criança precisa também lidar – de forma tematizada ou não – com as relações quantitativas envolvidas. O ponto-chave elaborado por Davydov é que, se falamos de quantidade especificas, é natural que os alunos voltem sua atenção para elas, mas se, em vez disso, ficamos com uma situação genérica, é razoável que os alunos se voltem para ela. Davydov ressalta que é essencial estabelecer, de forma clara, a distinção entre "genérico" e "generalizado". A situação generalizada emerge quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares (como o padrão de ladrilhos pretos e brancos), ao passo que a situação “genérica” emerge quando tratamos diretamente daquilo que é geral numa situação, sem a intermediação dos casos particulares.

Para Davydov, o seu trabalho com crianças e jovens lançava as bases para um estudo mais sólido da aritmética, dando como exemplo a adição e a subtração que eram vistas, desde o inicio, como operações inversas, e também a multiplicação e a divisão – frações emergiam no contexto de divisões, e eram trabalhados junto com estas, desde muito cedo. À idéia de pensar em uma aritmética de contas particulares, que depois seria “generalizada” em direção à álgebra, ele contrapunha uma aritmética que “colocava em ação”, em casos particulares, as propriedades de um sistema mais amplo, desenvolvido com base no estudo de relações quantitativas.

Lins e Gimenez consideram que os estudos de Davydov mostram que é infundada a idéia de que a aritmética deve preceder necessariamente a álgebra na escola. Por outro lado, isso não deve ser interpretado como uma afirmação de que a álgebra deve preceder a aritmética, pelo simples motivo de que há todo um conjunto de experiências aritméticas, extra-escolares, que as crianças trazem consigo ao iniciar o trabalho escolar.

Afirmam esses autores que o que devemos buscar é a coexistência da educação algébrica com a aritmética, de modo que uma esteja implicada no desenvolvimento da outra. Em ambos os casos, no da aritmética e no da álgebra, a mudança de perspectiva mais importante dá-se quando passamos a pensar em termos de significados sendo produzidos no interior de atividades, e não, como até aqui, pensando em termos de técnicas ou conteúdos.

CAPÍTULO 2. NOSSA INVESTIGAÇÃO EM SALA DE AULA

2.1. Introdução

Neste capítulo apresentaremos os resultados de nossa pesquisa de campo realizada com 28 alunos de 5ª série, na qual a pesquisadora em campo é também professora dos mesmos, que foi realizada em uma escola pública da rede estadual de educação de São Paulo. Faremos uma caracterização do grupo de alunos participantes da pesquisa e do contexto escolar, realizada a partir de um questionário respondido por esses alunos (Anexo 1). Na seqüência apresentaremos as respostas dadas pelos alunos (Anexo 2).

2.2. Conhecendo melhor a realidade dos alunos pesquisados

Embora já atuasse como professora desses alunos, ao realizar o presente estudo considerei importante conhecer melhor a realidade em que vivem. A escola em que estudam foi construída há cerca de 14 anos para atender às necessidades da comunidade local, que mora no bairro “Jova Rural”, que se formou em uma região marcada por invasões de terras, em parte pertencentes ao município ou ao estado, que compreende vários bairros, a maior parte constituída por invasões ocorridas ao longo de mais ou menos 45 anos (conforme depoimento do centro comunitário local). Situa-se entre o bairro de Jaçanã e divisa com a cidade de Guarulhos (bairro Nova Galvão).

Trata-se de local com condições de vida bastante precárias e de difícil acesso, pelo fato de estar situado num morro e ter se formado sem planejamento adequado. É marcado pela violência e pobreza, algumas casas são acabadas e outras ainda estão em construção, há muitas vielas que não possuem asfalto e nem saneamento básico. A escola fica num espaço muito grande e possui poucas moradias ao seu redor. Não consegue atender a todas as crianças do bairro, mas nesses últimos anos vem sendo ampliada para atender a todos. Nos bairros próximos há também outras escolas públicas, mas distantes umas das outras; alguns bairros já possuem uma infra-estrutura melhor e grande parte dos lotes onde foram feitas construções já foi regularizada, mas muitos ainda não.

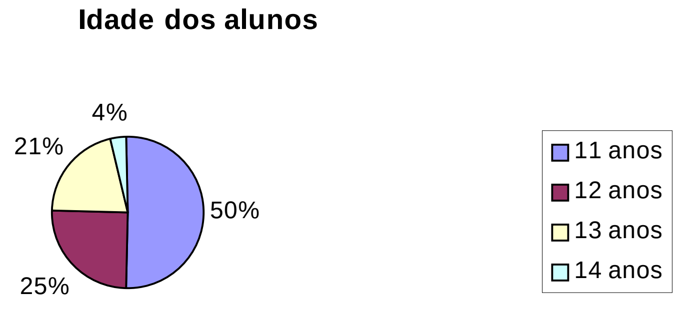
A escola possui 18 salas de aulas, tendo aulas regulares em três períodos:

– Manhã: Ensino Fundamental II (7ª série e 8ª série), Ensino Médio (três salas de 1º ano, três salas de 2º ano e duas salas de 3º ano) e duas salas de correção de ciclos.

– Tarde: Ensino Fundamental I (1ª série, 2ª série, 3ª série e 4ª série) e Ensino Fundamental II (5ª série e 6ª série).

– Noturno: Suplência do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, Ensino Médio regular (uma sala de 1º ano, duas salas de 2º ano e uma sala de 3º ano).

No grupo de 28 alunos pesquisados, 75% têm idade entre 11 e 12 anos, conforme mostra o gráfico abaixo.

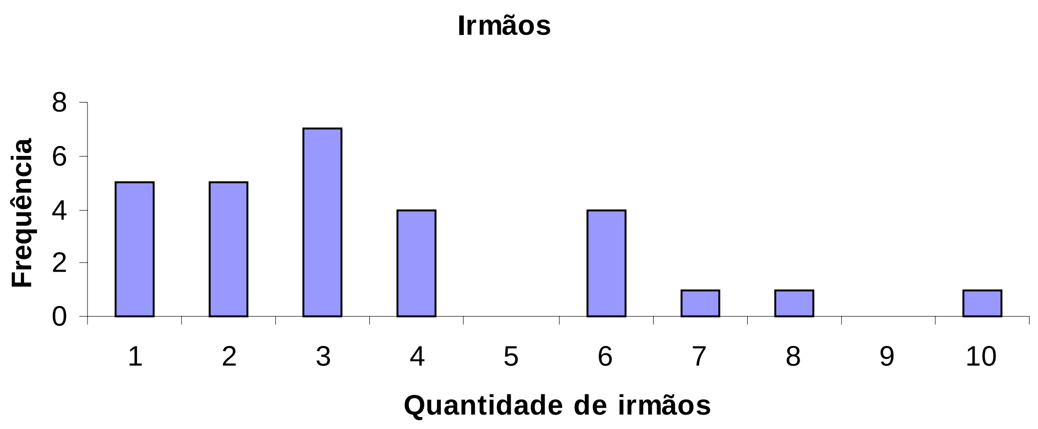


Pela análise verificamos que há um número considerável (50%) de alunos que estão na idade adequada à série, mas há alunos com discrepância entre idade e série.

Verificamos que, desses últimos, 18% foram reprovados, os outros 32% restantes alegam que entraram mais tarde na escola ou não chegaram até o final do ano em séries anteriores, fato que ocorre com grande freqüência nas escolas de periferia.

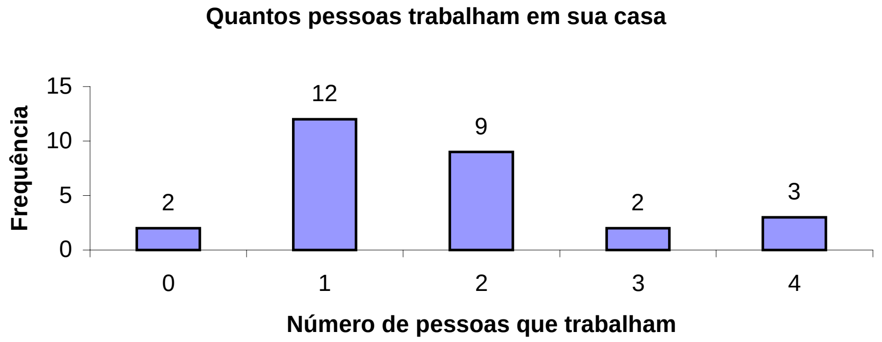
Dos 28 alunos que participaram da pesquisa, 57% são do sexo feminino e 43% do sexo masculino. Nesse grupo, 75% dos alunos moram com os pais e 25% moram com parentes.

Eles indicaram o número de irmãos e verificamos maior concentração na faixa de um a três irmãos.



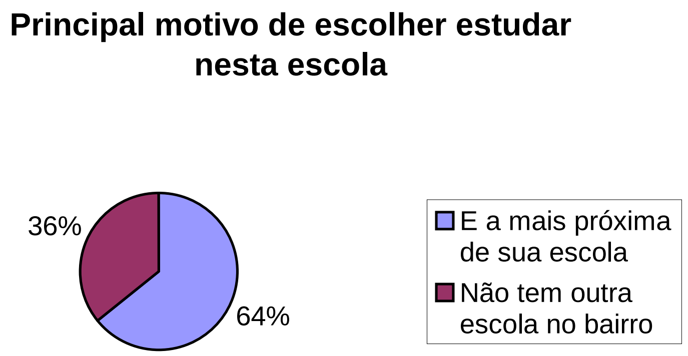
Trata-se de uma turma que estuda no período das 13 às 18 horas. 64% declaram que almoçam antes de ir à escola, em geral é a mãe ou algum quem prepara o almoço; 36% não almoçam antes de ir à escola; destes, a maior parte fica sozinha ou com os irmãos enquanto os pais trabalham.

Com relação às pessoas da família que trabalham, constatamos que nenhum dos alunos trabalha. O gráfico mostra a situação familiar relativamente ao trabalho.



64% dos alunos escolheram essa escola porque é a mais próxima do lugar onde moram e 36% porque não há outra escola no bairro em que moram. 82% dos alunos informaram que fazem as lições de casa, 71% informaram que os pais acompanham as atividades dadas na escola olhando os cadernos e 86% dizem que os pais se preocupam com os conteúdos ensinado nas aulas.

Em outra análise sobre as perspectivas dos alunos em relação ao ensino, e sobre se o ensino pode ajudar a melhorar sua condição de vida, 100% responderam afirmativamente e 79% disseram que os professores estão preocupados com seu aprendizado dos conteúdos ensinados.



2.3. A aplicação do instrumento de coleta de dados

O desenvolvimento das atividades junto aos alunos foi realizado de tal forma que 12 alunos trabalharam individualmente e 8 alunos trabalharam em duplas. Optamos por aplicar as atividades individualmente e em duplas, para verificar e comparar no final das aplicações das atividades se alunos nessa fase escolar estão aptos a trabalhar em grupo, como sugere o processo proposto por Manson (1996), que requer um trabalho que promova a interação entre alunos, favorecendo o desenvolvimento oral e escrito, explorando as habilidades de observação, descrição, explicação e questionamento, evidenciando formas diferentes de ver as coisas: o que um aluno percebe pode ser percebido por outro de forma diferente, ou até nem ser percebido, o que serve como alavanca para despertar discussões entre os grupos.

As atividades individuais tinham como objetivo verificar o desempenho dos alunos sem a interação com outros colegas e como isso influenciaria nas respostas das atividades e em suas resoluções.

Os alunos escolheram se queriam trabalhar em dupla – e com quem, nesse caso – ou individualmente.

Como professora da turma fui também a aplicadora das atividades. Expliquei a eles que se tratava de uma pesquisa que eu estava realizando e que a atividade não valeria “nota”. Eles ficaram um pouco desconfiados, a princípio, mas depois agiram com naturalidade. Para a aplicação foram utilizadas 6 aulas de 50 minutos cada, as atividades foram entregues uma de cada vez. Uma vez entregues, foram lidas em voz alta, sem qualquer informação adicional. Durante as discussões percorri a sala de aula, observando como os alunos que trabalhavam em dupla e individual se comportavam em relação às atividades apresentadas, reforçando para que escrevessem como tinham chegado às suas respostas.

Percebi um grande interesse, tanto das duplas como dos alunos que trabalhavam individualmente, em realizar as atividades da melhor maneira possível.

Mas eles queriam que eu verificasse se o que eles estavam escrevendo estava certo e eu tive que lhes explicar que gostaria de conhecer o que eles estavam pensando e como resolvem os problemas, para poder entender o raciocínio das resoluções das atividades.

Alguns alunos reclamaram que não estavam entendendo a atividade. Sugeri que eles lessem novamente o texto e pensassem de que maneira poderiam explicar o seu entendimento, percebi que liam novamente e tentavam escrever o que entendiam.

2.4. As questões apresentadas aos alunos

2.4.1. Primeira questão

A professora Alice explicou a seus alunos que, às vezes, números podem ser representados por letras. Ela escreveu na lousa:

a + b = b + a

e

a X b = b X a

O que você acha que a professora Alice quis dizer com essas escritas?

Explique sua resposta.

Ao propor essa questão nosso objetivo era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam diante de uma situação caracterizada por Usiskin como "álgebra como aritmética generalizada", em que as idéias-chave são *traduzir e generalizar*.

2.4.2. Segunda questão

Ainda nessa aula, a professora Alice perguntou a seus alunos:

Se a letra n representa um número par, menor que 3, qual é o valor da expressão 3 X (n + 5)?

Que resposta você daria a essa pergunta? Como você fez para achar essa resposta?

O objetivo dessa questão era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam diante de uma situação em que deveriam determinar o valor de uma letra (n), a partir de informações dadas, e, em seguida, calcular o valor de uma expressão aritmética em que essa letra estava envolvida. As idéias-chave envolvidas eram traduzir (a situação) e resolver.

2.4.3. Terceira questão

A professora Alice pediu a seus alunos que imaginassem que a letra A representa um número desconhecido, em cada uma das escritas abaixo. Indique o número que essa letra está representando em cada uma dessas escritas e explique como você o descobriu.

a) A + 2 = 7	*b) A – 5 = 8*	*c) A X 10 = 800*
d) 13 + A = 27	*e) 22 – A = 17*	*f) 8 X A = 56*

O objetivo dessa questão era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam diante de uma situação em que é necessário usar procedimentos para resolver certos tipos de problemas, alguns inclusive que podem ter resoluções aritméticas simples. Uma mesma letra indica a incógnita a ser descoberta em cada uma das igualdades apresentadas, envolvendo diferentes operações.

2.4.4. Quarta questão

Se você tivesse que inventar uma escrita para representar “o dobro de um número qualquer”, que escrita seria essa? Explique.

O objetivo dessa questão era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam diante de uma situação em que é solicitada a criação de uma representação algébrica, no caso para o dobro de um número.

2.4.5. Quinta questão

Na aula seguinte, a professora Alice explicou à sua classe:

Para achar a área de um retângulo de 3m de comprimento por 2m de largura, multiplicamos uma medida pela outra. Assim:

$$A = 3m \times 2m = 6\ m^2$$

Depois, a professora Alice disse que a área de um retângulo pode ser expressa assim:

$$A = C \times L$$

E completou: para achar o perímetro de um retângulo, podemos usar a fórmula:

$$P = 2C + 2L$$

Explique o que você acha que significa cada uma das letras em cada ***uma das fórmulas e como utilizamos essas fórmulas.***

O objetivo dessa questão era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam diante de uma situação em que as letras são utilizadas em fórmulas de perímetro e área, supostamente conhecidas pelos alunos, explorando a relação entre grandezas.

2.4.6. Sexta questão

Observe as tabelas abaixo, em que cada número da primeira coluna está relacionado com o da segunda coluna, de acordo com uma mesma regra numérica. Que números você colocaria nos espaços em branco, de cada tabela? Explique por que.

Tabela 1	
1	3
2	6
3	9
4	12
5	?
6	?

Tabela 2	
2	20
3	30
4	40
5	50
6	?
7	?

Tabela 3	
3	5
4	6
5	7
6	8
7	?
8	?

O objetivo dessa questão era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam ao serem convidados a analisar regularidades numéricas a partir de dados organizados em tabelas.

2.5. As respostas dos alunos

Para organizar as respostas dadas pelos alunos em cada uma das questões propostas, faremos inicialmente uma consolidação dos tipos de respostas obtidas e, depois, apresentaremos exemplos de cada um dos tipos de respostas apresentadas, a partir da seguinte categorização:

I. Respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.

II. Respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado.

III. Respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.

As respostas das duplas de alunos serão identificadas por: D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7 e D8 e as respostas individuais serão identificadas por: A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11 e A12.

As idades dos alunos são as seguintes:

DUPLAS	**IDADES**
D1	11 e 12 anos
D2	11 e 12 anos
D3	11 e 12 anos
D4	11 e 12 anos
D5	11 e 12 anos
D6	11 e 12 anos
D7	12 e 13 anos
D8	12 e 13 anos

INDIVIDUAL	IDADE
A1	11 anos
A2	11 anos
A3	13 anos
A4	12 anos
A5	11 anos
A6	11 anos
A7	12 anos
A8	11 anos
A9	11 anos
A10	11 anos
A11	11 anos

A12	13 anos

2.5.1. Primeira questão

Nesta questão obtivemos os seguintes resultados:

	Duplas	Individuais	Total
I. Respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.	D1, D2, D3, D5 e D7	A5, A8 e A10	8
II. Respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado.	D8	A1, A2, A3, A4, A6, A7, A11e A12	9
III. Respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.	D4 e D6	A9	3

Nos protocolos recolhidos tivemos as seguintes ocorrências:

I. Respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.

- (A5) "Ela quis ensinar que as contas também podem ser representadas por letras, não só com números".

- (A8) "Ela quis dizer que a + b é igual a b + a.

  Ex.: fez de conta que o a é 0 e o b é 1, que é igual :

0 + 1 = 1 + 0. Mas em vez de usar números, ela usou letras”.

- (A10) “Ela quis ensinar uma coisa nova para seus alunos, que podemos colocar letras para representar os números e números por letras”.

  Ex.: x + a = a + x”.

- (D1) “A professora Alice quis explicar que números podem ser representados por letras. E que cada letra pode representar um número. E as letras representadas por números podem se multiplicas, divididas, somadas e subtraídas”.

- (D2) “A professora Alice tentou explicar para os seus alunos que números podem ser representado também por letras”.

- (D3) “Porque a professora Alice fez a+b que é igual a vice-versa”.

- (D5) “A professora Alice quis dizer que o fator não altera o produto. Se A + B = B + A, que vai dar a mesma coisa, então ela quer dizer que os resultados são iguais, mudando só o sinal das contas, também quis dizer que as contas podem ser representas por letras”.

- (D7) “Eu acho que ela quis explicar que números podem ser substituídos por letras, mas se fosse por número o resultado não seria diferente na adição e na multiplicação”.

II. Respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado.

- (A1) "1 + 2 = 2 + 1 e 1 X 2 = 2 X 1".

- (A2) "Eu acho que ela quis ensinar a gente porque mais para frente a gente já vai estar sabendo. A minha resposta é essa porque ela ensina agora o que a gente vai usar mais para frente".

- (A3) "Eu achei isso muito fácil, porque esta operação de pré-álgebra não pode ser dada na 5ª série só na 7ª".

- (A4) "É difícil porque esta operação não é de 5ª série é de 7ª série, é uma operação algébrica".

(Observação nossa: Ao interrogar o aluno sobre o vocabulário usado (pré-álgebra), o mesmo justificou que conhecia o que tinha escrito porque a irmã estava cursando a 8ª série, e ele já tinha visto a irmã executar atividade de pré-álgebra, mas não sobe dizer o que é pré-álgebra).

- (A6) "Acho que a professora quis dizer que as letras podem ser substituídas pelos números, e se os alunos pensarem irão conseguir chegar ao resultado".

- (A7) "Alguns números podem ser representados com letras tipo: 15x = 35 o valor que vai dar 35 você tem que pensar qual será este valor que vai dar 35 esse é só um exemplo que você tem que achar o valor de x:

  a + b = b + a, o que professora Alice fez é só trocar.

  a X b = b X a, vai dar o mesmo resultado".

- (A11) "Para mim a professora Alice quer falar para os alunos que na matemática, ou seja, as contas podem ser representadas por letras e números. Tipo assim: letra a pode ser 3 e a letra b o número 1".

- (A12) "Queria ensinar o aluno porque tinha dificuldades, queria que o aluno aprendesse mais".

- (D8) "Eu acho que também tem que ser assim:

  a + b= b + a

  a X b= b X a

  a ÷ b = b ÷ a"

III. Respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.

- (A9) “Eu não entendo o que ela quis dizer”.

- (A12) “Queria ensinar o aluno porque tinha dificuldades, ela queria que o aluno aprendesse mais”.

- (D4) “Não entendo”.

- (D6) “Eu não entendi o que a professora Alice está perguntando”.

2.5.2. Segunda questão

Nesta questão obtivemos os seguintes resultados:

	Duplas	Individuais	Total

I. Respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado	D1, D2, D4, D5 e D7	A2, A3, A4, A5, A7, A8, A9, A10 e A11	14
II. Respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado.	D3, D6 e D8	A1, A6 e A12	6
III. Respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.	0	0	0

Nos protocolos recolhidos tivemos as seguintes ocorrências:

I. Respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.

- (A2) “3x (n + 5) e 3 X 2 + 5 e 3 X 7 = 21. Eu fiz assim porque é mais fácil”.

- (A3) “3 X (2 + 5) e 3 X 7 = 21. O único número par menor do que 3 é 2 e 3 X 7 = 21”.

- (A4) “O valor é 21. Porque o número par menor que três, que é 2.

  2 + 5 = 7 e 3 X 7 = 21.

- (A5) “O valor da expressão é 21. Pensei em um número par menor que três, obtive o número 2, somei com cinco obtive sete e multipliquei por três obtive 21”.

- (A7) “Como eu falei na folha passada pode representar números por letras, que a gente tem que achar o valor n. Porque n representa um número par menor que 3 só pode ser o número 2, 3 X (2 + 5) e 3 X 7 = 21, n = 2”.

- (A8) “O valor da expressão é 27. Eu fiz assim: o número par menor que é dois. Eu peguei o dois somei com cinco e multipliquei por sete, que deu esse valor 27”.

(Nossa observação: categorizamos esta resposta como I, pois embora o resultado não esteja correto a explicitação do procedimento é satisfatória.)

- (A9) “2 + 5 = 7 e 3 X 7 = 21. N vale dois”.

- (A10) “É que 3 X (n + 5) se n representa um número par menor que 3 então esse número par é 2 e 2 + 5 é igual a 7 é 3 X 7 é igual a 21. Eu li e achei que o valor de n é 2 é cheguei à conclusão que 2 + 5 é igual a 7 e 3 X 7 é igual a 21”.

- (A11) “Como eu disse na folha anterior que as contas podem ser representadas por letras até na soma, subtração, multiplicação e etc. E cheguei a conclusão que n é 2, resolvi os parênteses e somei 2 + 5, que é igual a 7, então fica 3 X 7 = 21. Para mim tem que resolver parte por parte”.

- (D1) “O resultado é 21. A letra n é representada pelo número 2, então só resolvermos a expressão:

  3x (n + 5) = 3 X (n = 2 + 5) = 3 X 7 = 21”.

- (D2) “3 X (2 + 5). Porque ficou mais fácil: 2 + 5 = 7 e 7 X 3 = 21.

  Porque ficou mais fácil de entender a pergunta.Primeiro nós começamos a resolver os parênteses para depois resolver a multiplicação”.

- (D4) “n = 2 e 2 + 5 = 7 e 3 X 7 = 21”.

- (D5) “Se a letra n representa um número par menor que 3 é 2, e o valor da expressão é 21. Eu cheguei a essa conclusão, pois 2 + 5 é 7, sete vezes três é 21”.

- (D7) “Um número menor que 3 que é par é o número 2.

  3 X (2 + 5) e 3 X 7 é igual a 21”.

II. Respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado.

- (A1) “3 X (n + 5)   a) 3 + 5 = 18 e b) 18 x 3 = 64”.

- (A6) “Eu pensei no número par menor que três e fui fazendo a conta do jeito que eu entendi e consegui achar o resultado”.

- (A12) “3 X (n + 5) e 34 (2 + 5) e n X (3 + 5) e 8 X (3 + 5)”.

- (D3) “Simplesmente eu fiz a conta e acrescentei o n, 3 X (n + 5) é 15 n”.

- (D6) “3 X (3 + 5) e 3 X 2 = 6 + 5 = 11”.

- (D8) “Aqui tem que ser assim:

  3 X (n + 5) e 5 X (n + 3) e 3 – (n + 5) e 5 – (n + 5) e 3 ÷ (n + 5)”.

III. Respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.

- Não houve nenhum caso em A (individuais) e D (duplas).

2.5.3. Terceira questão

Nesta questão obtivemos os seguintes resultados:

	Duplas	Individuais	Total
I. Respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado	D1, D2, D4, D5, e D7	A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10 e A11	15
II. Respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado.	D3 e D6	A3 e A12	4
III. Respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.	D8.	0	1

Nos protocolos recolhidos tivemos as seguintes ocorrências:

I. Respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.

- (A1) “a) Eu descobri o valor de A porque eu olhei nos dedos e contei:

  Cinco mais dois igual a 7 ou 5 + 2 = 7.

  b) Na (b) eu fiz a mesma coisa 13 – 5 = 8.

  c) A (c) não é a mesma coisa que (a) e (b) eu fiz a conta 80 X 10 = 800.

  d) A resposta (d) é a mesma coisa que a (a) e (b): 13 + 14 = 27.

  e) A resposta (e) e a mesma resposta que (a), (b) e (d): 22 – 5 = 22.

  f) Eu fiz esta conta 8 X 7”.

- (A2) “a) Eu descobri assim porque 5 + 2 = 7, e a letra A é o 5.

  b) Eu somei 8 + 5 que vai dar 13, e 13 – 8 = 5 a letra A é o 13.

  c) 10 X 80 é igual a 800 a letra A é o 80.

  d) Eu somei 8 + 5 que vai dar 13, e 13 – 8 = 5 a letra A é o 13.

  e) 22 – A = 17, vai ter que dar esse número, porque ele é difícil de resolver.

  f) 8 X A = 56. Essa é a resposta é assim”.

- (A4) “a) A letra A representa 5 porque 5 + 2 é igual a 7.

  b) A letra A representa 13. Somei 8 mais 5 obtive 13 e depois subtrai 13 – 5 = 8.

  c) A letra A representa 80. Pensei em 8, mas 80 é que é o correto e multipliquei por 10, 80 X 10 = 800 e não 8 X 10 = 800.

d) A letra A representa 14 porque 13 + 14 que é igual a 27.

e) A letra A representa 5. Somei 17 mais 5 obtive 22, depois subtrai 22 – 5 = 17.

f) A letra A representa 7. Porque 8 X 7 = 56".

- (A5) "a) A + 2 = 7 e A + 5 + 2 = 7. Porque 2 + 5 = 7 e 7 – 5 = 2.

  b) A – 5 = 8 e A = 13 – 5 = 8. Porque 5 + 8 = 13.

  c) A X 19 = 800 e A = 80 X 10 = 800. Porque 80 X 10 = 800 e 800: 10 = 80.

  d) 13 + A = 27 e A + 14 + 13 = 27. Porque 27 – 13 = 14.

  e) 22 – A = 17 e A = 5 + 17 = 22. Porque 22 – 5 = 17.

  f) 8 X A = 56 e A = 7 X 8 = 56. Porque 56: 8 = 7".

- (A6) "a) 5 + 2 = 7. Eu consegui chegar ao resultado porque fui tentando cada número, até chegar ao resultado.

  b) 13 + 14= 27. Descobri o resultado porque fui pensando em um número que chegasse até o número 27.

  c) 13 – 5 = 8. Cheguei ao resultado fazendo conta de adição e depois fiz a subtração e achei o resultado.

  d) 22 – 5 = 17. Descobri fazendo a conta de adição, 17 + ..., até chegar ao 22.

  e) 80 X 10 = 800. Descobri o número fazendo a multiplicação.

  f) 8 X 7 = 56. Descobri o número pensando na tabuada".

- (A7) "a) A(5) + 2 = 7 → 5 + 2 = 7. Eu achei este número porque você pode trocar números por letras, é só você checar o resultado que você acha.

  b) A(13) – 5 = 8 → 13 – 5 = 8. Só você ver o número que é 13 – 5 que dá 8.

  c) A(80) X 10 = 800 → 80 X 10 = 800. Eu achei esse número porque você pode trocar números por letras, só você trocar o A pelo número que tenha na tabuada.

  d) 13 + A = 27 → 13 + 14 = 27. Eu achei esse número porque você trocar números por letras, observando o resultado.

  e) 22 – 5 = 17. Só você ver o número 22 – 5 que dá 7.

  f) 8 X A = 56 → 8 X 7 = 56. Eu achei esse número porque você pode trocar números por letras, só você trocar o A por um número que tenha na tabuada"

- (A8) "a) 5 + 2 = 7. Eu achei esse valor porque usei a som de vários números até chegar no 7 e A = 5.

  b) Eu achei o valor de 13 – 5 = 8 porque somei o 8 + 5 que é igual a 13.

  c) Eu achei esse valor porque eu multipliquei 80 X 10 = 800.

  d) Eu achei esse resultado, porque 13 para chegar nos 27 dá igual a 14.

  e) O resultado é 5 porque 17 para chegar no 22 é 5.

  f) Essa eu não sei"

- (A9) “a) 5 + 2 = 7, porque eu representei o A que é o número 5.

  b) 13 – 5 = 8, porque eu representei o A sendo o número 13.

  c) 8 X 10 = 800, porque eu representei o A sendo o número 8.

  d) 13 + 14 = 27, porque eu representei o A sendo o número 14.

  e) 22 – 5 = 17, porque eu representei o A sendo o número 5.

  f) 8 X 7 + 56, porque eu representei o A sendo o número 7”

- (A10) “a) A + 2 = 7, o A representa o número 5, porque somando cinco com 2 dá 7, a letra representa o número 5, que vale A + 2 = 7 ou 5 + 2 + 7.

  b) A – 5 = 8, o A representa 13, porque 13 menos 5 é igual a 8.

  c) A X 10 = 800 e o A representa 80, que multiplicando por 10 é igual 800, então A representa 80 e 80 X 10 = 800.

  d) 13 + A = 27, o A representa 14, porque 13 mais 14 é igual a 27, então 13 + 14 = 27 ou 13 + a = 27.

  e) 22 – A = 17, o A representa 5 que 22 menos 5 é igual a 17, então 22 – A = 17 ou 22 – 5 = 17.

  f) 8 X A = 56, o A representa 7, porque 8 vezes 7 é igual 56, então 8 X A = 56 ou 8 X 7 = 56”.

- (A11) “a) A representa o número 5. Eu descobri fazendo conta de mais e coloquei o resultado no lugar da letra A, ou seja, somei 2 com 5 que deu 7.

b) A representa o número 13. Eu descobri fazendo conta de menos, 13 – 5 que deu 8.

c) A representa 80. Eu descobri fazendo 80 X 10 que deu 800.

d) A representa o número 5. Eu fiz a conta de menos, 22 – 5 que deu 17.

f) A representa 7. Eu fiz uma conta de vezes 8 X 7 que deu 56".

- (D1) "a) Nós só subtraímos 7 – 2 = 5. A é 5.

  b) Nós só somamos 5 + 8 = 13. A é 13.

  c) Nós só multiplicamos 10 X 80 = 800. A é 800.

  d) Nós subtraímos 27 – 13 = 14. A é 14.

  f) Nós só raciocinamos que 8 X 7 = 56. Então A é 7".

- (D2) "a) 5 + 2 = 7. Nós chegamos nesse resultado somando o número 5 + 2 que dá igual a 7.

  b) 13 – 5 + 8. Chegamos nessa conclusão porque 13 – 5 = 8.

  c) 80 X 10 = 800. Calculamos o valor de A → A X 10 = 800.

  d) 13 + 14 + 27. Somamos vários números com 13 para chegar no 27.

  e) 22 – 5 = 17. Nós fomos subtraindo de 22 vários números até alcançarmos 17.

  f) 8 X 7 = 56. Fizemos a tabuada até chegarmos nesse resultado".

- (D4) “a) A + 2 = 7. Então significa que A não é mais desconhecido, porque número desconhecido mais 2 que dá 7 é igual a 5.

  b) A – 5 + 8. Então significa que A não é mais desconhecido, porque número desconhecido menos 5 que dá 8 é igual a 13.

  c) A X 10 = 800. Então significa que a não é mais desconhecido, porque número desconhecido vezes 10 que dá 800 é igual a 80.

  d) 13 + A = 27. Então significa que A não é mais desconhecido, porque número desconhecido mais 13 dá 27, e A é igual a 14.

  e) 22 – A = 17. Então significa que A não é mais desconhecido, porque número desconhecido menos 22 que dá 17, e A é igual a 5.

  f) 8 X A = 56. Então quer dizer que A é 7, pois 8 X 7 = 56”.

- (D5) “a) 5 + 2 = 7

  b) 13 – 5 = 8

  c) 8 X 10 = 80

  d) 13 + 14 = 27

  e) 22 – 15 = 17

  f) 8 X 7 = 56”

  Chegamos nestes resultados fazendo contas.

- (D7) “a) 5 + 2 = 7. Eu assumi o A como cinco.

    b) 13 – 5 = 8. Eu contei.

    c) 80 X 10 = 800. Eu achei o valor A = 80.

    d) 13 + 14 = 27. Eu fui somando vários números com 13.

    e) 22 – 5 = 17. Eu achei este resultado subtraindo vários números de 22, achei que A = 5.

    f) 8 X 7 = 56. Fiz a conta de vezes, A = 7”.

II. Respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado.

- (D3) “a) Eu achei que A + 2 = 7.

    b) Eu acho que (3 + A = 27), mas o meu deu positivo.

    c) Eu acho que a letra A representa um número 8 X 10 = 800.

    d) A letra A representa A – 5 = 8.

    e) A letra A pode representar um número, contando é igual 22 – a = 17.

    f) Não sei achar o valor de A para fazer 8 X A = 56”.

- (D6) “a) 5 + 2 = 7. Eu contei nos dedos.

    b) 3 + 5 = 8. Eu descobri que 3 + 5 = 8.

c) 790 + 10 = 800. Eu descobri que 790 X 10 = 800.

d) 13 + 14 = 27. Eu somei 13 + 14 = 27.

e) 22 – A. Eu diminuo 22 – 6 = 17.

f) Não sei fazer”.

III. Respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.

- Não houve nenhuma ocorrência (A).

- (D8) Em branco.

2.5.4. Quarta questão

Nesta questão obtivemos os seguintes resultados:

	Duplas	Individuais	Total
I. Respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.	D5, D6 e D7	A3, A5 e A8 e A11.	7
II. Respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado.	D1, D2, D3 e D4	A4, A6, A7, A9, A10 e A12	10
III. Respostas em branco ou	D8	A1 e A2	3

explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.			

Nos protocolos recolhidos tivemos as seguintes ocorrências:

I. Respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.

- (A3) “Seria 2 X A que é o dobro de um número”.

- (A5) “x X 2 = x”.

  Porque o x representa um número desconhecido, vezes 2 é igual desconhecido X 2.

- (A8) “Uma letra. Porque eu não sei o valor desse número, eu faço assim: 2 X A = ...”.

- (A11) “O dobro de um número qualquer é 2. Representado por uma letra igual A, ficaria assim: 2 X A = ...”.

- (D5) “2 X x. O dobro é 2 e a escrita é x”.

- (D6) “2 X N = 4 e 2 X 4 = 8”.

- (D7) “2 X A = A X 2 e A X 4 = 4 X A “.

II. Respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado.

- (A4) “Por exemplo, descobri o dobro de 58 e 58 X 11 = 116 ou 58 X 2 = 116. Colocamos dois traços representar a igualdade”

- (A6) “Eu representaria com x X 2 = x. Não consegui fazer o resto”.

- (A7) “y X 2 + J. Um número menor que 19, par, vezes o dobro que vai dar J. Eu troquei um número por uma letra ou letra por um número”.

- (A9) “O dobro é representado pelo número 2 e o número 2 pode ser representado por qualquer letra”.

- (A10) “Representa o dobro de um número que multiplicado por 4 que daria 32. Então o dobro é multiplicado por 2 que é 4, logo o resultado é 32. E 4 X 8 = 32, o dobro de 4 é 8, a letra A é representada pelo número 8 que multiplicado por 4 dá 32.

- (A12) “A X 2 = A, A X 4 = A, A X 3 = A, A X 7 = A e A X 10 = A e A X 8 = A”.

- (D1) “20 + A = 40. É só subtrair 40 – 20 = 20 é o valor da letra A. E depois é só somar 20 + 20 = 40, esse é o dobro de 20”.

- (D2) “O dobro de 10 que dá 30”.

- (D3) “A X 20 = 200, não consigo fazer o resto”.

- (D4) “O dobro de um número qualquer é 2. Se eu tivesse que representar por uma escrita eu representaria por letras, essa escrita seria representar os números por letras.

III. Respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.

- (A1) "Eu não sei fazer isto, porque é difícil".

- (A2) "Eu não sei fazer isso sem ter uma pessoa do meu lado".

- (D8) Em branco.

2.5.5. Quinta questão

Nesta questão obtivemos os seguintes resultados:

	Dupla	Individuais	Total
I. Respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.	0	0	0
II. Respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado.	D1, D2, D3, D4, D5, D7 e D8	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 A10, A11 e A12	18

III. Respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.	D6	A9	2

Nos protocolos recolhidos tivemos as seguintes ocorrências:

I. Respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.

- Não houve nenhuma ocorrência em (A) e (D).

II. Respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado.

- (A1) “A letra m = metro.

  A letra c = comprimento.

  A letra l = Largura.

  A letra P = perímetro”.

- (A2) “A área 3 metros X 2 metros.

  A = Comprimento X Largura.

  P = Perímetro = 2 Comprimento + 2 Largura”.

- (A3) “A área de m retângulo é A + Cx L e P que é o perímetro foi identificado 2C = 2 metros de comprimento e 2 metros de largura.

- (A4) “A letra A significa área.

  A letra C é o comprimento e a letra L é a largura.

  P = Perímetro

  A primeira fórmula A = 3m X 2m = $6m^2$,que vamos usar.

  A segunda fórmula A = Comprimento do local X a Largura, para saber quanto vamos usar.

  A terceira fórmula P = 2 X comprimento + 2 X Largura”.

- (A5) “A letra m = metro.

  A letra c = comprimento.

  A letra l = largura.

  A letra P = perímetro”.

- (A6) “Eu acho que essas letras significam os números mas mais ao invés de colocarem números colocaram letras (eles substituíram)”.

- (A7) “3 m X 2 m = 6 m^2 .

4m X 2L = 8 m^2.

2C X 2L = 4m.

Número pode ser trocado por letras e a mesma coisa, o que eu entendi foi isso, se eu colocar juntos temos 18m".

- (A8) "a) A letra m = metro.

  b) A letra C = comprimento.

  A letra L = largura.

  c) A letra P = perímetro".

- (A10) “Ela explicou para achar a área de um retângulo de 3m de comprimento e 2m de largura, multiplicamos um pelo outro que dá $6m^2$, ela representou uma pela outra para achar $6m^2$ a letra m representa uma medida.

  A = C X L representa a área do retângulo.

  P = 2C X 2L e para achar o Perímetro do retângulo”.

- (A11) “A letra m = metro.

  A letra C = comprimento.

  A letra L = largura.

  A letra P = perímetro”.

- (A12) “A = 3m X 6m = 18.

  A = L X C.

  P = 2C + 2L”.

- (D1) “A = 3m X 3 m = 6m:

  A é área, 3m é 3 milímetros e 2 m é 2 milímetros = 6 milímetros.

  A = C X L:

  A = área.

  C = comprimento.

L = Largura.

P = 2C + 2L:

P = Perímetro.

2C = 2comprimento

2L = 2largura”.

- (D2) “A = área, o m vale metro.

  A vale área, C = comprimento, L = largura.

  P vale Perímetro, C = comprimento, L = largura”.

- (D3) “Nós entendemos que a professora fez o dobro da Largura e o dobro do centímetro, também entendi que o Perímetro é igual P = 2C + 2L”.

- (D4) “A = 3m X 2m = 6m.

  A = C X L”.

- (D5) “Área = 3 metros X 2 metros = 6 metros^2 .

  Área = Comprimento X Largura.

  Perímetro = 2Comprimento + 2 Largura”.

- (D7) “O 3m representa a área de um retângulo. O 2m representa a largura.

  Multiplicando um pelo outro fica assim 3m X 2m = $6m^2$.

  Isso pode ser representado de várias formas, A representa área e P o perímetro”.

- (D8) “1) A área do retângulo é 3m X 2m = $6m^2$ ou 2m X 3m = $6m^2$.

  2) Retângulo é A = C X L ou a = L X C.

  3) Retângulo, pode ser P + 2C + 2L ou 2L + 2C”.

I. Respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.

- (A9) “Eu não entendi o que a professora Alice explicou”.

- (D6) “Não sei fazer”.

2.5.6. Sexta questão

Nesta questão obtivemos os seguintes resultados:

	Duplas	Individuais	Total
I. Respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.	D1, D4, D5, D6 e D7	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9 e A11	15
II. Respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado.	D3 e D8	A10 e A12	4
III. Respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.	D2	0	1

Nos protocolos recolhidos tivemos as seguintes ocorrências:

I. Respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.

- (A1) "Tabela 1: Eu entendi que eram números triplos, então eu coloquei os números:

  5 15

  6 18

Tabela 2: Eu entendi que pulavam de 10 em 10, então coloquei os números:

6 60

7 70

Tabela 3: Eu entendi que pulava de 1 em 1, então coloquei os números:

7 9

8 10”.

- (A2) “Tabela 1: Eu somei:

  5 15

  6 18

  Tabela 2: Eu somei dez em todos os números:

  6 60

  7 70

  Tabela 3: Eu somei, usando como referência o primeiro número da tabela:

  7 9

  8 10”.

- (A3) “Tabela 1: Tem a multiplicação da tabuada do três:

  5 15

6 18

Tabela 2: Tem multiplicação da tabuada do dez:

6 60

7 70.

Tabela 3: Somamos 2 nos números em seqüência:

7 9

8 10”.

- (A4) “Em todas as tabelas multiplicamos e colocamos o resultado nos espaços em brancos das tabelas:

  Tabela 1:

  5 15

  6 18

  Tabela 2:

  6 60

  7 70

  Tabela 3:

  7 9

  8 10”.

- (A5) “Na primeira tabela está representando o triplo dos números:

  5 15

  6 18

  Na segunda tabela os números X dez:

  6 60

  7 70

  Na terceira tabela fiz soma de 2 em cada número:

  7 9

  8 10”.

- (A6) “Tabela 1:

  5 15

  6 18

  Tabela 2:

  6 60

  7 70.

  Tabela 3: Somamos 2 nos números da seqüência:

  7 9

  8 10

  Eu coloquei esses números na seqüência da tabela, porque de acordo com a seqüência dos resultados eu fui fazendo a tabuada na cabeça”.

- (A7) “Tabela 1:

  5 15. Fiz as contas 3 em 3.

  6 18.

  Tabela 2:

  6 60. Fiz as contas em 10 em 10.

  7 70.

  Tabela 3:

  7 9. Fiz a conta em 1 em 1.

  8 10.

  E foi isso que eu entendi, e só você ver a seqüência das tabelas”.

- (A8) “Tabela 1: Os números estão relacionados, pela multiplicação por 3:

  5 15

  6 18

  Tabela 2: Os números que se relacionam foram multiplicados por 10:

  6 60

  7 70

  Tabela 3: Os números relacionam-se em 2 mais 2:

  7 9

8   10”.

- (A9) “Tabela 1: 5 → 15. Os números são multiplicados por 3:

  5 15

  6 18

  Tabela 2: Os números relacionados foram multiplicados por 10:

  6 60

  7 70

  Tabela 3: Os números relacionados somam-se em 2 mais 2:

  7 9

  8   10”.

- (A11) “Tabela 1: Eu entendi que os números são triplos de 3:

  5 15

  6 18

  Tabela 2: Os números relacionados são multiplicados por 10:

  6 60

  7 70

  Tabela 3: Em cada número da tabela somamos mais 2:

  7 9

  8   10”.

- (D1) “Tabela 1: Na primeira coluna os números foram colocados em ordem sem pular nenhum número, na segunda coluna os números foram pulando de 3 em 3:

  5 15

  6 18

  Tabela 2: Na primeira coluna os números foram colocados em ordem sem pular nenhum número, na segunda coluna os números foram pulando de 10 em 10:

  6 60

  7 70

  Tabela 3: Na primeira coluna os números foram colocados em ordem sem pular nenhum número, na segunda coluna os números foram pulando de 2 em 2:

  7 9

  8 10”.

- (D4) “Tabela 1: O número 1 X 3 = 3, 3 X 2 = 6 e assim até chegar no último número da tabela:

  5 15

  6 18

  Tabela 2: Usei a tabuada do dez:

  6 60

  7 70

Tabela 3: Somei mais dois em cada número:

7 9

8 10”.

- (D5) “Tabela 1: 3 vezes 5 = 15 e 3 X 6 = 18.

  Tabela 2: 10 vezes 6 = 60 e 10 X 7 = 70.

  Tabela 3: O dobro de 7 é 14 e 8 é 16”.

(Nossa observação: a resposta da Tabela 3 está errada, mas ao entrevistar a dupla elas responderam que os números que deveriam ser colocados nos espaços em brancos eram 9 e 10, mas não sabiam explicar o porquê de ter multiplicado pelo dobro de cada número.)

- (D6) “Tabela 1:

  5 15

  6 18

  Tabela 2:

  6 60

  7 70

  Tabela 3:

  7 9

  8 10

  Fiz dessa forma porque eu achei melhor”.

- (D7) “Tabela 1: Resolvi como a tabuada do três:

  5 15

  6 18

  Tabela 2: Resolvi como a tabuada do 10:

  6 60

  7 70

  Tabela 3: Resolvi como a tabuada do 1:

  7 9

  8 10”.

II. Respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado.

- (A10) “Nas tabela eu colocaria números seguindo a ordem numérica de cada uma, ou seja, de como cada uma está, para continuar na mesma ordem e assim por diante”.

- (A12) “Tabela 1: 5   2 e 6   8.

  Tabela 2: 6   60 e 7   70.

  Tabela 3: 7   4 e 8   5”.

  Coloquei estes números nos espaços em branco da tabela porque eu acho certo”.

- (D3) “Tabela 1: 5 é 10 e 6 é 12.

  Tabela 2: 6 é 12 e 7 é 14.

  Tabela 3: 7 é 14 e 8 é 16.

  Nós colocamos o dobro e cada número nos espaços vazios das tabelas”.

- (D8) “Tabela 1: 5 15

  6 18

  Tabela 2: 6 60

  7 70

  Tabela 3: 7 9

  8 10”.

(Nossa observação: explicação em branco, somente preencheu os espaços em branco das tabelas.)

III. Respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.

- Não houve nenhuma ocorrência em (A).
- (D2) “Não entendemos”.

Resumindo as análises realizadas a partir dos protocolos, tivemos o seguinte resultado geral:

	Respostas das duplas	Respostas individuais	Total
I. Respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.	23 (20%)	36 (30%)	59 (50%)
II. Respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado.	19 (15%)	32 (26%)	51 (41%)
III. Respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.	6 (5%)	4 (4%)	10 (9%)

Verificando os resultados das análises na tabela, podemos afirmar que os alunos que responderam individualmente obtiveram maior número de acertos do que os alunos que trabalharam em duplas, embora as duplas tenham feito suas justificativas com argumentações mais claras e precisas, mesmo quando suas respostas não eram corretas, fato que o pesquisador observou ao analisar os protocolos e ao observar as duplas ao percorrer a sala durante a execução das atividades. Os alunos que estavam em duplas sempre respondiam às atividades após uma prévia discussão, apresentando uma certa insegurança no que estavam descrevendo, pois tinham dificuldade em trocar idéias entre si, e quando chegavam a um consenso as justificativas eram mais ricas em informações do que as dos alunos que responderam sozinhos, embora nem sempre estivessem corretas.

CAPÍTULO 3: ANÁLISE DAS RESPOSTAS DOS ALUNOS E NOSSAS CONSIDERAÇÕES FINAIS

3.1. Introdução

Neste capítulo faremos inicialmente uma síntese dos resultados obtidos, a partir da análise das respostas dos alunos.

No entanto, é importante salientar não apenas os resultados em si mesmos, mas, principalmente, o significado que a realização deste trabalho representou para meu desenvolvimento profissional. O fato é que ao preparar o instrumento de coleta dos dados e propor questões com a finalidade de identificar o que alunos de 5ª série – oriundos de uma comunidade muito pobre –, que freqüentam uma escola com vários problemas de funcionamento, formulavam como hipóteses a respeito do uso de letras (em vez de números) em atividades matemáticas, minha expectativa era de não obter resultados interessantes. Outra preocupação era em relação à disponibilidade deles em participar da atividade, de se empenharem na busca de soluções.

Essas previsões e temores não se concretizaram. Esse fato, certamente, constituiu-se num evento marcante para o meu desenvolvimento profissional e remete a uma consideração de Pires (2004) em que a destaca que a pesquisa deve possibilitar ao professor conhecer melhor a realidade para além das aparências, de modo que possa intervir considerando as múltiplas relações envolvidas nas diferentes situações com que se depara, referentes aos processos de aprendizagem e à vida dos alunos.

Para essa autora, a pesquisa deve ter diferentes finalidades: uma delas é a de dar oportunidade aos futuros professores de realizar pequenas investigações e analisar situações de sua sala de aula, para nelas intervir, aprimorando o exercício da docência. Outra é a de propiciar aos futuros professores o conhecimento de estudos e pesquisas realizados na área de Educação Matemática e aprender a analisar tais estudos, para criticá-los, compreendê-los e fazer propostas relativamente à sua própria realidade.

Para a constituição de “atitude de investigação” e de autonomia, o professor necessita conhecer e saber usar determinados procedimentos comuns aos usados na investigação científica: registro, sistematização de informações, análise e comparação de dados, levantamento de hipóteses, verificação etc. Com esses instrumentos o professor pode produzir e socializar conhecimento pedagógico de modo sistemático.

É nessa perspectiva que avalio a importância do presente trabalho.

3.2. Análise das respostas dos alunos

Analisando as respostas de cada questão resolvida individualmente e em dupla e as entrevistas feitas com os alunos, após aplicação das atividades – pois em alguns protocolos não era possível entender as justificativas escritas pelos alunos – pudemos identificar os resultados que apresentamos a seguir.

Para as questões executadas faremos uma análise tomando como referência o total de protocolos arrecadado em cada atividade, para que fique mais fácil de analisar a quantidade de acertos das duplas e alunos individuais. O total de protocolos de cada atividade era sempre 20, lembrando que trabalhamos com 8 duplas e 12 alunos individualmente.

Primeira questão

Ao propor esta questão nosso objetivo era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam diante de uma situação caracterizada por Usiskin como “álgebra como aritmética generalizada”, em que as idéias-chave são traduzir e generalizar, embora não tenha sido as propriedades de estruturas (comutativa) da adição e multiplicação dada aos alunos, eles mostram ser capazes de aplicá-la em suas respostas, mesmo sem utilizá-la diretamente. Levantaram hipóteses do que a professora Alice queria dizer com a + b = b + a e a X b = b X a sem usar o termo técnico pertinente à propriedade comutativa da adição e multiplicação, fato que deixou a pesquisadora satisfeita, pois não tinha idéia de como eles poderiam responder à questão sem ter contato com a explicação de tal propriedade e temia que seus alunos não conseguissem responder tal questão, ficando surpresa com a riqueza das análises feitas pelos mesmos.

Nesta questão, 5 duplas – o que corresponde a 25% do total dos 20 protocolos – e 3 alunos que responderam individualmente – o que corresponde a 15% do total dos 20 protocolos – apresentaram respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.

Apenas uma dupla – 5% do total dos 20 protocolos – deu resposta que simplesmente reproduz o enunciado, ou que vai além do enunciado, mas não responde ao que foi solicitado. Nessa categoria, estão 8 alunos dos que responderam individualmente – 40% do total dos 20 protocolos.

Duas duplas – 10% do total dos 20 protocolos – deram respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer. Nessa categoria apenas 1 dos alunos que responderam individualmente – 5% do total dos 20 protocolos – deixou respostas em branco. Assim, nesta atividade a resolução em grupo mostrou-se como um ponto favorável à busca de uma solução.

Podemos dizer que, nesta questão, o trabalho em dupla teve um resultado maior de acerto do que o trabalho individual, e suas respostas tiveram uma argumentação mais precisa, devido a uma explicitação mais clara da hipótese argumentada na questão trabalhada.

Segunda questão

O objetivo desta questão era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam diante de uma situação em que deveriam determinar o valor de uma letra (n), a partir de informações dadas, e, em seguida, calcular o valor de uma expressão aritmética em que essa letra estava envolvida.

Nesta atividade, 5 duplas – o que corresponde a 25% do total dos 20 protocolos – e 9 alunos que responderam individualmente – o que corresponde a 45% do total dos 20 protocolos – apresentaram respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.

Com respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado, tivemos 3 duplas – o que corresponde a 15% do total dos 20 protocolos – e também 3 alunos que responderam individualmente – o que corresponde a 15% do total dos 20 protocolos – e não ocorreu nenhum caso em dupla ou individual de respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.

Nesta questão os alunos que trabalharam individualmente tiveram o maior número de acertos referentes à resposta I, embora o total de duplas fosse de 8 e de alunos que trabalharam individuais 12, obtendo um total de 20 protocolos no final de cada atividade.

As idéias-chave envolvidas eram traduzir (a situação) e resolver e os resultados obtidos foram muitos satisfatórios. Os alunos tentaram argumentar o porquê de trocar o valor de n da expressão conforme foi solicitado pela questão e argumentaram suas respostas, para que pudéssemos analisar as hipóteses por eles formuladas. Porém, muitos dos protocolos observados, tanto das duplas como dos alunos individuais, apresentaram uma certa dificuldade de executar a distributiva que aparecia na expressão dada.

Terceira questão

O objetivo desta questão era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam diante de uma situação em que é necessário usar procedimentos para resolver certos tipos de problemas, alguns inclusive que podem ter resoluções aritméticas simples. Uma mesma letra indica a incógnita a ser descoberta em cada uma das igualdades apresentadas, envolvendo diferentes operações.

Nesta questão tivemos 5 duplas – que correspondem a 25% do total dos 20 protocolos – e 10 alunos que responderam individualmente – o que corresponde a 50% do total dos 20 protocolos – que apresentaram respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.

Com respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado, tivemos 2 duplas – que correspondem a 10% do total dos 20 protocolos – e também 2 alunos que responderam individualmente – o que corresponde a 10% do total dos 20 protocolos.

Com respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer, houve 1 dupla – 5% do total dos 20 protocolos –, e não ocorreu nenhum caso para alunos que responderam individualmente.

Analisando os protocolos desta questão, pudemos observar que os alunos que responderam individualmente obtiveram maior sucesso em suas resposta, provavelmente devido ao fato de que as duplas, ao resolverem esta questão, ficaram inquietas, não tendo uma concentração adequada, o que não ocorreu com quem respondeu individualmente. Embora os protocolos desta questão apresentassem todas argumentações das resoluções propostas pelos alunos, podemos observar que alguns alunos ainda não dominam o conceito da multiplicação, deixando em alguns casos em aberto a resposta, ou responderam errado em outro item da questão. Mas em geral as respostas foram satisfatórias, atingindo o objetivo da questão, que era trabalhar com números em lugar de letras para estar solucionar o que se pedia, com os alunos procurando formular hipóteses ao descreverem as soluções por eles encontradas em cada item, e argumentando o porquê de substituírem tais letras por números.

Também foi observada pelo pesquisador uma certa intolerância por parte dos alunos, pois estavam com pressa de acabar esta questão, acharam que eram muitas contas para fazer em cada hipótese, além da justificativa de suas respostas. Essas foram as falas dos alunos, tanto dos que trabalhavam em duplas quanto dos que trabalharam individualmente, fato que pode ter influenciado nos resultados obtidos, segundo o pesquisador. A idéia-chave desta questão era verificar como os alunos se saíam ao resolver questões por eles costumeiras, mas que traziam letras no lugar de números, sendo necessário descobrir o valor do número a ser colocado no lugar da letra, por meio das operações aritméticas dadas em forma de expressões, o que possibilitou aos alunos a usarem habilidades costumeiras para que pudessem levantar hipóteses para justificar as respostas por eles formuladas.

Quarta questão

O objetivo desta questão era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam diante de uma situação em que é solicitada a criação de uma representação algébrica, no caso para o dobro de um número.

Nesta questão, tivemos 3 duplas – que correspondem a 15% do total dos 20 protocolos – e 4 alunos individuais – que correspondem a 20% do total dos 20 protocolos – com respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado. Com respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado, tivemos 4 duplas – que correspondem a 20% do total dos 20 protocolos – e 6 alunos que responderam individualmente – o que corresponde a 30% do total dos 20 protocolos.

Obtivemos 1 dupla – que correspondem a 5% do total dos 20 protocolos – com respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer – e 2 alunos que responderam individualmente – que correspondem a 10% do total dos 20 protocolos.

O pesquisador observou nesta questão que os alunos sentiram dificuldades de criar uma escrita algébrica para representar o dobro de um número qualquer, ficando muito quietos, lendo e relendo. Os que estavam trabalhando em grupos discutiam e discordavam da conclusão a que chegavam, não conseguiam encontrar uma escrita para representar o que se pedia; os que trabalhavam individualmente reclamavam menos, mas alegavam que não conseguiam formular uma escrita porque estavam executando a atividade sozinho e no geral alegavam que não sabiam representar o dobro de um número qualquer. Pela entrevista a pesquisadora observou que os alunos em geral não dominavam o conceito matemático do dobro de um número, fato que pode ter gerado dificuldade de formular uma escrita algébrica como era solicitado pela atividade.

Quinta questão

O objetivo desta questão era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam diante de uma situação em que as letras são utilizadas em fórmulas de perímetro e área, supostamente conhecidas pelos alunos, explorando a relação entre grandezas.

Não ocorreu nenhum caso em dupla ou individual de respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.

Com respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado, obtivemos 7 duplas – que correspondem a 35% do total dos 20 protocolos – 11 alunos que responderam individualmente – o que corresponde a 55% do total dos 20 protocolos.

Tivemos 1 dupla – que corresponde a 5% do total dos 20 protocolos – e 1 aluno que respondeu individualmente – que corresponde a 5% do total dos 20 protocolos – com respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer.

Pelas coletas de informações arrecadadas pelo pesquisador por meio dos protocolos e de entrevista feita com os alunos que participaram desta questão, pode-se destacar a dificuldade dos alunos de interpretar o que se estava pedindo no texto. Eles queriam rapidamente fazer contas e alegavam que não sabiam o que o exercício estava pedindo, fato que pode ser comprovado pelo resultado dos protocolos. Foi observada uma certa insegurança por parte dos alunos quanto ao que propunha o exercício pelo fato de letras estarem se referindo à área, perímetro e medida de figuras geométricas. Alegaram não estar acostumados a executar atividades de matemática que não apresentam contas para resolver.

Sexta questão

O objetivo desta questão era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam ao serem convidados a analisar regularidades numéricas a partir de dados organizados em tabelas.

Nesta questão, 5 duplas – o que corresponde a 25% do total dos 20 protocolos – e 10 alunos que responderam individualmente – que correspondem a 50% do total dos 20 protocolos – apresentaram respostas com coerência e argumentação e que respondem ao que foi solicitado.

Com respostas que simplesmente reproduzem o enunciado, ou que vão além do enunciado, mas não respondem ao que foi solicitado, tivemos 2 duplas – que correspondem a 10% do total dos 20 protocolos – e 2 alunos que responderam individualmente – o que corresponde a 10% do total dos 20 protocolos.

Tivemos 1 dupla – que corresponde a 5% do total dos 20 protocolos – com respostas em branco ou explicitando o não entendimento ou o não saber fazer e não houve ocorrência com alunos que trabalharam individualmente.

Referente a esta questão alguns alunos das duplas e dos que trabalharam individualmente explicitaram ao serem entrevistados que tiveram dificuldade de justificar suas hipóteses, ao transcreverem suas argumentações. Eles alegaram terem chegado nos resultados por seguindo o modelo que a tabela trazia e mesmo em suas justificativas escritas percebe-se uma certa dificuldade de explicar que a primeira coluna está relacionada com a segunda. Os alunos alegaram em entrevista que a tabela mais difícil de justificar foi a terceira e que seguiram o modelo das duas tabelas primeiras para responder à terceira.

Considerações sobre os resultados das análises

Pela análise e observando as justificativas dos alunos após ter lido artigos e pesquisas destacadas em nosso trabalho, ficou evidente para mim como professora a necessidade de oferecer aos meus alunos a oportunidade de comunicar suas idéias matemáticas sobre assuntos ainda não introduzidos em sala de aula, procurando, por meio da análise, encontrar caminhos para introduzir novos conhecimentos, aproveitando o que os alunos já trazem consigo, fato que pude comprovar com meus alunos de 5º série nesta pesquisa, tentando, por meio de seus acertos e erros, encontrar espaço para que novos conceitos sejam introduzidos de forma mais significativa.

No caso desta pesquisa, o uso de letras no lugar de números para introdução do conceito algébrico, aproveitando todo conceito aritmético trabalhado em séries anteriores, fazendo sempre um paralelo entre “aritmética” e “álgebra”, pois muitas vezes a fala dos professores é de que o aluno não tem sucesso no aprendizado algébrico devido ao fato de não ter aprendido a trabalhar em séries anteriores corretamente os conceitos aritméticos, dando como findado este conceito com seus alunos.

Como procurei mostrar nesta pesquisa, mesmo que o aluno tenha dificuldades com conceitos aritméticos, é um bom momento para retornar ao conceito das operações aritméticas e explicá-los, trabalhando ao mesmo tempo com conceitos algébricos, pois pela nossa pesquisa verificamos que isso é possível.

Consideramos interessante destacar o fato de que em muitas respostas os alunos conseguiram comunicar suas idéias de forma bastante satisfatória, mas esta não é, geralmente, uma habilidade que estimulamos em nossas aulas. Dar oportunidade para que expressem suas idéias parece, sem dúvida, uma necessidade urgente nas aulas de Matemática. Em vez de, a todo o momento, apresentarmos regras prontas e enunciarmos propriedades, poderíamos construí-las coletivamente, junto com os alunos, produzindo textos com significado para eles.

3.3. Considerações finais

Fazendo parte do primeiro grupo de alunos do Mestrado Profissional em Educação Matemática, considero importante estabelecer algumas relações entre o desenvolvimento deste trabalho e meu desenvolvimento profissional.

A expressão “desenvolvimento profissional” é aqui empregada no sentido apresentado por Ponte (1995), ou seja, a idéia de que a capacitação do professor para o exercício da sua atividade profissional é um processo que envolve múltiplas etapas e que, em última análise, está sempre incompleto.

Esse autor discute as diferenças entre formação e desenvolvimento profissional do professor, afirmando que a formação está muita associada à idéia de “freqüentar” cursos, enquanto o desenvolvimento profissional ocorre por meio de múltiplas formas, que incluem não só cursos, mas também atividades como projetos, trocas de experiências, leituras, reflexões etc.

Destaca uma diferença fundamental quando afirma que, na formação, o movimento é essencialmente de fora para dentro, cabendo ao professor assimilar os conhecimentos e a informação que lhe são transmitidos, enquanto no desenvolvimento profissional temos um movimento de dentro para fora, cabendo ao professor as decisões fundamentais relativamente às questões que quer considerar, aos projetos que quer empreender e ao modo como os quer executar.

Ressalta ainda que na formação atende-se principalmente àquilo em que o professor é carente e no desenvolvimento profissional dá-se especial atenção às suas potencialidades e que a formação tende a ser vista de modo compartimentado, por assuntos ou por disciplinas, enquanto o desenvolvimento profissional implica o professor como um todo nos seus aspectos cognitivos, afetivos e relacionais. Para Ponte, a formação parte invariavelmente da teoria e freqüentemente não chega a sair da teoria, ao passo que o desenvolvimento profissional tende a considerar a teoria e a prática de uma forma interligada.

Ele considera que o desenvolvimento profissional ao longo de toda a carreira é, hoje em dia, um aspecto marcante da profissão docente e que a finalidade do desenvolvimento profissional é tornar os professores mais aptos a conduzir um ensino da Matemática adaptado às necessidades e interesses de cada aluno e a contribuir para a melhoria das instituições educativas, realizando-se pessoal e profissionalmente. Ele afirma que no desenvolvimento profissional dá-se grande importância à combinação de processos formais e informais. O professor deixa de ser objeto para passar a ser sujeito da formação. Não se procura a "normalização", mas a promoção da individualidade de cada professor. Dá-se atenção não só aos conhecimentos e aos aspectos cognitivos, para valorizar também os aspectos afetivos e relacionais do professor.

Ponte ressalta que não há qualquer incompatibilidade entre as idéias de formação e de desenvolvimento profissional. A formação pode ser encarada de modo mais amplo do que o habitual, não necessariamente subordinada a uma lógica de transmissão de um conjunto de conhecimentos, e pode ser perspectivada de modo a favorecer o desenvolvimento profissional do professor, do mesmo modo que pode, por meio do seu "currículo escondido", contribuir para lhe reduzir a criatividade, a autoconfiança, a autonomia e o sentido de responsabilidade profissional. O professor que quer se desenvolver plenamente obtém vantagens em tirar partido das oportunidades de formação que correspondam às suas necessidades e objetivos.

Duas idéias propostas por Ponte nos chamaram a atenção:

A primeira refere-se ao fato de que os professores devem assumir-se como os principais protagonistas do seu processo de formação e desenvolvimento profissional, isto é, devem assumir iniciativas, desenvolver seus projetos, avaliar seu trabalho, ligar a prática com a teoria. Trata-se de uma transformação que envolve novas aprendizagens e novas práticas profissionais, mas sobre tudo uma nova atitude profissional.

A segunda é a de que o processo de investigação assume um papel-chave na formação. Ponte acredita que a investigação, a curiosidade, o pensamento organizado aliados à vontade de resolver os problemas são ingredientes essenciais para o progresso em qualquer domínio da atividade humana. Encarar a formação como um processo marcado pela atividade investigativa é uma responsabilidade fundamental dos professores e das suas instituições – nomeadamente os grupos disciplinares, as escolas e territórios e as organizações profissionais.

Além de Ponte, gostaria de ressaltar Zeichner (1992) e sua discussão sobre a necessidade de eliminar a separação que existe atualmente entre o mundo da pesquisa educacional acadêmica e o mundo dos professores-pesquisadores.

Ele afirma, como outros autores, tais como Mitcehl (1985), Cookson (1987), Gurney (1989) e Doig (1994), que a maior parte dos professores não procura a pesquisa educacional acadêmica para instruir ou melhorar suas práticas. Por sua vez, muitos acadêmicos, nas universidades, rejeitam as pesquisas realizadas por professores das escolas de ensino básico por considerá-las menos importantes, e nem são consideradas como produção de conhecimento, não sendo citadas em trabalhos acadêmicos, nem utilizadas em cursos de formação de professores.

Zeichner salienta que geralmente o conhecimento gerado por meio da pesquisa educacional acadêmica é apresentado de forma que não leva os professores a nela se engajarem intelectualmente. Seus resultados são apresentados como definitivos, inquestionáveis, ou usados para impor algum programa prescritivo a ser seguido pelos professores.

As propostas centram-se na distribuição de soluções pré-programadas para os problemas escolares. Zeichner considera que essas razões afastam os professores das pesquisas acadêmicas. Afirma que há ainda outra razão para isso é a forma negativa pela qual os professores são descritos nessas pesquisas.

Para superar esses impasses, Zeichner acredita na pesquisa colaborativa, na qual professores e pesquisadores das universidades trabalham em parceria, não com uma igualdade absoluta, pois cada qual tem seus conhecimentos específicos para a colaboração, mas com paridade no relacionamento, com respeito ao conhecimento do outro e à contribuição que cada um pode dar. Ele salienta que a pesquisa colaborativa pode fazer com que a divisão entre professores e pesquisadores acadêmicos tenha fim.

Zeichner conclui que é possível ultrapassar a linha divisória entre professores e pesquisadores acadêmicos de três modos: a) comprometendo-nos com o corpo docente em realizar ampla discussão sobre o significado e a relevância da pesquisa que conduzimos, b) empenhando-nos com processos de pesquisa que permitam desenvolver uma colaboração genuína com os professores, rompendo com os velhos padrões de dominação acadêmica, c) dando suporte às investigações feitas por professores, ou aos projetos de pesquisa-ação, e acolhendo seriamente os resultados desses trabalhos como conhecimentos produzidos.

O autor afirma que, para ultrapassar a divisão entre professores e pesquisadores acadêmicos, os pesquisadores devem tratar os resultados das investigações dos professores de forma séria na Universidade, considerando-os como conhecimento educacional.

Tem-se afirmado que a pesquisa é elemento essencial na formação profissional de professor. Segundo Pires (1990), o termo pesquisa nesse contexto refere-se à construção de uma atitude cotidiana de busca de compreensão dos processos de aprendizagem e desenvolvimento de seus alunos e à autonomia na interpretação da realidade e dos conhecimentos que constituem seus objetos de ensino.

No entanto, essa perspectiva ainda é pouco difundida na formação inicial e continuada de professores, não contribuindo para a construção da autonomia por parte do professor. Essa autonomia só pode ser construída em uma longa caminhada em que cada professor possa saber como são produzidos os conhecimentos que ensina, isto é, que tenha noções básicas dos contextos e dos métodos de investigação usados pelas diferentes ciências para que não se tornem meros repassadores de informações. O acesso aos conhecimentos produzidos pela investigação acadêmica nas diferentes áreas que compõem seu conhecimento profissional alimenta o seu desenvolvimento profissional e possibilita ao professor manter-se atualizado e fazer opções em relação aos conteúdos, à metodologia e à organização didática dos conteúdos que ensina.

Nossa experiência nos coloca em condições de perceber a importância da pesquisa na formação do professor, fato que considero marcante para o meu desenvolvimento profissional, sendo que ao propor estas questões aos alunos pude procurar através de leituras embasamento teórico para minhas inquietações referente a abordagem de conteúdos algébricos, através das análises dos protocolos perceber o quanto os alunos tem a nos informar através do levantamento de hipóteses e ao argumentarem as questões, considero de fundamental importância todo o todo o processo deste trabalho para o meu desenvolvimento profissional.

BIBLIOGRAFIA

ANDRINI, A. **Praticando Matemática**, 7º Série. Brasil S/A, 1989.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim**, 7º Série. FTD, 2002.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. As concepções de educação algébrica. **Pro- Posições**, São Paulo: Cortez, v. 4, n. 1 (10), p. 39-54, mar. 1993.

HOUSE, P. A. Álgebra: idéias e questões. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.

KIERAN, C. **The learning and teaching of school algebra**. Montreal: Université du Québec à Montréal, 1992.

LINS, R.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas: Papyrus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

MAHER, C. **Professores podem ajudar seus alunos a construir argumentos convincentes?** Rio de Janeiro: MEM/USU, 1998. (Reflexões em Educação Matemática, vol. 5).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO – SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN**. Brasília, 1998.

MASON, J. Expressing generality and roots of Algebra. In: BEDNARZ, N; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.). **Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996a.

_______. Futuro de la Aritmética y del Álgebra: Utilizar el Sentido de Generalidade. **UNO – Revista de Didáctica de las Matemáticas**, Barcelona, p. 15-22, 1996b.

MEIRA, L. L.; ROCHA FALCÃO, J. T. **Estudos em psicologia da educação matemática**. Recife: Editora Universitária UFPE, 1993.

PIRES, C. M. C. Orientações curriculares para a Educação Básica: Qual o Caminho? In: VII ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais**... (CD) São Paulo: SBEM, 2004.

PONTE, J. P. Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. In: Ponte, J. P.; Monteiro, C.; Maia, M.; Serrazina, L.; Loureiro C. (Eds.). **Desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Que formação?** Lisboa: SPCE, 1995.

________. Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In: IV CONGRESSO DA SPCE. **Conferência**... Aveiro, 1998.

_________. **Investigação em educação matemática: Implicações curriculares**. Lisboa: IIE, 1998.

POWELL, A. B.; LOPES, J. **A escrita como veículo da aprendizagem matemática**. Rio de Janeiro, Boletim GEPEM, 1995.

RIBEIRO, A. J. **Analisando o desenvolvimento de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP**. 2001. Tese (Mestrado em Educação Matemática) – PUC-SP.

SANGIORGI, O. **Para Curso de Primeiro Grau** (Antiga Segunda Série Ginasial). Editora Nacional, 1972.

_______. **Matemática 6**. Editora Nacional, 1972.

SERRAZINA, L. **Reflexão é conhecimento práticas lectivas em matemática num contexto de reforma curricular**. 1999.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2003.

ZEICHNER, K. Novos caminhos para o praticum: uma perspectiva para os anos 90. In: Nóvoa, A. (Coord.) **Os professores e sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, (1992).

___________. Refletindo com Zeichner: um encontro marcado por preocupações políticas, teóricas e epistemológicas. In: Fiorentini, D. **Cartografias do trabalho docente**. Campinas: Mercado das Letras, (1998).

____________. Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico. In: Fiorentini, D. **Cartografias do trabalho docente**. Trad. autorizada pelo autor. Campinas: Mercado das Letras, (1998).