PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Ângela Maria dos Santos

José Anastácio da Cunha (1744-1787) e aspectos de seu ensino: *“Sobre a natureza das quantidades negativas”*

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2018PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Ângela Maria dos Santos

José Anastácio da Cunha (1744-1787) e aspectos de seu ensino: *"Sobre a natureza das quantidades negativas"*

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Gabriel Loureiro Lima.

SÃO PAULO

2018

Banca Examinadora

Para meu Amigo e Sócio,

de TODAS as horas

e de TODA a vida...

Bolsista CAPES – PROSUP/PUC

Contrato 1346925

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, a quem devo simplesmente tudo.

A meu amado esposo, pela compreensão e auxílio.

A minha mãe, pelo incentivo e orações.

A meu orientador, Prof. Dr. Gabriel Loureiro Lima, pela competência e paciência com que guiou a construção deste trabalho.

À Prof.^{a} D.^{ra} Silvia D. Alcântara Machado, por acreditar em nosso projeto de pesquisa e apoiá-lo.

À Prof.^{a} D.^{ra} Maria Elfrida Ralha, pela maneira *anastaciana* com que nos acolheu.

Ao Prof. Dr. Rui Ralha, pelas sugestões e ensinamentos matemáticos.

Ao Prof. Dr. Jaime Carvalho e Silva, que desde o Mestrado tem nos apoiado.

Ao Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio, eterno *pai acadêmico*.

Aos coordenadores e membros do GPEA. Nossos debates foram riquíssimos.

Aos membros do Projeto MAT^2, nomeadamente as generosas Prof.^{as} Ângela C. Lopes e Maria Fernanda Estrada.

Ao coordenador do HEEMa, Prof. Dr. Fumikazu Saito, e seus membros, singularmente Ana Rebeca Castillo, Regina Thaíse Bento e Roseli Moura.

Aos bibliotecários Marúcia Uyakova Corrêa e Vinicius Miqueles da Silva e ao historiador Coronel Wagner Alcides de Souza.

Aos bibliotecários brasileiros e portugueses do Exército, da Marinha, da Torre do Tombo, do Arquivo Histórico Ultramarino, do Arquivo Histórico da Marinha, do Arquivo da Universidade de Coimbra, do Arquivo Nacional e da Biblioteca Nacional.

Aos professores do Programa de Doutorado em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

À CAPES, pela concessão de bolsa de estudos integral.

Enfim, a todos os que, de uma maneira ou outra, participaram de nossa jornada, aos quais quero agradecer compartilhando este momento especial.

Os Lentes, Professores e Mestres [...] *lhes inspirarão brio e espíritos nobres,* [...] *deve-se-lhes fazer evidente que a verdadeira honra e nobreza da alma se estribam e fundam na verdade, probidade e demais virtudes morais e na sincera e eficaz diligência de ser útil à Pátria e, em geral, ao próximo.*

José Anastácio da Cunha

RESUMO

SANTOS, Ângela Maria. **José Anastácio da Cunha (1744-1787) e aspectos de seu ensino: "Sobre a natureza das quantidades negativas"**. 2018. Tese – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

Este trabalho discorre sobre José Anastácio da Cunha (1744-1787) e a maneira como concebia e desempenhava o ensino de matemática. Tendo como objetivo analisar suas atividades relacionadas ao ensino, utilizamos como principais documentos para a coleta de dados algumas cartas escritas em 1785 que trazem em sua redação um debate a respeito das quantidades negativas. Articulamos reflexões da educação matemática, apoiando-nos em Glaeser e Schubring em relação aos obstáculos epistemológicos, e da história da matemática, baseando-nos em Veyne, Le Goff e Grattan-Guinness no que concerne às definições essenciais de história e ao tratamento dispensado aos documentos analisados. Em virtude dessa articulação, optamos por uma narrativa apoiada primordialmente em documentos originais, considerando o contexto em que se deram os fatos, para subsequentemente evidenciarmos as diferentes concepções acerca das quantidades negativas que coexistiam à época e os possíveis obstáculos de gênese epistemológica, a fim de, nesse contexto, analisarmos a postura docente de José Anastácio da Cunha (JAC). Reconstruímos até onde foi possível a narrativa das cartas, identificando personagens e instituições de ensino, bem como expondo os conceitos e definições matemáticos presentes. Desse modo, evidenciou-se um procedimento singular de José Anastácio da Cunha frente ao embate de ideias que teve lugar a respeito da natureza das quantidades negativas, permitindo-nos concluir que este personagem foi exemplarmente um mestre, na melhor acepção da palavra. Os documentos analisados nos permitiram constatar que JAC foi um matemático preocupado com rigor e demonstrações, desde suas primeiras leituras de livros matemáticos, ecoando tal característica também em suas obras e atividades docentes. Além disso, em sua prática professoral era receptivo a debates acerca dos mais variados tipos de conteúdos e respeitava o ser humano, independentemente de sua classe ou posição social. Permitia questionamentos em assuntos a respeito dos quais ele mesmo não tinha uma resposta pronta e incentivava seus discípulos a irem além dele, inclusive, se fosse o caso, corrigindo-o. Enfim, ao analisarmos as atividades de JAC relacionadas ao ensino, no contexto dos números inteiros negativos, pudemos evidenciar que era um docente preocupado com o futuro de seus alunos e ex-alunos e que buscava o aprimoramento dos saberes.

Palavras-chave: José Anastácio da Cunha, quantidades negativas, século XVIII, Portugal, ensino de matemática.

ABSTRACT

SANTOS, Ângela Maria. **José Anastácio da Cunha (1744-1787) e aspectos de seu ensino: "Sobre a natureza das quantidades negativas" [José Anastácio da Cunha (1744-1787) and facets of his teaching approach: "On the Nature of Negative Quantities"]**. 2018. Doctoral thesis – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

This study focuses on José Anastácio da Cunha (1744-1787) and the manner in which he conceived and performed the teaching of mathematics. Selected letters from 1785, addressing a debate about negative quantities, constituted the primary sources for examining da Cunha's teaching practice. The study articulates ponderations on mathematical education—drawing on the views of Glaeser and Schubring on epistemological obstacles—and the history of mathematics—based on Veyne, Le Goff, and Grattan-Guinness with regard to core definitions of history and the treatment of source documents. In order to examine da Cunha's teaching in this context, the articulation took the form of a narrative primarily based on original documents, considering the context in which events took place, subsequently evidencing the range of conceptions about negative quantities that coexisted in his time, and the possible epistemological obstacles encountered. As far as possible, the narrative conveyed in the letters was reconstructed, supporting the identification of the personages and teaching institutions involved and highlighting the mathematical concepts and definitions addressed. This effort shed light on da Cunha's unique approach amid the clash of ideas that occurred at the time with regard to the nature of negative quantities, revealing him as an exemplary teacher, in the best sense of the word. The documents analyzed revealed da Cunha to be a mathematician concerned with rigor and the value of demonstrations—a stance evident from his earliest readings of mathematical books and later echoed in his oeuvre and teaching-related activities. In his professorial practice, he was not only receptive to debating on an extensive range of contents, but proved respectful of his interlocutors as human beings, regardless of class or social status. Da Cunha was also open to questioning about matters for which he had no definitive answers, and encouraged his students to outdo him and, if necessary, correct his conclusions. The present analysis of his teaching-related activities in the realm of negative integers revealed da Cunha to have been a teacher concerned with the future careers of his students and alumni and a mathematician who strove to promote the furthering of knowledge.

Keywords: José Anastácio da Cunha, negative quantities, 18th century, Portugal, teaching of mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Frontispício do *Ensaio sobre as minas.* 43
Figura 2. Frontispício da *Carta físico-matemática.* 43
Figura 3. Frontispício das *Notícias literárias de Portugal 1780*. 47
Figura 4. Frontispício do *Ensayo sobre os principios de mechanica*. 47
Figura 5. Frontispício dos *Estatutos novos.* 54
Figura 6. Frontispício dos *Principios mathematicos.* 70
Figura 7. Frontispício dos *Principes mathématiques.* 70
Figura 8. Exemplo de multiplicação de polinômios em *Principios mathematicos.* 81
Figura 9. Frontispício de *A treatise of algebra*, 2.ª edição, de Thomas Simpson. 83
Figura 10. Exemplo de multiplicação com quantidades negativas no *Tratado de álgebra,* de Thomas Simpson........ 84
Figura 10. Frontispício do *Cours de mathématiques*: primeiro livro. 88
Figura 11. Frontispício do *Cours de mathématiques*: terceiro livro. 88
Figura 12. Exemplo de multiplicação com quantidades negativas. 89
Figura 13. Frontispício da tradução portuguesa de E*lementos*, de Euclides. 98
Figura 13. Fluxograma do percurso da presente investigação........ 120

LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Contrastes pontuais entre História e Herança. 32
Quadro 2. Tópicos orientadores dos *Estatutos novos*, de 1772, da Universidade de Coimbra.... 53
Quadro 3. Organização da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra em 1773.... 56
Quadro 4. Plano de estudos das classes menores da Casa Pia de Lisboa. 64
Quadro 5. Plano de estudos das classes científicas da Casa Pia de Lisboa. 64
Quadro 6. Tópicos orientadores dos Estatutos da Academia Real da Marinha de Lisboa. 72
Quadro 7. Organização do curso de matemática, Real Academia da Marinha de Lisboa, 1785. 74
Quadro 8. Personagens descritos envolvidos no duelo literário sobre a natureza das quantidades negativas, de 1785. 103

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS 15
1.1 TRAJETÓRIA DE PESQUISA 15
1.1.1 Direcionamentos da presente pesquisa 17
1.2 REVISÃO DE LITERATURA 21
1.3 APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS 29
1.3.1 Enquadramento em história 29
1.3.2 Enquadramento em educação matemática 33
CAPÍTULO 2 – JOSÉ ANASTÁCIO DA CUNHA E SUAS RELAÇÕES COM INSTITUIÇÕES DE ENSINO 39
2.1 INTRODUÇÃO 39
2.2 JOSÉ ANASTÁCIO DA CUNHA 39
2.3 UNIVERSIDADE DE COIMBRA 50
***2.3.1 Os Estatutos novos*, de 1772** 51
2.4 CASA PIA DE LISBOA 61
2.4.1 O livro "Principios mathematicos" 67
2.5 ACADEMIA REAL DA MARINHA DE LISBOA 71
2.6 CONSIDERAÇÕES 74
CAPÍTULO 3 – O DUELO LITERÁRIO DE 1785: *"SOBRE A NATUREZA DAS QUANTIDADES NEGATIVAS"* 77
3.1 INTRODUÇÃO 77
3.2 A QUESTÃO DAS QUANTIDADES NEGATIVAS NO SÉCULO XVIII 77
3.3 AS CARTAS QUE COMPÕEM O DUELO *NATUREZA DAS QUANTIDADES NEGATIVAS – 1785* 92
3.3.1 Reconstrução contextual: eventos e personagens 93
3.3.2 Reconstrução matemática: conceitos e definições 103
3.4 CONSIDERAÇÕES 115
CAPÍTULO 4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS 119
REFERÊNCIAS 124
MANUSCRITOS 131
ANEXO A – LOMBADA, FOLHA DE ROSTO, NOTA INTRODUTÓRIA E CARIMBOS DA ENCADERNAÇÃO DAS CARTAS. 133
ANEXO B – CARTA I 136
ANEXO C – CARTA II 139
ANEXO D – CARTA III 141

CAPÍTULO 1 – CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Nestas considerações iniciais, discorreremos sobre nossa trajetória de pesquisa e apresentaremos uma revisão da literatura, bem como o objetivo deste trabalho e os aportes teórico-metodológicos nele adotados.

1.1 TRAJETÓRIA DE PESQUISA

Minha primeira informação sobre José Anastácio da Cunha (1744-1787) – doravante referido por suas iniciais: JAC[1] – foi-me trazida em 2004 pelo Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio, durante uma de suas aulas da disciplina 'História da matemática', no curso de Mestrado em Educação Matemática do Programa de Estudos Pós-graduados (PEPG) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Foi a partir desse primeiro contato que surgiu meu interesse pela história de vida e trajetória acadêmica desse personagem.

Os fatores que motivam um pesquisador a investir em determinado assunto ou tema são vários e podem diferir entre investigadores. Em meu caso, fui inicialmente movida pela empatia instantânea com JAC e com seu percurso de vida, o qual, embora breve e simples, esteve recheado de episódios apaixonantes. No decorrer da investigação, entretanto, compreendi que tais elementos não bastariam para o desenvolvimento de uma pesquisa acadêmica. D'Ambrosio aceitou-me como orientanda e norteou-me, a fim de conciliar minha euforia com o pensamento científico, e em 2005 concluí a dissertação de mestrado intitulada *José Anastácio da Cunha, matemático português do século XVIII: um relato de sua trajetória*.

Nessa dissertação expusemos dados biográficos de JAC, que além de professor[2] (na Universidade de Coimbra e na Real Casa Pia de Lisboa) e matemático[3] (autor de *Carta fisico mathematica* e de *Principios mathematicos*[4], entre outros títulos)

---

[1] JAC será apresentado no Capítulo 2.

[2] No século XVIII, os que exerciam a função de ensinar nas universidades eram frequentemente denominados 'lentes'. Optamos por atualizar esse termo como 'professor'.

[3] Empregamos o termo 'matemático' para designar aquele que é versado em matemática.

[4] Tanto quanto possível, adotamos para os títulos das produções de JAC a grafia (incluindo acentuação) utilizada na época.

também foi militar (tenente de artilharia) e poeta (autor de *O pressagio* e *A despedida*, entre outros poemas), focalizamos seu livro *Principios mathematicos,* considerado sua obra matemática de maior relevo, cujos capítulos III e IV analisamos brevemente quanto ao modo como o autor definiu números e trabalhou com operações de adição, subtração, multiplicação e divisão utilizando números inteiros e racionais. Também sugerimos algumas questões para pesquisas futuras, tais como: (*a*) Qual a possível influência sobre alunos seus[5] que desempenharam funções importantes e serviram à coroa portuguesa enquanto esta esteve instalada no Brasil? (*b*) Como teria sido a prática docente de JAC, visto que demonstrava preocupações nesse sentido, conforme relatos seus e de alunos. Este segundo questionamento foi o que mais me inquietou e que tencionava aprofundar, pois conjecturava que JAC poderia ser um professor diferenciado, que, em seu modo de ensinar estendia-se para além da prática habitual de outros professores que lhe eram contemporâneos, por exemplo despendendo seu tempo fora do período regular de ensino para atender alunos e ex-alunos que o procuravam para esclarecer dúvidas de conteúdos diversos, não só matemáticos.

Tal dissertação deu origem a algumas publicações:

- Livro:

  SANTOS, A.M. *José Anastácio da Cunha: matemático português do século XVIII*. São Paulo: Fiuza, 2013. (Coletânea Acadêmica de Estudos em Letras e Educação, 10.)

- Capítulo de livro:

  SANTOS, A.M. O ensino da matemática segundo os estatutos da Universidade de Coimbra de 1772. In: SALEM, K. *Conhecimento, tecnologia e linguagem*. São Paulo: Fiuza, 2013. (Coletânea Acadêmica de Estudos em Letras e Educação, 12.)

- Comunicação científica:

  SANTOS, A.M. José Anastácio da Cunha e sua obra *Principios mathematicos*. XII Encontro Nacional de Educação Matemática, promovido pela Universidade Cruzeiro do Sul, 2016.

---

[5] Como exemplo podemos citar D. Rodrigo de Sousa Coutinho (português, nascido em Portugal) e Francisco José de Lacerda e Almeida (português, nascido no Brasil).

O principal objetivo de tais publicações originadas da dissertação foi o de tornar JAC mais conhecido no Brasil.

Em 2014, reingressei no PEPG em Educação Matemática da PUC-SP, na mesma linha de pesquisa – ‘História, epistemologia e didática da matemática’[6] –, agora em nível de doutorado, retomando minha pesquisa com o propósito de responder ao questionamento que, por ocasião do mestrado, fora suscitado acerca das atividades de ensino realizadas por JAC. Esse propósito permitiu definir a seguinte questão:

- Seria possível efetivamente revelar a prática de ensino de JAC? Havendo esta possibilidade, tal prática evidencia aspectos diferenciados em relação a seus contemporâneos?

1.1.1 Direcionamentos da presente pesquisa

Com este questionamento em pauta, procedemos inicialmente a um levantamento *online* focalizando o período de julho de 2005[7] a julho de 2017, nele buscando dissertações, teses, artigos científicos e livros em instituições no Brasil e em Portugal. Também estabelecemos ou retomamos comunicação com pesquisadores de história da matemática e história da educação matemática brasileiros e portugueses.

A pesquisa envolveu os seguintes passos:

– Consulta ao banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes)[8].
– Consulta a publicações da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat).

---

[6] De acordo com Igliori (2015, p. 114-115), “na França, o ramo do conhecimento voltado ao processo do ensino e da aprendizagem da Matemática é denominado Didática da Matemática; em outros países e no Brasil, em geral, é denominado Educação Matemática”. Sendo assim, entendemos didática da matemática como sinônimo de educação matemática.

[7] Para a dissertação de mestrado, havíamos realizado pesquisa *online* até junho de 2005. Mantivemos aqui o mesmo critério de pesquisa: produções que trouxessem JAC no título.

[8] O Banco de Teses e Dissertações da Capes (www.bancodeteses.capes.gov.br) acumula informações sobre teses e dissertações defendidas nos programas de pós-graduação de todo o Brasil. Os trabalhos que nos interessaram e que não estavam disponíveis em versão digital foram acessados *in loco.*

– Consulta a publicações da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).
– Consulta a acervos da Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro.
– Consulta a acervos de universidades portuguesas[9]: Porto, Lisboa, Coimbra, Minho, Nova de Lisboa, Aveiro, Beira Interior, Évora e Algarve.
– Consulta a acervos da Biblioteca Nacional de Lisboa.
– Restabelecimento de contato com o Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio, que na ocasião, informando não ter conhecimento de trabalhos de mestrado ou doutorado em andamento Brasil sobre JAC, propôs-se novamente a auxiliar a nova empreitada.
– Estabelecimento de contato, com a Prof.ª D.ra Elenice de Souza Lodron Zuin, da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (por indicação do Prof. D'Ambrosio), que durante seu doutoramento permaneceu por longo período na Universidade de Lisboa investigando sobre escolas portuguesas e brasileiras. Sugeriu-nos pesquisar nas publicações da Associação de Professores de Matemática (Portugal) e na Sociedade Portuguesa de Matemática, instruindo-nos também acerca de uma possível estada investigativa em Portugal.
– Consulta a publicações da Associação de Professores de Matemática (APM) de Portugal.
– Consulta a publicações da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM).
– Restabelecimento de contato eletrônico com o Prof. Dr. Jaime Carvalho e Silva, da Universidade de Coimbra, que muito me auxiliara durante a pesquisa de mestrado. Por meio dele, tomei conhecimento do Projeto MAT²: *José Anastácio da Cunha e a Matemática nos Fundos Setecentistas do Arquivo da Casa de Mateus* (MATeus & MATemática: Manuscritos de Matemática na Casa de Mateus) e de seu endereço virtual[10].
– Registro no *site* do Projeto MAT².
– Estabelecimento de contato eletrônico com a coordenação do Projeto MAT² e com seus membros. Destes recebemos sugestões, informações e artigos na íntegra,

---

[9] Elegemos as nove citadas pelo fato de serem as primeiras colocadas na classificação das melhores universidades portuguesas (www.webometrics.info/es/europe_es/portugal) e por contarem com linhas de pesquisa pertinentes a nosso tema.
[10] www.math.uminho.pt/~web/Mat2/MAT2.

além de orientações primordiais da coordenadora do projeto – Prof.ª D.ra Maria Elfrida Ralha –, obtendo assim um panorama atualizado das investigações acerca de JAC em Portugal. Também por intermédio dela, soubemos que manuscritos inéditos de JAC, tanto autógrafos quanto apógrafos, haviam sido encontrados num arquivo de família: o da Fundação Casa de Mateus[11]. Essa descoberta foi fruto de incessante trabalho investigativo da D.ra Ralha, também docente na Universidade do Minho.

O estabelecimento de diálogo com a pesquisadora mais dedicada à coleta de materiais acadêmicos sobre JAC permitiu perceber que nosso novo estudo só teria sentido caso se baseasse em fontes primárias que trouxessem luz à questão de pesquisa inicial. Para tanto, seria necessário adotar uma postura diferente da originalmente cogitada, de buscar dados relacionados ao ensino em matemática. Em vez disso, seriam agora buscados dados historiográficos em fontes primárias que pudessem evidenciar tais indícios.

Embora desejássemos iniciar a busca historiográfica em Portugal, a D.ra Ralha sugeriu começar pelos arquivos de instituições sediadas no Rio de Janeiro, onde acreditava que se obteria sucesso. Com suas orientações, pudemos prosseguir a pesquisa nas seguintes instituições brasileiras, todas nessa cidade:

– Biblioteca do Museu Militar Conde de Linhares;
– Biblioteca do Exército (BibliEx);
– Arquivo Histórico do Exército (AHEx);
– Real Archivo Militar;
– Biblioteca Nacional.

Foi na Biblioteca Nacional que encontramos o que viria ser o documento central do presente trabalho: uma encadernação de duas cartas manuscritas do século XVIII contendo um debate entre dois professores e seus respectivos alunos acerca das quantidades negativas. A lombada ostentava, em pomposas letras douradas, o título *Natureza das quantidades negativas – 1785* (Anexo A). O fato de o

---

[11] www.casademateus.com. Este arquivo, que tem pertencido à família por gerações, reúne séculos de história. No século XVIII, o herdeiro era D. José Maria de Sousa Botelho Mourão e Vasconcelos, o 5.º morgado de Mateus, que foi amigo pessoal de JAC e ocupou-se em guardar suas obras, com a intenção de um dia publicá-las (RODRIGUES *et al.*, 2013).

nome de JAC (apenas ele é citado nominalmente) ser mencionado várias vezes num debate sobre o modo de ensinar matemática, no contexto das quantidades negativas, em contraposição a outro professor[12], fez-nos concentrar a atenção nesse material. Havíamos encontrado um relatório descritivo em que ações professorais eram evidenciadas!

Tal achado levou a redirecionamentos da pesquisa.

Primeiro, esta passou a priorizar fontes que pudessem auxiliar a entender as implicações do contexto das cartas. Em segundo lugar, permitiu adentrar um campo de entroncamento entre a educação matemática e a história da matemática.

Tendo em vista esses redirecionamentos, revisitamos os arquivos da Biblioteca Nacional (onde também encontramos documentos que nos davam indícios do possível autor das cartas), relemos os materiais de que já dispúnhamos e partimos para outros acervos, também situados no Rio de Janeiro:

– Arquivo Nacional;
– Biblioteca da Marinha.

No Arquivo Nacional encontramos documentos que corroboravam as pesquisas realizadas na Biblioteca Nacional no que tange à autoria das cartas, ou seja, o outro professor em questão. Ademais, alunos e instituições de ensino começavam a compor o cenário após serem identificados pela D.ra Ralha em documentos inéditos do acervo da Fundação Casa de Mateus.

Findando a etapa de pesquisas no Rio de Janeiro, rumamos para aquela que seria a última fase desta empreitada investigativa. Viajamos a Portugal, munidos de um “plano” elaborado pela D.ra Ralha para a consulta de documentos primários já estudados[13] e quiçá para encontrar documentos inéditos. Ali, pesquisamos nos seguintes acervos:

– Biblioteca Nacional de Portugal;
– Torre do Tombo, em Lisboa;

---

12 Até esse momento não sabíamos quem poderia ser este professor, pois as cartas não estão assinadas.

13 Na dissertação de mestrado, tivemos acesso apenas a fontes secundárias. Para o presente estudo, pudemos consultar e analisar os documentos e emitir nosso parecer, sem intermediários.

– Arquivo Histórico Ultramarino,[14] em Lisboa;
– Biblioteca da Marinha, em Lisboa;
– Arquivo da Universidade de Coimbra.

Todos os dados coletados nessas instituições e acervos contribuíram em alguma medida para o desenrolar de nosso trabalho. Particularmente, os documentos inéditos do espólio da Fundação Casa de Mateus, disponibilizados pela D.ra Ralha, revelaram-se imprescindíveis.

Tais documentos inéditos serão focalizados mais adiante. A próxima seção apresenta a revisão de literatura, trazendo as opiniões de autores sobre o modo de ensinar de JAC.

1.2 REVISÃO DE LITERATURA

Nossa empreitada investigativa possibilitou tomarmos conhecimento de trabalhos já empreendidos e outros em andamento que recaem sobre nossa temática de pesquisa ou nela perpassam[15], além, é claro, de conduzir-nos ao Projeto MAT², onde atualmente se concentram os mais bem informados pesquisadores de JAC.

Desde que fomos acolhidos pela coordenadora do Projeto MAT², esta passou a contribuir diretamente em nosso trabalho, sugerindo e fornecendo publicações, indicando pesquisas, promovendo nosso contato com outros pesquisadores de JAC e permitindo nosso acesso ao acervo do projeto[16], por meio de um encaminhamento de vertente historiográfica.

De acordo com Ralha, que vem dedicando a JAC esforços de investigação exclusiva desde 2005, o projeto desenvolve-se:

> [...] multi e interdisciplinarmente englobando a Matemática (nas suas múltiplas especializações) e a História (incluindo a da Matemática) mas também contando com a Física, a Informática, os Estudos Militares ou a Arquivística e as Humanidades [...]. (RALHA, 2015, p. 49)

---

[14] O “plano” de pesquisa delineado pela D.ra Ralha nos permitiu encontrar um manuscrito autógrafo inédito de JAC, intitulado *Morteiros*, datado em 30 de agosto de 1777. Esse documento não será analisado neste trabalho.

[15] Encontramos várias publicações em Portugal e algumas no Brasil que mencionavam JAC em seus títulos – critério inicial. Destas, elegemos as que fazem alguma referência ao modo de ensinar de JAC. Apenas um trabalho brasileiro atendeu a esses critérios.

[16] Disponível apenas a membros do Projeto MAT².

Segundo Lopes *et al*.:

> Conjecturámos, então, que o Arquivo da Fundação da Casa de Mateus poderia acolher um espólio relativo a JAC e foi, agora, possível ultrapassar, em larga medida, as nossas melhores expectativas. Nas incursões investigativas já feitas neste Arquivo, impressionantemente conservado, identificámos um acervo raríssimo, intimista e quase sigiloso, ainda inédito e guardado por um dos mais leais discípulos de JAC: D. José Maria (1758-1825), o Morgado de Mateus.
>
> [...] Perante novos documentos, muitos deles autógrafos de JAC, pareceu-nos oportuno retomar/desencadear um projeto de estudo da sua produção científica. (LOPES *et al*., 2012, p. 20)

De posse de novos documentos autógrafos e apógrafos[17], estimulam-se novos estudos sobre JAC e instaura-se o Projeto MAT², que:

> Visa a recolha de informação, bem como o estudo das conexões e da aplicabilidade, da beleza e dos valores das ciências portuguesas setecentistas. Centra-se nas figuras ímpares de José Anastácio da Cunha e de D. José Maria[18]. (LOPES *et al.*, 2012, p. 21)

Além disso:

> No âmbito do projeto MAT² faremos o estudo das obras de JAC agora descobertas em Mateus, enquadrá-las-emos com as previamente conhecidas e retomaremos as buscas de outros elementos explicativos das redes científicas, pedagógicas e de sociabilidade criadas em torno de um dos nossos maiores vultos setecentistas. Daremos, ciclicamente, conta dos nossos passos e dos resultados que formos alcançando. Aspiramos, no final desta caminhada que prevemos relativamente longa, à tão almejada publicação/divulgação das obras matemáticas mais emblemáticas de José Anastácio da Cunha. (LOPES *et al*., 2012, p. 21)

O projeto reúne pesquisadores portugueses das universidades do Minho, Coimbra, Porto, Aveiro e Lisboa, além de outros do Brasil, da Espanha, da Bélgica e do Reino Unido (RALHA, 2015). Porém, antes de nos referirmos a nossos achados sobre produções pertencentes ou não ao Projeto MAT², relembraremos alguns autores consagrados que já se ocuparam em estudar a vida e obra de JAC.

---

[17] Em 2006, a publicação de inéditos de JAC encontrados no arquivo distrital de Braga deu-se por meio de um projeto anastaciano, organizado e dirigido pela D.ra Ralha. Este foi incorporado ao projeto MAT² (RALHA, 2006).

[18] "D. José Maria de Sousa Mourão e Vasconcelos, moço fidalgo da Casa Real (1765.10.23), nasceu no Porto, filho de D. Luís António de Sousa Botelho Mourão e de D. Leonor Ana Luísa José de Portugal. Em 1761 chega a Lisboa, a casa da avó materna, onde inicia – com os primos Sousa Coutinho – o estudo das primeiras letras (ensinado pelo mestre William Belling) e, depois, é aluno do Real Colégio dos Nobres. Destinado, desde cedo, para seguir a carreira militar, na senda da tradição familiar, licenciou-se em Matemáticas, na Universidade de Coimbra, onde entabulou com JAC uma relação (em 1773/74), que haveria de perdurar até ao fim da vida. Afirmando-se como diplomata, viria, no entanto, a alcançar posteridade com a célebre edição ilustrada de 'Os Lusíadas' (Paris, 1817)" (LOPES *et al*., 2012, p. 20).

Do século XIX, destacam-se Garção Stockler, Antônio José Teixeira, Castro Freire, Teófilo Braga e Inocêncio Francisco da Silva; do século XX, Rodolfo Guimarães, Gomes Teixeira, Aquilino Ribeiro, Hernâni Cidade, José Vicente Gonçalves, A.P. Youschkevitch, Luís de Albuquerque, José Tiago de Oliveira, João Queiró, José Francisco Rodrigues e Ivor Grattan-Guiness. Tais pesquisadores trouxeram contribuições quanto às particularidades da trajetória de vida de JAC e de suas obras, quer as matemáticas, quer as poéticas. Em 1987, bicentenário de sua morte, diversas foram as iniciativas de celebração, em Coimbra, em Lisboa e em Évora, que renovaram o interesse da comunidade acadêmica por JAC. Reeditaram-se em fac-símile tanto a edição portuguesa dos *Principios mathematicos* quanto sua edição francesa.

Apesar de já dispormos de materiais mais recentes (incluindo alguns que na ocasião eram tidos como desaparecidos), os de autoria dos estudiosos que listamos no parágrafo anterior ainda são bastante consultados para pesquisas sobre JAC. Além disso, quanto ao modo de ensinar de JAC, os comentaristas são unânimes em considerá-lo como professor versado, que se valia de uma praxe diferenciada para sua época, embora sem darem maiores detalhes sobre esta.

Voltando aos achados de nossa empreitada investigativa, que serão expostos em ordem cronológica, apresentamos a dissertação de Nelson Mendes Cantarino[19], concluída em 2006 no Programa de Pós-graduação em História Social da Universidade Federal Fluminense, intitulada *Ousando saber: José Anastácio da Cunha e as luzes em Portugal (1747-1787).* Optamos pela apresentação deste trabalho pelo fato de ser, em nosso conhecimento, o único produzido no Brasil nos últimos 12 anos a ter JAC como tema central e referir-se ao ensino.

Em seu trabalho, Cantarino (2006) aborda o processo inquisitorial de JAC como um exemplo que evidencia os limites do "iluminismo católico" em Portugal. Nesse contexto, o autor reserva um capítulo para discorrer sobre a reformulação das práticas pedagógicas em Portugal no século XVIII, especialmente em Coimbra, ressaltando JAC como professor de geometria da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra. Cantarino (2006, p. 50) salienta que JAC preocupava-se

---

[19] Pesquisa de mestrado orientada pelo Prof. Dr. Guilherme Paulo Castagnoli Pereira das Neves.

em realizar as demonstrações necessárias para a compreensão do conteúdo que estava sendo trabalhado.

Também destaca que:

> [...] em suas aulas, Anastácio da Cunha utilizava tratados de sua própria autoria, como seu *Ensaio sobre as Minas,* e exercitava os preceitos geométricos através de problemas da prática de artilharia. Esta atitude não era bem vista por alguns de seus companheiros de faculdade, reticentes com o resultado de seu método pedagógico. (CANTARINO, 2006, p. 50)

Passemos agora à pesquisa conduzida por Raquel Sofia Antunes Vieira, intitulada *As secções cónicas na obra de José Anastácio da Cunha: um estudo comparativo* (VIEIRA, 2006)[20], que analisou a abordagem às secções cônicas nas obras *Ensaio sobre as minas* e *Principios mathematicos*, comparando-a com aquelas presentes em obras de seus contemporâneos estrangeiros, a fim de avaliar as contribuições de JAC no desenvolvimento da matemática em Portugal.

Vieira (2006) apresenta uma subseção sobre o pensamento e modo de ensinar de JAC e destaca que naquela ocasião os alunos que frequentavam a disciplina de geometria estavam divididos em grupos, sendo que JAC, responsável pela cátedra, lecionava para um destes. De acordo com Vieira, JAC poderia estar em certa desvantagem, devido ao modo como ensinava, se comparado ao colega que lecionava para o outro grupo.

Quanto ao modo de ensinar praticado por JAC, Vieira acrescenta outras informações:

> Anastácio da Cunha surge, como seria de esperar pela formação a que foi sujeito, como um defensor da integração da experiência na rotina escolar, o que fazia com frequência nas suas aulas, facto que não terá agradado aos seus superiores. À luz dos conhecimentos de que hoje dispomos, parece-nos ser uma situação contraditória, na medida em que os procedimentos pedagógicos de Anastácio da Cunha eram consonantes com o que ditavam os Estatutos – a valorização de práticas que conduzissem ao desenvolvimento do raciocínio dos alunos ao invés de uma valorização da memorização. Mas, sem dúvida, que os detalhes que hoje conhecemos são insuficientes para que possamos apresentar resultados conclusivos. (VIEIRA, 2006, p. 32)

O fato de JAC conduzir-se como professor pelo documento oficial de sua época – os *Estatutos*, de 1772 – poderia, também segundo Vieira, ter contado contra ele.

---

[20] Pesquisa de mestrado orientada pelo Prof. Dr. Helmuth Robert Malonek.

Também em 2006, temos a publicação de *José Anastácio da Cunha: o tempo, as ideias, a obra, ..., os inéditos,* em dois volumes, publicada pelo Arquivo Distrital de Braga, Universidade do Minho e Universidade do Porto e organizada pelas Prof.as D.ras Maria Elfrida Ralha, Maria Fernanda Estrada e Maria do Céu Silva e pelo Prof. Dr. Abel Rodrigues.

Um destes volumes inclui sete documentos inéditos apógrafos que pertenceram a Antônio de Araújo de Azevedo, conde da Barca, e que atualmente estão sob a responsabilidade do Arquivo Distrital de Braga: *Principios de geometria tirados dos de Euclides*; *Nouvelle résolution numérique des équations de tous les degrés*; *Principios de calculo fluxionario*; *Logarithms & powers*; *Necessidades March 3. 1780*; *Meu rico amigo*; e *Balistique de Galileé.*

O outro volume traz ponderações, notas e análises sobre tais documentos, além de descrever a formação do Projeto Anastaciano[21] e suas perspectivas. Desse volume, ressaltamos os comentários que o Dr. Fernando Machado faz em seu artigo *Mentalidades em Portugal na segunda metade do século XVIII: olhares e sentidos*, alusivos ao período em que JAC lecionou na Universidade de Coimbra e morou em seus arredores.

> José Anastácio da Cunha era espiado. Não pelo Santo Ofício, mas pelos amigos, pelos camaradas, pelos colegas, pelos alunos, pelos vizinhos, formados naquele hábito centenário de fiscalizar e acusar, uma segunda natureza. (MACHADO, 2006, p. 40)

Em seguida, Machado comenta um conflito ocorrido entre JAC e José Monteiro da Rocha, também professor da Universidade de Coimbra.

> Desde os primeiros dias. Que arrogância servir-se da autorização para continuar a leccionar de uniforme militar! Não é ele agora lente da Nova Faculdade de Matemática? Mais do que era? Se José Monteiro da Rocha, um dos redactores dos Novos Estatutos e lente de Ciências Físico-Matemáticas, não tivesse despido o hábito de Jesuíta quando Sebastião de Carvalho e Melo expulsou a ordem, onde estaria ele agora? (MACHADO, 2006, p. 40)

Citando uma fala atribuída a José Monteiro da Rocha, relatada por Antônio José Teixeira em *O Instituto: Jornal Scientifico e Litterario*, de Coimbra (TEIXEIRA, 1891-92), Machado (2006, p. 41) acrescenta: “Porque sendo incrível o gosto e ardor

---

[21] O termo ‘anastaciano’, que se refere a JAC, foi concebido pela D.ra Ralha em fevereiro de 2005, ao assim denominar aqueles que com ela partilhavam as investigações e estudos sobre JAC (RALHA, 2006).

com que os estudantes de todas as classes estudaram a Geometria no primeiro ano da Reforma [...] veio ele depois a fazê-la odiosa, ou por inaptidão ou por malícia” [22]. Na ocasião, JAC era acusado de obrigar seus alunos a estudar e resolver problemas, e Machado (2006) acrescenta que a Reforma não trouxera um novo “olhar” para o ensino, que continuava como antes.

Após a publicação dos dois volumes em 2006, o grupo de anastacianos, agora compondo o Projeto MAT², lançou o livro *Anecdotas de J. A. d. C.,* organizado pelos D.res Abel Rodrigues, Antônio Leal Duarte, Jaime Carvalho e Silva, João Filipe Queiró, Maria Elfrida Ralha e Maria Luísa Malato.

O livro se compõe de duas partes. A primeira contém uma pequena biografia em francês, que provavelmente terá sofrido alguma intervenção do 5.º morgado de Mateus. A segunda consiste nas *Anecdotas de J. A. d. C.*, de autoria do morgado. Ambos os documentos, inéditos, foram encontrados em momentos e lugares distintos: no Arquivo Distrital de Braga e no Arquivo da Fundação Casa de Mateus, respectivamente. Os anastacianos responsáveis pela organização desse material afirmam que tiveram como objetivo, entre outros, contribuir para a compreensão do pensamento de JAC (RODRIGUES *et al.*, 2013).

Vejamos o que os pesquisadores expõem sobre como JAC se ocupava do conhecimento:

> As características da personalidade e do espírito do autor, que estas primeiras obras nos revelam, viriam a manifestar-se também nos seus trabalhos posteriores. Essas características são essencialmente o espírito crítico (com desprezo pelos argumentos de autoridade), a busca da clareza e do rigor, e a crença no poder da Razão para organizar e fundamentar o conhecimento. A elas juntam-se a preferência pela expressão concisa e, refletindo o ambiente da formação intelectual de Anastácio da Cunha, a elevação da experiência a guia e árbitro da indagação científica, isto é, a distinção clara entre o papel da experiência na busca e fixação das leis físicas, e o raciocínio matemático que sobre elas elabora e delas retira consequências. (RODRIGUES *et al.*, 2013, p. 22)

Sobre as atividades docentes de JAC em Coimbra, ressaltam seu caráter amigável e disposição em compartilhar seus saberes.

> Em Coimbra, sabemo-lo através destas memórias de D. José Maria, Anastácio da Cunha foi mais do que lente; assumiu-se como um verdadeiro Mestre que, entre 1773 e 1778:

---

[22] Infelizmente não tivemos ainda oportunidade de consultar os originais transcritos por Antônio José Teixeira. Embora profusamente comentada desde sua publicação, as mais recentes descobertas, incluindo a nossa própria, contrariam algumas partes dessa transcrição.

> – liderou um grupo de discípulos onde a instrução eminentemente literário-científica se transmitiu por palavras mas também se propagou através de atos, [...]
>
> – desenvolveu profundos laços de amizade que foram muito além da simples relação de lente-aluno [...]
>
> – fomentou um método [...] de combater a ignorância, de instruir discípulos e de cultivar as Ciências [...]. (RODRIGUES *et al.*, 2006, p. 27-28)

Frisam Rodrigues *et al.* (2013, p. 34) que "o que estudámos nestes manuscritos, e muito particularmente nas Anecdotas, revela sobretudo o muito que ainda há a estudar neles".

Também em 2013, nossa dissertação de mestrado, concluída em 2005, foi editada e publicada como livro e, embora este não contenha as informações mais recentes sobre JAC, seus prolegômenos podem ali ser encontrados, como base biográfica e contextual. Acerca das ações docentes de JAC, destacamos que estaria de acordo com o proposto pela universidade:

> O mestre quis cumprir os Estatutos do curso de matemática, fazendo o que este ditava: experimentos, resolução de problemas, saídas a campo, investigações, mas, nada disso agradou seus alunos. (SANTOS, 2013, p. 75)

Ou pelo menos não agradou parte deles, pois havia um pequeno grupo que acompanhava o professor em suas práticas (SANTOS, 2013).

No XIII Congresso da Sociedade Espanhola de História da Ciência e Técnica, realizado em Madri em 2015, alguns anastacianos apresentaram trabalhos dando ciência do andamento das pesquisas do Projeto MAT², bem como de resultados alcançados.

Coube à D.ra Ralha relatar o percurso do projeto, com o artigo *José Anastácio da Cunha e o projeto MAT²: no trilho de uma história extraordinária.* Esse estudo (RALHA, 2015), além de informar sobre a trajetória investigativa da pesquisadora até sua chegada ao acervo da Casa de Mateus, atualizava a biografia de JAC, retratando-o como um contraponto ao atraso matemático atribuído a Portugal no século XVIII e descrevendo sua participação na fundação da Casa Pia de Lisboa.

> [...] com a descoberta do espólio de Mateus, ficou claro que a participação de Anastácio da Cunha na fundação do projeto educativo da (Real) Casa Pia em Lisboa foi estruturante, multivariada, intensa e deu frutos: desta escola – simultaneamente prisão, escola e oficina – haveriam de sair, poucos anos mais tarde e ainda em vida do seu mentor, alunos distintos, nomeadamente, em matemática [...]. (RALHA, 2015, p. 58)

Ralha (2015, p. 60) destaca que as pesquisas que vêm sendo feitas por membros do projeto concentram-se na “análise das suas obras matemáticas ainda inéditas” e explicita a necessidade de cooperação com outros países, em especial o Brasil:

> No trabalho que vimos desenvolvendo temos privilegiado o uso de fontes primárias, a colocação das obras estudadas nos seus contextos históricos, a análise cuidada de relações, influências e impactos, nacionais e internacionais. Sentimos, por isso, a necessidade de trazer para o nosso trabalho variadas áreas do saber que vão desde a História e passam pela Literatura, ou pelos Estudos Militares. Sentimos, igualmente, a necessidade de alargar a nossa janela de interesse além-fronteiras, muito especialmente ao Brasil e, esperamos poder, igualmente, contar com os conhecimentos sobre o século XVIII que os colegas espanhóis e sul-americanos possam aportar. (RALHA, 2015, p. 60)

Nesse mesmo congresso, Maria Luísa Malato apresentou o estudo *O que é iluminismo segundo José Anastácio da Cunha*, em que contraria Cantarino (2006) em diversos pontos, destacando que:

> A vida e a obra de José Anastácio da Cunha, poeta e matemático, é especialmente coerente [...] seja quando despreza as regras retóricas; seja quando se recusa a dar a solução prévia dos problemas matemáticos; seja quando mistura Geometria e Poesia; seja ainda quando discute os princípios pedagógicos do seu tempo [...]. (MALATO, 2015, p. 147)

Considera que, tratando-se de pedagogia, ao contrário dos moralistas, JAC admitia a utilização de valores morais, sociais e religiosos como corriqueiros: “melhor bem é o que é feito sem intenção ou finalidade” (MALATO, 2015, p. 152). Também ressalta que JAC era contrário à aplicação de castigos corporais às crianças.

Ao terminarmos nossa revisão de literatura, consideramos ser possível confrontar as informações nela colhidas e os documentos originais, alguns dos quais inéditos. Torna-se possível também respondermos algumas das questões de pesquisa que formuláramos, além de delimitarmos nosso objetivo principal, que vem a ser:

- Analisar as atividades de JAC relacionadas ao ensino, no contexto dos números inteiros negativos.

Para atender a esse objetivo, esta tese se desenvolve em quatro capítulos:

– Capítulo 1 – Considerações iniciais:

  Nele, além das seções já expostas, apresentaremos os aportes teórico-metodológicos adotados.

– Capítulo 2 – José Anastácio da Cunha e suas relações com instituições de ensino:

Nesse capítulo apresentaremos a biografia do protagonista deste estudo e as instituições educacionais em que comprovadamente atuou: a Universidade de Coimbra e a Real Casa Pia de Lisboa, além da Academia Real da Marinha de Lisboa, que também acolheu muitos de seus ex-alunos.

– Capítulo 3 – 1785: O duelo literário de 1785: *"Sobre a natureza das quantidades negativas":*

  Esse capítulo retrata o duelo literário acerca das quantidades negativas, por meio de uma "reconstrução" dos eventos e dos conceitos matemáticos, além de trazer uma síntese histórica do estado dos números negativos à época.

– Capítulo 4 – Considerações finais:

  Esse capítulo apresenta os resultados da pesquisa, confrontando-os com nosso objetivo inicial. Nele também procuramos delinear possíveis caminhos para pesquisas futuras.

Na próxima seção, exporemos os aportes adotados nesta pesquisa de vertente historiográfica no âmbito da educação matemática.

1.3 APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Estando nosso trabalho enquadrado na educação matemática, com viés histórico, identificamos a necessidade de definir aportes teóricos e metodológicos que abrangessem ambos os campos: em história, com a finalidade de esclarecer nossa concepção e o tipo da abordagem adotada, e em educação matemática, para a análise dos dados.

1.3.1 Enquadramento em história

Desde que nossa pesquisa se esboçou, percebemos a necessidade de clareza quanto à concepção de história que iríamos adotar.

Recorremos então à obra de Paul Veyne, que nos apontou que "a história é quer uma série de acontecimentos, quer a narração desta série de acontecimentos" (VEYNE, 1987, p. 423). Também consideramos a característica de não linearidade da trama histórica e a importância de ponderar a perspectiva de tempo e de contexto dos acontecimentos, como propõe Le Goff (2013).

Buscando uma conceituação para ‘documento’, adotamos a interpretação expandida de Charles Samaran (*apud* LE GOFF, 2013, p. 490): “Há que tomar a palavra 'documento' no sentido mais amplo, documento escrito, ilustrado, transmitido pelo som, a imagem, ou de qualquer outra maneira”.

A essa definição, Le Goff acrescenta:

> O documento é uma coisa que fica, que dura, e o testemunho, o ensinamento (para evocar a etimologia) que ele traz devem ser em primeiro lugar analisados desmistificando-lhe o seu significado aparente. O documento é monumento. (LE GOFF, 2013, p. 497)
>
> O novo documento, alargado para além dos textos tradicionais, transformado – sempre que a história quantitativa é possível e pertinente – em dado, deve ser tratado como um documento/monumento. De onde a urgência de elaborar uma nova erudição capaz de transferir este documento/monumento do campo da memória para o da Ciência histórica. (LE GOFF, 2013, p. 498)

Quanto aos procedimentos de análise dos documentos, pretendemos evitar olhar o passado de forma atualizada. Devemos nos distanciar do passado de forma segura, a fim de evitar o anacronismo, segundo Fustel de Coulanges (*apud* LE GOFF, 2003):

> A leitura dos *documentos* não serviria, pois, para nada se fosse feita com ideias preconcebidas [...] A sua única habilidade (do historiador) consiste em tirar dos documentos tudo o que eles contêm e em não lhes acrescentar nada do que eles não contêm. (LE GOFF 2013, p. 487; grifo no original)

Para Veyne (1987), em pesquisas de cunho histórico o modo de analisar os documentos é de suma importância. Considera que o historiador deve pautar sua análise documental numa perspectiva historiográfica que busque significação em história de modo essencialmente contextualizado.

Será nas perspectivas desses autores que iremos proceder em nosso trabalho.

Cabe-nos agora esclarecer sobre o tipo de abordagem escrita que faremos, pois, segundo Grattan-Guinness (2004), é fundamental distinguir entre História[23] – que enfatiza a história propriamente dita, com seus percalços – e Herança – que enfatiza nossa herança, por meio de aspectos cumulativos.

---

[23] O termo é aqui adotado na acepção utilizada por Grattan-Guinness. Este autor grafa as vertentes ‘história’ e ‘herança’ em minúsculas, mas empregaremos iniciais maiúsculas para diferenciá-los de suas acepções correntes.

Desde já posicionamo-nos na vertente História, embora tendo em conta que, num mesmo trabalho, possa ocorrer concomitantemente com menor predominância também a vertente Herança (GRATTAN-GUINNESS, 2004).

Grattan-Guinness considera que tanto a abordagem na forma de História como na forma de Herança são válidas, mas chama atenção para o fato de em muitos casos haver confusão entre estes dois tipos de abordagem, e frisa que este é o problema. "A confusão dos dois tipos de atividade não é legítima, seja tomando a herança como história [...] ou a história como herança [...][24]" (GRATTAN-GUINNESS, 2004, p. 165, tradução nossa[25]).

O autor formula perguntas cujas respostas evidenciam distinções básicas entre os dois tipos de abordagem. Quanto à História: "'o que aconteceu no passado?' [...] 'por quê?' [...] 'o que não aconteceu no passado? e por que não?'"[26] (GRATTAN-GUINNESS, 2004, p. 164). E, por meio da Herança*:* "'como chegamos até aqui?'"[27] (GRATTAN-GUINNESS, 2004, p. 165).

Para responder às questões propostas pela História, é necessário articular problemáticas externas à produção matemática, como por exemplo as influências institucionais que levaram à publicação de um texto ou o contexto social em que o autor se situa. No caso da Herança, usa-se uma visão internalista, em que se supõe que a matemática seja um saber cumulativo, em que respostas se darão por meio de um encadeamento lógico, evidenciando uma sucessão de acontecimentos que parecem não poder ter ocorrido de outro modo (GRATTAN-GUINNESS, 2004).

Ao situar o leitor por meio de questionamentos que revelam o contraste básico entre essas duas abordagens, o autor acrescenta a diferença filosófica entre elas:

> A diferença filosófica é que herdeiros tendem a se concentrar no conhecimento sozinho (teoremas como tal, e assim por diante), enquanto os

---

[24] Em inglês lê-se: "The confusion of the two kinds of activity is not legitimate, either taking heritage to be history […] or taking history to be heritage […]".

[25] Exceto se diferentemente informado, todas as traduções de citações em idioma estrangeiro são nossas.

[26] Em inglês lê-se: "'what happened in the past?' […] 'why?' […] 'what did not happen in the past?' and 'why not?'".

[27] Em inglês lê-se: "'how did we get here?'".

> historiadores também procuram motivações, causas e compreensão em um sentido mais geral[28]. (GRATTAN-GUINNESS, 2004, p. 165)

Outras diferenças mais pontuais são apresentadas pelo autor, tais como as descritas no Quadro 1.

Quadro 1. Contrastes pontuais entre História e Herança.

Aspecto	História	Herança
Tipo de influência	Considera influências negativas.	Suscetível a considerar apenas influências positivas.
Papel da cronologia	Torna-se algo difícil, às vezes sem resposta.	Ocupa-se em enumerar.
Determinismo/ indeterminismo	Indeterminista, registra oportunidades perdidas, desencadeamentos matemáticos que poderiam ter ocorrido de outras formas.	Determinista, traz a ideia de progresso, de moderno e de uma matemática cumulativa e inevitável.
Descrição	Tenta explicar desenvolvimentos, atrasos e percalços.	Relata uma certa harmonia, sem percalços.
Pré e pós-história	Tenta prever, assumindo a impossibilidade.	Procura perspectiva e retrospectiva.

Fonte: Dados da pesquisa, com base em Grattan-Guinness (2004).

Ressalte-se que não há superioridade da História em relação à Herança:

> [...] nenhuma reivindicação é feita de que a história é superior à herança, ou esteja num nível superior a ela. Um ensaio associado a este, lidando com boas e más práticas empregadas em investigação da herança, é muito desejável. História e herança são gêmeas, cada uma lucrando com as práticas utilizadas na outra[29]. (GRATTAN-GUINNESS, 2004, p. 168)

Para Grattan-Guinness (2004), o importante é haver clareza sobre o tipo de abordagem que de fato está sendo realizada.

Apoiando-nos nesse autor, servirmo-nos predominantemente da História para o desenvolvimento desta tese.

---

[28] Em inglês lê-se: "A philosophical difference is that inheritors tend to focus upon knowledge alone (theorems as such, and so on), while historians also seek motivations, causes, and understanding in a more general sense".

[29] Em inglês lê-se: "[...] no claim is made that history is superior to heritage, or superordinate upon it. A companion essay to this one dealing with good and bad practices in the prosecution of heritage is very desirable. History and heritage are twins, each profiting from practices used in the other".

1.3.2 Enquadramento em educação matemática

Como mencionado, os principais documentos que sustentam a construção desta tese são cartas que guardam relação com o ensino num contexto sobre a natureza das quantidades negativas.

Sumariamente, podemos dizer que as quantidades negativas referidas nesses documentos vêm a ser o que atualmente denominamos números inteiros negativos. A conceituação de tal conjunto numérico teve um longo e difícil percurso, marcado por muitos entraves e envolvendo estudos, debates e reflexões, ao longo de vários séculos, por aqueles que se ocuparam em estudar a matemática. No entanto, as preocupações acerca do ensino desse conteúdo são relativamente novas.

Devemos a George Glaeser um dos primeiros estudos sistematizados sobre as dificuldades apresentadas por vários matemáticos no tratamento dos negativos e a Gert Schubring o alargamento dessa temática. Ambos apresentam a história dos números negativos e consideram que antes de sua conceitualização houve discordância sobre sua existência e utilidade. Identificaram, na história, que as dificuldades apresentadas pelos matemáticos foram inerentes ao saber, o que caracteriza obstáculos de gênese epistemológica.

O estudo do obstáculo epistemológico como componente do pensamento científico foi investigado primariamente por Gaston Bachelard. A aplicação desse conceito na identificação de causas de dificuldades na aprendizagem em matemática foi inaugurada por Guy Brousseau.

Segundo Igliori (2015), Bachelard:

> [...] propunha que é em termos de obstáculos que se assenta o conhecimento científico. Que é no ato mesmo de conhecer que aparecem, por uma espécie de necessidade funcional, as perturbações e as lentidões, nas quais se mostram as causas de estagnação e de inércia do pensamento, as quais ele denomina obstáculos epistemológicos. Um obstáculo epistemológico incrusta-se no conhecimento não questionado. (IGLIORI, 2015, p. 124)

Quanto a Brousseau, esclarece que:

> A noção de obstáculo epistemológico foi então caracterizada [...] como um obstáculo à aprendizagem da Matemática constitutivo por um saber mal-adaptado, no sentido de Bachelard, e como ferramenta de análise para erros recorrentes e, portanto, não aleatórios cometidos por estudantes. (IGLIORI, 2015, p. 125-126)

Pesquisas como as de Glaeser (1981) e Schubring (2005), que enfatizam questões de ensino e aprendizagem dos números inteiros negativos ao identificarem fatores e concepções que deram origem a obstáculos epistemológicos ainda hoje presentes em nossos alunos, desempenharam importante papel em nosso trabalho, como aportes teóricos para nossas inferências.

As reflexões de Glaeser constam no artigo *Epistemologia dos números negativos*, em que identificou dificuldades apresentadas pelos matemáticos ao longo da história. A partir do diagnóstico desses embaraços, o autor aponta alguns obstáculos epistemológicos, salientando que estes podem repetir-se em sala de aula, frustrando a concepção dos professores de que o ensino e aprendizagem dos números inteiros negativos sejam fáceis. Apresenta uma lista de obstáculos provisórios identificados em documentos de vários matemáticos, entre eles Diofanto de Alexandria (201-214 a 284-298), Bramagupta (598-668), Simon Stevin (1540-1620), Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), Lazare Carnot (1753-1823), René Descartes (1596-1650), Leonhard Euler (1707-1783) e Hermann Hankel (1839-1873).

A lista inclui seis obstáculos:

> 1. Inabilidade para manipular quantidades negativas isoladas. 2. Dificuldade para dar significação às quantidades negativas isoladas. 3. Dificuldade em unificar a reta numérica [...]. 4. A ambiguidade dos dois zeros. 5. A estagnação ao estágio das operações concretas (por oposição ao estágio das operações formais). É a dificuldade de se desviar de um sentido "concreto" dado aos entes numéricos. 6. Busca de um modelo unificador: encontrar um "bom" modelo aditivo, válido para o modelo multiplicativo em que esse modelo é inoperante [...][30]. (GLAESER, 1981, p. 308)

No decorrer de sua explanação Glaeser (1981) esclarece que Diofanto não aceita a existência de números negativos isolados. Aprofundando algumas das afirmações de Glaeser (1981) acerca das citações que ele utiliza, constatamos que Stevin concebe a existência de soluções negativas no contexto da resolução de equações, verificamos que a noção de realidade associada ao número não lhe permite aceitá-las chamando-as então de fictícias: característico de dificuldade epistemológica relativa ao conceito de número e/ou de quantidades negativas; Bramagupta considera que uma divida subtraída de nada torna-se um bem e que um bem subtraído de nada torna-se uma dívida; Carnot em 1803 num texto intitulado *Geometria de posição*

---

[30] Em francês se lê: "1. Inaptitude à manipuler des quantités negatives isolées. 2. Difficulté de donner um sens à des quantités negatives isolées. 3. Difficulté à unifer la droite numérique [...] 4. L'ambiguité des deux zeros. 5. La stagnation au stade des opérations concrétes (par oppsition au stade des opérations formelles). C'est la difficulté de s'écarter d'un sens 'concret' attribué aux êtres numériques. 6. Désir d'un modèle unifiant: Souhait de faire fonctionner un 'bon' modèle additive, également valable pour illustrer le domaine multiplicatif où ce modèle est inopérant [...]".

denomina de operação impossível a subtração de uma quantidade efetiva do zero; MacLaurin, D'Alembert e Carnot concebem o negativo e o positivo como opostos: o negativo neutraliza o positivo, com naturezas distintas – ou seja, a quantidade negativa é tomada como tão real quanto a positiva, mas em direção oposta; Stevin, Carnot e Euler, observaram a dificuldade em passar de um zero que significava ausência de quantidade para um zero que denota origem zero.

De acordo com Glaeser (1981) a superação dos cinco primeiros obstáculos viabilizou a aceitação das quantidades negativas como números e justificou o fundamento do modelo aditivo, mas gerou outro obstáculo epistemológico: a compreensão da estrutura multiplicativa. Esse pesquisador considera Hankel como responsável pela superação dos seis obstáculos ao rejeitar a busca por um modelo explicativo dos inteiros, em sua obra *Teoria sobre os números complexos*, publicada em 1867. Ainda de acordo com Glaeser (1981, p. 338-339), "a revolução trazida por Hankel faz parte da ruptura de uma ideologia que permeou o pensamento matemático até o final do século XIX"[31].

Ao considerar sua lista provisória de obstáculos, Glaeser (1981) salienta a importância de continuidade no estudo do tema, particularmente com o objetivo de se obter uma metodologia norteadora de ensino que permita a construção do conceito de número inteiro negativo e de sua regra de sinais de modo a atender satisfatoriamente os questionamentos levantados pelos alunos. Esse autor também apresenta em seu estudo o que denomina sintoma de evitação, que vem a ser a utilização de quantidades positivas em detrimento das negativas.

Schubring (2005) debruça-se sobre o tema em seu livro *Conflitos entre generalização, rigor e intuição*, cuja seção 2 do capítulo 2 traz um longo estudo intitulado "O desenvolvimento dos números negativos". No início de sua apresentação, o autor assume o uso majoritário de uma metodologia externalista (voltada a outros aspectos que não os matemáticos, como por exemplo o contexto social), sem desconsiderar a abordagem internalista (conceitos estritamente matemáticos). Em sua análise, evidencia os esforços dos matemáticos durante o processo de esclarecimento de operações com números negativos em contextos diferenciados,

---

[31] Em francês se lê: "Le bouleversement apporté par Hankel s'inscrit dans la rupture d'une idéologie qui imprégnait la pensée mathématique jusqu'à la fin du XIX siécle".

constatando que a generalização do conceito de número negativo foi um dos fatores que motivaram a algebrização da matemática.

Schubring (2005) expande o rol de matemáticos pesquisados por Glaeser, enfatizando o contexto literário da redação das obras que pesquisou. Ao analisar livros do início da era moderna, caracteriza-os como primordialmente destinados a um pequeno público de estudiosos, dentre os quais menciona Michael Stifel (1487-1567) e sua *Arithmetica integra* (em que considera os números negativos como menores que zero); Petrus Ramus (1515-1572) e sua *Algebra* (em que declara as operações de adição e subtração como inversas); Girolamo Cardano (1501-1576) e suas obras *Ars magna* e *De regula aliza* (na primeira admitindo números negativos como soluções de equações que denomina fictícias, realizando assim as primeiras rupturas para o desenvolvimento do conceito de número negativo; na segunda rejeitando essas concepções e afirmando que menos multiplicado por menos é igual a menos); François Viète (1540-1603), que redigiu várias obras algébricas considerando a subtração apenas quando esta mostrava resultado positivo; Albert Girard (1595-1632) e sua *Invention nouvelle en l'algèbre*, em que interpreta os números negativos geometricamente; e Descartes (1596-1650), que em sua *Géométrie* revela influências da visão epistemológica de Cardano, operando com números negativos, mas com algumas restrições devido a um conceito específico de quantidades.

Para Schubring, a partir dos livros de Antoine Arnauld (1612-1694) [32], escritos em francês, para naturalmente poderem ser lidos por um público mais alargado, exibem o conceito de quantidades opostas, como cancelamento para as de mesma natureza, e explica a regra de sinais como sendo a de que menos multiplicado por menos será apenas acidentalmente igual a mais. "Obviamente, Arnauld foi motivado por profundas preocupações epistemológicas, semelhantes às de Cardano [...] [33]" (SCHUBRING, 2005, p. 52).

Arnauld manteve longo debate com Jean Prestet (1648-1691) acerca da compreensão das quantidades negativas.

Prestet visou corrigir as lacunas presentes no livro de Arnauld em relação às quantidades negativas e redigir uma obra superior à de seu contemporâneo.

---

[32] Autor do livro *Novos elementos de geometria.*

[33] Em inglês lê-se: "Obviously, Arnauld was prompted by profound epistemological concerns, similar to those of Cardano [...]".

Apresenta em seu livro os números negativos com o mesmo *status* dos positivos e utiliza a regra de sinais de modo algébrico. Incorre porém em contradições:

> Prestet continuou a confiar, no entanto, no conceito substancialista de "existência", pois suas próprias reflexões não eram baseadas em números, mas em quantidades existentes na vida real. Somente existiam quantidades positivas, disse ele, caracterizadas pela ideia de mais [...]. Por outro lado, quantidades negativas não existiam e seriam mais bem designadas como "nada" ou "zero". Ser uma quantidade negativa e não ser nenhuma quantidade pareciam ser a mesma coisa[34]. (SCHUBRING, 2005, p. 56)

Os livros de Arnauld e Prestet profusamente reeditados revelam ainda as suas dificuldades em fundamentar os números negativos. Ambos os trabalhos são considerados marcos do desenvolvimento de um novo estilo de redação, que se incorporaria nos livros modernos. No século XVIII, o público-alvo dessas obras estava principalmente nas universidades e escolas militares, com uma latência ainda mais acentuada na busca de generalização do conceito de números negativos, bem como de seu uso (SCHUBRING, 2005).

Iremos nos apoiar nos estudos de Glaeser (1981) e de Schubring (2005) quanto à convergência dos obstáculos de origem epistemológica, de modo a nos auxiliarem no diagnóstico de possíveis dificuldades encontradas pelos personagens diretamente envolvidos no contexto das cartas sobre a natureza das quantidades negativas, evitando informações que considerarmos influenciadas por uma visão anacrônica.

[34] Em inglês lê-se: "Prestet continued to rely, however, on the substantialist concept of 'existence', for his own reflections were based not on numbers, but on quantities existing in real life. Only positive quantities existed, he said, they were characterized by the positive idea of plus [...]. Conversely, negative quantities did not exist and had better be designated as 'rien' or 'zero'. For to be a negative quantity and to be no quantity at all appeared to be the same thing".

CAPÍTULO 2 – JOSÉ ANASTÁCIO DA CUNHA E SUAS RELAÇÕES COM INSTITUIÇÕES DE ENSINO

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos a biografia[35] do protagonista de nossa pesquisa e as instituições educacionais onde comprovadamente atuou: a Universidade de Coimbra e a Real Casa Pia de Lisboa, além da Academia Real da Marinha de Lisboa, que acolheu muitos de seus ex-alunos.

2.2 JOSÉ ANASTÁCIO DA CUNHA

Natural de Lisboa, JAC além de matemático e professor também foi militar e poeta. Nasceu em 11 de maio de 1744, na Rua dos Ferreiros, Freguesia de Santa Catarina, Lisboa, filho do casal Lourenço da Cunha e Jacinta Inês (REGISTRO PAROQUIAL, 1739-1747). Sobre seus pais, sabemos que a mãe crescera na casa do tesoureiro-mor do reino, sendo dotada de "excelentes costumes" (MACHADO *apud* ESTRADA, 2006, p. 100), e que o pai exerceu a profissão de pintor – "o maior pintor português [...] no gênero de arquitetura [...]" (MACHADO *apud* RODRIGUES *et al.*, 2013, p. 98).

JAC recebeu do pai instruções de desenho e perspectiva e estudou nas Necessidades em Lisboa, da Congregação do Oratório[36] de Lisboa, onde teve aulas de gramática, retórica, filosofia, latim, grego e francês. Durante o período em que ali esteve, estudou, sem mestre, livros de Clairaut, Tacquet e Tosca[37], sendo que os dois últimos "lhe descontentaram [...] pela sua superficialidade nas demonstrações e falta

---

[35] Com novos documentos agora disponíveis, nos será possível corrigir e expandir informações apresentadas em nossa dissertação concluída em 2005.

[36] A escola, voltada ao ensino experimental, contava com laboratórios, podendo em alguns aspectos ser considerada um contraponto ao ensino escolástico então oferecido pelos jesuítas (CARVALHO, 2011).

[37] Alexis Claude de Clairaut (1713-1765), André Tacquet (1612-1660) e Tomás Vicente Tosca e Masco (1657-1723).

de conexão nos princípios" (VASCONCELOS[38] *apud* RODRIGUES *et al*., 2013, p. 55-56).

Em 1760 ficou órfão de pai e em 1762 esteve comprovadamente, matriculado na Universidade de Coimbra no curso de leis, mas não há fatos que permitam concluir que tenha, na prática, assistido às aulas ou realizado qualquer exame. Embora portador de problemas de visão congênitos, ingressou em junho de 1764 no Regimento de Artilharia do Porto, sendo aquartelado em Valença do Minho (VASCONCELOS, 2013). O local destinado a acolher os militares não dispunha, no entanto, de infraestrutura adequada, faltando-lhes até mesmo roupas e armamentos, tendo a população de dar-lhes guarida, o que gerou deserção de muitos (CURADO, 2012).

Nesse regimento, JAC pertenceu à Companhia que congregava "os oficiais com melhor preparação científica", ali obtendo "nomeação direta para 1.º tenente da companhia de bombeiros[39]" (CURADO, 2012, p. 230).

O exército português passava nesse período por uma reorganização orquestrada pelo marquês de Pombal[40], que contratou o conde de Lippe[41], príncipe alemão, para chefiar as forças nacionais e aliadas. O conde, pessoa culta, com formação em humanidades e em ciências exatas, formulou regulamentos e estimulou o ensino e prática da engenharia militar (ESTRADA; SILVA; RALHA, 2006). Durante o período em que JAC permaneceu nesse regimento, foram oficiais superiores o francês tenente-coronel Luís D'Alincourt, o português tenente-coronel Luís Pinto de Sousa Coutinho, o escocês coronel Diogo (James) Ferrier, o português major Pedro A. Galego Soromenho[42] e o suíço tenente-coronel J.V. Miron de Sabionne (CURADO, 2012).

O círculo militar de Valença compunha-se de "formações diversas e ideias estrangeiras marcadas pelos 'enciclopedistas'", sendo "seguramente um ambiente ideológico-cultural privilegiado" (ESTRADA; SILVA; RALHA, 2006, p. 313). A maioria

---

38 Vasconcelos (2013) refere-se às anedotas redigidas no século XVIII por D. José Maria de Sousa Mourão e Vasconcelos (5.º morgado de Mateus).

39 'Bombeiro' aqui significa 'atirador de bombas'.

40 Sebastião José de Carvalho e Melo (1699-1782), 1.º conde de Oieras e 1.º marquês de Pombal. Foi secretário de estado do reino durante o reinado de D. José I (1750-1777), sendo responsável pelas reformas ocorridas nesse governo, incluindo a reformulação do exército português.

41 Conde Guilherme de Schaumbourg-Lippe (1724-1777).

42 Soromenho foi submetido a prisão domiciliar em 1768.

dos militares estrangeiros seguia o protestantismo, o que os levava a serem considerados hereges pela ortodoxia vigente. JAC integrou-se bem a esse ambiente, comunicando-se em outros idiomas e participando, com seus mais próximos, de debates que cobriam "desde literatura à religião" (ESTRADA, 2006, p. 101).

O oficial superior D'Alincourt, com o objetivo de conceder promoções por mérito, providenciou um exame para 19 oficiais, em que JAC classificou-se em primeiro lugar, sendo proposto para capitão. A promoção, entretanto, nunca se efetivou, como tampouco parece ter sido a promessa de concessão do dobro do salário (CURADO, 2012).

Sobre JAC, o tenente-coronel Sousa Coutinho relata ter "excelente conhecimento científico e quantas boas qualidades se possam desejar". Por sua vez, o coronel Diogo Ferrier o descreve como "um dos que no Regimento se acredita de ter mais ciência e um muito bom procedimento" (CURADO, 2012, p. 233-234).

Com Ferrier, JAC teve convívio próximo, assim como com o capitão Richard Muller e o general Simon Fraser[43], e teria mesmo chegado a conhecer pessoalmente o próprio conde de Lippe. O convívio com esses oficiais superiores viabilizou seu acesso a obras literárias, filosóficas e de matemática. Cabe destacar que muitos desses livros eram proibidos em Portugal. Foi neste período que estudou, em versão inglesa, o *Tratado de álgebra* de Thomas Simpson, bem como as obras *Principia* e *Arithmetica universalis*[44] de Isaac Newton. Por passar horas estudando sozinho e começar a sobressair-se em conhecimentos diversos, especialmente matemáticos, foi dispensado de frequentar as aulas que o regimento oferecia (RODRIGUES *et al.*, 2013).

> E esta aura de sabedoria foi confirmada quando, antes de 1768, o capitão de mineiros do seu Regimento, António Joaquim Oliveira, com o curso de engenheiro e mais tarde lente no Brasil, lhe pediu a sua "opinião sobre o que vários autores tinham publicado acerca das minas", dando origem ao "Ensaio sobre as minas" [...]. (CURADO, 2012, p. 234)

---

[43] "[...] por algum tempo agregado ao Regimento de Infantaria de Valença, mas que nunca foi capitão de mineiros, nem pertenceu ao Regimento de Artilharia [...]" (CURADO, 2012, p. 234).

[44] Mais tarde, no plano de estudos que elaborou para a Casa Pia, adotou o livro de Thomas Simpson (1710-1761) e declarou-se admirador de Isaac Newton (1643-1727).

No *Ensaio sobre as minas*[45], JAC cita vários autores estrangeiros, tecendo poucos elogios e a todos criticando, e afirma inexistirem materiais sobre o assunto em língua portuguesa (CUNHA, 1994). Destacamos parte da descrição, realizada por Estrada, dessa obra:

> Faz fortes advertências aos leitores desprevenidos para que não se deixem facilmente impressionar por palavras como "demonstração", "evidência", "provarei", etc., que muitas vezes só servem para esconder erros e mascarar a ignorância. (ESTRADA, 1994, p. XI)

Segundo Curado:

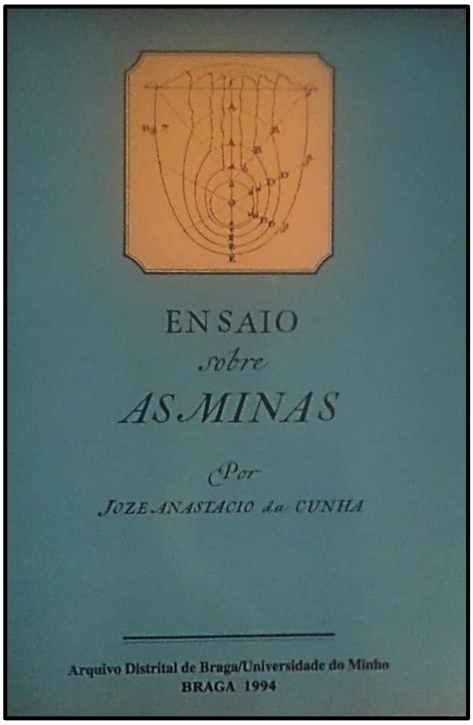
> [...] na mesma linha, o Major Simão Fraser [...] pediu-lhe, em 1769, a sua opinião sobre "Teórica da pólvora em geral, e a determinação do melhor comprimento das peças em particular", dando origem à conhecida "Carta Físico-Matemática", só publicada em 1838. (CURADO, 2012, p. 234-235)

Trata-se de uma memória sobre balística, em que há semelhanças com a organização realizada no *Ensaio sobre as minas*, contendo o "mesmo tipo de advertências contra afirmações de 'evidência' e 'demonstração', mesmo tipo de críticas a certos autores, mesma exaltação de outros, especialmente Newton" (ESTRADA, 2006, p. 105). Observamos, porém, que o *Ensaio sobre as minas* contém "uma parte prática especialmente dirigida aos soldados menos cultos", que Estrada caracteriza como a revelação de uma "preocupação pedagógica" (ESTRADA, 2006, p. 107).

---

[45] A D.ra Maria Fernanda Estrada encontrou o manuscrito inédito desta obra e foi responsável pela seção *Leitura, introdução e notas* da publicação, em 1994.

Figura 1. Frontispício do *Ensaio sobre as minas.*



Fonte: Cunha (1994).

Figura 2. Frontispício da *Carta físico-matemática.*

Fonte: Cunha (1838).

Nesse período, JAC também iniciou a redação do livro *Principios mathematicos*, traduziu poesias, peças de teatro e escreveu poemas[46].

Em Rodrigues (2013), encontramos o relato do 5.º morgado de Mateus acerca da repercussão dos trabalhos matemáticos de JAC:

> A vinda do General Fraser, inspetor ali, a quem mostraram os seus papéis sobre Matemática, e que lhe pediu lhos desse para os fazer imprimir [...]. Uma cópia deste papel teve-a Godinho, Governador de Timor e Solor, então Capitão no Regimento e vindo a Lisboa mostrou-a a J. Pereira Ramos e [ao] Bispo de Coimbra e estes ao Padre Monteiro que lhe fez elogios e falaram nele a Pombal [...]. Em consequência consultou Ciera e Franzini para ter o voto deles sobre o papel de Anastácio. O primeiro [...] disse que mostrava ser de um homem que conhecia as matérias. O segundo [...] disse que para um principiante era pouco, para um Mestre nada. (VASCONCELOS *apud* RODRIGUES *et al*., 2013, p. 60-61)

[46] Para mais informações sobre a produção poética, consultar *A obra poética do Dr. José Anastacio da Cunha: com um estudo sôbre o anglo germanismo nos proto-românticos portugueses*, obra de 1930 de Hernâni Cidade, e *Obra literária: poesia (com inéditos do autor)* (v. 1 e 2), de Maria Luísa Borralho e Cristina Marinho, publicada em 2001 (Campo das Letras).

Em 1773, o marquês de Pombal, informado das habilidades matemáticas de JAC, nomeou-o professor de geometria da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, concedendo-lhe o título de doutor.

Nesse novo ambiente, mediante autorização, continuou a utilizar sua farda militar, causando incômodo a alguns professores, que o apelidaram de "peralvilho"[47] (VASCONCELOS *apud* RODRIGUES *et al*., 2013, p. 61). Para Estrada (2006), com este gesto JAC assumiu sua identidade militar.

Como professor de uma recém-criada faculdade, teria provocado certo alvoroço e protestos. Numa disputa, registrada em missivas entre JAC e José Monteiro da Rocha[48] e publicada por Antônio José Teixeira no volume 38 (1890-1892) de *O Instituto: jornal scientifico e litterario* (TEIXEIRA, 1890-92), constam algumas afirmações atribuídas a JAC sobre seu modo de ensinar. Essa publicação é largamente utilizada para atribuir características ao estilo de ensino de JAC. De acordo com Teixeira, quando criticado por Monteiro da Rocha, JAC replicou:

> É verdade que sobre o meu modo de ensinar tive desagradáveis diálogos com o prelado ilustre, [...] reitor, e se via perplexo entre as sólidas razões com que eu me defendia, e a autoridade de meus inimigos [...].
>
> O meu *modo de ensinar* era o que a minha consciência e inteligência perfeitamente conformes nesse ponto com o que os *Estatutos* mandam, me ditavam. [...] Porém queria que também os estudantes trabalhassem, e os obrigava a resolver problemas. Tudo perfeitamente conforme aos *Estatutos*, e igualmente contrário ao que se tinha praticado, e praticava na Universidade [...].
>
> Compelido pois por força superior, conformei-me ao tal método estabelecido, e serenou a tempestade [...]. O mestre repetia ou pelo livro ou de cor literalmente as proposições da lição; e no dia seguinte cada estudante satisfazia repetindo de cor a proposição que lhe perguntavam. Nem se mostrava o uso das proposições, nem se resolviam problemas; ninguém ainda viu o lente do 1.º ano no campo ensinando as praxes, que os *Estatutos* mandam. Debalde solicitei os instrumentos para isso necessários: não me consta que a Universidade tenha ainda uma prancheta. Mas semelhantes lições dão trabalho aos mestres e luzes aos estudantes; e isso é justamente o que não convém. (TEIXEIRA, 1890-92, v. 38, p. 658-659; grifos no original)

Destacamos no entanto que, embora tal citação evidencie aspectos interessantes do modo de ensinar de JAC, é preciso ponderar que nenhum outro pesquisador teve, tanto quanto se sabe, acesso a estes documentos originais,

---

[47] Peralvilho: homem que tem ridículas pretensões a elegante.

[48] José Monteiro da Rocha (1734-1819), padre português. Professor e diretor da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, trabalhou na elaboração dos *Estatutos novos*, de 1772 (RODRIGUES *et al.,* 2013).

impedindo a verificação da fidelidade das transcrições, que além de tudo se limitam às aulas de geometria na Universidade de Coimbra[49].

Em 1776, propôs à Congregação de Matemática um *Compêndio de geometria*, de sua autoria, para que fosse usado nas aulas, mas jamais obteve resposta (FREIRE, 1872). De acordo com o amigo D. José Maria, morgado de Mateus, o objetivo de JAC com tal compêndio era fazer com que os estudantes exercitassem “a invenção e a aplicação à prática” (VASCONCELOS *apud* RODRIGUES *et al*., 2013, p. 62). Também nesse período, redigiu em inglês o texto *Logarithms & powers* e deu prosseguimento aos *Principios mathematicos* (ESTRADA, 2006).

Algum tempo mais tarde, em depoimento à Inquisição de Coimbra (PORTUGAL, 1778), relatou que em sua casa, em que morava com a mãe, era comum à noite receber alguns amigos e discípulos mais próximos, ocasião em que jogavam e discutiam acerca de assuntos variados, embora na maioria das vezes estivesse alheio às discussões, imerso em sua matemática. Os frequentadores de sua casa eram, entre outros, os irmãos D. Domingos Antônio, D. Rodrigo e D. José Antônio de Sousa Coutinho e seus primos D. José Maria e D. Antônio. De acordo com Vasconcelos (*apud* RODRIGUES *et al*., 2013), nessas ocasiões JAC por vezes ensinava geografia, história, fortificação, matemática e as línguas inglesa, francesa e italiana.

JAC também teve em Lisboa algumas discípulas, entre elas D. Maria Inácia Ferreira Souto, filha do secretário de estado dos negócios do reino e intendente da polícia João Inácio Ferreira Souto, o que atesta sobre algumas relações privilegiadas que JAC mantinha, mesmo fora do ambiente acadêmico, na universidade (ESTRADA, 2006).

Em 1777, com a morte do rei D. José I, assume o trono a filha deste, D. Maria I. Com essa mudança no poder, o marquês de Pombal foi destituído de seu cargo de primeiro ministro e afastado da vida política portuguesa. Durante o período em que o marquês exerceu seu cargo político, a Inquisição não perseguiu JAC, mas após a

[49] Optamos primordialmente por fontes primárias e, quando necessário, por citações que explicitem suas fontes originais, bem como pela localização destas.

queda do marquês o Tribunal do Santo Ofício voltou a atuar de modo mais ostensivo (FERRO, 1987).

Em 1778, JAC é denunciado[50] à Inquisição, episódio sobre o qual o morgado de Mateus relata:

> Mudou o Ministro, e de Valença se lhe preparou a tormenta que o veio soçobrar à Universidade aonde quieto vivia à sombra do respeito que os seus talentos e luzes, já reconhecidos, lhe mereciam e aonde exemplarmente passava os dias e noites. (RODRIGUES *et al.*, 2013, p. 63)

As acusações lançadas sobre JAC remontavam ao período em que estivera aquartelado em Valença do Minho, onde “se tinham feito loucuras grandes e rapaziadas [...], algumas desordens irreligiosas [...], leitura de alguns livros”, de que ele mesmo já não se lembrava (VASCONCELOS *apud* RODRIGUES *et al*., 2013, p. 63).

Segundo Portugal (1778) e Ferro (1987), as acusações principais eram as de: libertinagem, deísmo, leitura de livros proibidos, conviver com protestantes e/ou hereges, tratar de pontos de religião, comer carne em dias proibidos, manter uma manceba[51], assistir com pouca reverência à missa, dispensar os preceitos da igreja e, algumas vezes, embebedar-se. Rodrigo de Cunha Manuel Henriques de Melo e Castro, partícipe das tertúlias coimbrãs em casa de JAC, viria também a depor no processo da Inquisição, acusando-o, em particular, de beber leite e comer tostas com manteiga em dia de jejum.

Para Carvalho, Oliveira e Queiró (1987, p. IX), o professor de geometria tornou-se “uma das vítimas da viragem política que se produziu em Portugal a seguir à morte do rei D. José e o afastamento do seu poderoso ministro”.

JAC teve seus bens confiscados, sendo condenado pela Inquisição:

> [...] a sair em auto público de fé, a cumprir reclusão por três anos na Casa das Necessidades da Congregação do Oratório de Lisboa e quatro anos de degredo em Évora, tendo-lhe sido ainda interditada a entrada em Coimbra e em Valença. Os bens foram-lhe confiscados e ficou obrigado a cumprir, no primeiro ano de reclusão, dois dias por mês de penitências *pro gravioribus*, além das penitências espirituais impostas: no primeiro ano devia confessar-se nas principais festas religiosas, rezar em cada semana o terço do rosário de Nossa Senhora e em cada sexta-feira cinco Padres Nossos, cinco Ave Marias, as Chagas de Cristo e a Compaixão. (FERRO, 1987, p. XV)

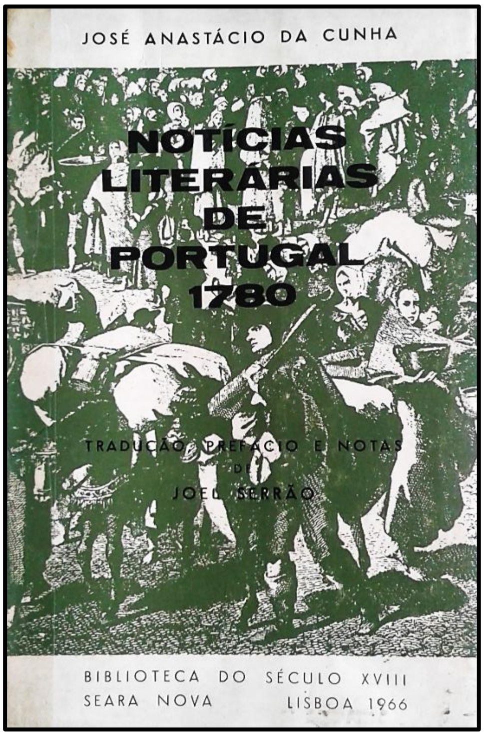
---

[50] O major Pedro A. Galego Soromenho é o autor da denúncia contra parte do regimento, incluindo JAC (RODRIGUES *et al.,* 2013).

[51] Em Valença do Minho, JAC morou com uma moça chamada Margarida (FERRO, 1987).

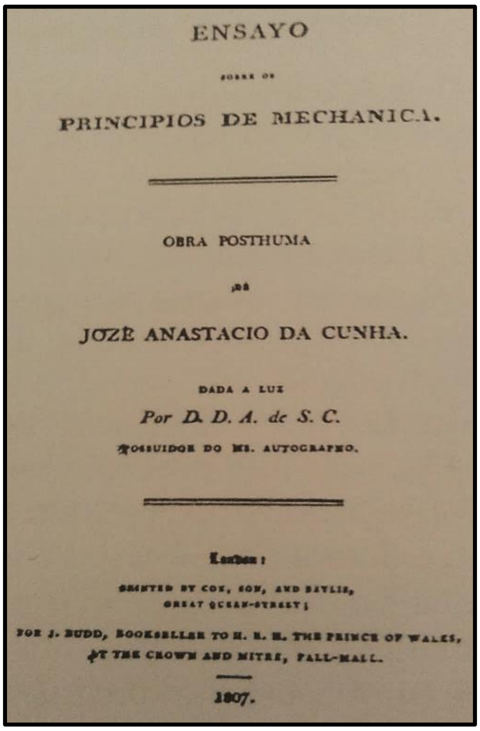
Durante a reclusão na Congregação dos Oratorianos, escreveu, que se saiba, várias obras matemáticas, entre as quais *La ballistique de Galilée*, uns *Principios do calculo fluxionario* e uma carta particularmente importante, intitulada *Necessidades*, com problemas de matemática, que atesta as ligações que JAC mantinha, por meio do Padre Teodoro de Almeida[52], com a recém-criada Academia das Ciências de Lisboa. Talvez também sejam desse período o *Ensayo sobre os principios de mechanica*[53] – escrito a pedido de seu ex-aluno do Colégio de São Lucas da Casa Pia, Manuel Pedro de Melo (1765-1833) – e as *Notícias literárias de Portugal*[54], "em que denuncia a amargura e o desencantamento da vida e do país que crítica com dureza e desassombro, mas que não deixou de amar" (ESTRADA, 2006, p. 109).

Figura 3. Frontispício das *Notícias literárias de Portugal 1780*.



Fonte: Cunha (1966)

Figura 4. Frontispício do *Ensayo sobre os principios de mechanica*.



Fonte: Cunha (1807)

---

52 Teodoro de Almeida (1722-1804) padre oratoriano, escritor e filósofo português (TORRES, 2000).

53 A publicação desse volume deve-se a D. Domingos de Sousa Coutinho (1745-1812), embaixador de Portugal em Londres, futuro conde do Funchal e ex-aluno de JAC na Universidade de Coimbra .

54 O historiador Joel Serrão (1919-2008) encontrou o manuscrito inédito em francês dessa obra na Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro e foi o responsável pela tradução, prefácio e notas de sua publicação em 1966.

Cumpriu parte de sua pena. Após os três anos de reclusão na Congregação dos Oratorianos, em janeiro de 1781, a pena foi-lhe comutada (muito possivelmente por influência de Pina Manique) e foi perdoado dos quatro anos de degredo em Évora, desconhecendo-se, todavia, se foi mantido o impedimento de regressar a Coimbra e a Valença do Minho.

Com saúde cada vez mais frágil e sem recursos financeiros, passou a morar na casa do amigo João Paulo Bezerra e a procurar discípulos para ensinar matemática. Também “procurou pôr a última mão aos seus *Principios mathematicos* e imprimi-los” (VASCONCELOS *apud* RODRIGUES *et al*., 2013, p. 64).

Por essa altura recebeu uma proposta de emprego ofertada pelo intendente geral da polícia Diogo Inácio de Pina Manique[55], que, além do salário, incluía alimentação e moradia para ele e sua mãe.

> O Intende Geral da Polícia, tendo em vista fazer um Colégio [Casa Pia] neste tempo [...] na sua Casa de Educação aonde os rapazes que mostrassem talentos aprendessem as ciências, lembrou-se de ter ouvido falar em José Anastácio e que seria melhor Diretor para o dito. (VASCONCELOS *apud* RODRIGUES *et al*., 2013, p. 65)

Ao cargo de diretor estavam atreladas as funções de professor substituto de astronomia, mecânica e matemática pura, bem como a de presidente do conselho escolar e elaboração do plano de estudos, com seus métodos de ensino (ESTRADA, 2006). Esta vertente de JAC, relacionada a métodos de ensino, também a encontramos nos conselhos que proferiu ao 5.º morgado de Mateus quando este lhe informou que pretendia empreender na educação do filho um catecismo de moral, apoiado em D’Alembert e nomes como Locke, Rousseau e Madame Genlis. JAC recomendou:

> Meu caro, nada de sistemas em educação: cada criança pede a sua forma de ser educada. O hábito das boas ações que nele desenvolvemos quando as praticamos sem intenção é o melhor Catecismo de Moral. Que quereis vós que ele perceba de todas as vossas dilucidações sobre a virtude, justiça, etc.? Ou ele se acostumará a considerá-las meras palavras ou ele terá delas ideias falsas, em grande parte. Quando lhe virdes uma má ação, a semente de qualquer vício, que ele conheça então o castigo como consequência. O diálogo do jardineiro em Rousseau, a anedota da bosta (*sic*), de Genlis, não me convencem. Tudo o que é composto não é bom, pois, se a criança reconhece o artifício uma vez, todo o efeito se perde. Praticai as virtudes, dai-lhe o gosto delas pela rotina: não o obrigueis a refletir senão quando a ocasião é propícia, nada de sermões, que ele tenha as ideias claras; fortificai-lhe o corpo e, quando ele tiver um julgamento claro, ensinai-lhe somente verdades, sem

[55] Diogo Inácio Pina Manique (1733-1805) estudou no Colégio da Congregação do Oratório e formou-se em leis na Universidade de Coimbra (TAVARES, 2017).

> pretenciosismo e sem fasto. (VASCONCELOS *apud* RODRIGUES *et al*., 2013, p. 77)

De acordo com Rodrigues *et al.* (2013), neste texto é possível perceber um procedimento eficaz de ensino, de natureza questionadora. JAC aceita o convite para ser diretor e transfere-se com a mãe para uma casa nas redondezas do Castelo São de Jorge, onde funcionaria o Colégio de São Lucas, da Casa Pia de Lisboa.

> [...] e ali, unindo sujeitos hábeis [...] formou um Estabelecimento que faz o seu elogio não só pela moral que respira nos Estatutos[56], e de cuja semente se viram provas, mas pelas sublimes ideias de Religião, e contudo simples, com que deviam ser educados, mas pela igualdade com que se pôs, sendo Diretor, com os Mestres nos votos e nas obrigações, sem se poupar e sem tomar disto ar de superioridade, mas com bom princípios e método [...]. (VASCONCELOS *apud* RODRIGUES *et al*., 2013, p. 66)

A Casa Pia de Lisboa tinha por público-alvo crianças órfãs ou pobres, jovens abandonados, mendigos e prostitutas (DUARTE; FIGUEIREDO; RALHA, 2015). Criado e dirigido por JAC, o colégio dessa instituição funcionaria por alguns anos[57].

Acerca do fechamento desse colégio, encontramos nos relatos do 5.º morgado de Mateus que:

> A rivalidade da Academia Real, da Aula de Marinha e da Universidade assim como emulação ao Intendente fez cair este Estabelecimento por intrigas vergonhosas e, com ele, acabou a pensão de José Anastácio e sua Direção, espalhando-se os mestres e rapazes dos quais alguns José Anastácio continuou a dirigir e o Intendente a proteger. (VASCONCELOS *apud* RODRIGUES *et al*., 2013, p. 66-67)

Alguns desses rapazes, alunos de JAC, continuaram seus estudos nos cursos de matemática oferecidos pela Universidade de Coimbra e pela Academia Real da Marinha, o que ocasionou naturalmente comparações entre os respectivos métodos de ensino:

> Os Rapazes, costumados ao exame da verdade, à severa exatidão com que pelos seus princípios estavam, em não se pagar de palavras por razões, nem a sofrerem que não houvesse demonstrações aonde tudo não fosse evidentemente provado, embaraçavam com as suas perguntas os Mestres e desesperavam-nos. A acepção das *quantidades negativas* e adoção dos sinais que as denominam fazem sair do cálculo absurdos e estes queriam defendê-los científica e pedantemente. S. e B.[58] sobre quem principiou o fogo da discórdia, havendo vários papéis dos Rapazes sobre isto e respostas dos

---

[56] *Estatutos novos*, de 1772, da Universidade de Coimbra.

[57] Não sabemos exatamente quantos anos o colégio de São Lucas funcionou. Certo é que em 7 de fevereiro de 1783 JAC ainda recebia seus proventos, conforme manuscrito da Casa Pia, depositado na Torre do Tombo.

[58] S. e B. provavelmente referem-se a Stockler e Brunelli, como veremos no próximo capítulo.

> Mestres que vinham atacar José Anastácio. (VASCONCELOS *apud* RODRIGUES *et al*., 2013, p. 67, grifo nosso)

Após o fechamento do colégio, novamente JAC contou com a ajuda de amigos[59], mas sempre com a preocupação de não tornar-se dispendioso. Sentia muitas dores e sofria da bílis, apesar dos cuidados médicos da melhor qualidade que os amigos lhe proporcionaram também. Quando as crises de dor davam trégua, sua rotina consistia em rever ou compor o livro *Principios mathematicos*, algumas vezes jantar na casa do 5.º morgado de Mateus e na de Manuel José Pereira, conversar com uma senhora sua amiga por quem nutria amor platônico e ensinar alguns discípulos. Gostava de animais e tinha sempre um cão (VASCONCELOS *apud* RODRIGUES *et al*., 2013).

Em 1.º de janeiro de 1787, veio a falecer depois de "um último ataque da bílis e retenção". Recebera antes, do padre Teodoro de Almeida a extrema-unção, morrendo "com a simplicidade que tinha vivido" (VASCONCELOS *apud* RODRIGUES *et al*., 2013, p. 72).

Terminada esta apresentação biográfica de nosso protagonista, traremos nas próximas seções dados sobre as instituições de ensino: Universidade de Coimbra – *Estatutos*, Real Casa Pia de Lisboa – *Plano de estudos* e Academia Real da Marinha – *Carta-lei*.

2.3 UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Nesta seção trazemos informações sobre a Universidade de Coimbra (onde JAC atuou como professor de geometria), especialmente quanto aos *Estatutos* de 1772 e a parte destes referente à Faculdade de Matemática.

A instituição, uma das mais antigas do mundo, foi fundada em Lisboa em 1290, no reinado de D. Dinis, e após alternadas mudanças de local, entre as cidades de Lisboa e Coimbra, estabeleceu-se definitivamente em 1537 nesta última.

---

[59] Os irmãos Sousa Coutinho (D. Domingos e D. Rodrigo), D. José Maria (5.º morgado de Mateus) e João Paulo de Bezerra de Seixas.

Em 1309, D. Dinis estabeleceu provisões ao Estudo Geral de Coimbra, por meio da denominada *Carta magna de privilégios*, entendida como sendo os primeiros Estatutos da Universidade de Coimbra e amplamente estudada por investigadores ao longo dos séculos.

Em 1431, no reinado de D. João I, foram redigidos outros *Estatutos*, regulamentando frequências, exames, graus, propinas e trajes acadêmicos. O rei D. Manuel I, em 1503, promulgou considerações sobre o reitor, disciplinas, salários dos mestres, provas acadêmicas e cerimônia do ato solene de doutoramento, também por meio de estatutos. Em 1598, definiram-se ainda outros *Estatutos* (ditos *filipinos*), confirmados por Filipe II em 1612 e reconfirmados por D. João IV em 1653 (RIBEIRO, 1871-72, v. 1).

Nos *Estatutos* de 1653, encontram-se os regimentos das faculdades de medicina, teologia, artes, cânones e leis (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1653). Esses preceitos foram "notáveis pela vastidão e miudeza, com que neles se acha regulada a parte administrativa e econômica, mais do que a literária" (ROCHA *apud* RIBEIRO, 1871-72, v. 1, p. 120) .

Os *Estatutos filipinos* de 1653 estiveram em vigor até a reforma pombalina[60], tomando lugar na história sob a designação de *Estatutos velhos*, em confronto com os chamados *Estatutos novos*, de 1772 (RIBEIRO, 1871-72, v. 1).

2.3.1 Os Estatutos novos, de 1772

Em meados do século XVIII, Portugal passou por grandes reformas, em sua maioria decorrentes de ações do marquês de Pombal, no reinado de D. José I. Uma dessas reformas dizia respeito ao ensino. Num contexto de profundas reformas na sociedade portuguesa, o marquês de Pombal usou seu cargo de ministro plenipotenciário de D. José I para, no domínio dos estudos universitários, mudar o paradigma de ensino que até então vigorara. A ênfase com essa reforma era num ensino mais útil e mais experimental que formasse profissionais qualificados que servissem às necessidades do estado e do povo, em suas variadas instâncias (MAXWELL, 1996).

---

[60] 1.º marquês de Pombal (1699-1782), responsável pela reformulação dos estudos em Portugal e, em particular, pela reforma da universidade (MAXWELL, 1996).

Devido às mudanças derivadas da reforma, a universidade precisou também de novos estatutos. A redação destes foi confiada à Junta de Providência Literária[61], comissão que deveria elaborá-los com o propósito de promover progresso e inovação (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772).

Na redação de novos estatutos, esta junta também contou com o auxílio de professores e especialistas de áreas específicas. (Veremos adiante aqueles pertinentes à matemática.) Em sua redação é possível perceber a intenção de integrar a Portugal a ideologia iluminista já reinante em outras universidades europeias (CARVALHO, 1978).

Em três volumes, os *Estatutos novos* descrevem orientações detalhadas de âmbito administrativo e pedagógico (Quadro 2).

---

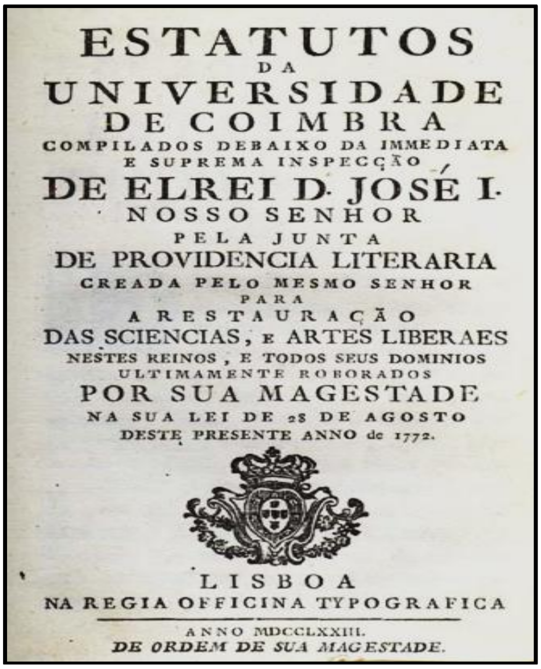
[61] A Junta de Providência Literária foi uma comissão criada por carta régia de 23 de dezembro de 1770 com o objetivo de analisar a situação em que se encontrava a Universidade de Coimbra e propor melhorias. Dessa comissão fizeram parte, entre outros,o frei Manuel do Cenáculo e os irmãos brasileiros D. Franscisco de Lemos (reitor e, mais tarde, nomeado também reitor reformador da universidade) e João Pereira Ramos (desembargador da Casa da Suplicação). Essa Junta foi responsável, em 1771, pela redação do *Compêndio histórico do estado da Universidade de Coimbra*, em cujo título também se lê *"no tempo da invasão dos denominados Jesuítas e dos estragos feitos nas sciencias e nos professores…"*, deixando clara a atribuição das culpas pela decadência do ensino universitário aos jesuítas, bem como se anteviam os *Estatutos* novos, publicados no ano seguinte.

Quadro 2. Tópicos orientadores dos *Estatutos novos*, de 1772, da Universidade de Coimbra.

Livro I: Curso teológico (374 páginas)	
Título I: Preparação para o curso teológico. **Título II:** Tempo do curso teológico e das disciplinas. **Título III:** Ordem e distribuição das disciplinas; métodos das lições. **Título IV:** Exercícios particulares nas aulas, atos e exames públicos.	**Título V:** Professores substitutos; distribuição e substituição das cadeiras pelo clero secular e regular; provimento dos doutores teólogos dos colégios de S. Pedro, S. Paulo e Ordens Militares. **Título VI:** Congregações, composição e ofícios.
Livro II: Cursos jurídicos (584 páginas)	
Título I: Preparação. **Título II:** Tempo e disciplinas. **Título III:** Distribuição das disciplinas e método das lições. **Título IV:** Disciplinas do segundo ano. **Título V:** Disciplinas do terceiro ano. **Título VI:** Disciplinas do quarto ano. **Título VII:** Aplicações.	**Título VIII:** Ordem e método das disciplinas. **Título IX:** Disciplinas do quinto ano. **Título X:** Exercícios literários. **Título XI**: Atos e exames públicos. **Título XII:** Lentes substitutos e opositores. **Título XIII:** Lições extraordinárias. **Título XIV:** Congregações.
Livro III: Ciências naturais e filosóficas (339 páginas)	
Primeira parte: Curso médico	**Título VI:** Exames, atos e graus. **Título VII:** Estabelecimentos. **Título VIII:** Congregação, ofícios e pessoas que os hão de compor.
Título I: Preparação. **Título II:** Tempo, disciplinas, cadeiras e férias. **Título III:** Distribuição das lições. **Título IV**: Exames literários. **Título V**: Exames, atos e graus. **Título VI:** Hospital, oficinas e partidos. **Título VII**: Conselho médico e seus ofícios.	**Terceira parte: Curso filosófico**
Segunda Parte: Curso matemático	**Título I:** Preparação. **Título II:** Tempo, disciplinas, cadeiras e férias. **Título III:** Distribuição das lições. **Título IV:** Exercícios literários. **Título V:** Exames, atos e graus. **Título VI:** Estabelecimentos. **Título VII:** Congregação e pessoas que a hão de compor.
Título I: Criação, insígnias e privilégios. **Título II:** Preparação. **Título III:** Tempo, disciplinas, cadeiras e férias. **Título IV:** Distribuição das lições. **Título V:** Exercícios literários.	

Fonte: Dados da pesquisa, com base nos *Estatutos* (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772).

Figura 5. Frontispício dos *Estatutos novos.*


ESTATUTOS
DA
UNIVERSIDADE
DE COIMBRA
COMPILADOS DEBAIXO DA IMMEDIATA
E SUPREMA INSPECÇÃO
DE ELREI D. JOSÉ I.
NOSSO SENHOR
PELA JUNTA
DE PROVIDENCIA LITERARIA
CREADA PELO MESMO SENHOR
PARA
A RESTAURAÇÃO
DAS SCIENCIAS, E ARTES LIBERAES
NESTES REINOS, E TODOS SEUS DOMINIOS
ULTIMAMENTE ROBORADOS
POR SUA MAGESTADE
NA SUA LEI DE 28 DE AGOSTO
DESTE PRESENTE ANNO de 1772.
LISBOA
NA REGIA OFFICINA TYPOGRAFICA
ANNO MDCCLXXIII.
DE ORDEM DE SUA MAGESTADE.

Fonte: *Estatutos* (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772).

Com essa reforma, o corpo docente foi renovado e o método escolástico[62] rejeitado, passando o ensino a ser pautado no uso da razão, de acordo com o método demonstrativo. As faculdades de medicina, de teologia e jurídica desfrutaram de remodelações físicas e no programa curricular; as de matemática e filosofia natural foram inauguradas (DE LEMOS, 1777).

As faculdades inauguradas – Livro III, faziam parte da criação de uma nova filosofia, que instaurava as profissões de naturalista, médico e matemático. Priorizava-se o ensino das ciências e o das técnicas, baseados numa prática empírico-experimental. Para tanto, criaram-se estabelecimentos científicos e museológicos (observatório astronômico, hospital, laboratório de física experimental, laboratório de química, museu de história natural e jardim botânico) (DE LEMOS, 1777).

Daremos destaque à Faculdade de Matemática por ter sido ali que JAC lecionou.

Como já exposto, a Junta responsável pela redação dos *Estatutos novos* contava com especialistas das diferentes áreas. No caso do curso de matemática, o

[62] Designa um saber escolar adquirido sob a direção de um mestre, a partir de fontes literárias, contrastando com o saber adquirido da experiência científica, ou seja, pelo método científico (MARTINS, 2013).

padre José Monteiro da Rocha (que havia renegado sua pertença à Companhia de Jesus) trabalhou de forma efetiva em sua elaboração (FREIRE, 1872).

Nos *Estatutos*, a matemática foi considerada uma ciência fundamental para o progresso científico da nação:

> [...] conhecendo a Junta Literária, que a Matemática, além da excelência privativa, de que goza pelas Luzes da evidência mais pura, e pela exatidão mais rigorosa, com que procede nas suas demonstrações, e com que dirige praticamente o entendimento, habituando-o a pensar sólida, e metodicamente em quaisquer outras matérias [...]. (DE LEMOS, 1777, p. 81)

Aos alunos de todas as faculdades tornou-se obrigatório frequentar a cátedra de geometria[63], na Faculdade de Matemática (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772).

Os *Estatutos* justificam a importância e necessidade da criação de um espaço para os estudos matemáticos, exaltando a matemática como ciência autônoma e auxiliadora e destacando a necessidade do estado em dispor de indivíduos nela formados para serem úteis ao povo e à realeza, estabelecendo-se assim a profissão de matemático (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772).

Como parte dos "privilégios", os concluintes do curso matemático poderiam "ser admitidos a servir na marinha, sem preceder outro algum exame; e na Engenharia, sem preceder exame de Matemática [...]" (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772, Livro III, segunda parte, p. 221). Aos que se tornassem servidores da realeza seriam destinados os melhores postos de trabalho.

Havia também preocupação em formar novos professores:

> [...] poderão ensinar pública, e particularmente as Ciências Matemáticas fora da Universidade em qualquer parte dos meus Reinos, e Domínios; sem que para isso seja necessário preceder outro algum exame [...]. (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772, Livro III, segunda parte, p. 238)

Àqueles que dessem "todas as provas de engenho, e Ciência", seria concedido o grau de doutor (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772, Livro III, segunda parte, p. 218), podendo assim lecionar em nível universitário.

Os interessados em cursar matemática deveriam ter no mínimo 15 anos e dispor de noções prévias de humanidades, língua latina, filosofia racional e moral. O curso completo proposto pelos *Estatutos* tinha duração de quatro anos. O Quadro 3

---

[63] Na Faculdade de Medicina, os alunos eram também obrigados a frequentar aulas de álgebra e foronomia.

mostra como se organizavam as disciplinas por ano, no período em que JAC passou a integrar o corpo docente.

Quadro 3. Organização da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra em 1773.

Ano	Cátedra	Professor responsável[64]	Livro adotado[65]
1.º	Geometria (compreendia aritmética, geometria e trigonometria plana)	JAC[66]	*Elementos*, de Euclides[67]
2.º	Álgebra (compreendia álgebra elementar e princípios do cálculo infinitesimal)	Miguel Franzini	*Compêndio*, de Bezout
3.º	Ciências físico-matemáticas (compreendia mecânica, estática, dinâmica, hidráulica, hidrostática, óptica e dióptrica)	José Monteiro da Rocha	*Mecânica*, de Monsieur Marie
4.º	Astronomia (compreendia a teoria do movimento dos astros, cálculos e observações)	Miguel Antônio Ciera	*Compêndio*, de Monsieur Lacaille

Fonte: Dados da pesquisa, com base em De Lemos (1777).

Além dessas, havia uma cátedra extra de desenho e arquitetura, a ser frequentada no terceiro ou quarto ano do curso. Também, na Faculdade de Filosofia deveriam cursar as disciplinas ‘Filosofia racional e moral’ e ‘História natural’ no primeiro ano e ‘Física experimental’ no segundo.

Nos *Estatutos*, a matemática é concebida como relações e propriedades das quantidades ou grandezas, sendo dividida em matemáticas puras e mistas[68]. A álgebra e a geometria são vistas como puras, sendo a álgebra a “primeira Ciência da Matemática” (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772, Livro III, segunda parte, p. 240), ao passo que as ciências físico-matemáticas e a astronomia são consideradas matemáticas mistas.

---

[64] Estavam previstos dois professores substitutos para as quatro disciplinas, mas nos primeiros anos de funcionamento esses cargos permaneceram vagos por falta de quem os ocupasse (DE LEMOS, 1777).

[65] De Lemos (1777) apresenta alguns dos livros adotados.

[66] JAC não fez parte do primeiro conjunto de lentes nomeados para a Faculdade de Matemática em 1772: os italianos Miguel Franzini e Miguel Ciera e José Monteiro da Rocha. Haveria de ser nomeado um ano depois, em 1773, e assim se manteve até 1778 (PROCESSO III).

[67] Trata-se da edição portuguesa dos *Elementos* traduzida pelo italiano João Ângelo Brunelli.

[68] Estrutura semelhante à evidenciada na *Encyclopédie* de Diderot e D’Alembert.

A escolha dos livros também estava prevista, embora estes *Estatutos* não os fixassem porque “nas Ciências Matemáticas se aperfeiçoam cada dia muitas coisas e se inventam outras”. Em 1777 o próprio Reitor Reformador, D. Francisco de Lemos, haveria de listar as obras adotadas. Os professores eram incentivados a produzir materiais concisos, elementares e com métodos eficazes, cuja aprovação estava a cargo da Congregação de Matemática.

Ao professor do primeiro ano que ocupasse a cátedra de geometria, caberia, antes de adentrar seu conteúdo matemático específico, fazer uma introdução geral acerca das ciências matemáticas e de sua utilidade e, em particular, resumir os eventos mais importantes da história da matemática:

> [...] fará uma introdução breve, e substanciada ao estudo destas Ciências. Mostrando o objeto, divisão, e prospecto geral delas. Explicando o método, de que se servem; a utilidade, e excelência dele. E fazendo um resumo dos sucessos principais da sua história pelas épocas mais notáveis dela. (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772, Livro III, segunda parte, p. 250)

Com esse resumo histórico da matemática, esperava-se que os alunos pudessem iniciar seus estudos com maior interesse, percebendo os avanços matemáticos até então alcançados (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772).

O primeiro conteúdo específico a ser trabalhado era a aritmética, com as noções de número, medida e unidade:

> [...] cuja natureza deve procurar que seja bem entendida pelos seus discípulos; porque sem isso nem poderão jamais possuir cientificamente a teoria desta disciplina, nem proceder com acerto na prática. (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772, Livro III, segunda parte, p. 252)
>
> Mostrando-lhes, como a unidade (que quase sempre é arbitrária e hipotética) serve de termo e medida ao número. (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772, Livro III, segunda parte, p. 253)

Depois se passaria aos sistemas de numeração e a raízes, proporções, progressões e logaritmos.

Terminada a aritmética, dava-se início à geometria, com a recomendação de dispensar a esta grande atenção, pelo fato de servir de base aos anos seguintes e também porque nela o aluno se acostumaria ao “entendimento a sentir a evidência dos raciocínios matemáticos a procurar a exatidão e rigor geométrico das demonstrações; e a pensar metodicamente em qualquer matéria” (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772, Livro III, segunda parte, p. 255). Relevamos, neste ponto, a dimensão reconhecida à geometria enquanto potenciadora do desenvolvimento das capacidades de raciocínio nos alunos. Dos *Elementos*, seria utilizada apenas a parte referente à geometria, acrescida dos teoremas de Arquimedes. Os *Comentários* de Proclo serviriam para a base histórica, de modo que os alunos tivessem ideia “exata das noções, definições e princípios fundamentais”, estimulando-lhes a “Metafísica particular” dessa ciência (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772, Livro III, segunda parte, p. 257). As diretrizes também pediam que, sempre que possível, o professor associasse teoria e prática e usasse instrumentos e modelos geométricos:

> Mostrando distintamente o uso, e aplicação das *Proposições,* que explicar. E expondo com clareza o método de proceder na praxe das *Operações Geométricas;* e de usar dos *Instrumentos;* cada um deles imediatamente depois das *Proposições,* em que se funda a sua construção. E isto se fará à vista dos mesmos *Instrumentos.*
>
> Quando tratar dos *Sólidos*, também explicará as proposições à vista dos *Corpos Geométricos.* (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772, Livro III, segunda parte, p. 257; grifos no original)

Encerrada a parte de geometria, o professor completaria o programa com as aulas de trigonometria plana, considerada necessária para colocar a teoria em prática em toda a matemática. Após notas introdutórias, viria o ensino das tábuas de senos, tangentes e secantes, bem como o de triângulos retilíneos, devendo os alunos resolver problemas escolhidos de modo a perceberem as aplicações do cálculo trigonométrico. Saliente-se que os livros-texto adotados, quer para a aritmética, quer para a trigonometria, neste primeiro ano, eram os de Etienne Bézout (que Monteiro da Rocha traduziu) e que a trigonometria seria novamente abordada no segundo ano do curso, recorrendo-se desta vez a métodos da análise (funções, séries, etc.) e não aos métodos “aritméticos” com que era abordada nesse primeiro ano (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772). Note-se também que, tanto quanto nos foi possível decifrar analisando as provas e exames dos alunos, a componente aritmética não fazia parte dos exames finais e nem todos os alunos do primeiro ano, nesses exames, prestavam prova de seu conhecimento em trigonometria.

Visando que os objetivos de aprendizagem fossem atingidos, os *Estatutos* estabeleciam os tipos de exercício a serem seguidos, classificando-os em vocais, práticos e escritos.

Os do primeiro tipo deveriam proporcionar situações em que se vivenciasse a evolução dos descobrimentos matemáticos. Haveria também questionamentos orais sem aviso prévio.

O segundo tipo de exercício colocava em prática a teoria ensinada, sendo previstas saídas a campo com instrumentos apropriados a cada disciplina, ou aulas em ambientes especialmente construídos para esse fim, além da utilização de materiais concretos.

Os exercícios escritos complementavam os vocais e práticos. Eram propostos de forma que as resoluções dependessem dos princípios estudados, incluindo demonstrações de teoremas. Ao final de cada mês deveria ser redigida uma breve dissertação acerca de um tema escolhido.

Havia três tipos de alunos denominados ordinários, obrigados e voluntários[69]. Os ordinários eram os que frequentariam por completo o curso de matemática e se tornariam, assim, matemáticos de profissão. Os obrigados eram os de quem se exigia estudar alguma parte da matemática como subsídio para o estudo nas faculdades a que se destinavam. Nos voluntários estavam os que queriam instruir-se na cultura da generalidade das ciências, visando a valorização pessoal, sem necessariamente terem de concluir faculdade nenhuma, nem seguir a profissão de matemático.

Os *Estatutos* traziam ainda orientações separadas para o professor de cada cátedra. Tais orientações seguiam o mesmo padrão, respeitando-se as diferenças nos conteúdos. Os professores eram sempre orientados a iniciar suas aulas com um resumo histórico da matemática. Sempre que possível, deveriam também aliar teoria e prática por meio de um processo investigativo, a fim de que os conteúdos trabalhados pudessem servir de base a novas descobertas matemáticas.

Ao término de cada ano, uma avaliação final era aplicada por uma comissão de docentes encabeçada pelo professor da cadeira do ano corrente. O aluno do quarto ano, depois de aprovado em exame (sorteado) sobre os conteúdos programáticos desse ano, haveria ainda de satisfazer o disposto nos *Estatutos* de que os alunos "subindo à Cadeira, explicarão uma proposição de Euclides, ou dos Esféricos de Teodósio". Cumpridos esses requisitos, era-lhe outorgado o grau de bacharel.

Havia, ainda, uma outra etapa, conducente à 'formatura' e que consistia em, após a obtenção do grau de bacharel, o aluno se sujeitar a ser aprovado em um

---

[69] A classe dos voluntários era oferecida apenas no curso de matemática.

'exame final' —que os *Estatutos* descrevem bem— relativo a qualquer matéria de qualquer um dos 4 anos[70].

Os primeiros cinco licenciados pela Faculdade de Matemática em junho de 1776 foram: Francisco José de Lacerda e Almeida, José Simões de Carvalho, Manuel José Pereira da Silva, Manuel Joaquim Coelho da Costa Vasconcelos e Maia e Vitrúvio Lopes da Rocha. Destes, dois estão diretamente relacionados com JAC: Manuel Joaquim Coelho da Costa Vasconcelos e Maia (1750-1817), por meio de um concurso oferecido pelas Acadêmia das Ciências de Lisboa[71] e Francisco José de Lacerda e Almeida (1753-1798), natural de São Paulo, Brasil, que até onde sabemos fora o único aluno de doutorado orientado por JAC. Fora designado para a comissão que delimitaria as fronteiras do Brasil com as então possessões espanholas da Bolívia e Venezuela. Subiu o Amazonas e adentrou os sertões, permanecendo alguns anos nessa missão. Também fez parte da expedição luso-espanhola e visitou tribos pouco conhecidas, atravessando o território do Pará, percorrendo o rio Negro e passando por Cuiabá e São Paulo. Em 1790 regressou a Portugal, onde ocupou cargos de docência (DE MELLO PEREIRA, 2012).

Muitos foram os alunos de JAC durante sua estada na universidade de Coimbra, pois sua cátedra era obrigatória a todos os cursos. De fato Alguns deles haveriam de se tornar amigos muitíssimo próximos para o resto da vida. Dentre estes, destacamos:

- **D. Rodrigo de Sousa Coutinho** (1745-1812), 1.º conde de Linhares, português natural de Chaves. Frequentou o curso jurídico da Universidade de Coimbra e seguiu carreira diplomática. Acompanhou a corte portuguesa quando esta se estabeleceu no Brasil em 1808 e desempenhou a função de ministro da guerra e dos negócios estrangeiros. Atuou diretamente na fundação da Academia Real Militar, do Arquivo Militar, do Jardim Botânico, da Biblioteca Nacional e da Escola Real de Ciências, Artes e Ofícios, todos no Rio de Janeiro (POMBO, 2015). Atualmente o Museu Militar dessa cidade presta-lhe homenagem denominando-se Museu Militar Conde de Linhares.

---

[70] Havia à época, basicamente três graus: o de bacharel, o de formatura/licenciatura e o de doutor, cujas semelhanças com os atuais graus acadêmicos são praticamente inexistentes.

[71] Tal polêmica não é alvo de nosso estudo, para informações consultar Antônio José Teixeira no volume 38 (1890-1892) de *O Instituto: jornal scientifico e litterario* (TEIXEIRA, 1890-92).

- **D. José Maria de Sousa Botelho Mourão e Vasconcelos** (1758-1825), 5.º morgado de Mateus, natural do Porto. Formado em matemática em 13 de março de 1778, haveria de acompanhar muito de perto o mestre e fiel amigo JAC até o final de sua vida. Fidalgo da Casa Real, comendador da Ordem de Cristo, militar, conselheiro de fazenda e diplomata, era de fina e cultivada inteligência. Foi responsável pela edição monumental de *Os lusíadas*, de Camões, obra impressa em Paris em 1817 (TORRES, 2000).
- **D. Domingos de Sousa Coutinho** (1760-1833), 1.º conde e 1.º marquês do Funchal, português natural de Chaves. Formou-se em leis pela Universidade de Coimbra e seguiu carreira diplomática, ocupando os cargos de enviado na Dinamarca, representante em Turim e embaixador em Londres e Roma. Responsável pelo lançamento em Londres do periódico *O investigador português em Inglaterra.* Foi membro da Academia das Ciências de Lisboa e autor de numerosos escritos políticos e matemáticos.

Na próxima seção focalizaremos a Casa Pia de Lisboa e seu *Plano de estudos*, elaborado por JAC.

2.4 CASA PIA DE LISBOA

A Casa Pia de Lisboa, foi instituída pelo intendente-geral de polícia Pina Manique, no castelo São Jorge, em 1780.

Como intendente de polícia, Pina Manique era responsável pela saúde, transporte, limpeza, lazer e manutenção da ordem, entre outros setores, de todo o país. Dispunha de ampla jurisdição sobre os magistrados judiciais (TAVARES, 2017).

> A década de 80 foi de intensa atividade por parte de Pina Manique. Foi um tempo de profícua e entusiástica tomada de decisões, quer relativamente à Casa Pia, quer no tocante à cidade de Lisboa e ao próprio País. (TAVARES, 2017, p. 3)

Para Pina Manique, a polícia deveria agir preventivamente, por meios que viabilizassem oportunidades aos menos favorecidos, antes que estes aderissem ao crime. Pensando assim, tratou de recolher crianças abandonadas, mendigos e prostitutas e alojá-los na Casa Pia, de modo que pudessem receber moradia e educação. Além disso, àqueles que já haviam cometido delitos, dava-se a oportunidade de inserção na comunidade, oferecendo-lhes cursos de profissionalização (TAVARES, 2017).

No início, apenas Lisboa disponha de uma Casa Pia, logo expandida para outras cidades. O número de abrigados aumentava, havendo entre estes os que se destacariam no aproveitamento escolar. A Casa Pia oferecia atividades pedagógicas diversificadas, entre elas matérias de grau universitário, sendo chamada por Latino Coelho de "universidade plebeia" (CARVALHO, 2011).

Todo o regimento do ensino escolar parece ter sido idealizado, redigido e inspecionado por JAC, incluindo as matérias universitárias. O colégio, destinado às 'classes científicas' e comparado a uma universidade, situava-se na região do castelo de São Jorge e denominava-se Colégio de São Lucas Evangelista[72] (ESTRADA, 2006).

Tivemos acesso a um manuscrito autógrafo[73] em que encontramos um esboço delineando o ensino ministrado na Casa Pia e, em particular, o do Colégio de São Lucas. Neste documento, JAC enumera cinco tópicos.

No primeiro, expõe que todos os alunos, mesmo os que se destinassem aos cursos de trabalhos manuais, deveriam aprender a ler:

> Parece-me útil que todos os alunos da Casa Pia, ainda os que se destinam para artes mecânicas principiem a ler por algum bom livro de História Universal, aprendendo ao mesmo tempo a entender os mapas geográficos. (CUNHA, s.d., f. 1)

Indica para esse fim os *Elementos de história universal*, do abade de Vallemont[74], considerando que "a todo homem é necessário o conhecimento, e por consequência o estudo, dos homens e do mundo" (CUNHA, s.d., f. 1). No segundo tópico, aconselha que, após adquirirem firmeza nas mãos por meio dos exercícios de escrever, iniciassem a "debuxar", ou seja, rascunhar, esboçar, nas artes mecânicas (CUNHA, s.d., f. 2).

---

72 Em 1794, a Casa Pia de Lisboa contava com oito colégios em locais diferentes que ofereciam formações e cursos variados, para públicos distintos (RODRIGUES, 2008).

73 Documento cedido pela Prof.ª Maria Elfrida Ralha.

74 VALLEMONT, Abade de. *Elementos da Historia, ou o que he necessario saberse da Chronologia, da Geografia, do Brazaõ, da Historia universal, da Igreja do Testamento velho, das Monarquias antigas, da Igreja do Testamento Novo, e das Monarquias novas, antes de ler a Historia particular*. Lisboa: Officina de Antonio Vicente da Silva, 1767.

O terceiro tópico é destinado aos alunos das ciências ou das artes liberais[75]. Estes deveriam, o mais breve possível, aprender a língua francesa, sugerindo-se para esse fim a *História de Portugal*, de la Clede[76]. Entre estes alunos, os que se destacassem aprenderiam, de acordo com o quarto tópico, a língua latina, de modo a lerem-na com desenvoltura, enquanto à língua materna deveriam dedicar uma escrita pura e elegante (CUNHA, s.d., f. 2).

O quinto tópico estabelece a quantidade mínima de professores e as disciplinas a serem oferecidas nas ciências e nas artes liberais. É aqui que JAC idealiza o ensino do Colégio de São Lucas, que, logo à partida, define como "Faculdade":

> Parece-me absolutamente necessário um Colégio, Faculdade ou corpo Acadêmico composto de seis Mestres ao menos; os quais ensinarão, um Física (isto é, o que chamam Filosofia experimental, princípios de Química e de História Natural): outro, Geometria, Trigonometria plana. Trigonometria esférica e Aritmética universal: outro, o Cálculo fluxionário, Phoronomia e Óptica: outro, Engenharia e Pilotagem (sic): o último, com o nome de Regente, Prefeito ou Inspetor, vigiará sobre a observância dos Estatutos e das ordens de V. Senhoria, o aproveitamento dos Estudantes; e substituirá as Cadeiras dos Mestres que se acharem legitimamente impedidos. (CUNHA, s.d., f. 2-3)

No término desse documento, que tem formato de carta, JAC descreve as qualidades necessárias aos professores e como deveriam portar-se junto aos estudantes e colegas de trabalho.

Para serem admitidos à Casa Pia, os professores teriam que ser pessoas de respeito, sábios e versados tanto em suas disciplinas quanto nas dos colegas. Não caberia competição entre os professores, pois cada um veria nos outros "juízes inteligentes da sua ciência e procedimento" (CUNHA, s.d., f. 3) Desse modo, os pareceres referentes aos exames jamais poderiam ser expedidos por um único professor. As decisões deveriam ser tomadas em grupo, por meio do voto e, em caso de dúvida, se consultariam os *Estatutos novos*, atestando mais uma vez sua ligação ideológica aos ditames da reforma pombalina universitária.

> Estes Mestres devem conferir sobre o estado dos estudos, e votar o que julgarem necessário ou útil para adiantamento dos estudantes das ciências.

---

[75] 'Artes liberais' designa um conjunto de estudos e disciplinas com as quais se visa prover conhecimentos, métodos e habilidades intelectuais, em contraste com as chamadas 'artes mecânicas'. Disponível em: http://enciclopedia.itaucultural.org.br/termo32/artes-liberais. Acesso em: 11/12/2017.

[76] LA CLEDE, Nicolas de. *Histoire générale de Portugal.* Paris: [s.n.], 1735.

> Os novos Estatutos da Universidade são neste ponto (como em muitos outros) um modelo bem digno de seguir-se. (CUNHA, s.d., f. 3-4)

Em outro documento manuscrito autógrafo que analisamos[77], JAC descreve de forma resumida e organizada seu *Plano dos estudos da Casa Pia de Lisboa*, dividindo as “classes” em “menores” e “científicas” e nomeando os respectivos professores (CUNHA, s.d.), como mostra o Quadro 4.

Quadro 4. Plano de estudos das classes menores da Casa Pia de Lisboa.

Classes	**Professores**
Ler, escrever e contar	Antônio Fernandez Rodrigues Luis de Frémicourt Nicolau Mahon
Desenho	
Língua francesa	
Língua inglesa	
Língua latina	

Fonte: Dados da pesquisa, com base no *Plano dos estudos da Casa Pia de Lisboa*.

Para as classes menores não se previam professores substitutos; nas científicas, tal substituição seria efetuada pelo inspetor de estudos (a saber: o próprio JAC), em qualquer classe, tanto no curso matemático como no de física (Quadro 5).

Quadro 5. Plano de estudos das classes científicas da Casa Pia de Lisboa.

Curso	**Classes**	**Professores**
Matemático	Matemática pura	João Manuel de Abreu
	Mecânica e óptica	Vicente Antônio de Oliveira
	Astronomia	Custódio Gomes de Villas Boas
Adjunta (Matemático)	Geometria prática e navegação	Monsieur Paganinz
	Engenharia e artilharia	Conde Francisco Ferrer
Física	História natural e física experimental	Manuel Luís de Álvarez de Carvalho
	Química e os princípios de várias artes, como são metalurgia, tinturaria e agricultura	Manoel Joaquim Henriques de Paiva
Adjunta (Física)	Farmácia	Manoel Joaquim Henriques de Paiva

Fonte: Dados da pesquisa, com base no *Plano dos estudos da Casa Pia de Lisboa*.

---

[77] Documento inédito cedido pela Prof.ª Maria Elfrida Ralha.

Desses professores, sabemos que o conde Francisco Ferrer[78] fora oficial do exército português; Manuel Joaquim Henriques de Paiva, fidalgo da Casa Real, médico e sobrinho do também médico Ribeiro Sanches[79]; e Custódio Gomes Villas Boas, oficial do exército e professor da Academia Real da Marinha. Todos eles eram bem conhecidos por JAC. Além deles, havia João Manuel de Abreu, amigo e discípulo porventura desde o período em que estivera em Valença do Minho, que lecionava utilizando materiais elaborados por JAC, ao mesmo tempo que era preparado por este para ingressar na Universidade de Coimbra (ESTRADA, 2006).

JAC frisava ser de competência do diretor ou inspetor a responsabilidade em garantir o cumprimento dos estatutos e das ordens dadas por Pina Manique. Assistia sempre que possível aulas e exames, repassando as informações aos professores para que, juntos, deliberassem (CUNHA, s.d.).

No manuscrito autógrafo[80] datado de 1782, JAC afirma que o primeiro projeto fora escrito havia “mais de ano e meio” e agora apresentava duas correções (CUNHA, 1782, f. 1). A redação deste é formal, detalhada e organizada:

> Remeto duas emendas para o último artigo do plano de Estudos.
>
> Parece-me pois melhor, que em lugar das primeiras palavras daquele artigo, que são Um Diretor ou Inspector se escreva somente Um Inspector e que o mesmo artigo se termine assim: Este Inspetor substituirá as cadeiras científicas, e só se poderá eximir de ensinar o que for mera praxe. (CUNHA, 1782, f. 1)

JAC considera que a denominação ‘diretor’ pressuporia uma autoridade que deveria ser reservada ao intendente de polícia, não cabendo ao inspetor de estudos – cargo ocupado por ele – substituir os professores das classes menores. De forma legislatória, redige o restante estabelecendo normas e regras.

O ano letivo teria início em outubro e as aulas durariam duas horas[81], sendo ministradas duas das 8 às 12 h e duas das 14 às 18. Ao final do primeiro mês letivo, o inspetor, em conjunto com os professores, excluiria das aulas os alunos considerados inaptos (CUNHA, 1782).

---

78 Também conhecido como conde Francisco Ferreri (ESTRADA, 2006).

79 Antônio Nunes Ribeiro Sanches (1699-1783), autor do *Método para aprender e estudar medicina* e das *Cartas sobre a educação da mocidade* (http://cvc.instituto-camoes.pt/filosofia/ilu10.html Acesso em: 15 ago. 2017).

80 Documento cedido pela Prof.ª Maria Elfrida Ralha.

81 Previam-se algumas exceções aos alunos que, estivessem adiantados nas matérias. Estes eram encaminhados a outras classes, sendo-lhes permitido assistir as aulas por menos tempo.

A regra quanto ao modo de tratamento a ser dispensado aos alunos é minuciosa:

> Estes alunos serão decentemente vestidos e tratados com civilidade. Os Lentes, Professores e Mestres, e as Pessoas de autoridade pertencentes quer ao Colégio e à Casa Pia, lhes inspirarão brio e espíritos nobres, bem entendido que se lhes deve explicar e mostrar frequentemente em que consiste a verdadeira honra e a verdadeira nobreza, deve-se-lhes fazer evidente que a verdadeira honra e a nobreza da alma se estribam e fundam na verdade, probidade e demais virtudes morais e na sincera e eficaz diligência de ser útil à [...]. (CUNHA, 1782, f. 4)

No documento que consultamos, falta uma parte desta regra, mas conseguimos o restante no artigo de Estrada (2006), que transcreve o parágrafo por completo, extraído da correspondência de Pina Manique de 1786:

> [...] Pátria e, em geral, ao próximo. [...] Ninguém se atreverá a injuriar aluno algum. As mesmas repreensões, por mais ásperas que seja necessário fazê-las, devem ser graves e decentes. A razão, a experiência e o exemplo das mais modernas e melhores Escolas reprovam todo o castigo corporal, como também todo o castigo que humilha demasiadamente e envilece. (ESTRADA, 2006, p. 113)

Especificamente sobre as classes científicas, tem-se a seguinte resolução: “Que os Alunos que principiarem os cursos científicos, tenham vestido que os distinga dos demais, e que nas aulas não entre nenhum senão com o mais exato asseio”. Na mesma folha encontramos uma resolução determinando que o “Curso de Matemática” fosse “rigoroso e completo*”* (CUNHA, 1782, f. 3).

Muitos dos alunos que se destacaram nas classes científicas foram encaminhados a estudar na Universidade de Coimbra, na Academia Real da Marinha de Lisboa e até no exterior (RODRIGUES, 2008).

Estrada (2006) faz referência a alguns alunos que mais tarde se distinguiram, dos quais citaremos três que obtiveram o título de doutor em matemática pela universidade de Coimbra:

- **Tristão Álvares da Costa Silveira** (1768-1811), natural de Elvas, Portugal. Como Rivara, também recebeu prêmios em todos os anos em que cursou matemática. Foi professor da Academia Real dos Guardas Marinhas e da Universidade de Coimbra e sócio da Academia Real das Ciências de Lisboa. Escreveu o opúsculo *Lições de cálculo diferencial, ou método direto das fluxões ordenadas e reduzidas a compêndio*. Sobre ele, Freire (1872, p. 52) afirma que, além de possuir espírito matemático, “reunia, como dotes de um excelente professor, grande clareza de ideias, excelente dedução de princípios, e método eminentemente rigoroso de demonstração".

- **Mateus Valente de Couto** (1770-1848), natural de Macapá, Brasil. Foi professor da Academia Real da Marinha e da Academia Real dos Guardas Marinhas e sócio efetivo da Academia das Ciências de Lisboa (FREIRE, 1872; FERREIRA, 2016).
- **José Joaquim Rivara** (1772-1826). Recebeu prêmios em todos os anos em que cursou matemática. Publicou em 1815 a obra *Resolução analytica dos problemas geometricos e indagação da verdadeira origem das quantidades negativas*. Foi professor e deputado da Universidade de Coimbra (FREIRE, 1872, p. 52).

Nos originais a que tivemos acesso, consta uma lista de alunos[82] do curso matemático. Dela destacamos três nomes que estão envolvidos no debate acerca das quantidades negativas exposto no próximo capítulo: Manuel Pedro de Melo (1765-1833), Anastácio Joaquim Rodrigues (que teria falecido no período de 1818-1820) e Luís Antônio de Araújo (falecido em 1832 ou 1833) (CUNHA, s.d.).

Rodrigues *et al.* (2013) observam, ainda, que meninas eram aceitas nas classes menores – algo inédito para a época.

No último original que acessamos, há várias indicações de livros[83] a serem providenciados para o Colégio de São Lucas. Esse documento se encontra bastante ilegível, mas, além dos já citados, observamos a indicação do *Tratado de álgebra*, de Thomas Simpson, estudado por JAC desde o período em que estivera no regimento de artilharia (CUNHA, s.d.). Também visando auxiliar no ensino, dá início à impressão de seu livro *Principios mathematicos.*

2.4.1 O livro "Principios mathematicos"

Principios mathematicos é considerada a obra-prima de JAC, que em sua redação investiu longos anos. Em um de seus depoimentos à Inquisição, em 1778, declarou estar trabalhando em sua elaboração já havia 12 anos, ou seja, desde seu período no regimento de artilharia até sua estada na Universidade de Coimbra. Quando propôs à Congregação de Matemática um *Compêndio de geometria*, de

---

[82] Documento inédito cedido pela Prof.ª Maria Elfrida Ralha.
[83] Documento inédito cedido pela Prof.ª Maria Elfrida Ralha.

sua autoria, para que fosse usado nas aulas, tratava-se, possivelmente, de uma parte desse livro. Encontramos também nesse processo inquisitorial seu pedido para que sua sentença, a ser proferida, fosse de recolhimento na Congregação do Oratório, onde, além de abjurar seus pecados, poderia se dedicar a essa obra com o objetivo de contribuir com o estado por meio de um livro que condensaria toda a base matemática (FERRO, 1987; ESTRADA, 2006).

Estando na Casa Pia em 1782, imprime parte desse volume, em fascículos.

Destacamos uma correção ao material dos *Principios* feita por seus discípulos em 1785. Na carta que JAC endereça a João Manuel de Abreu, lemos:

> Quero primeiro dar-lhe parte de um quinau que levámos ambos ainda que o erro é propriamente só meu. E se V. M. nele, em certo modo, me acompanha por não o ter descoberto é certamente porque a amizade que me tem e o conceito que faz de mim lho encobriram.
>
> A demonstração da Prop. VII.ª do L. III.º dos meus *Principios* é paralogistica, porque supõe o inverso da VIª. (CARTA II, 1785, f. 2-2v.)

A proposição mencionada por JAC é:

> Se quatro grandezas forem proporcionais, também dois equimultiplices quaisquer das antecedentes, e dois equimultiplices quaisquer das consequentes serão proporcionais.
>
> Seja $\mathrm{A} : \mathrm{B} :: \mathrm{C} : \mathrm{D}$ e E, F equimultiplices de A e C, e G, H equimultiplices de B e D. Tomem-se I e L equimultiplices quaisquer de E e F, e M e N equimultiplices quaisquer de G e H: serão também I e L equimultiplices de H e C, e M e N equimultiplices de B e D; *e não poderá ser* $\mathrm{I} > \mathrm{M}$ *se for* $\mathrm{L} < \mathrm{N}$, *nem* $\mathrm{L} > \mathrm{N}$, *se for* $\mathrm{I} < \mathrm{M}$ *[3.6]: logo também é* $\mathrm{E} : \mathrm{G} :: \mathrm{F} : \mathrm{H}$. (DA CUNHA, 1790, p. 24-25, grifo nosso)

A parte grifada corresponde ao erro[84] que JAC menciona. Ele relata que D. Domingos de Souza Coutinho, a quem JAC chama de "engenho raro!", foi o primeiro a percebê-lo, no que foi seguido por Anastácio Joaquim Rodrigues (CARTA II, 1785,

[84] Correção: a proposição termina em "de B e D".
"Digo se for $\mathrm{I} > \mathrm{M}$, será $\mathrm{L} > \mathrm{N}$. Seja $\mathrm{I} > \mathrm{M}$ Tomem-se P e Q equisubmultiplices de B, e D, mas tais, que seja $\mathrm{P} < \mathrm{A}$, e caiba em metade de $\mathrm{I} - \mathrm{M}$ mais vezes do que A em I: tome-se R multíplice de P mas $< \mathrm{A}$, e não $< \mathrm{A} - \mathrm{P}$, e tome-se S tão multíplice de R como I o é de A. Se de cada A de que se compõem I, se tirar R, os restos todos juntos serão menores que metade de $\mathrm{I} - \mathrm{M}$ [constr.]: é logo $\mathrm{I} - \mathrm{S}$ menor que metade de $\mathrm{I} - \mathrm{M}$, e logo S maior que M e metade de $\mathrm{I} - \mathrm{M}$ juntos. Cabe logo P em S mais vezes do que em M. Mas Q não cabe em L menos vezes do que P em S, como facilmente se pode mostrar; logo Q cabe em L mais vezes do que P em M; e logo Z em L mais vezes do que em N. É logo $\mathrm{L} > \mathrm{N}$ quando é $\mathrm{I} > \mathrm{M}$. Semelhantemente se mostra que é $\mathrm{I} > \mathrm{M}$ quando L é $> \mathrm{N}$. Logo não pode ser $\mathrm{I} > \mathrm{M}$ e $\mathrm{L} > \mathrm{N}$. Mas I e L são equimultiplices de E e T, e M e N equimultiplices quaisquer de G e H; logo é $\mathrm{E} : \mathrm{G} :: \mathrm{F} : \mathrm{H}$" (CUNHA, 1987, p. 303-304).

f. 2v.). A respeito deste assunto, Anastácio debatera por escrito com Manuel Pedro de Melo[85], que defendia a proposta de JAC:

> Anastácio [...] me trouxe as cartas que sobre isto escreveram um ao outro em francês; que eu guardo com outros papéis como monumentos preciosos da útil obra que o Intendente começou e os que deviam ajudá-lo destruíram. Guardo tais papéis como provas experimentais do muito que se podia esperar desta nação, se as pessoas que estão encarregadas do ensino público não a levassem por caminhos inteiramente alheios do bom e verdadeiro método. (CARTA II, 1785, f. 2-2v.)

O Intendente mencionado é Pina Manique e a útil obra é o Colégio de São Lucas Evangelista da Casa Pia, especificamente quanto ao curso científico.

JAC continua comentando a correção realizada em seu livro:

> Mas tornando ao nosso quinau, declaro que bem longe de me envergonhar, de que o seu discípulo descobrisse na minha obra um erro notável, não descansei enquanto não contei o caso a todos os meus amigos e confesso que com assaz vanglória. [...] A defesa que Manuel Pedro excogitou é muito engenhosa. Enganou-se como alguns bons autores se enganaram neste ponto. Enfim não tenho dúvida em declarar que, pelo que toca à Matemática, V. M. com os seus discípulos e D. Domingos são atualmente a única esperança de Portugal. (CARTA II, 1785, f. 2v.)

Até seus últimos dias de vida, ocupou-se em fazer-lhe retificações. O material completo foi publicado postumamente pela Casa Pia, sem prefácio, em 1790, sob os cuidados de Pina Manique. Em 1811, João Manuel de Abreu a traduziu e publicou na França, acrescentando-lhe um prefácio de sua autoria (ABREU, 1811)[86] e como parte de um plano arquitetado pelos grandes amigos de JAC – à frente dos quais surge D. José Maria, 5.º morgado de Mateus — de dar a conhecer no estrangeiro o “gênio extraordinário” que reconheciam em seu mestre.

---

[85] Anastácio Joaquim Rodrigues e Manuel Pedro de Melo, personagens ex-casapianos envolvidos no debate acerca das quantidades negativas exposto no próximo capítulo.

[86] Há também uma 2.ª edição, na França, datada de 1816.

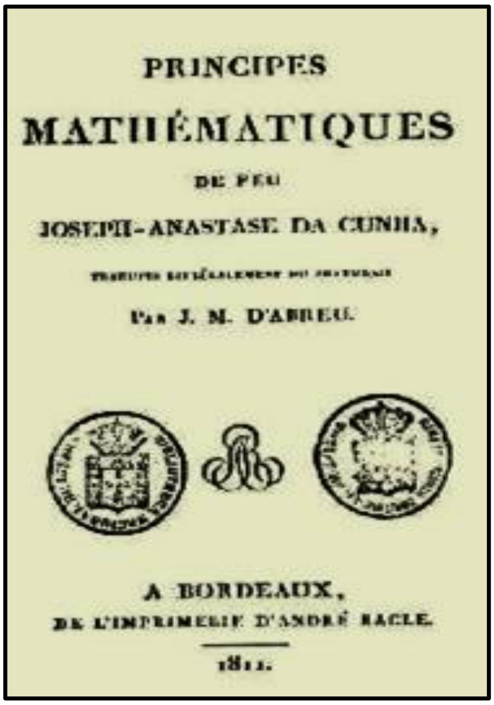
Figura 6. Frontispício dos *Principios mathematicos.*

PRINCIPIOS MATHEMATICOS
PARA INSTRUCÇAÕ
DOS ALUMNOS DO COLLEGIO
DE
SAÕ LUCAS,
DA REAL CASA PIA DO CASTELLO
DE
SAÕ JORGE:
OFFERECIDOS
AO SERENISSIMO SENHOR
D. JOAÕ,
PRINCIPE DO BRAZIL:
COMPOSTOS PELO DOUTOR
JOSE' ANASTACIO DA CUNHA,
DE ORDEM DO DESEMBARGADOR DO PAÇO
DIOGO IGNACIO DE PINA MANIQUE,
Intendente Geral da Policia da Corte, e Reino, &c, &c, &c.

LISBOA
NA OFFIC. DE ANTONIO RODRIGUES GALHARDO,
Impressor do Eminentissimo Senhor Cardeal Patriarca.
ANNO M.DCC.XC.
Com licença da Real Meza da Commissaõ Geral sobre o Exame, e Censura dos Livros.

Fonte: https://play.google.com/books

Figura 7. Frontispício dos *Principes mathématiques.*



PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE FEU
JOSEPH-ANASTASE DA CUNHA,
PAR J. M. D'ABREU.

A BORDEAUX,
DE L'IMPRIMERIE D'ANDRÉ RACLE.
1811.

Fonte: https://play.google.com/books

A obra contém 21 capítulos, perfazendo 315 páginas, 13 delas de erratas. Inclui, ainda, anexos de figuras geométricas.

Rodrigues *et al.* (2013, p. 23) considera que a organização e exposição da matemática é ali feita em bases sólidas, por meio de uma "sóbria sequência de axiomas-definições-proposições-demonstrações", abrangendo conteúdos matemáticos desde os mais simples até os mais elaborados, de maneira concisa.

> [...] contêm uma parte substancial da Matemática conhecida na época, desde as primeiras noções de geometria, aritmética e álgebra, passando pelo estudo das séries e das potências, de vários tipos de equações e do cálculo diferencial, até questões sofisticadas de geometria diferencial, integração, equações diferenciais e cálculo das variações. (RODRIGUES *et al.*, 2013, p. 22)

Nos *Principios mathematicos* "se encontra pela primeira vez, com um rigor notável, a definição de série convergente, a definição da função exponencial a partir da sua série de potências, e a diferencial de uma função" (SILVA, 2000, p. 17).

Na versão francesa, o tradutor João Manuel de Abreu não conseguiu ser fiel ao original, principalmente no que tange à convergência de séries, no que não teria conseguido acompanhar o raciocínio do amigo (RODRIGUES *et al.*, 2013). A tradução "foi o início de uma longa série de estudos e comentários da obra de José Anastácio da Cunha, dentro e fora de Portugal [...], entre eles a crítica de J. Playfair e o elogio de Carl Friedrich Gauss” (ESTRADA, 2006, p. 126).

Rodrigues *et al*. apontam os motivos de tal material merecer destaque na história da matemática:

> Estes *Principios Mathematicos* são um texto que merece um lugar de relevo na história da Matemática, pela originalidade da postura do seu autor, pela precisão da linguagem e pelo rigor dos raciocínios. Vale a pena olhar para os capítulos que tratam de matérias cuja fundamentação à época era inexistente ou controversa, nomeadamente os Livros 9 e 15. (RODRIGUES *et al*., 2013, p. 23)

A seguir, traremos informações sobre a Academia Real da Marinha de Lisboa, que recebera ex-alunos de JAC, bem como sobre a *Carta-lei*, de 1779, que a estabelece e regulamenta.

2.5 ACADEMIA REAL DA MARINHA DE LISBOA

A Academia Real da Marinha de Lisboa foi criada no reinado de D. Maria I, sob a responsabilidade do secretário de estado da marinha e do ultramar Martinho de Melo e Castro (1716-1795), por meio da carta-lei de 5 de agosto de 1779, visando solucionar “um problema grave, de natureza pedagógica”: a falta de oficiais portugueses com formação acadêmica para compor as forças armadas. Oferecia um curso de matemática destinado à formação de oficiais e pilotos da marinha real e da marinha mercante, bem como de engenheiros (CARVALHO, 2011, p. 515).

A academia funcionava no mesmo edifício que o Colégio dos Nobres [87] e seus estatutos constam na carta-lei de sua criação.

[87] Real Colégio dos Nobres, fundado em 1761 e fechado em 1837. Era destinado a fidalgos com idades de 7 a 13 anos (TORRES, 2000).

Quadro 6. Tópicos orientadores dos Estatutos da Academia Real da Marinha de Lisboa.

Estatutos – Curso de matemática (15 páginas)	
Do número de Professores. Dos requisitos, que devem ter os Professores. Dos Substitutos. Dos Discípulos, e condições, que devem ter para serem admitidos ao Curso Matemático. Das Aulas, Casa para instrumentos, e Observatório. Do tempo, e horas das lições, e dos dias letivos, e feriados. Dos Exercícios Semanários. Dos Exames no fim do Ano letivo. Do Exame geral de todo o Curso Matemático	e dos Exercícios práticos no mar. De algumas disposições pertencentes à boa ordem das Aulas, e da Academia. De algumas obrigações dos Pilotos aditos ao serviço da Marinha Real. Do curso Matemático dos Oficiais Engenheiros. Dos privilégios, e prerrogativas da Academia Real da Marinha. Dos Partidos. Do Guarda-Livros. Do Guarda dos Instrumentos.

Fonte: Dados da pesquisa, com base em Silva (1828).

Para ser admitido era necessário ter 14 anos completos e provar por meio de exames ser "exercitado" na prática das "quatro regras fundamentais da Aritmética", sendo tal exame de responsabilidade do professor de geometria (SILVA, 1828, p. 232).

O registro de matrícula era criterioso quanto aos dados do ingressante, especialmente o dia da admissão, para que fosse marcado um "ponto de partida", em relação a futuros despachos de oficiais (RIBEIRO, 1871-72, v. 2, p. 33).

As lições eram trabalhadas em aulas diárias de 90 min, assim organizadas: "metade será destinada para a repetição que os estudantes devem fazer da lição antecedente; e a outra metade para os lentes explicarem a lição daquele dia" (SILVA, 1828, p. 233). Ausentar-se antes do término das aulas ou chegar com atraso superior a seis minutos eram computados como faltas ao dia de aula. No tocante às férias, seria observado o regulamento dos *Estatutos novos* da Universidade de Coimbra (SILVA, 1828).

O estatuto dessa academia é explícito quanto à conduta esperada dos alunos:

> Guardarão um rigoroso, e profundo silêncio, quando estiverem nas Aulas, exceto quando forem chamados pelos mestres a dar conta de si, e do que aprenderam.
>
> Para com os seus Mestres se haverão com todo o obséquio, e obediência; e contra os que se portarem diversamente, tendo sido admoestados por três vezes, procederão os mesmos Lentes a excluí-los da Aula, sem que possam de novo ser admitidos sem especial Ordem Minha. (SILVA, 1828, p. 236)

Aos sábados eram feitos os exercícios "semanários": exercícios literários referentes aos assuntos estudados na semana e no mês. Também havia exames no fim do ano letivo, ocasião em que os professores secretamente votavam pela aprovação ou não do aluno, tendo como presidente da sessão “aquele que for Mestre das Disciplinas, que servem de assunto para o exame” (SILVA, 1828, p. 234). Por fim, era aplicado o exame geral de todo o curso matemático e feitos exercícios práticos do mar, sendo que a partir desses estatutos aqueles que pretendessem prestar serviços à marinha real como oficiais ou pilotos deveriam atestar sua aprovação nesse exame. Já os que se destinavam unicamente aos navios mercantes deveriam assistir às lições nos dois primeiros anos e serem aprovados (SILVA, 1828).

Ribeiro (1871-72, v. 2) destaca que para os oficiais engenheiros o curso oferecido pela academia equiparava-se aos três primeiros anos do curso de matemática da Universidade de Coimbra, além do que os privilégios oferecidos aos alunos e professores da universidade eram igualmente concedidos ao corpo docente e discente da academia.

De acordo com os estatutos, a academia ofereceria 24 prêmios por merecimento, a serem distribuídos igualmente entre os oficiais engenheiros e os oficiais (ou pilotos) destinados à marinha (SILVA, 1828).

O curso completo tinha duração de três anos e as disciplinas não eram divididas por cátedras, mas por professores (Quadro 7).

Quadro 7. Organização do curso de matemática, Real Academia da Marinha de Lisboa, 1785.

Ano	Disciplinas	Professor responsável	Professor substituto	Livro adotado
1.º	Aritmética, geometria, trigonometria plana e álgebra.	João Ângelo Brunelli	Custódio Gomes	*Elementos*, de Euclides
2.º	Álgebra aplicada à geometria, cálculo diferencial e integral, estática, dinâmica, hidrostática, hidráulica e óptica.	Miguel Franzini	José Joaquim de Faria	*Compêndio*, de Bezout
3.º	Trigonometria esférica, arte de navegação teórica e prática.	Cargo vago à época, por falecimento do ocupante	Francisco Antônio Ciera[88]	*Compêndio*, de Monsieur Lacaille

Fonte: Dados da pesquisa, com base em Silva (1828), Almanach de Lisboa (1785) e Freire (1872).

Para ser admitido como professor titular ou substituto, excetuando os primeiros professores contratados, os candidatos deveriam ter concluído os cinco anos do curso de matemática da Universidade de Coimbra e serem propostos pela Faculdade de Matemática desta e pelos três professores da Academia Real da Marinha de Lisboa. Uma vez incorporado à academia, o novo professor passava a ser considerado membro da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra (SILVA, 1828).

Em 1785, encontravam-se matriculados e frequentavam a academia os alunos Anastácio Joaquim Rodrigues, Manuel Pedro de Mello e Luiz Antônio de Araújo, ex-casapianos implicados na questão das quantidades negativas, que será exposta no próximo capítulo.

2.6 CONSIDERAÇÕES

Neste capítulo pudemos detectar evidências de que a demonstração em matemática tinha grande valia para JAC. Desde suas primeiras incursões exploratórias em livros de matemática, como os de autoria de Tacquet e Tosca, expressou descontentamento ao deparar-se com redações superficiais nas demonstrações. No *Ensaio sobre as minas*, primeira obra de sua autoria de que temos conhecimento, adverte veementemente acerca do que considerava uma verdadeira demonstração, repetindo a mesma conduta na *Carta fisico-mathematica.* Quando

---

88 Francisco Antônio Ciera (1763-1814), filho de Miguel Antônio Ciera.

esteve lecionando na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, e mesmo depois, exaltou os *Estatutos novos* por se pautarem em um ensino voltado a experiências científicas, com teoria aliada à prática e às demonstrações. Sobre as aulas que planejou e orientou na Casa Pia, não restam dúvidas de que seu objetivo era oferecer um curso de matemática rigoroso. Os alunos ali matriculados estavam acostumados a não se pautarem em palavras ou opiniões, mas sim em demonstrações, com a preocupação de que tudo fosse devidamente provado. Tal postura, adquirida nos estudos recebidos na Casa Pia, incomodava tanto professores da Academia Real da Marinha como da Universidade de Coimbra, que ficavam embaraçados em dar respostas convincentes, com demonstrações matemáticas rigorosas, a perguntas enunciadas pelos ex-casapianos.

Diante do exposto, parece-nos sensato considerar que JAC apresentava como traço característico uma forte tendência ao rigor e ao formalismo matemático, aspecto que de fato só ganharia força no século XIX.

Como professor, revela postura de proximidade a seus alunos e ex-alunos, valorizando debates e diálogos e não se colocando em posição de superioridade em nenhuma instância, como observarmos no quinau em que dois de seus ex-alunos corrigiram-lhe um erro em seus estimados *Principios mathematicos*. Nesse episódio, pelo contrário, fez questão, ele mesmo, de alardear o ocorrido.

Embora JAC tenha sido o mentor do plano de estudos da Casa Pia, não era adepto de sistemas pedagógicos fixos, como relatou ao discípulo e amigo morgado de Mateus. Seu plano de estudos era flexível no sentido de que as decisões seriam tomadas em conjunto (semelhante a um conselho de classe[89] dos dias atuais), consoante ações espontâneas pautadas na dignidade humana e na honestidade.

Cantarino (2006) expõe que o *Ensaio sobre as minas* foi utilizado para aulas, mas disso não encontramos indícios. Concordamos com Vieira (2006), que considerou prematuro, por falta de documentos confirmatórios, afirmar que os procedimentos pedagógicos que JAC teria utilizado na Universidade de Coimbra em

---

[89] Instância colegiada presente na estrutura organizacional da escola responsável pelos processos avaliativos. Exerce funções consultivas e deliberativas, possibilitando avaliar o educando, o processo ensino-aprendizagem e a prática docente. Seus pareceres permitem a análise dos avanços e dos obstáculos observados no processo de ensino e aprendizagem, assim como a retomada e a reorganização da ação educativa (Lucila Conceição Pereira, em https://www.infoescola.com/educacao/conselho-de-classe).

conformidade com os *Estatutos novos* teriam surtido descontentamento na comunidade acadêmica. Quanto aos comentários de Machado (2006) sobre a rivalidade entre JAC e Monteiro da Rocha, em que nosso personagem é acusado de obrigar seus alunos a estudar e resolver problemas, não temos como conjecturar, pois o documento citado por Machado (2006) é publicação de José Teixeira em *O instituto*, originais aos quais não tivemos acesso.

Frente ao até agora apurado, pressupomos que JAC pode ser considerado matemático preocupado em apresentar a seus alunos e em seus textos abordagens da matemática muito mais próximas, em termos de nível de rigor, ao que posteriormente entraria em voga no século XIX, com especial preocupação em efetivamente demonstrar os resultados apresentados. Além disso, temos fortes indícios de que, de fato, era um professor cumpridor, responsável, dedicado, acessível e que não só potenciava como também valorizava a troca de conhecimentos.

No próximo capítulo, ao delinearmos o duelo literário acerca das quantidades negativas, apontaremos outros indicadores da postura docente de JAC.

CAPÍTULO 3 – O DUELO LITERÁRIO DE 1785: *“SOBRE A NATUREZA DAS QUANTIDADES NEGATIVAS”*

3.1 INTRODUÇÃO

Esse capítulo retrata um duelo literário, acerca das quantidades negativas, em que JAC esteve seguramente envolvido. A abordagem será agora apresentada na forma de uma reconstrução dos eventos e dos conceitos matemáticos neles envolvidos, além de trazer uma síntese histórica do estado dos números negativos à época.

3.2 A QUESTÃO DAS QUANTIDADES NEGATIVAS NO SÉCULO XVIII

Embora atualmente o conjunto dos números inteiros negativos esteja solidamente fundamentado no *corpus* da matemática, o percurso dessa fundamentação foi árduo e pleno de entraves. Civilizações com conhecimento matemáticos, e mesmo matemáticos de renome, chamavam as quantidades negativas de fictícias ou absurdas e, sempre que possível, esquivavam-se delas. Por conseguinte, essa fundamentação foi sendo sucessivamente adiada. O início do século XIX foi decisivo para a alteração desse quadro, com a formalização da álgebra e da aritmética, juntamente com a ampliação do conceito de número para além da representação de quantidades, possibilitando alcançar respostas que trariam outra noção de rigor matemático.

Glaeser (1981) e Schubring (2005) contam-se entre os investigadores que, num passado recente, reconheceram as dificuldades e entraves desse percurso de afirmação das quantidades negativas, que ao longo de muitos séculos estiveram envoltas em debates e reflexões conduzidos por alguns dos matemáticos mais ilustres. Para Glaeser, durante todo este período “os matemáticos manipularam números relativos; mas deles só tiveram um entendimento parcial” [90] (GLAESER, 1981, p. 304-305). Schubring (2005) identifica essa concepção, acrescentando haver necessidade de reconhecermos também diferenças culturais. Nós também observamos nesta síntese que ora apresentamos algumas dificuldades que ocasionaram obstáculos epistemológicos aos matemáticos quando abordaram o tema.

Comecemos por citar a civilização babilônica, que, embora considerada por muitos investigadores da história da matemática como fonte inicial do conhecimento matemático, não fazia uso dos números negativos:

> [...] nos textos babilônicos existia apenas a subtração entre quantidades, o que não justifica a sugestão de que esse povo fazia uso dos negativos, já que não são identificadas manipulações com esses números. (MOURA, 2015, p. 23)

Consideremos também a civilização grega, onde o modelo aristotélico do conhecimento científico foi desde logo traduzido, por Euclides (séc. III a.C.), em seus *Elementos*. Assim, a estrutura axiomático-dedutiva que ainda hoje caracteriza a matemática tem nesses *Elementos* a súmula de todo o conhecimento matemático da época. Tal obra vem sendo, desde então, traduzida, comentada e editada numa dimensão que a tornam, depois da Bíblia, no livro mais editado de todos os tempos. Os *Elementos* de Euclides se compõem de 13 livros (capítulos), em que destacamos um “difícil” Livro V (sobre proporções), os Livros VII, VIII e IX (ditos *Livros aritméticos*), que explicam as propriedades dos números racionais, e um muito complicado e extenso Livro X, sobre as grandezas irracionais. Apesar de tão destacada ênfase nos números, a verdade é que neles não encontramos sequer vestígios do conceito de número negativo.

A civilização chinesa, que, não obstante percebendo a necessidade da existência dos números negativos, continuava a basear-se numa concepção de número intrinsicamente ligada à representação de algo existente (MOURA, 2015).

A partir do século XIII, a comunidade matemática europeia começou a mostrar algum desenvolvimento quanto aos números negativos, levantando, acerca da essência das quantidades negativas, questões que são fruto de influências indo-

---

[90] Em francês lê-se: “Pendant tout cet intervalle, les mathématiciens maniaient les nombres relatifs; mais ils n'en avaiente qu'une compréhension partielle [...]” (GLAESER, 1981, p. 304-305).

arábicas, tais como: (*a*) É possível subtrair algo maior de outro menor? (*b*) Existe algo menor do que o nada? E, mais tarde, refletia-se: (*c*) Como justificar a regra dos sinais na multiplicação? Ao atribuírem o caráter de falsos, fictícios, absurdos, impossíveis ou imaginários aos entes a que hoje nos referimos simplesmente como números inteiros negativos, os europeus expressavam as dificuldades então vigentes em aceitar a existência de tais números (GLAESER, 1981; SCHUBRING, 2005).

Infere-se que neste cenário era insustentável admitir quantidades negativas como sendo números. A crítica à “concepção dos números como quantidades” evidenciou uma demanda interna na matemática – a saber “uma nova noção de rigor,” pois a persistente associação de quantidade a número “passou a bloquear o desenvolvimento da matemática” (ROQUE, 2012, p. 407).

> A discussão sobre as quantidades negativas, durante o século XVIII, mostra que somente os números absolutos eram aceitos, pois se pretendia relacionar a existência em matemática a uma noção qualquer de “realidade”. (ROQUE, 2012, p. 407)

O conceito de número passou por algumas etapas decisivas que levaram, entre outros desdobramentos, à “tentativa de representação geométrica das quantidades negativas [...] no início do século XIX” (ROQUE, 2012, p. 408). Para prosseguir, “era preciso migrar para um conceito abstrato de número não subordinado à ideia de quantidade” (ROQUE, 2012, p. 407).

> A transição do conceito de quantidade para o de número foi marcante para a noção de rigor que se constituiu a partir do século XIX. Enquanto os números eram associados a quantidades geométricas, não se concebiam operações abstratas e arbitrárias sobre eles. (ROQUE, 2012, p. 409)

Roque (2012, p. 409) também salienta a contribuição dos que se debruçaram sobre a legitimização, formalização e fundamentação das quantidades negativas como elementos de conjuntos numéricos: “os matemáticos que se deparavam com problemas relativos à fundamentação da análise estavam cientes de que seu progresso dependia de uma extensão do conceito de número.”

Observamos que a comunidade matemática do século XVIII não dispunha da mesma noção de rigor matemático de hoje Sendo assim, não tencionamos afirmar que estes necessariamente precisavam trilhar um caminho linear para chegar à matemática de que atualmente dispomos.

De acordo com Roque:

> A noção de rigor se transformou na virada do século XVIII para o XIX porque os matemáticos da época se baseavam em crenças e técnicas que não eram mais capazes de resolver os problemas que surgiram no interior da própria matemática. Ou seja, isso não se deu por preocupações formalistas, nem por interesse metamatemático de fundamentar essa disciplina. O rigor é um conceito histórico, e a noção de rigor de Lagrange era diferente da de Cauchy, que, por sua vez, também seria criticado por Weierstrass [...]. (ROQUE, 2012, p. 407)

Vários foram os matemáticos – alguns já aqui mencionados – que fizeram parte desse percurso, mas cumpre-nos destacar as obras de alguns, além de JAC, que se envolveram com a conceituação de número negativo e que estiveram diretamente implicados no duelo literário que estamos analisando.

Começaremos com as concepções apresentadas por JAC em seu livro *Principios mathematicos*.

José Anastácio da Cunha (JAC; 1744-1787), logo no capítulo III de seus *Principios mathematicos*, adverte a respeito do "todo" nas operações de adição e subtração: "II. $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, isto é, A mais B, denota, o todo; que se compõe das partes A e B. III. $\mathrm{A}-\mathrm{B}$, isto é, A menos B, denota o que se deve ajuntar à grandeza B para compor um todo igual à grandeza A" (DA CUNHA, 1790, p. 20). Para definir 'número', utiliza o conceito de unidade; o zero pode considerado 'nada'. Apresentadas essas definições, exemplifica algoritmos de adição, multiplicação e divisão em que os resultados são números positivos (DA CUNHA, 1790).

Ao retomar no capítulo VIII as definições que expusemos no parágrafo anterior, JAC observa que "os matemáticos modernos, para abreviar operações, e facilitar expressões" (DA CUNHA, 1790, p. 100), substituem tais definições pelas seguintes:

> Suposição I. A grandeza, cujo nome é precedido do sinal +, ou não é precedido de nenhum sinal, supõe-se destinada para se ajuntar a alguma grandeza.
>
> Definição I. E por isso, chama-se aditiva, e também positiva, ou afirmativa.
>
> Suposição II. A grandeza, cujo nome é precedido do sinal –, supõe-se destinada para se tirar de alguma grandeza.
>
> Definição II. E por isso, chama-se subtrativa, e também defectiva. (DA CUNHA, 1790, p. 100-101)

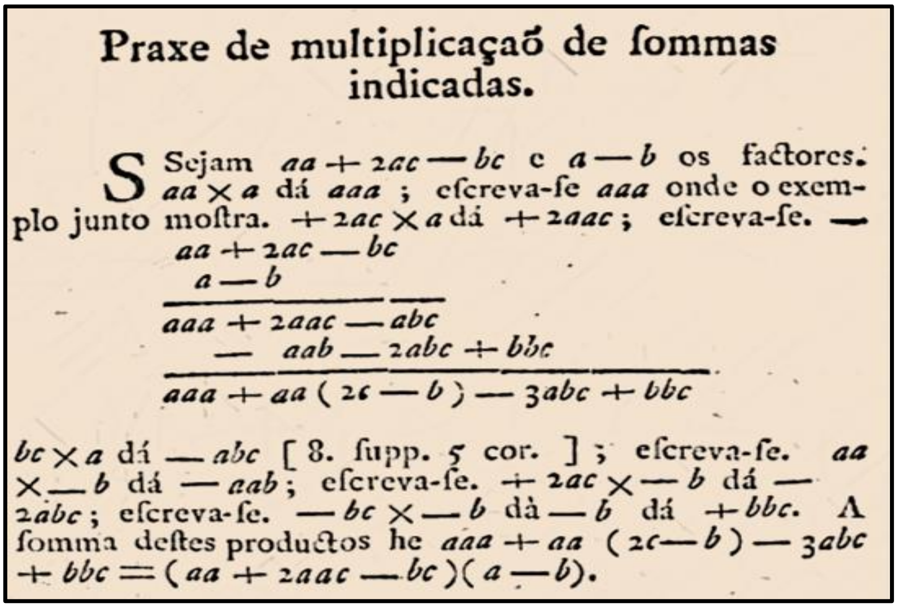
Em seguida, define "grandezas contrárias entre si" como aquelas em que, sendo uma afirmativa, a outra será negativa, e supõe que a soma entre essas grandezas seja igual a nada, ou zero, devendo tal resultado receber tratamento “como se fosse nome de alguma grandeza” (DA CUNHA, 1790, p. 101).

JAC emprega a expressão “subtrair uma grandeza negativa” (DA CUNHA, 1790, p. 101) e expõe a regra de sinais:

> Subtrair uma grandeza negativa é o mesmo que ajuntá-la depois de a fazer positiva. Por exemplo $\mathrm{A} - (-\mathrm{B})$ é $\mathrm{A} + \mathrm{B}$; pois $\mathrm{A} + \mathrm{B} + (-\mathrm{B})$ é A.
>
> Produto de dois fatores contrários é negativo; de dois fatores não contrários, positivo.
>
> O quociente, se o dividendo e o divisor são contrárias, é negativo; se não são contrários, positivo. (DA CUNHA, 1790, p. 100-101)

Em sequência, afirma que um “número negativo não pode ter raiz quadrada” (DA CUNHA, 1790, p. 102) e exemplifica a utilização dos conceitos que enunciou por meio da multiplicação e divisão de polinômios. Nesses exemplos não evita o aparecimento de termos negativos nos polinômios.

Figura 8. Exemplo de multiplicação de polinômios em *Principios mathematicos.*



Praxe de multiplicaçaõ de ſommas indicadas.

Sejam $aa + 2ac - bc$ e $a - b$ os factores: $aa \times a$ dá aaa ; eſcreva-ſe aaa onde o exemplo junto moſtra. $+ 2ac \times a$ dá $+ 2aac$; eſcreva-ſe. —

$$\begin{array}{l} aa + 2ac - bc \\ a - b \\ \hline aaa + 2aac - abc \\ \quad - aab - 2abc + bbc \\ \hline aaa + aa\,(2c - b) - 3abc + bbc \end{array}$$

$bc \times a$ dá $- abc$ [8. ſupp. 5 cor.] ; eſcreva-ſe. $aa \times - b$ dá $- aab$; eſcreva-ſe. $+ 2ac \times - b$ dá $- 2abc$; eſcreva-ſe. $- bc \times - b$ dà $- b$ dá $+ bbc$. A ſomma deſtes productos he $aaa + aa\,(2c - b) - 3abc + bbc = (aa + 2aac - bc)(a - b)$.

Fonte: da Cunha (1790, p. 102) [91]

[91] No último parágrafo do exemplo, onde se lê “$(\mathrm{aa} + 2\mathrm{aac} - \mathrm{bc})(\mathrm{a} - \mathrm{b})$”, leia-se “$(\mathrm{aa} + 2\mathrm{ac} - \mathrm{bc})(\mathrm{a} - \mathrm{b})$” (DA CUNHA, 1987, p. 306).

Em todo o livro, JAC parece utilizar parcimoniosamente as quantidades negativas e, sem se alongar, não nos explica se, afinal, seriam ou não números.

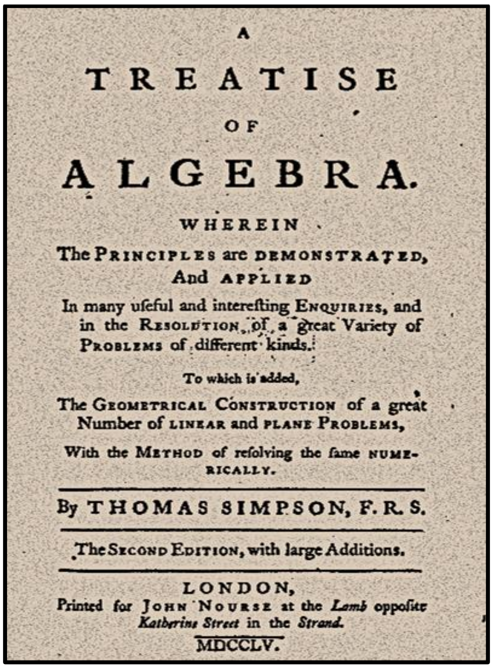
O próximo a ser focalizado, bem como os conceitos que apresentou sobre as quantidades negativas, teve suas obras bastante estudadas por JAC. Trata-se de **Thomas Simpson** (1710-1761), que, numa biografia amplamente divulgada, nos é apresentado como autodidata, tecelão, matemático e professor. Inglês, teria recebido pouco ensino formal, tendo estudado na Market Bosworth School. Foi membro da Sociedade Matemática de Spitalfields, da Royal Military Academy de Woolwich, da Real Academia Sueca de Ciências e da Royal Society (nesta por indicação de Isaac Newton), sendo responsável por várias publicações e contribuições na área de matemática. Entre suas obras estão *Tratado de fluxões* (de 1737), *Tratado de álgebra* (de 1745), *Natureza e as leis do acaso* (de 1740), *Doutrina das anuidades e reversões* (de 1742), *Dissertação matemática sobre uma variedade de assuntos físicos e analíticos* (de 1743) e *Elementos da geometria* (de 1747) (EVES, 2004; CAJORI, 2007).

Seu *Tratado de álgebra* auxiliou-o em suas aulas na famosa Academia Militar de Woolwich, sendo reeditado 10 vezes. O prefácio da segunda edição[92], de 1755, informa que a matemática é apresentada nessa obra por meio de demonstrações, em formato reduzido, contendo os princípios fundamentais e respeitando uma ordem que viabilize ao aprendiz adquirir pré-requisitos para avançar com sucesso em questões de maior dificuldade, sem com isso desmotivar os que estejam mais avançados. O volume perfaz 402 páginas, incluindo prefácio, errata e apêndice (SIMPSON, 1755).

---

[92] Além da edição citada, também pesquisamos as mesmas informações na 7.ª edição, de 1800, e na 8.ª, de 1809.

Figura 9. Frontispício de *A treatise of algebra*, 2.ª edição, de Thomas Simpson.


A

TREATISE

OF

ALGEBRA.

WHEREIN

The PRINCIPLES are DEMONSTRATED,
And APPLIED

In many uſeful and intereſting ENQUIRIES, and in the RESOLUTION of a great Variety of PROBLEMS of different kinds.

To which is added,

The GEOMETRICAL CONSTRUCTION of a great Number of LINEAR and PLANE PROBLEMS,

With the METHOD of reſolving the ſame NUMERICALLY.

By THOMAS SIMPSON, F.R.S.

The SECOND EDITION, with large Additions.

LONDON,
Printed for JOHN NOURSE at the *Lamb* oppoſite *Katherine Street* in the *Strand*.
MDCCLV.

Fonte: https://books.google.com.br

Na seção 1 dessa obra, em que explana sobre notações algébricas, informa:

> O sinal +, significa que a quantidade, à qual é prefixado, deve ser adicionada. Assim, $a + b$ mostra que o número representado por b deve ser adicionado ao representado por a, e expressa a soma desses números [...][93] (SIMPSON, 1755, p. 1-2)
>
> O signo – significa que a quantidade, a qual é a diferença de antecedentes, deve ser subtraída. Assim, $a - b$ mostra que a quantidade representada b deve ser subtraída da representada por a, onde expressa a diferença de a e b [...]
>
> As notas + e – geralmente são expressas pelas palavras *plus* (ou mais) e *minus* (ou menos). Assim, lemos $a + b$, a mais b; e $a - b$, a menos b.
>
> Além disso, as quantidades às quais o sinal + é prefixado são chamadas de positivas (ou afirmativas); e aqueles para os quais o sinal – é prefixado, negativo [...].[94] (SIMPSON, 1755, p. 2; grifos no original)

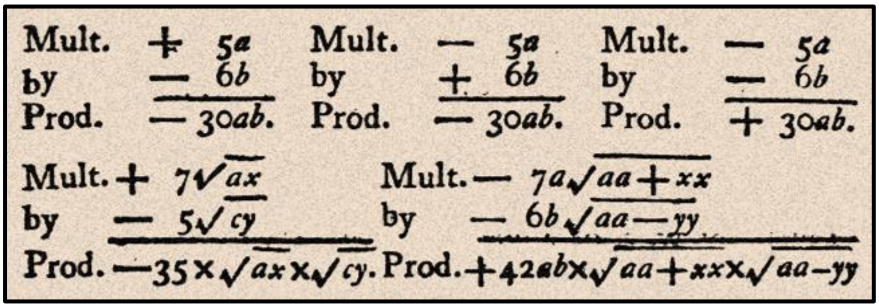
[93] Em inglês lê-se: "The sign +, signifies that the quantity, which it is prefixed to, is to be added. Thus $a + b$ shews that the number represented by b is to be added to that represented by a, and expresses the sum of those numbers […]".

[94] Em inglês lê-se: "The sign +, signifies that the quantity, which it is prefixed to, is to be added. Thus $a + b$ shews that the number represented by b is to be added to that represented by a, and expresses the sum of those numbers […].

The notes + and – are usually expressed by the words *plus* (or more) and *minus* (or less) Thus, we read $a + b$, a plus b; and $a - b$, a minus b .

Nas seções 2, 3, 4 e 5 apresenta e define as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, respectivamente, e traz exemplos algébricos e numéricos, envolvendo quantidades negativas apesar de não admiti-las como números:

Figura 10: Exemplo de multiplicação com quantidades negativas no *Tratado de álgebra,* de Thomas Simpson.



Mult. $+ 5a$ Mult. $- 5a$ Mult. $- 5a$
by $- 6b$ by $+ 6b$ by $- 6b$
Prod. $- 30ab.$ Prod. $- 30ab.$ Prod. $+ 30ab.$

Mult. $+ 7\sqrt{ax}$ Mult. $- 7a\sqrt{aa+xx}$
by $- 5\sqrt{cy}$ by $- 6b\sqrt{aa-yy}$
Prod. $-35\times\sqrt{ax}\times\sqrt{cy}$. Prod. $+42ab\times\sqrt{aa+xx}\times\sqrt{aa-yy}$

Fonte: Simpson (1755, p.16).

No final da seção 4, enfatiza que: "Nas considerações precedentes, as quantidades negativas $-b$, $-c$, etc. foram representadas, em alguns casos, como uma espécie de quantidade imaginária ou impossível", e explica que "tais quantidades imaginárias servem muitas vezes, [...] para descobrir a impossibilidade de um problema[95]" (SIMPSON, 1755, p. 27), considerando que:

> [...] em todas as questões relacionadas a números abstratos , ou tal, em que apenas a magnitude é considerada, e onde nenhuma consideração de posição, ou valores contrários podem ter lugar; eu digo que, em todos os casos, é evidente que a solução será tão impossível, quando a conclusão resultar em uma quantidade negativa, como se estivesse realmente afetada por uma quantidade imaginária [...].[96] (SIMPSON, 1755)

Para exemplificar uma impossibilidade de resolução, Simpson cita um problema geométrico com aplicação algébrica:

Moreover, those quantities to which the sign + is prefixed are called *positive* (or *affirmative*); and those to which the sign – is prefix'd, *negative.*

The sign x, signifies that the quantities between wich it stands are to be multiplied together. Thus axb denotes that the quantity a is to be multiplied by the quantity b, and express the product the quantities so multiplied […]".

95 Em inglês lê-se: "In the foregoing considerations, the negative quantities $-b$, $-c$, &c. have been represented, in some cases, as a kind of imaginary, or impossible quantities […] such imaginary quantities serve many times, […] discover the impossibility of a problem […]".

96 Em inglês lê-se: "The sign +, signifies that the quantity, which it is prefixed to, is to be added. Thus $a+b$ shews that the number represented by b is to be added to that represented by a, and expresses the sum of those numbers […]".

> [...] seja dado, num triângulo de ângulo reto, a soma da hipotenusa e perpendicular = a , e a base = b, para encontrar a perpendicular; então (pelo que será mais adiante mostrado em seu lugar apropriado[97]) a resposta se mostrará $x = \frac{b^2 - a^2}{2b}$, sendo possível, ou impossível, conforme a quantidade $x = \frac{b^2 - a^2}{2b}$ seja maior ou menor que b; que aparecerá manifestamente a partir de uma simples contemplação do problema [...].[98] (SIMPSON, 1755, p. 28)

Considera absurdo que raízes negativas possam ter solução, bem como subtrair algo menor do que nada. Em termos de grandeza, enfatiza a necessidade de uma demonstração coerente acerca das quantidades negativas para os alunos e salienta que a utilização de exemplos de crédito e débito atrapalham o entendimento da regra de sinais na multiplicação. Evidencia a falta de fundamentação e as incoerências decorrentes disto, como também assume não ter ainda todas as respostas.

Passemos agora àquele que é citado no documento central deste trabalho como responsável por abrir caminho para o avanço da matemática: **René Descartes** (1596-1650). Filósofo, físico e matemático francês, estudou no colégio jesuíta Royal Henry-Le-Grand e graduou-se em direito na universidade de Poitiers. Por meio de sua obra *Discurso sobre o método*, na qual apresenta o tratado *A geometria,* ganhou reconhecimento como matemático pela fusão da geometria com a álgebra. Tal abordagem culminou com o que hoje denominamos ‘geometria analítica’ (CONNOR; ROBERTSON, 2001; CAJORI, 2007).

Nesse tratado, Descartes mostra que, por meio da aritmetização de segmentos de reta, em que se fixa um segmento de reta unitário, é possível definir as operações internas da multiplicação, da divisão e da radiciação, além das já usuais de adição e subtração. Esse processo de aritmetização de segmentos de reta serviu de base à utilização da linguagem algébrica em problemas de geometria (ESTRADA, 2000).

> Após a aritmetização e a algebrização dos segmentos de reta, Descartes deu indicações precisas quanto ao método que propunha para resolver problemas

---

97 Nas páginas 257-258 da obra este problema é retomado.

98 Em inglês lê-se: “[…] let there be given, in a right-angled triangle, the sum of the hypothenuse and perpendicular = a, and the base = b, to find the perpendicular; then (by what shall hereafster be shewn in it’s proper place) the answer will come out $x = \frac{b^2 - a^2}{2b}$ and is possible, or impossible, according as the $x = \frac{b^2 - a^2}{2b}$quantity greater or less than b; which will manifestly appear from a bare contemplation of the problem […]”.

> de geometria. O primeiro passo é a formulação algébrica do problema em causa, escrevendo equações que traduzam a situação geométrica; em seguida, há que resolver essas equações; finalmente, deve interpretar-se geometricamente a solução algébrica obtida. (ESTRADA, 2000, p. 561)

Descartes sistematizou o uso da álgebra na resolução de problemas geométricos, mas convém ressaltar que a representação dos conceitos matemáticos abordados estava ainda longe de sistematizar-se na forma como hoje a entendemos. Descartes "não empregava necessariamente um sistema de eixos ortogonais. Para cada problema, devia ser escolhido o sistema mais conveniente" (ROQUE, 2012, p. 329).

Em seu tratado "nunca utiliza um eixo, em que a abscissa de um ponto variasse de $-\infty$ a $+\infty$"[99] (GLAESER, 1981, p. 315). Considera, porém, que as linhas positivas têm direção oposta às negativas.

Nas resoluções dos problemas que propõe em seu tratado não são consideradas as soluções negativas. Manipulam-se as equações de modo a suprimir esse tipo de resposta. Glaeser (1981) considera que essa evasão indicava insegurança em utilizar números negativos.

A fusão que Descartes fez entre a álgebra e a geometria, bem como as consequentes contribuições disso à matemática, foi bem aceita pelos matemáticos. Sua obra "exerceu uma grande influência nos meios científicos da época e, por essa razão, revelou-se muito importante para a divulgação da geometria analítica" (ESTRADA, 2000, p. 562).

Passemos àquele que é considerado pelos discípulos de JAC como pouco rigoroso em suas demonstrações matemáticas: **Étienne Bézout** (1730-1783), matemático francês que foi membro da Académie des Sciences de Paris e autor de *Dynamique*, *Quantités différentielles*, *Rectification des courbes* e *Théorie générale des équations algébriques*, entre outras obras. Em 1763 foi designado examinador de livros para os Guardas da Marinha, acumulando a função de também escrever livros de matemática elaborados especialmente para alunos futuros militares, como o *Cours de mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine*, publicado pela primeira vez entre 1764 e 1767 em quatro volumes, que viria a ter grande sucesso,

---

[99] Em francês lê-se: "n'utilise jamais d'axe, sur lequel l'abscisse d'un point varierait de $-\infty$ à $+\infty$".

inclusive internacionalmente e quando da reforma pombalina da Universidade de Coimbra, ocasião em que também se assistiu à adoção de algumas partes desses volumes que, traduzidas, foram usadas nas disciplinas dos dois primeiros anos da recém-criada Faculdade de Matemática (CONNOR; ROBERTSON, 2001; CAJORI, 2007).

Segundo Grabiner (*apud* CONNOR; ROBERTSON, 2001):

> A experiência de ensinar não matemáticos moldou o estilo das obras: Bézout tratou a geometria antes da álgebra, observando que os iniciantes não estavam ainda familiarizados o bastante com o raciocínio matemático para entender a força das demonstrações algébricas, embora apreciassem provas em geometria. Ele evitou os termos assustadores "axioma", "teorema", "escólio" e tentou evitar argumentos demasiado minuciosos e detalhados.[100]

A obra matemática de Bézout não ficou isenta de críticas. Apesar disso, “eram livros que podiam ser entendidos por aqueles que precisavam usar a matemática e, como resultado, eram muito populares e amplamente utilizados” [101] (CONNOR; ROBERTSON, 2001), sendo adotados também em várias universidades, entre elas a de Coimbra (FERREIRA, 2017).

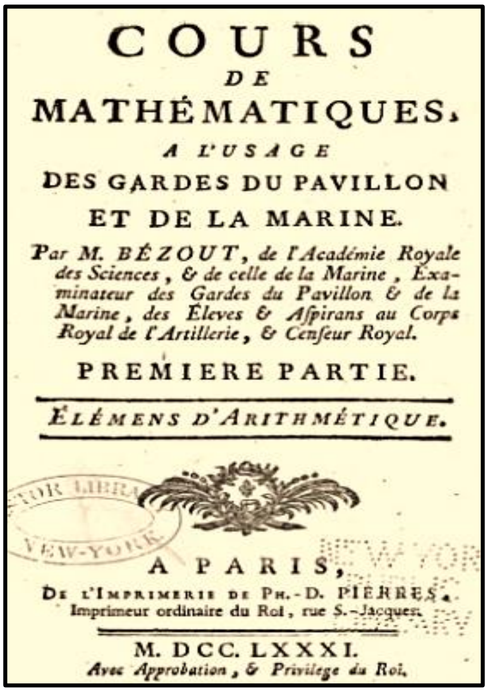
Seu curso de matemática elaborado para alunos da marinha abrangia quatro volumes: 1. *Elementos de aritmética*; 2. *Elementos de geometria e trigonometria*; 3. *Álgebra com aplicações*; 4. *Princípios gerais de mecânica e cálculo*. Por ser nossa temática diretamente relacionada com álgebra e fundamentos da aritmética, analisaremos o primeiro e o terceiro desses volumes, atentando a exemplos do tratamento dado às quantidades negativas.

---

[100] Artigo proveniente de publicação na Internet.
Em inglês lê-se: “The experience of teaching non-mathematicians shaped the style of the works: Bézout treated geometry before algebra, observing that beginners were not yet familiar enough with mathematical reasoning to understand the force of algebraic demonstrations, although they did appreciate proofs in geometry. He eschewed the frightening terms ‘axiom’, ‘theorem’, ‘scholium’, and tried to avoid arguments that were too close and detailed”.

[101] Em inglês lê-se: “[…] they were books which could be understood by those who needed to use mathematics and as a result were very popular and widely used”.

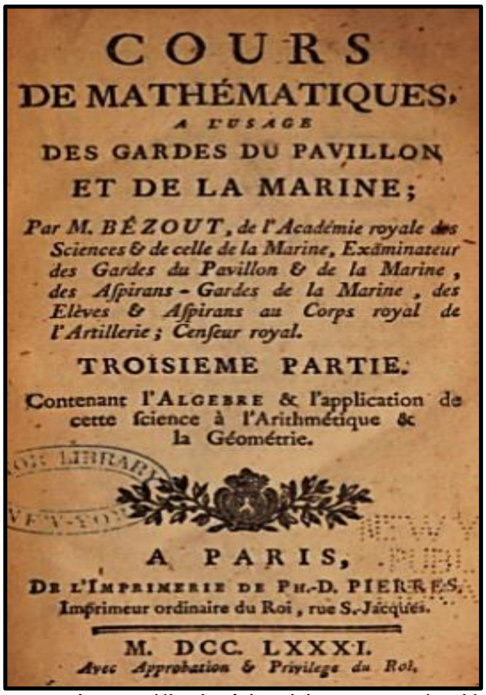
Figura 10 - Frontispício do *Cours de mathématiques*: primeiro livro.



COURS
DE
MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DES GARDES DU PAVILLON
ET DE LA MARINE.
Par M. BÉZOUT, de l'Académie Royale des Sciences, & de celle de la Marine, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Éleves & Aſpirans au Corps Royal de l'Artillerie, & Cenſeur Royal.
PREMIERE PARTIE.
ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.
A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE DE PH.-D. PIERRES, Imprimeur ordinaire du Roi, rue S.-Jacques.
M. DCC. LXXXI.
Avec Approbation, & Privilege du Roi.

Fonte: https://babel.hathitrust.org/cgi/pt

Figura 11 - Frontispício do *Cours de mathématiques*: terceiro livro.



COURS
DE MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DES GARDES DU PAVILLON
ET DE LA MARINE;
Par M. BÉZOUT, de l'Académie royale des Sciences & de celle de la Marine, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Aſpirans - Gardes de la Marine, des Elèves & Aſpirans au Corps royal de l'Artillerie; Cenſeur royal.
TROISIEME PARTIE.
Contenant l'ALGEBRE & l'application de cette ſcience à l'Arithmétique & la Géométrie.
A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE DE PH.-D. PIERRES, Imprimeur ordinaire du Roi, rue S.-Jacques.
M. DCC. LXXXI.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

Fonte: https://babel.hathitrust.org/cgi/pt

Na edição consultada, o primeiro livro, com 256 páginas, inclui um detalhado prefácio acerca dos quatro volumes. Uma seção inicial, intitulada "Noções preliminares sobre a natureza e diferentes espécies de números[102]" (BÉZOUT, 1781, p. 1), define quantidade como:

> [...] tudo o que seja suscetível de aumento ou diminuições. Extensão, duração, peso, etc. são quantidades. Tudo o que é quantidade é do objeto das Matemáticas; mas a Aritmética que faz parte dessas ciências, considera as quantidades apenas na medida em que são expressas em números.[103] (BÉZOUT, 1781, p. 1)

Neste primeiro volume, o autor faz menção a quantidades negativas na seção sobre logaritmos e avisa ao leitor que tal assunto será tratado no terceiro livro.

O terceiro volume tem 496 páginas, com prefácio e anexo de figuras geométricas. Na primeira seção, após explanar acerca das operações de adição e subtração, adverte: "As quantidades precedidas pelo sinal +, são chamadas de

---

[102] Em francês lê-se: "Notions préliminaires sur la nature & les différentes espèces de nombres".

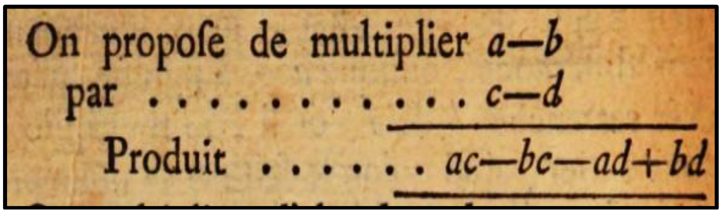
[103] Em francês lê-se: "[…] tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. L'étendue, la durée, le poids, &c. sont des quantités. Tout ce qui est quantité est de l'objet des Mathématiques; mais l'Arithmétique qui sait partie de ces Sciences, ne considere les quantités, qu'en tant qu'elles sont exprimées en nombres".

quantidades positivas; e aquelas precedidos pelo sinal – , são chamadas de quantidades negativas[104]” (BÉZOUT, 1781, p. 9). Em seguida, introduz conceitos e exemplifica a multiplicação. Sobre a regra de sinais, explica que:

> Se os dois termos que devem ser multiplicados um pelo outro têm o mesmo sinal, ou seja, ambos + ou ambos – seu produto sempre terá o sinal +. Se, pelo contrário, eles têm sinais diferentes, isto é, um + e o outro –, ou um – e o outro +, seu produto sempre terá o sinal –.[105] (BÉZOUT, 1781, p. 18)

Ao longo do livro, há mais exemplos com operações envolvendo quantidades positivas do que com negativas. Vejamos um, envolvendo as negativas:

Figura 12. Exemplo de multiplicação com quantidades negativas.


On propose de multiplier $a-b$
par . . . . $c-d$
Produit . . . . . . $ac-bc-ad+bd$

Fonte: Bézout (1781, livro 1, p. 18).

Os livros de Bézout foram reeditados até 1868, sem grandes alterações, sendo amplamente utilizados por alunos militares e civis. Schubring (2005) observa que mesmo professores com preferência por outros autores utilizavam Bézout, devido à grande quantidade de livros disponíveis.

O próximo a ser exposto serviu como referência ao autor das cartas que compõem nosso documento central de pesquisa. **Leonard Euler** (1707-1783), matemático e cientista suíço, estudou na universidade de Basileia, onde se graduou em matemática e recebeu o título de mestre em artes. Foi responsável por várias publicações e contribuições no campo matemático, nas quais trabalhou com quantidades negativas e imaginárias (CAJORI, 2007).

---

[104] Em francês lê-se: “Les quantités précédées du signe +, se nomment quantités positives; & celles qui sont précédées du signe –, se nomment quantités negatives”.

[105] Em francês lê-se: “Si les deux termes que lon doit multiplier lun par lautre ont tous deux le même signe, c’est-à-dire, ou tous deux + ou tous deux –, leur produit aura toujours le signe +. Si au contraire ils ont differens signes, c’est-à-dire, lun + & lautre –, ou lun - & lautre + , leur produit aura toujours le signe –“.

Em suas obras não levanta questões relacionadas à legitimidade de suas construções, mas em seu livro sobre álgebra, publicado na Alemanha e na França como *Completa introdução à álgebra* (em 1770) e *Elementos de álgebra* (em 1774), respectivamente, com objetivo educacional, tenta justificar a regra dos sinais algébricos apoiando-se em exemplos de dívidas (GLAESER, 1981).

De acordo com Roque (2012):

> Euler já via a álgebra como uma ciência dos números, e não das quantidades. Para ele, todas as grandezas podiam ser expressas por números e a base da matemática devia se constituir de uma exposição clara do conceito de números e das operações. (ROQUE, 2012, p. 442)

Para Euler, "um número negativo é representado por uma letra precedida pelo sinal –". Tendo isso em mente, substitui sem dificuldades uma variável em um polinômio ou séries inteiras por números negativos ou imaginários, mas, apresenta dificuldades em seu discurso, por falta de maior compreensão sobre os números negativos (GLAESER, 1981, p. 320).

O último matemático que ora apresentamos foi, tal como o anterior, citado no duelo literário sobre a natureza das quantidades negativas: **Jean le Rond D'Alembert** (1717-1783), filósofo, matemático e físico francês que estudou no Collège des Quatre-Nations, formando-se em direito. É bastante conhecido por seu trabalho em parceria com Denis Diderot, em que reúne as descobertas científicas da época na *Enciclopédia*[106], obra de que redigiu o prefácio e as seções referentes à matemática (CAJORI, 2007).

Na *Enciclopédia,* no artigo *Negativos*, D'Alembert expõe que "as quantidades negativas, na Álgebra, são aquelas afetadas pelo sinal –, e que são vistas por muitos matemáticos como menores do que zero. Esta última ideia não é porém correta"[107] (DIDEROT; D'ALEMBERT, 1765, v. 11, p. 72b).

E acrescenta

> Quando se considera a precisão e a simplicidade das operações algébricas sobre quantidades negativas, é se tentado a crer que a ideia precisa que se

---

[106] Publicada na França ao longo do período de 1750 a 1772 por Jean le Rond d'Alembert e Denis Diderot. Com 33 volumes e 71.818 artigos, contou com contribuições de personagens centrais do Iluminismo, como Voltaire, Rousseau e Montesquieu.

[107] Em francês lê-se: "Quantités négatives, en Algèbre, sont celles qui sont affectées du signe –, et qui sont regardées par plusieurs mathématiciens, comme plus petites que zéro. Cette dernière idée n'est cependant pas juste [...]".

> deve atribuir às quantidades negativas há de ser uma ideia simples e não deduzida de uma metafísica tortuosa. Para tentar descobrir a verdadeira noção, deve-se primeiro observar que as quantidades chamadas negativas e que se veem erroneamente como abaixo do zero, são muito frequentemente representadas por quantidades reais como na geometria, onde as linhas negativas não diferem das positivas senão por sua posição em relação a alguma linha no ponto comum.[108] (DIDEROT; D'ALEMBERT, 1765, v. XI, p. 72b)

Para Glaeser (1981), esse artigo de D'Alembert é revelador da confusão reinante no final do século XVIII acerca dos números negativos. Considera que o problema não está no grau de compreensão de D'Alembert sobre o tema, mas no impacto que seus escritos tiveram.

D'Alembert também publicou os *Opúsculos matemáticos*, contendo o texto intitulado *Sobre as quantidades negativas*, no qual reforçou seus conceitos apresentados no artigo *Negativos*, além de abordar a interpretação de soluções negativas em problemas geométricos.

Ribeiro (2009) destaca que nesses *Opúsculos* D'Alembert considera que linhas com sentidos opostos correspondem a quantidades geométricas com sinais contrários, como também que:

> [...] para o matemático francês há "linhas" com sinais contrários que não correspondem a segmentos com "sentidos opostos", mas a segmentos de retas distintas pertencentes a partes do plano "opostas". (RIBEIRO, 2009, p.13, grifo no original)

Em suas publicações, D'Alembert, apesar de admitir que havia muito a ser estudado em relação às quantidades negativas, ao mesmo tempo critica "radicalmente a aceitação dos números negativos" (ROQUE, 2012, p. 439).

Em Portugal, também há referências às quantidade negativas em trabalhos matemáticos. Além de JAC em seu livro *Principios mathematicos*, dois de seus discípulos, já citados – José Joaquim Rivara e Anastácio Joaquim Rodrigues –,

---

[108] Em francês lê-se: "Quand on considère l'exactitude et la simplicité des opérations algébriques sur les quantités négatives, on est bien tenté de croire que l'idée précise que l'on doit attacher aux quantités négatives doit être une idée simple et n'être point déduite d'une métaphysique alambiquée. Pour tâcher d'en découvrir la vraie notion, on doit d'abord remarquer que les quantités qu'on appelle négatives et qu'on regarde faussement comme au-dessous du zéro, sont très souvent représentées par des quantités réelles comme dans la géométrie où les lignes négatives ne diffèrent des positives que par leur situation à l'égard de quelque ligne au point commun".

escreveram sobre o tema no início do século XIX. Rivara[109] redigiu o livro *Resolução analytica dos problemas geométricos e indagação da verdadeira origem das quantidades negativas* e Rodrigues[110] a dissertação foi autor de *Sobre as verdadeiras noções de infinito e infinitésimo: e da origem das expressões absurdas, que falsamente se consideram como suas representantes*.

O percurso histórico que nesta seção explanamos atingiu seu apogeu com a generalização da álgebra, mas os personagens envolvidos não sabiam qual seria o desfecho final. Nesse sentido, Schubring (2005, p. 33) adverte que “o desenvolvimento histórico” não deve ser “entendido como linear, como convergente à situação moderna”[111].

Na próxima seção, procederemos a uma reconstrução de eventos e conceitos matemáticos envolvidos nos documentos manuscritos que minuciosamente analisamos.

3.3 AS CARTAS QUE COMPÕEM O DUELO *NATUREZA DAS QUANTIDADES NEGATIVAS – 1785*

Quando encontramos na Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro duas cartas manuscritas com conteúdo acerca da natureza das quantidades negativas, tornou-se imediatamente claro que se tratava de um debate colocando de um lado o professor JAC e seus discípulos e, do outro, um professor anônimo e seu discípulo. Inferimos então que tais documentos ainda não tinham sido alvo de estudos, e iniciamos uma pesquisa com vista a decifrar quem seriam os possíveis personagens envolvidos neste “quinau”[112]. Para além de JAC, cujo nome é citado várias vezes nas duas cartas, nenhum outro personagem estava identificado. Somente após conjecturarmos e investigarmos possíveis nomes para os outros personagens, é que localizamos publicações da primeira década do presente século sobre tais missivas.

---

[109] Para mais informações, consultar a dissertação *Um estudo sobre as “quantidades negativas” em José Joaquim Rivara*, de Susana Maria da Costa Ribeiro, defendida em 2009 na Universidade do Minho.

[110] Para mais informações, consultar a dissertação, *A questão dos princípios do cálculo em Portugal (1786-1806)*, de João Caramalho Domingues, defendida em 1999 na Universidade do Porto.

[111] Em inglês lê-se: “Historical development […] understood as linear, as convergent to modern status”.

[112] Termo utilizado por JAC. Quinau: ato ou efeito de corrigir um erro; lição; correção, emenda.

Trata-se de dois artigos, do Dr. Gert Schubring (professor da Universidade de Bielefeld) e do Dr. João Caramalho Domingues (da Universidade do Minho). Mesmo assim, optamos por nos manter distantes de suas conclusões sobre as cartas até que pudéssemos confirmar ou refutar nossas conjecturas recorrendo a fontes primárias. De fato, nos propusemos a analisar mais detalhadamente o contexto em que tais cartas foram escritas e seus conteúdos matemáticos, associando-os aos procedimentos de ensino de JAC.

Nas próximas subseções, descreveremos os eventos e personagens envolvidos nessas missivas e, e em seguida, seu conteúdo matemático acerca das quantidades negativas.

3.3.1 Reconstrução contextual: eventos e personagens

Constam na folha de rosto da encadernação das cartas os seguintes esclarecimentos:

> Carta sobre a natureza das quantidades negativas e rigorosa exatidão dos cálculos algébricos escrita a um discípulo da Academia Real da Marinha de Lisboa em que se responde a algumas dúvidas propostas por dois discípulos do Dr. José Anastácio da Cunha, e por ele mesmo aprovadas. (NATUREZA, 1785)

Embora nessa folha conste "carta", no singular, o volume inclui, como dissemos, duas delas, sobre o mesmo assunto, de mesma autoria e seguramente para o mesmo destinatário: um discípulo da Academia Real da Marinha, identificado como "Senhor F.". São claramente sequenciais, com remetente desconhecido, e foram enviadas da cidade do Porto.

A essas duas cartas acrescentamos uma terceira, inédita, pertencente ao acervo da Fundação Casa de Mateus, que nos foi gentilmente cedida pela Prof.ª Maria Elfrida Ralha. Tal missiva, de JAC, foi dirigida a João Manuel de Abreu[113].

[113] Antônio José Teixeira publicou no decorrer de 1890 a 1892 em *O Instituto: jornal scientifico e litterario*, o artigo intitulado *Questão entre José Anastácio da Cunha e José Monteiro da Rocha*, no qual apresenta uma carta semelhante a esta do acervo da Fundação Casa de Mateus. A diferença consiste em que a carta manuscrita original, do acervo, é escrita por várias pessoas - com caligrafias muito distintas – sendo que, nenhuma destas caligrafias é de JAC e apesar de conter menos

Temos então três cartas, que ordenamos cronologicamente e, por facilidade, assim denominaremos:

- **Carta I**[114], de um professor anônimo, no Porto, para seu discípulo, a quem denomina "Senhor F.", datada de 13 de março de 1785 (acervo da Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro).
- **Carta II**[115], de JAC, em Lisboa, para João Manuel de Abreu, datada de 3 de junho de 1785 (acervo da Fundação Casa de Mateus).
- **Carta III**[116], de um professor anônimo, no Porto, para o "Senhor F.", datada de 28 de agosto de 1785 (acervo da Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro).

Na Carta II, encontramos um relato de JAC sobre o que acreditamos tenha suscitado e fomentado essa troca de correspondências. Nela, menciona as visitas que recebera de seus ex-alunos casapianos que na ocasião eram já alunos da Academia Real da Marinha de Lisboa, nas quais "sempre se queixavam que na Academia de Marinha lhes ensinavam matemática à maneira de catecismo" (CARTA II, 1785, p. 17).

JAC também identifica alguns desses visitantes:

> [...] se queixam de que na Academia de Marinha se fala muito e não se demonstra nada. Anastácio [Joaquim Rodrigues], Manuel Pedro [de Melo] e Luís Antônio [de Araújo] têm vindo ver-me várias vezes e comunicar-me dúvidas que lhes ocorrem contra os princípios de cálculo que M. Bézout ensina como Teoremas demonstrados. (CARTA II, 1785, p. 1)

Tais dúvidas, decorrentes de um método de ensino que se valia de teoremas sem proceder a suas rigorosas demonstrações, levou Anastácio a apresentar uma prova a respeito de serem as quantidades negativas imaginárias ou impossíveis. Nela para validar seus argumentos utiliza um problema retirado do livro *Principios mathematicos*, de JAC, mencionando o autor apenas como sendo um "Matemático português" (CARTA II, 1785).

Na mesma carta, JAC cita o nome de Stockler, à data aluno da Faculdade de Matemática de Coimbra, como sendo alguém que estaria a difamá-lo, bem como a

---

informações, possui exatamente a parte intrincada em nosso estudo. Além disso, nunca fora possível comparar a carta transcrita por Teixeira com seu original.

114 Anexo B: Carta I, na íntegra.

115 Anexo C: Carta II, trecho.

116 Anexo D: Carta III, na íntegra.

seu livro, que deduzimos ser o livro *Principios mathematicos,* ou parte deste (CARTA II, 1785).

A prova exposta por Anastácio foi subsequentemente comunicada por um colega da Academia da Marinha, o Senhor F., ao professor anônimo.

No início da Carta I podemos ler:

> Senhor F.
>
> Agora acabo de ler a sua carta, em que me pergunta o meu parecer sobre as dúvidas, que alguns dos seus condiscípulos propuseram aos Senhores Lentes dessa academia; e posto que o Correio está a partir, como vejo o grande desejo que tem de saber o meu parecer, passo a expor-lhe em breves palavras. (CARTA I, 1785, p. 5)

Em três laudas e meia, o professor anônimo da Academia da Marinha emite seu parecer e adverte que tais dúvidas advêm da falta de conhecimento sobre as “diversas quantidades”, que são objeto da matemática e da falta de prudência em consultar os experientes nesses estudos. Acrescenta que foram provavelmente estes os motivos que levaram os colegas do Senhor F. “a escrever as dúvidas [...] sobre a natureza das quantidades negativas” (CARTA I, 1785, p. 5-6).

Em sua primeira carta, o professor anônimo não cita o nome de JAC. Refere-se, todavia, ao matemático português como sendo alguém que ele ignora ou que, simplesmente, nessa data não havia ainda identificado. Lemos:

> Suponho que estas considerações são assaz suficientes para fazer ver a futilidade das dúvidas sobreditas, que atendendo a serem propostas por sujeitos principiantes nesta qualidade de estudos, são dignas não só de indulgência, mas até de louvor, se eles tiverem a docilidade precisa para sinceramente confessarem o seu erro. E quanto ao Matemático português, nenhuma dúvida tenho em que ele reconheceria o seu descuido, se lhe ocorressem estas mesmas reflexões [...]. (CARTA I, 1785, p. 7)

Tal carta-resposta, que não nos pareceu destinada a mais pessoas que não o próprio Senhor F., acabaria por chegar ao conhecimento de JAC e de seus discípulos. Por sua vez, Manuel Pedro de Melo e Anastácio Joaquim Rodrigues manifestam-se em relação à carta-resposta. Gerara-se deste modo um verdadeiro duelo científico em torno de um assunto tão debatido por toda a Europa e em que JAC assume papel priviligeado.

Em nova missiva, o Senhor F. volta a contatar o professor anônimo da Academia Real da Marinha e o atualiza sobre o debate, identificando, ao que cremos, a contrariedade dos discípulos de JAC e anexando, inclusive, duas outras cartas “que com a sua remete” (CARTA, 1785, p. 11). E, pela segunda vez, esse professor responde a seu discípulo, agora numa carta extensíssima, de 24 laudas sobre o assunto, desta vez apelidado de “dificultosa matéria” (CARTA, 1785, p.11). Na Carta III, encontramos:

> Senhor F.
>
> Recebendo há tempos uma carta sua, e incluso nela um papelinho, que Vossa Mercê me dizia ser obra de uns seus condiscípulos, no qual se pretendia provar, que as quantidades negativas são imaginárias, responde a Vossa Mercê fazendo-lhe ver os argumentos, que nele se continham, eram uns puros paralogismos[117]. Vossa Mercê pedia-me na sua carta o meu parecer sobre aquelas razões, e não me perguntava quais eram os meus sentimentos a respeito das dúvidas, que Mr. D’Alembert escreveu sobre a inteligência que se devia dar a certas soluções negativas de alguns problemas, de que faz menção nos seus opúsculos Matemáticos, nem a respeito dos paradoxos, que Euler, encontrou no cálculo das forças centrais, e dos diversos sentimentos do mesmo Euler e de D’Alembert nesta tão dificultosa matéria. [...] e muito menos fazer dois dos mais celebres Matemáticos a injúria de tratar as suas questões juntamente com as de seus principiantes. [...] esta resposta como digo foi somente a Vossa Mercê dirigida para que aquelas pequenas dúvidas a não retardassem no progresso das suas aplicações, e de nenhuma sorte se encaminhava a eles pois estava bem certo que se por infelicidade minha lhe chegasse às mãos, haviam de blasfemar contra mim dizendo-me milhares de impropérios Vossa Mercê [...], teve a condescendência ou facilidade de mostrar-lhe. Verificaram-se os meus receios; [...] como vejo das duas cartas, que com a sua remete. Em uma [...] se propõem algumas novas dúvidas, ainda menos atendíveis que as primeiras [...]. Eu passo a expor os meus sentimentos, e a responder às novas dúvidas e reflexões [...]. (CARTA III, 1785, p. 11-12)

Nesse debate – à época dito literário –, sobre a natureza das quantidades negativas, encontramos os detonadores e/ou fomentadores da querela, que são alunos/discípulos desejosos de verem esclarecidas as suas dúvidas.

As Cartas I, II e III mencionam JAC e seus discípulos, ex-alunos da Casa Pia, Anastácio Joaquim Rodrigues, Manoel Pedro de Melo e Luís Antônio de Araújo, além do amigo, e também professor, recrutado por JAC para a Casa Pia, João Manuel de Abreu. Do lado oposto, temos o professor anônimo, que seguramente era docente da Academia Real da Marinha, e seu discípulo, Senhor F., aluno dessa instituição, além do ex-aluno Francisco de B. Garção Stockler.

[117] Paralogismo: argumento ardiloso, aparentemente correto, que pretende induzir ao erro.

Iniciaremos a apresentação desses personagens, fundamentando-nos primordialmente em documentos primários, excluindo-se o Senhor F., pois nossas pesquisas não nos forneceram ainda indícios suficientes para identificá-lo.

Consideramos que o professor anônimo da Academia Real da Marinha vem a ser **João Ângelo Brunelli** (1722-1804)[118]. Os elementos que nos levam a essa dedução incluem:

1. Ele era, em 1785, o professor titular da disciplina que tinha por conteúdo "os princípios elementares da Álgebra até às Equações do segundo grau inclusivamente", as quais consequentemente poderiam ter soluções negativas (SILVA, 1828, p. 1).
2. Encontramos o termo "brunellismo" utilizado por JAC como sinônimo de 'método de ensino sem demonstrações' (CARTA II, 1785).
3. Encontrarmos nos relatos do 5.º morgado de Mateus, as iniciais S. e B. enquadradas num relato sobre "os Rapazes [Casapianos] […] que foram continuar os seus estudos à aula de Marinha" e a "discórdia" que houve em torno da "acepção das quantidades negativas" (RODRIGUES *et al.*, 2013).
4. Confrontamos a caligrafia das Cartas I e III com a das cartas da Coleção Brunelli e avaliamos serem do mesmo punho.
5. Consultamos um grafologista do Projeto MAT², que avaliou as Cartas I e III e uma carta oficialmente reconhecida de Brunelli como sendo todas escritas pela mesma pessoa.

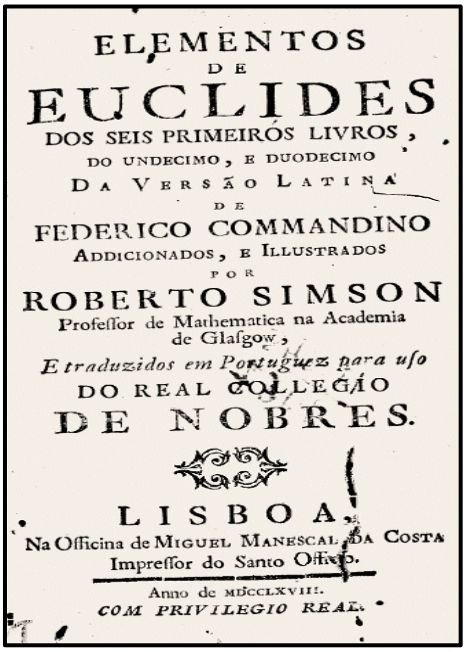
Brunelli nasceu em Bolonha, cidade italiana em que também faleceu. Foi sacerdote da Ordem dos Beneditinos, matemático, astrônomo e professor. Em 1750 aceitou o convite de D. João V para prestar serviços à coroa portuguesa, sendo em 1753 enviado ao Pará, integrando uma comissão de especialistas para, na sequência do denominado Tratado de Madri, demarcar o território português no Brasil. Depois disso, regressa a Lisboa e, devido à saúde que se encontrava fragilizada, solicita à coroa portuguesa ser dispensado de seus afazeres, mantendo seus honorários para

[118] Os Dr.ˢ Gert Schubring (SCHUBRING, 2001) e João Caramalho Domingues (DOMINGUES, 2011) atribuem a autoria das Cartas a José Monteiro da Rocha e a Francisco Garção de Borja Stockler, respectivamente.

tratar-se em sua terra natal, o que lhe é concedido. (BRUNELLI, s.d.; PORTUGAL, s.d.)[119]. Passa então algum tempo na Itália e, novamente regressado a Lisboa, ali o encontramos em 1761.

Nomeado professor de matemática no recém-criado Colégio dos Nobres, em Lisboa, para cujo ensino traduziu uma seleção (Livros I a VI e XI e XII) dos *Elementos* de Euclides, partindo, como ele próprio diz no frontispício, da versão latina de Comandino, seguida por Robert Simson. É de notar que já havia, à época, outra tradução dos *Elementos* para o português, mas como havia sido realizada pelo padre jesuíta Manuel de Campos, não poderia – dada a expulsão, em 1759, da Companhia de Jesus – ter sido adotada (REGISTRO GERAL, 1761). A tradução de Brunelli data de 1768 e viria também a ser adotada no 1.º ano do curso de matemática, quando da reforma pombalina da Universidade de Coimbra, bem como–na Academia Real da Marinha de Lisboa (DE LEMOS, 1777; FERREIRA, 2017).

Figura 13. Frontispício da tradução portuguesa de E*lementos*, de Euclides.



ELEMENTOS
DE
EUCLIDES
DOS SEIS PRIMEIROS LIVROS,
DO UNDECIMO, E DUODECIMO
DA VERSÃO LATINA
DE
FEDERICO COMMANDINO
ADDICIONADOS, E ILLUSTRADOS
POR
ROBERTO SIMSON
Professor de Mathematica na Academia
de Glasgow,
E traduzidos em Portuguez para uso
DO REAL COLLEGIO
DE NOBRES.

LISBOA,
Na Officina de MIGUEL MANESCAL DA COSTA
Impressor do Santo Officio.
Anno de MDCCLXVIII.
COM PRIVILEGIO REAL.

Fonte: http://objdigital.bn.br.

[119] Devido ao mau estado destes manuscritos não foi possível identificar as datas.

Essa tradução de Brunelli foi utilizada no Colégio dos Nobres, na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, pelo professor de geometria JAC, e na Academia Real da Marinha de Lisboa (DE LEMOS, 1777; FERREIRA, 2017).

De 1769 a meados de 1778, constata-se um frequente intercâmbio de cartas entre Brunelli, amigos e familiares, nelas constando seu novo endereço em Bolonha, o que nos leva crer que durante esses anos tenha fixado moradia nessa cidade, embora em 1776 tenha viajado a Nápoles e Roma (BRUNELLI, 1769-96).

Em 1778, após passar por Gênova e Gibraltar, volta a Lisboa, onde em 1779 é admitido como professor de aritmética, geometria, trigonometria e princípios de álgebra para alunos do primeiro ano da Academia Real da Marinha, onde desempenhou essa função como titular até 1790 (ALMANACH, 1782-90). A partir de 1791, embora sem constar no rol de professores, mantém seu prestígio, como pudemos observar em suas cartas ao responder questões envolvendo a Academia da Marinha (BRUNELLI, 1769-96) e inclusive relacionando-se oficialmente com D. Rodrigo de Sousa Coutinho quando da nomeação deste como ministro e secretário de estado da marinha e negócios ultramarinos (em 1796).

Continuando a apresentação dos personagens envolvidos, temos os três discípulos de JAC cujos prenomes são citados na Carta II. Identificamos seus sobrenomes por meio do manuscrito da lista de alunos do curso matemático da Casa Pia (CUNHA, s.d.,) e, de acordo com o *Dicionário bibliográfico português* (SILVA, 1876) e *O Instituto: jornal scientifico e litterario* (TEIXEIRA, 1890-92), todos frequentaram a Academia Real da Marinha de Lisboa.

O primeiro listado abaixo é o autor das dúvidas e provas sobre as quantidades negativas, o que teria iniciado o duelo literário.

Anastácio Joaquim Rodrigues. Desconhecemos o ano e local de seu nascimento, sabendo-se porém que faleceu entre 1818 e 1820 em Lisboa. Estudou na Casa Pia de Lisboa e na Academia Real da Marinha dessa cidade. Foi tenente coronel do Corpo de Engenharia, além de matemático e professor. Pertenceu à Academia Real das Ciências de Lisboa e viajou pela França e Inglaterra acompanhando numa viagem literário-científica D. José Luís de Sousa Botelho Mourão e Vasconcelos[120], que viria a ser conde de Vila Real (SILVA, 1876).

Foi o responsável por projetar e chefiar as obras de melhorias à navegação no rio Tejo e lecionou na Academia Real de Fortificação. São de sua autoria: *Lado de um octógono regular: com as obras dispostas conforme Muller e as alturas e grossura de Vauben, juntamente os quatro cortes A. B. C. D*, de 1782; *Reflexões em defesa dos Principios mathematicos do dr. José Anastácio da Cunha*, criticadas na Revista de Edimburgo em novembro de 1812; e o estudo *Sobre as verdadeiras noções de infinito e infinitésimo: e da origem das expressões absurdas, que falsamente se consideram como suas representantes*, de data desconhecida. Neste trabalho, que envolve a questão da regra dos sinais algébricos, JAC é assaz citado (JORNAL DE COIMBRA, 1813; SILVA, 1876).

Manuel Pedro de Melo (1765-1833) nasceu em Tavira, Portugal, e faleceu em Ventosa do Bairro. Estudou, em Lisboa, na Casa Pia e na Academia Real da Marinha e, mais tarde, na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, na qual fez bacharelado em medicina e doutorado em matemática, sendo premiado por mérito nos dois cursos. Foi capitão-tenente de armada e major do Corpo de Engenharia, deputado das cortes ordinárias pelo Algarve, matemático, professor e membro da Academia Real de Ciências de Lisboa (FREIRE, 1872).

Por provisão régia realizou uma viagem científica pela França, Bélgica e Holanda para estudar experimentalmente a hidráulica. Ao regressar, lecionou na Universidade de Coimbra, porém antes de sua viagem era professor da Academia Real da Marinha de Lisboa (PROCESSO I, s.d.).

Traduziu para o francês as *Memórias de astronomia prática*, de José Monteiro da Rocha, em 1808. De sua autoria, publicou *Memória sobre as binomiais, Memória sobre os padrões de pesos e medidas fabricados nos reinados dos senhores D. Manuel e D. Sebastião*, *Memória sobre o programa da demonstração do paralelograma das forças* – obra premiada pela Academia Real das Ciências de Copenhague – e *Memória sobre o nivelamento* (FREIRE, 1872).

---

[120] Filho de D. José Maria de Sousa, 5.º morgado de Mateus. Foi para D. José Luís (1785-1855), a pedido do pai, que JAC redigiu o texto acerca dos métodos educacionais, que focalizamos na seção 2.2.

Luís Antônio de Araújo, natural de Lisboa, faleceu em 1832 ou 1833 em local desconhecido, sem que se saiba quando nascera. Estudou também na Casa Pia e na Academia Real da Marinha. Foi tenente do Corpo de Engenharia, tendo sido descrito como “um excelente explicador de matemática” (TEIXEIRA[121], 1890-92).

Além, dos personagens acima descritos, cabe mencionarmos o discípulo e amigo a quem JAC dirigiu a Carta II:

João Manuel de Abreu (1757-1815) nasceu em Valença do Minho e provavelmente faleceu nos Açores. Estudou na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, onde se doutorou. Foi soldado, matemático, professor e membro da Academia Real das Ciências de Lisboa (SILVA, 1876).

O relacionamento deles todos com JAC haveria, como se deduz dos resumos biográficos apresentados, de marcar profundamente o rumo de suas vidas. Recordemos, em particular, que ao ingressarem na Casa Pia seriam – pelo próprio desígnio dessa Instituição de ensino, com objetivos tripartidos de penitenciária, escola e oficina profissional – oriundos de extratos sociais sem quaisquer privilégios. Todavia, seu convívio com o mestre JAC na Casa Pia conduziu-os a carreiras profissionais de sucesso e de nível socialmente superior.

Destacamos em particular a amizade com João Manuel de Abreu, durante muito tempo creditado como seu mais fiel e dedicado discípulo. Sem questinarmos essa profunda amizade, a verdade é que, à luz dos mais recentes desenvolvimentos investigativos, sabemos que tal estatuto de amigo dileto deverá agora ser pelo menos igualmente partilhado com D. José Maria, 5.º morgado de Mateus. Abreu fez parte de um núcleo de Valença do Minho que, pelo contato com uma cultura cosmopolita e um pensamento/literatura “das Luzes” dos militares estrangeiros do Regimento de Artilharia do Porto, haveria de sofrer as consequências da Inquisição em finais da década dos 70 setecentista e no advento do reinado de D. Maria I. Liderados, segundo o Santo Ofício, pelo médico e militar provençal Aleixo Vachi, os militares lusos apreciavam as traduções e as composições poéticas de JAC e haveriam de ser

[121] Em Teixeira (1890-92), o sobrenome de Luís Antônio consta como Melo. Adotamos o sobrenome Araújo com base na lista de alunos que faz parte do acervo da Fundação Casa de Mateus.

perseguidos e condenados porque “eram hereges, libertinos, liam livros proibidos”. Sobre João Manuel de Abreu, os inquisidores escreveriam que “havendo lido em um dos volumes da obra de Voltaire, fundado no de Copérnico, que a Terra se movia e o Sol estava, contra o texto da Escritura” – revelando-o como, diríamos hoje, uma mente cientificamente evoluída. Foi condenado no mesmo auto-de-fé que JAC a três anos de reclusão na Casa de Rilhafoles (dos padres da Missão de São Vicente de Paula). Esteve na França, onde publicou as edições francesas (de 1811 e 1816) dos *Principios mathematicos*[122] e também um volume seu: *Suplemento à tradução de geometria de Euclides, do Sr. Peyrard, 1804, e a geometria do Sr. Legendre; seguido de um ensaio sobre a verdadeira teoria das paralela, 1809*. Em 1814 redigiu uma resposta às críticas levantadas contra os *Principios mathematicos* (RODRIGUES *et al.*, 2013).

Lecionou na mesma faculdade em que se doutorara e também na Casa Pia, na Academia Real da Marinha de Lisboa e no Colégio dos Nobres (PROCESSO II, s.d.).

Focalizaremos agora um ex-aluno de Brunelli. Seu sobrenome – Stockler – é citado por JAC na Carta II como sendo alguém que contra ele travara “uma espécie de cruzada” em Coimbra (CARTA II, 1785, p. 5). Consultando a lista de alunos formados em 1783 no curso matemático da Academia Real da Marinha de Lisboa[123] e a lista dos bacharelados em 1785 na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, foi-nos possível confirmar seu nome completo.

Francisco de Borja Garção Stockler (1759-1829), 1.º barão da Vila da Praia, nasceu em Lisboa e faleceu no Algarve. Estudou na Academia Real da Marinha de Lisboa e na Faculdade de Matemática da universidade de Coimbra. Foi tenente-general do exército, político, matemático e professor e pertenceu à academia Real das Ciências de Lisboa e à Sociedade Real de Londres (SILVA, 1876).

Como político, ocupou os cargos de secretário e conselheiro do Conselho Ultramarino e de governador do Algarve e Açores, entre outros. Tendo concluído a Faculdade de Matemática em 1785, substituiu Brunelli como professor na Academia Real da Marinha de 1786 a 1790 (SILVA, 1876).

---

[122] Conforme exposto na seção 2.4 do presente trabalho.
[123] Documento inédito encontrado no Arquivo da Marinha.

Entre suas várias obras publicadas, figuram *Introdução ao método das fluxões*, de 1794, e *Ensaio histórico sobre a origem e progressos das matemáticas em Portugal*, de 1819 (SILVA, 1876).

O Quadro 8 sumariza as descrições dos personagens acima apresentados, bem como os eventos em que estiveram envolvidos.

Quadro 8. Personagens descritos envolvidos no duelo literário sobre a natureza das quantidades negativas, de 1785.

Eventos
1. Papelinho escrito por Anastácio Joaquim Rodrigues demonstrando que as quantidades negativas são imaginárias.
2. Primeira carta do Senhor F. pedindo o parecer de Brunelli (contendo anexo o papelinho).
3. Primeira carta-resposta de Brunelli ao Senhor F. (CARTA **I**).
4. Carta de JAC a João Manuel de Abreu comentando sobre a disputa acadêmica acerca das quantidades negativas, entre outros assuntos (CARTA **II**).
5. Carta de Anastácio Joaquim Rodrigues contestando a primeira carta resposta de Brunelli.
6. Carta de Manuel Pedro de Melo acrescentando cinco paradoxos à disputa acadêmica sobre as quantidades negativas.
7. Segunda carta do Senhor F. a Brunelli pedindo novo parecer (contendo como anexos os itens 5 e 6 acima).
8. Segunda carta-resposta de Brunelli ao Senhor F. (CARTA **III**).

Fonte: Dados da pesquisa, com base nas Cartas **I**, **II** e **III** (1785).

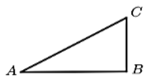
Na próxima subseção exporemos o conteúdo matemático acerca das quantidades negativas expresso nas Cartas I, II e III, evidenciando as dificuldades e obstáculos presentes.

3.3.2 Reconstrução matemática: conceitos e definições

Como já exposto, o ex-casapiano Anastácio Joaquim Rodrigues, inquietado com dúvidas suscitadas por teoremas considerados pelos professores da Academia da Marinha como demonstrados, sem que tais demonstrações fossem efetivamente apresentadas durante as aulas, propôs-se a demonstrar que as quantidades negativas eram imaginárias.

Para tanto, valeu-se da expansão de uma raiz quadrada binomial em série e da resolução de um problema de natureza geométrica:

> Sejam a, e b quantidades positivas, e $a > b$. Se é $b > -a$, será $\sqrt{b-a} = b^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^2}{8b^{\frac{3}{2}}} - \cdots$ valor que deve ser imaginário. Logo as

> quantidades negativas o são. Mas tomando $-\mathrm{a}$ por primeiro termo, sai $\sqrt{-\mathrm{a}+\mathrm{b}} = (-\mathrm{a})^{\frac{1}{2}} + \frac{\mathrm{b}}{2(-\mathrm{a})^{\frac{1}{2}}} - \frac{\mathrm{b}^2}{8(-\mathrm{a})^{\frac{3}{2}}} + \ldots$ valor sem dúvida imaginário, logo $-\mathrm{a} > \mathrm{b}$.
>
> Logo ou as quantidades negativas são imaginárias, ou $-\mathrm{a} > \mathrm{b}$; mas não é $-\mathrm{a} > \mathrm{b}$; porque ajuntando de uma e outra parte a, sai $0 > \mathrm{a}+\mathrm{b}$, o que é absurdo. Logo as quantidades negativas são imaginárias, aliás $\sqrt{-\mathrm{c}}$ será real, sendo c um número positivo.
>
> E na verdade a praxe dos sinais é verdadeiramente hipotética, e falsa em alguns casos, como na resolução, que um Matemático português deu do seguinte problema, se vê.
>
> Dada a base AB de um triângulo retângulo 
>
> em B, e a soma dos outros dois lados, achar o lado BC. Seja $\mathrm{AB} = \mathrm{a}$; $\mathrm{AC} + \mathrm{BC} = \mathrm{b}$; $\mathrm{BC} = \mathrm{x}$. Será $\mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2 = (\mathrm{b} - \mathrm{x})^2$; equação que dá $\mathrm{x} = \frac{\mathrm{b}^2 - \mathrm{a}^2}{2\mathrm{b}}$. Solução sempre possível (continua ele) conforme o cálculo, sendo impossível na realidade, quando se propõem um valor de $A\mathrm{B}$ maior que o de $\mathrm{AC} + \mathrm{CB}$. O que confirma o que se acaba de dizer. (CARTA I, 1785, p. 5)

Em sua primeira carta-resposta, Brunelli começa por expor algumas de suas convicções sobre matemática. Admite que “a evidência, que caracteriza as Ciências Matemáticas, depende toda de se terem ideias claras, e exatas das diversas quantidades, que são objeto das mesmas Ciências” (CARTA I, 1785, p. 5). Considerando que a falta dessa clareza provocaria impossibilidade de compreensão e confusão nos raciocínios, conjectura que isso tenha ocorrido com os redatores das dúvidas. Essas crenças de Brunelli também são evidenciadas na frase do filósofo romano Lucrécio, citada como nota introdutória às Cartas: “Mas o que está na claridade, vamos alimentar fora das trevas” [124].

Brunelli passa então a expor sua resposta para tal demonstração: “Sejam como eles supõem a e b quantidades positivas, e seja $\mathrm{a} > \mathrm{b}$. Uma vez que estas suposições se têm feito, já se não deve perguntar se é $\mathrm{b} > -\mathrm{a}$ (CARTA I, 1785, p. 6). Complementa salientando que o sinal $-$ indica que a é considerado de modo contrário a b, sem alterar sua grandeza absoluta e, para saber se a “quantidade” determinada pelo valor de $\sqrt{\mathrm{b}-\mathrm{a}}$ é real ou imaginária deve-se observar “se a é maior ou menor

[124] Em latim lê-se: “E tenebris autem quae sunt in luce tuemur” (CARTAS I-III, 1785).Trata-se do poema intitulado “Sobre a Natureza das Coisas” escrito por (Tito) Lucrécio (Caro) no século I a.C. O verso em causa é aposto como lema no preâmbulo da carta.

que b" (CARTA I, 1785, p. 6), ou seja, se o valor absoluto de a é maior ou menor que o valor absoluto de b.

Supondo $\mathrm{a} > \mathrm{b}$, resulta "que $\sqrt{(\mathrm{b}-\mathrm{a})}$ é uma quantidade imaginária" e para escrevê-la no formato de série requer-se "que $-\mathrm{a}$ se tome por primeiro termo, o que dá a série $(-\mathrm{a})^{\frac{1}{2}} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}(-\mathrm{a})^{\frac{1}{2}}} - \frac{\mathrm{b}^2}{8(-\mathrm{a})^{\frac{3}{2}}} + \cdots$ a qual é imaginária, concluindo o que se supôs, isto é que $\mathrm{a} > \mathrm{b}$[125]" (CARTA I, 1785, p. 6).

Concluída sua resposta referente à primeira parte da demonstração, Brunelli passa ao problema do triângulo retângulo, que Anastácio Joaquim Rodrigues extraíra da obra *Principios mathematicos* de JAC, livro XIII, problema VIII, omitindo o escólio[126].

> Se se examinar o caso do triângulo retângulo ABC, Cujo lado AB se supõem $= \mathrm{a}$ e a soma dos outros dois lados $\mathrm{AC} + \mathrm{BC} = \mathrm{b}$, para por meio destes dados se determinar o lado $\mathrm{BC} = \mathrm{x}$, achar-se há que o Matemático português, de quem é tirado, e cujo nome eu ignoro, talvez por ser o problema de pouca consideração, não refletiu bem no que queria dizer a fórmula da sua resolução $\mathrm{x} = \frac{\mathrm{b}^2-\mathrm{a}^2}{2\mathrm{b}}$. (CARTA I, 1785, p. 6)

Brunelli adverte que "todas as vezes que em Matemática se faz uma hipótese, debaixo da qual se discorre, e o último resultado dos cálculos contradiz à mesma hipótese, esta é absolutamente falsa". Acrescenta que se o "Matemático português"

---

125 Observamos que a teoria das séries estava, à época, criando tantos, ou mais, embaraços do que o próprio conceito de número negativo. Convenhamos, por exemplo, que escrever-se $\frac{1}{(1-\mathrm{x})} = (1 + \mathrm{x} + \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^3 + ...)$ não seria muito complicado, porquanto bastaria utlilizar um algoritmo da divisão (de 1 por $\frac{1}{(1-\mathrm{x})}$) mas concluir que, na verdade, essa igualdade só é verdadeira para alguns "x", isto é, ter resolvida a questão da convergência das séries pressupôs uma sensibilidade numérica e analítica (porventura também geométrica) que muito poucos matemáticos mesmo os contemporâneos de JAC e de Brunelli, teriam. Contudo, JAC tinha tal precisão matemática que o levou, inclusive, a enunciar no seu livro *Principios mathematicos* um critério de convergência, a que hoje equivocadamente denomina-se de "critério de convergência de Cauchy". Para mais informações consultar: GONÇALVES, José Vicente. Análise do livro IX dos *Princípios mathematicos* de José Anastácio da Cunha", Congresso do Mundo Português, XII (1940), p. 123-140.

126 Escólio omitido: "Os dois problemas precedentes, e o III, e muitos outros, mostram que a hipótese deste livro XIII, e as do VII podem fazer errar as soluções dos problemas: por isso as soluções que nessas hipóteses se fundam, não se devem dar por certas, senão depois de confirmadas por demonstrações rigorosas, independentes de tais hipóteses, e derivadas de princípios certos" (DA CUNHA, 1987, p. 164).

não “tivesse esquecido desta verdade” não chegaria à conclusão de que o cálculo supõe sempre possível a resolução do triângulo proposto (CARTA I, 1785, p. 6).

> Logo o cálculo mostrando, que as condições que algebricamente se expressaram, dão em alguns casos para x um valor de sinal contrário ao de $b - x$, faz ver que há casos, em que a suposição de formarem as três linhas propostas um triangulo é falsa, não porque o valor de x seja então imaginário, como parece se pretende concluir; mas porque não é compatível com a suposição feita. Quem não quer que o cálculo lhe dê destas respostas, não limita a resolução de um problema geral a um só caso dos que nele se contêm. A fórmula $x = \frac{b^2 - a^2}{2b}$ dá a resolução de um problema mais geral do que aquele, a que ela se aplica [...] À vista do que ficou evidente, que do caso proposto se não pode tirar conclusão alguma contra a teoria dos sinais algébricos. (CARTA I, 1785, p. 7)

JAC e seus discípulos têm acesso à resposta dada por Brunelli. Na carta que JAC escreve a João Manuel de Abreu, comenta o ocorrido dizendo:

> O Anastácio provou-lhes que toda a quantidade negativa era imaginária ou impossível. Sejam a e b números inteiros [...] e $a > b$; será 2a + b > a e logo b > – a e logo $\sqrt{(b-a)} = \sqrt{b} - \frac{a}{2\sqrt{b}} - \frac{a^2}{8\sqrt{b^3}} - ...$, isto é quantidade impossível. $\sqrt{(b-a)}$ igual à quantidade negativa $\sqrt{b} - \frac{a}{2\sqrt{b}} - \frac{a^2}{8\sqrt{b^3}} - ...$ Não contente deste Argumento vale-se da solução de um problema dos meus princípios[127]: e é coisa bem singular e bem galante ter Mr. Thomas Simpson[128] alegado na sua excelente Álgebra esta mesma solução para confirmar muito no seu sério esta opinião que o seu Anastácio apenas no princípio dos seus estudos expôs meramente. (CARTA II, 1785, p. 6)

Ou seja: em seus argumentos Anastácio concilia os procedimentos adotados em relação às demonstrações matemáticas na Academia da Marinha com conteúdos dos livros *Principios mathematicos* e *Tratado de álgebra,* surpreendendo seu ex-professor.

JAC escreve o enunciado do problema do triângulo, cuja solução é $x = \frac{b^2-a^2}{2b}$, e transcreve para seu amigo a resposta que Anastácio recebera.

> Responderam-lhe, como costumam os Modernos, que *o cálculo dá a solução de outro problema; e que todas as vezes que em Matemática se faz uma hipótese debaixo da qual se discorre e o último resultado contradiz a hipótese, esta é absolutamente falsa se ele absolutamente a contradiz, ou só em alguns casos falsa se tão somente em alguns casos a contradiz, e isto ou o último*

[127] Refere-se a *Principios mathematicos*, de autoria de JAC.

[128] Na seção anterior apresentamos um problema geométrico com aplicação algébrica em que Simpson chega a esta solução.

> *resultado venha representado em quantidades positivas por quantidades negativas ou por quantidades imaginárias.* (CARTA II, 1785, p. 3, grifo no original)

A esta resposta, JAC atribui autoria incerta. “Isto em uma carta que pessoas bem informadas atribuem a um missionário chamado Stockler que anda pelas ruas de Coimbra pregando uma espécie de cruzada contra mim e contra o meu livro” (CARTA II, 1785, p. 3, 5). E continua transcrevendo a resposta de seu discípulo:

> Mas insta o Anastácio: *Posso conhecer por qualquer resultado positivo, negativo ou imaginário, que o cálculo der, se o problema é impossível. Mas isto de dois modos: ou imediatamente pelo resultado, ou com alguma reflexão minha. Ora ao primeiro caso só pertence a quantidade imaginária, porque só esta mostra, sem ser necessária alguma reflexão, a impossibilidade de qualquer problema e, por consequência, só quando o cálculo der uma tal quantidade é que mostra esta impossibilidade. Mas se por qualquer outro resultado a conheço, sou eu quem a acha e não é o cálculo que me mostra. Antes, se o problema for muito complicado, como muitas vezes sucede, e eu não puder fazer esta indagação, o cálculo me pode enganar, dando-me por solução uma quantidade positiva ou negativa, o que não sucederia se pelas suas “generalidades” me desse uma quantidade impossível.* (CARTA II, 1785, p. 5, grifos no original)

Admirado, declara que fazia pouco tempo que os rapazes Anastácio, Manuel Pedro e Luís Antônio sabiam apenas ler e que, apesar de não terem estudado lógica nem metafísica, talvez já as estivessem produzindo (CARTA II, 1785).

Por sua vez, Manuel Pedro[129] e Anastácio também se manifestam sobre a primeira carta-resposta de Brunelli, acrescentam novas dúvidas e propõem outras perguntas. Coube novamente ao Senhor F. escrever a seu professor relatando o debate e anexando à sua carta as de seus colegas.

Desta feita tem-se a réplica de Brunelli, na qual responde “às novas dúvidas e reflexões” (CARTA III, 1785, p. 12).

Em sua segunda carta-resposta, Brunelli expõe conceitos para “quantidades” e “sinais”. De acordo com sua explanação, caso as quantidades fossem entendidas apenas em termos de grandeza absoluta, não seria necessário distingui-las de positivas, negativas e imaginárias e, neste caso, a aritmética e a geometria bastariam “para calcular as relações das suas grandezas” (CARTA III, 1785, p.12). Enfatiza que aqueles que têm instrução em matemática dispõem de conhecimento da “aplicação

---

[129] Manuel Pedro de Melo propõe seis paradoxos, que não são objetos de estudo neste trabalho.

que Descartes fez da Álgebra à Geometria transcendente", possibilitando grandes avanços matemáticos. Quanto aos sinais, diz que a álgebra:

> [...] não faz mais do que indicar as operações, que se devem fazer sobre as quantidades atentando as que se devem tomar com o sinal +, e as que se devem diminuir com o sinal –, os Geômetras se viram precisados a considerar nos resultados dos seus cálculos, quando estes eram representados por expressões complexas, as quantidades e afetas do sinal como tendesses a aumentar o valor dos mesmos resultados e as afetas do sinal – como tendesses somente a diminuído; e posto que esta consideração é uma consequência, que naturalissimamente se deriva da significação mesma dos sinais [...]. (CARTA III, 1785, p. 12-13)

Em sequência, utiliza-se de um exemplo geométrico para contrapor as hipóteses de $a > b$ e $b > -a$. "Seja AB uma linha reta, a que eu chamo a, AC uma parte qualquer dela, a que eu chamo x, e BC a outra parte, a que eu chamo z; será $z = a - x$" (CARTA III, 1785, p. 13). E explica, que quanto maior for a quantidade negativa x, menor será z ou ainda que a quantidade negativa x tende a diminuir o resultado e a quantidade a tende a aumentá-lo, ressaltando que suas considerações são relativas "somente aos efeitos que as quantidades são capazes de produzir" e nunca "à grandeza absoluta delas" (CARTA III, 1785, p. 13).

C
A___|___B

Observamos a convicção de Brunelli em relação ao uso dos sinais de + e – apenas para efetuar operações.

Transcreve novamente a primeira parte da demonstração de Anastácio, mas, agora com a mesma linguagem matemática que JAC utilizara na Carta II: "Sejam a e b quantidades positivas, e $a > b$. Será $2a+b > a$. Logo tirando $2a$ de uma e outra parte, ficará $b > -a$." (CARTA III, 1785, p.13). A explicação dada, por Brunelli é:

> Ora o seu condiscípulo tira $2a$ de a, e portanto ou considera $2a$ como uma quantidade, que se subtrai, e então cometendo um absurdo, a expressão $b > -a$ não pode deixar de ser também absurda; ou considera $2a$ e a um sentido contrário ao em que antes a considerava; isto é, considera $2a$ como quantidade que tende a diminuir quaisquer resultados, em que entrar, e por isso a denotam com o sinal –; e então a expressão $b > -a$ não envolve nada de absurdo, pois denota que b em quanto quantidade capaz de aumentar é maior que a em quanto quantidade só capaz de diminuir; isto é, que se a uma mesma quantidade A juntarmos sucessivamente b, e $-a$, ficará $A+b > A - a$. (CARTA III, 1785, p. 13)

De acordo essa citação, para o professor da Academia da Marinha seria um absurdo subtrair um valor maior de um menor – no caso, $2a$ de a.

Neste ponto, Brunelli enfatiza sua divergência com JAC:

> Eis aqui a diferença que há entre mim, e o seu condiscípulo, e o primeiro Mestre dele; é que segundo eles a expressão $b > -a$, denota que b é *absolutamente* maior que $-a$ [...] torno a dizer, a expressão $b > -a$ quer dizer que a quantidade b considerada como capaz de aumentar é maior que a quantidade a, quando esta se considera só como capaz de diminuir. (CARTA III, 1785, p. 14, grifo nosso)

Brunelli continua argumentando nesse sentido e afirma acreditar que tais alegações já seriam suficientes para mostrar a falta de clareza de Anastácio quanto às quantidades negativas. Mas alega: “como ele parece não se contentar senão com demonstrações matemáticas, eu passo a mostrar-lhe que a sua pretendida demonstração é um paralogismo” (CARTA III, 1785, p. 15).

> Suponhamos que é com efeito $b > -a$, no sentido que ele lhe dá. Multiplicando estas duas quantidades por uma terceira, ficará permanecendo a mesma razão de desigualdade. Logo $bx - c > -a\,x - c$; isto é $-bc > ac$; e dividindo por c, $-b > a$; ajuntando agora de uma e outra parte $b - a$, ficará $-a > b$; que é justamente o contrário do que o seu condiscípulo pretendia ter demonstrado. Demais supondo $a>b$, se fosse $b > -a$; multiplicando de ambas as partes por -1, teríamos $-b>a$, e por consequência $-b > -b$, e $-b > -a$, e tornando a dividir por -1, ficaria $b > a$, o que é um absurdo. Logo não pode ser absolutamente $b > -a$. (CARTA III, 1785, p.15)

Evidencia-se nesta argumentação que $-a$ está sendo entendido como capaz de diminuir. Brunelli informa que suas justificativas são aceitas como verdade por todos os matemáticos, mas emenda haver a exceção de Thomas Simpson, conforme “afirma o primeiro Mestre do seu Condiscípulo” (CARTA III, 1785, p. 16), e apresenta o que denomina de demonstração matemática “de que a grandeza absoluta das quantidades se deve achar independente dos seus sinais” (CARTA III, 1785, p. 16):

> A série resultante do desenvolvimento de $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ é $a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\, ba^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m(m-n)}{n.2n}\, b^2a^{\frac{m-2n}{n}} + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n.2n.3n} b^3a^{\frac{m-3n}{n}} + \ldots$ e a razão de um termo qualquer x para o seu imediato $x+1$ é $1{:}\left(\frac{(m-\overline{x-1}n)}{xn}\right)\frac{b}{a}$. Ora todas às vezes que for $\overline{x-1}.n > m$, a quantidade $\left(\frac{(m-\overline{x-1}n)}{xn}\right)\frac{b}{a}$ será negativa; e se as quantidades negativas são menores que nada, e por isso mesmo menores que qualquer quantidade positiva, como devem ser na suposição de o seu sinal influa na sua grandeza absoluta, segue-se que desde aquele termo, em que se verifica ser $\overline{x-1}.n > m$, a série deverá ser sempre convergente, isto é, os seus termos deveram ir continuamente decrescendo; pois cada um deles é gerado pelo seu antecedente multiplicado por uma quantidade menor do que a unidade. E como eles são alternativamente positivos e negativos, do dito termo em diante, segue-se que o termo positivo subsequente a qualquer negativo deve ser menor do que este, e que por consequência há quantidades positivas menores do que outras negativas, o que é contra a

> suposição. Logo esta é absurda, e portanto as quantidades negativas não são absolutamente menores do que as positivas. Demais pela condição $\overline{x-1}.n > m$ não é que se determina o termo, em que a série deve começar a ser convergente, mas sim pela condição $xna > (m - \overline{x-1}.n).b$, prescindindo do sinal da quantidade $(m - \overline{x-1}.n).b$. Logo para avaliar o valor absoluto das quantidades não se deve fazer caso algum do sinal, que as precede. (CARTA III, 1785, p. 16)

O professor da Academia da Marinha defende-se da acusação de não demonstrar o porquê de expandir $\sqrt{b-a}$, em série utilizando sempre o maior termo do binômio como primeiro termo da série, alegando ser esta uma verdade notória. Em sua resposta, apoia-se em Clairaut e Bézout:

> Assim é que eu supus esta verdade sabida, e que por isso não procurei demonstrá-la de algum modo. Os motivos que a isso me obrigaram, foram provavelmente os mesmos, que moveriam Mr. Clairaut e Bézout, e outros muitos Matemáticos de abalizado merecimento [...] a afirmarem nos seus tratados de álgebra a mesma proposição sem darem a demonstração dela; por esta ser segundo entendo, dependente da doutrina das séries infinitas, cuja teórica é uma das mais avançadas de toda a Matemática, e por não entrarem em raciocínios mais complicados do que convém a atenção ainda pouco vigoriza dos principiantes. (CARTA III, 1785, p. 16-17)

Continuando sua defesa, diz ser louvável o reclame de Anastácio, mas admira-se que seu "famoso Mestre", tendo conhecimento das obras de D'Alembert, não o prevenira que no tomo quinto dos *Opúsculos matemáticos* desse "grande Geômetra e Filósofo" consta a demonstração de:

> [...] que as séries subtrantes da elevação de binômios tais como $(1 \pm x)$ a potências fracionárias, ou negativas, são defeituosas, isto é, incapazes de representar os verdadeiros valores das ditas expressões todas às vezes que é $x > 1$. (CARTA III, 1785, p. 17)

Avisa que seu modo de demonstrar será "alguma coisa diverso" frente ao de D'Alembert, e alega que com isso poupará Anastácio e seu discípulo Senhor F. de lerem as memórias desse geômetra (CARTA III, 1785).

Ao iniciar a demonstração da expansão da raiz $\sqrt{b-a}$ numa série binomial, expõe que as expressões do tipo $\sqrt{b-a}$, $\sqrt[3]{(b \pm a)^2}$, $\sqrt[5]{(a \pm b)^3}$, ... podem ser escritas na forma $\sqrt[n]{(b \pm a)^m}$ sendo m, e n números inteiros com $n > m$. E, reduzindo a expressão geral, em $b^{\frac{m}{n}} \pm \frac{m}{n}\frac{a}{b}\, b^{\frac{m}{n}} - \frac{m(n-m)}{n.2n}\frac{a^2}{b^2} b^{\frac{m}{n}} \pm \frac{m(n-m)(2n-m)}{n.2n.3n}\frac{a^3}{b^3} b^{\frac{m}{n}} \pm \frac{m}{n}\frac{a}{b} b^{\frac{m}{n}} - \frac{m(n-m)(2n-m)(3n-m)}{n.2n.3n.4n}\frac{a^4}{b^4} b^{\frac{m}{n}} \pm ...$

> [...] ou finalmente chamando ao primeiro termo A, ao segundo B, ao terceiro C ... $b^{\frac{m}{n}} \pm \frac{m}{n}\frac{a}{b}A - \frac{m(n-m)}{n.2n}\frac{a}{b}B \pm \frac{(2n-m)}{3n}\frac{a}{b}C - \frac{(3n-m)}{4n}\frac{a}{b}D \pm ...$ série infinita, cuja soma ser igual a $\sqrt[n]{(b \pm a)^m}$, e cujos termos depois do primeiro devem ser alternativamente positivos e negativos, se a tiver o sinal $+$, ou todos negativos

> se a tiver o sinal $-$, donde se segue que tendo $(\mathrm{b}+\mathrm{a})^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}}$ uma quantidade finita, será preciso que a soma de todos os termos positivos menos a soma de todos os termos negativos seja uma quantidade finita; sendo $(\mathrm{b}-\mathrm{a})^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}}$ uma quantidade finita ou imaginária, segundo for $\mathrm{b} \gtrless \mathrm{a}$, e m número ímpar sendo n numero par, será necessário que a soma de todos os termos seja uma quantidade finita ou imaginária. Ora supondo $\mathrm{b}>\mathrm{a}$, e $\mathrm{n}>\mathrm{m}$, a série será continuamente convergente, pois sendo como já dissemos $1:\left(\frac{\mathrm{m}-\overline{\mathrm{x}-1}\mathrm{n}}{\mathrm{xn}}\right)\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ a razão de um termo qualquer x para o seu imediato $\mathrm{x}+1$; neste caso é sempre $1>\left(\frac{\mathrm{m}-\overline{\mathrm{x}-1}\mathrm{n}}{\mathrm{xn}}\right)\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$. (CARTA III, 1785, p.17-18)

Em seguida, com intenção de “convencer” o Senhor F. “desta verdade”, acrescenta: “suponha $\mathrm{x}=\infty$, que é o caso em que $\left(\frac{\mathrm{m}-\overline{\mathrm{x}-1}\mathrm{n}}{\mathrm{xn}}\right)\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ recebe o seu máximo valor absoluto e, achará $1>\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, expressão conforme com a suposição de $\mathrm{b}>\mathrm{a}$” (CARTA III, 1785, p. 18).

E continua:

> Para demonstrar esta verdade, suponhamos que Z na ordem numérica dos termos da série é o termo x; portanto será $\mathrm{Z}'=\left(\frac{\overline{\mathrm{x}-1}.\mathrm{n}-\mathrm{m}}{\mathrm{xn}}\right)\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\mathrm{Z}$; $\mathrm{Z}''=\frac{(\overline{\mathrm{x}-1}.\mathrm{n}-\mathrm{m})(\mathrm{xn}-\mathrm{m})}{\mathrm{xn}.\overline{\mathrm{x}+1}.\mathrm{n}}\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2}\mathrm{Z}$; $\mathrm{Z}'''=\frac{(\overline{\mathrm{x}-1}.\mathrm{n}-\mathrm{m})(\mathrm{xn}-\mathrm{m})(\overline{\mathrm{x}+1}.\mathrm{n}-\mathrm{m})}{\mathrm{xn}.\overline{\mathrm{x}+1}.\mathrm{n}.\overline{\mathrm{x}+2}.\mathrm{n}}\frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{b}^3}\mathrm{Z}$. Logo deverá ser $1-\frac{(\overline{\mathrm{x}-1}.\mathrm{n}-\mathrm{m})}{\mathrm{xn}}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}>\left(1-\frac{(\overline{\mathrm{x}-1}.\mathrm{n}-\mathrm{m})}{\overline{\mathrm{x}+2}.\mathrm{n}}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right)\left(\frac{(\overline{\mathrm{x}-1}.\mathrm{n}-\mathrm{m})}{\mathrm{xn}}\frac{(\mathrm{xn}-\mathrm{m})}{\overline{\mathrm{x}+1}.\mathrm{n}}\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2}\right)$; e como é visivelmente $1-\frac{(\overline{\mathrm{x}-1}.\mathrm{n}-\mathrm{m})}{\mathrm{xn}}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}>1-\frac{(\overline{\mathrm{x}+1}.\mathrm{n}-\mathrm{m})}{\overline{\mathrm{x}+1}.\mathrm{n}}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$; e $1>\frac{(\overline{\mathrm{x}-1}.\mathrm{n}-\mathrm{m})}{\mathrm{xn}}\frac{(\mathrm{xn}-\mathrm{m})}{\overline{\mathrm{x}+1}.\mathrm{n}}.\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2}$, segue-se que é sempre $\mathrm{Z}-\mathrm{Z}'>\mathrm{Z}''-\mathrm{Z}'''$, e que portanto as diferenças entre os termos pares e ímpares vão continuamente decrescendo. [...] O que nos faz ver que a soma desta série ou a diferença entre a soma dos termos positivos, e a soma dos negativos é uma quantidade finita. (CARTA III, 1785, p.18)

Mas ressalva:

> Se porém for $\mathrm{b}>\mathrm{a}$, a série poderá ser convergente ou divergente no seu princípio, segundo for $\mathrm{nb} \gtrless \mathrm{ma}$; mas sempre virá a acabar divergente, porquanto a razão 1: $\frac{(\mathrm{m}-\overline{\mathrm{x}-1}.\mathrm{n})}{\mathrm{xn}}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, supondo $\mathrm{x}=\infty$, se converte em $1:\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, e é segundo a hipótese $1<\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$. Logo devendo haver um termo qualquer Z, em que a dita série começa a divergir, será $\mathrm{Z}<\mathrm{Z}'$; $\mathrm{Z}'<\mathrm{Z}''$ ... e comparando como fizemos no caso antecedente as diferenças $\mathrm{Z}'-Z$; $\mathrm{Z}'''-Z''$; acharemos $\mathrm{Z}'-Z<\mathrm{Z}'''-Z''$; o que se demonstra substituindo por $\mathrm{Z}',\mathrm{Z}'',\mathrm{Z}'''$ os seus valores. Feitas pois estas substituições, e suprimindo o fator comum Z, será $\left(\frac{\overline{\mathrm{x}-1}.\mathrm{n}-\mathrm{m}}{\mathrm{xn}}\right)\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}-1<\left(\frac{(\overline{\mathrm{x}-1}.\mathrm{n}-\mathrm{m})}{\overline{\mathrm{x}+2}.\mathrm{n}}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}-1\right)\left(\frac{\overline{\mathrm{x}-1}.\mathrm{n}-\mathrm{m}}{\mathrm{xn}}\right)\left(\frac{\mathrm{xn}-\mathrm{m}}{\overline{\mathrm{x}+1}.\mathrm{n}}\right)\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2}$. O que se prova fazendo as multiplicações e divisões indicadas. [...] Logo $\mathrm{Z}'-Z<\mathrm{Z}'''-Z''$, expressão que por isso mesmo que x é um número indeterminado, da uma demonstração geral de que as diferenças vão continuamente crescendo. Que elas cheguem a fazer-se infinitas se prova fazendo $\mathrm{x}=\infty$ na expressão geral das mesmas diferenças $\mathrm{Mb}^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}}\frac{\mathrm{a}^{\mathrm{x}-1}}{\mathrm{b}^{\mathrm{x}-1}}.\left(\frac{\overline{\mathrm{x}-1}.\mathrm{n}-\mathrm{m}}{\mathrm{xn}}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}-1\right)$, o que dá $\mathrm{Mb}^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}}\frac{\mathrm{a}^{\infty}}{\mathrm{b}^{\infty}}\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}-1\right)=\infty$. Donde se segue que a soma de todas estas diferenças é

> uma quantidade infinita, e por consequência incapaz de representar o valor de $\sqrt[n]{(b+a)^m}$. (CARTA III, 1785, p. 18-19)

Encerrada a demonstração da expansão da raiz numa série binomial, Brunelli avisa que não fará a demonstração referente à “soma da série resultante da elevação de $(b-a)$ à potência fracionária $\frac{m}{n}$, sendo $b > a$”, por ser muito fácil. (CARTA III, 1785, p. 19). Mas complementa:

> Que ela é $= -\infty$ todas as vezes que é $b < a$ ele mesmo o concebe, mas concluir que por isso mesmo $-\infty$ é igual a qualquer radical imaginário, seria tão grande absurdo, como concluir que $+\infty$ é igual a qualquer radical possível, por isso que eu demonstrei que $\sqrt[n]{(b+a)^m}$, sendo $b < a$, dá uma série, cuja soma é $-\infty$. (CARTA III, 1785, p. 19)

Conclui que:

> [...] as séries, que resultam da elevação de quaisquer quantidades binomiais a potências fracionárias, ou negativas, só são capazes de representar os seus valores, quando por primeiro termo delas se toma o maior termo do mesmo binômio. (CARTA III, 1785, p. 19)

Brunelli chama atenção para o fato de que as demonstrações indiretas também devem ser consideradas e que a matemática tem verdades que até aquele momento não se podiam demonstrar de outra forma, retornando ao debate de forma descritiva (CARTA III, 1785, p. 20).

> Creio que à vista desta prova o seu condiscípulo, para sustentar a sua opinião, não terá mais remédio do que chamar ao cálculo defeituoso [...] porque não conclui antes que o método do binômio de Newton, é um método de natureza tal, que não permite que no desenvolvimento dos radicais binômios, se tome por primeiro termo das séries o termo menor dos mesmos binômios [...] e que a doutrina das séries infinitas é uma das mais atrasadas de toda a Matemática, principalmente quanto à sua parte teorética; que D'Alembert, e com ele todos os outros Matemáticos assim o reconhecem, e que portanto se ele, ou o seu primeiro Mestre não tem ainda aperfeiçoado esta teórica, quero dizer, se a doutrinas das séries infinitas depois dos trabalhos de Stirling, Euler, D'Alembert ... permanece ainda no mesmo estado, seja mais comedido em tirar semelhantes conclusões em uma matéria, que os mais profundos gênios não puderam ainda trazer ao seu estado de perfeição e clareza. (CARTA III, 1785, p. 20)

Brunelli solicita ao Senhor F. que diga a seu colega que, de acordo com os “Matemáticos”, $(b-a)$, “sempre denota a diferença entre b, e a”; sendo assim, “as supostas séries diferentes não são duas, como ele supõe, mas sim a mesma debaixo de diversos aspectos” e que suas dúvidas são “tão fúteis” que servem de descrédito mesmo para um principiante e ainda poderiam “diminuir muito o conceito do seu Mestre [...] entre as pessoas, que não tiverem a equidade de supor, que ele não viu a resposta depois de escrita” (CARTA III, 1785, p. 21).

Esclarece que ignorava o fato de ser JAC o “Matemático Português” citado na primeira carta quando o censurara juntamente com seu discípulo “por chamarem defeituoso ao cálculo da solução $x = \frac{b^2-a^2}{2b}$” (CARTA III, 1785, p. 27). Para Brunelli, há dois modos de trabalhar a resolução de um problema por meio da álgebra:

> [...] ou expressando algebricamente todas as condições dele, ou deixando de expressar algumas. No primeiro caso para ver se o problema é, ou não é possível, basta examinar a possibilidade do último resultado. No segundo não basta que o último resultado seja absolutamente possível; é necessário além disso examinar, se convém ou não convém com as condições, que deixaram de se expressar algebricamente; pois a possibilidade do resultado algébrico só mostra que as condições que se expressaram no cálculo, são entre si compatíveis. Porém, como se deixaram outras de fora, pode muito bem suceder, que alguma, ou algumas das segundas sejam incompatíveis com as primeiras; e esta incompatibilidade não pode o cálculo mostrar imediatamente; pois não se fez nele menção destas segundas condições ou hipóteses. (CARTA III, 1785, p. 31)

Constatamos nesta explanação que Brunelli concebe ideias semelhantes acerca dos modos de trabalhar a resolução de um problema por meio da álgebra, exposta no escólio dos *Principios mathematicos* que fora suprimido por Anastácio.

Novamente faz referência a matemáticos reconhecidos, para embasar sua carta, mas desta vez citando-os em latim e francês, por considerar que os discípulos de JAC dominavam esses idiomas (CARTA III, 1785).

É transcrita uma definição de Euler, presente no livro *Introdução à análise dos infinitos*:

> Logaritmos são números positivos, dependendo do valor da base, será $l.a = 1; l.a^2 = 2$ ... um número que é menor que a unidade; No entanto, tais logaritmos positivos, são negativos; para $l.\frac{1}{a} = -1; l.\frac{1}{a^2} = -2$... o logaritmo negativo desses números não são reais, mas imaginários, como foi observado.[130] (CARTA III, 1785, p. 27)

Acerca desta citação, comenta: “Veja Vossa Mercê agora se este célebre Matemático se via Companheiro do Dr. José Anastácio, e dos seus discípulos sobre a opinião da natureza das quantidades negativas” (CARTA III, 1785, p. 27).

---

[130] Em latim lê-se: “Numerorum unitate majorum logarithmi erunt affirmativi pendentes a valore basis a, *sic* erit $l.a = 1; l.a^2 = 2$ … Numerorum autem unitate minorum; affirmativorum tamen, logarithmi erunt negativi; erunt enim $l.\frac{1}{a} = -1; l.\frac{1}{a^2} = -2$… Numerorum autem negativorum logarithmi non erunt reales, sed imaginarii, uti jam notavimus.”

Dando continuidade às citações, faz alusão a uma questão debatida entre D'Alembert e Leibniz sobre o mesmo tema exposto por Euler:

> Mr. D'Alembert ainda se explica mais claramente na Memória 6.ª do tomo 1.º dos seus Opúsculos Matemáticos [...] diz assim: " Senhor Leibniz que pretende que a razão de 1 por -1 é imaginária, deveria ter , me parece, observado o contrario, que seguindo as noções mais comuns da Álgebra a razão de 1 por -1 é expressa pelo quociente de 1 dividido por -1; e consequentemente essa razão é -1, isto quer dizer, é uma *quantidade real*. [...] Qualquer que seja, é ao menos certo que a razão de 1 por -1, segundo todas as regras recebidas não é imaginaria." [131] (CARTA III, 1785, p. 28; grifos no original)

Para que o Senhor F. não tivesse dúvidas, transcreve outras passagens extraídas da mesma *Memória*, de D'Alembert: "As quantidades negativas são tão reais quanto as positivas, elas só diferem pelo sinal que as precede"; "É que o sinal – [...] somente indica sua posição, e não influi sobre sua quantidade"[132], observa ainda que as obras de Mr. L'Abé Marié imitam as de D'Alembert, ambos consensuais em não reputar imaginárias as quantidades negativas, e adverte que mesmo Euler e D'Alembert "viveram e morreram às escuras" sobre essa matéria (CARTA III, 1785, p. 28).

Estes trechos, que retratam as interpretações de renomados matemáticos, revelam a diversidade de concepções acerca da natureza das quantidades negativas que coexistiam à época, e quanto esse assunto inquietava os matemáticos.

Finalizando sua carta, informa ao Senhor F. que seu objetivo ao escrevê-la foi de fazê-lo "conhecer os grosseiros paralogismos das pretendidas demonstrações de serem imaginárias as quantidades negativas" e a de "desempenhar de alguma sorte a confiança", que nele depositara para "dirigi-lo na carreira dos seus estudos." Acrescenta, que esta seria a última carta que escreveria sobre o assunto (CARTA III, 1785, p. 32).

---

[131] Em francês lê-se: "Mr. Leibniz qui pretend que le rapport de 1 a -1 est imaginaire, auroit du, ce me semble, observer au contraire, que suivant les notions les plus communes de l'Algebre le raport de 1 a -1 est exprimé par le quotient de 1 divisé par -1 ; et que par consequent ce raport est -1 ; c'est a dire, *est une quantité réelle*" e "Quoique il en soit, il est au moins certain que le raport de 1 a -1, est -1 suivant toutes les régles reçus *et n'est* pas imaginaire".

[132] Em francês lê-se : "Les quantités negatives sont tout aussi reelles que les positives ; elles n'en different que par le signe qui les precede C'est que le signe – [...] n'indique que sa position, et n'influe nullement sur sa quantité...".

3.4 CONSIDERAÇÕES

Reconhecemos, com base no exposto neste capítulo, que o duelo literário encabeçado por JAC e Brunelli tinha como tema central um assunto bastante discutido pelos matemáticos à época. Não havia um entendimento matemático que respondesse e fundamentasse a natureza das quantidades negativas, nem tampouco um conhecimento sólido das séries ditas bimomiais. Ao propor sua demonstração, o discípulo Anastácio Joaquim Rodrigures evidencia que tanto ele quanto JAC têm consciência disso e que utilizar livros como o de Bézout – que não se demorava nas demonstrações matemáticas, a que se acrescia a postura dos professores em aceitarem o livro como a uma doutrina religiosa – poderia trazer prejuízos à formação dos alunos.

As alegações que esse discípulo utiliza para provar que as quantidades negativas são imaginárias, utilizando o desenvolvimento em série da raiz $\sqrt{a-b}$, contradizem-se ao considerar que, em $-a < b$, $-a$ seja absolutamente menor que b, no sentido atual, e depois supor que $b < -a$. Ao empregar o problema do triângulo retângulo, constata que, apesar de operar algebricamente com os dados, a construção geométrica do triângulo não seria possível.

Podemos neste ponto conjecturar sobre o recurso à “construção geométrica”. Por um lado, poderemos afirmar que talvez o objetivo de Anastácio Joaquim Rodrigues fosse o de tentar representar “visualmente” o conceito, isto é, trazer para o domínio do “concreto”, da imagem, um conceito tão abstrato como era então (e o é agora) o de número negativo. Por outro lado, também poderíamos argumentar que o objetivo seria o de conduzir uma questão algébrica para o domínio da geometria por este ser – do ponto de vista matemático -- mais seguro, mais credível, com mais provas dadas ao longo dos séculos. Fosse qual fosse a razão, a verdade é que estaríamos, neste ponto, a “geometrizar” questões algébricas, numa inversão ao que Descartes havia feito, de “algebrizar” as questões geométricas.

JAC não valida a demonstração de Anastácio. Como consta na folha de rosto das Cartas, o mestre assente na engenhosidade da dita demonstração e na postura questionadora de seu discípulo.

Reputamos a JAC a característica de ser um professor diferenciado. No contexto do duelo literário entre ele e Brunelli, é patente a diferença de trato para com seus alunos. Não questionamos o profissionalismo e conhecimento acadêmico e científico de Brunelli. Suas obras mostram o quão competente foi, desempenhando importantes papéis no decorrer de toda a sua vida, tais como a demarcação de fronteiras brasileiras, a tradução de obras matemáticas e a docência no Colégio dos Nobres e na Academia Real da Marinha. Não conseguimos ainda esclarecer por que razão não terá Brunelli seguido os passos dos outros Italianos Miguel Franzini e Miguel Ciera, que sendo professores do Colégio dos Nobres transitaram em 1772 para a Faculdade de Matemática, deixando João Ângelo Brunelli em Lisboa. O que sabemos é que o professor de geometria eleito para o cargo em Coimbra foi JAC.

No contexto do duelo literário, constatamos que JAC ocupa-se em discutir e explanar dúvidas dos ex-alunos, dando-lhes condições de corrigi-lo e questioná-lo. O assunto tratado nesse duelo estava em pleno debate pelos matemáticos, que em geral assumiam necessitar de esclarecimentos sobre as quantidades negativas, mas enquanto Brunelli seguia uma cartilha, referendando-se em autores renomados, JAC expunha a seus discípulos todo o embaraço da questão, obrigando-os a pensar sobre o assunto e acompanhando-os nessas reflexões, desenvolvendo-lhes assim, em suma, um apurado sentido crítico.

Em sua segunda carta-resposta, Brunelli refere-se à regra dos sinais algébricos como sendo algo natural e fácil, de modo que qualquer um que tivesse bom entendimento em matemática aceitaria o que já estaria autoevidente, sem questionar. No final dessa carta, afirma que grandes matemáticos morreram com essas dúvidas – ou seja, o próprio Brunelli, no final de sua carta, evidencia haver lacunas de entendimento acerca da natureza das quantidades negativas. Ainda hoje pesquisas indicam que os alunos têm dificuldade em diferenciar o sinal indicativo de operação (de subtração) do símbolo de número (negativo).

Constatamos que particularidades atribuídas a JAC por Rodrigues *et al.* (2013) vêm ao encontro do resultado de nossa investigação, a saber: espírito crítico, busca de clareza e rigor matemático e uso da razão para fundamentar e organizar o conhecimento. Em relação às atividades docentes que JAC desempenhou em Coimbra, descritas por Rodrigues *et al.* (2013), reiteramos seu caráter amigável e disposição em compartilhar saberes, também evidentes em sua estada em Lisboa após cumprir a pena proferida pela Inquisição, bem como seu espirito pró-ativo junto a seus discípulos.

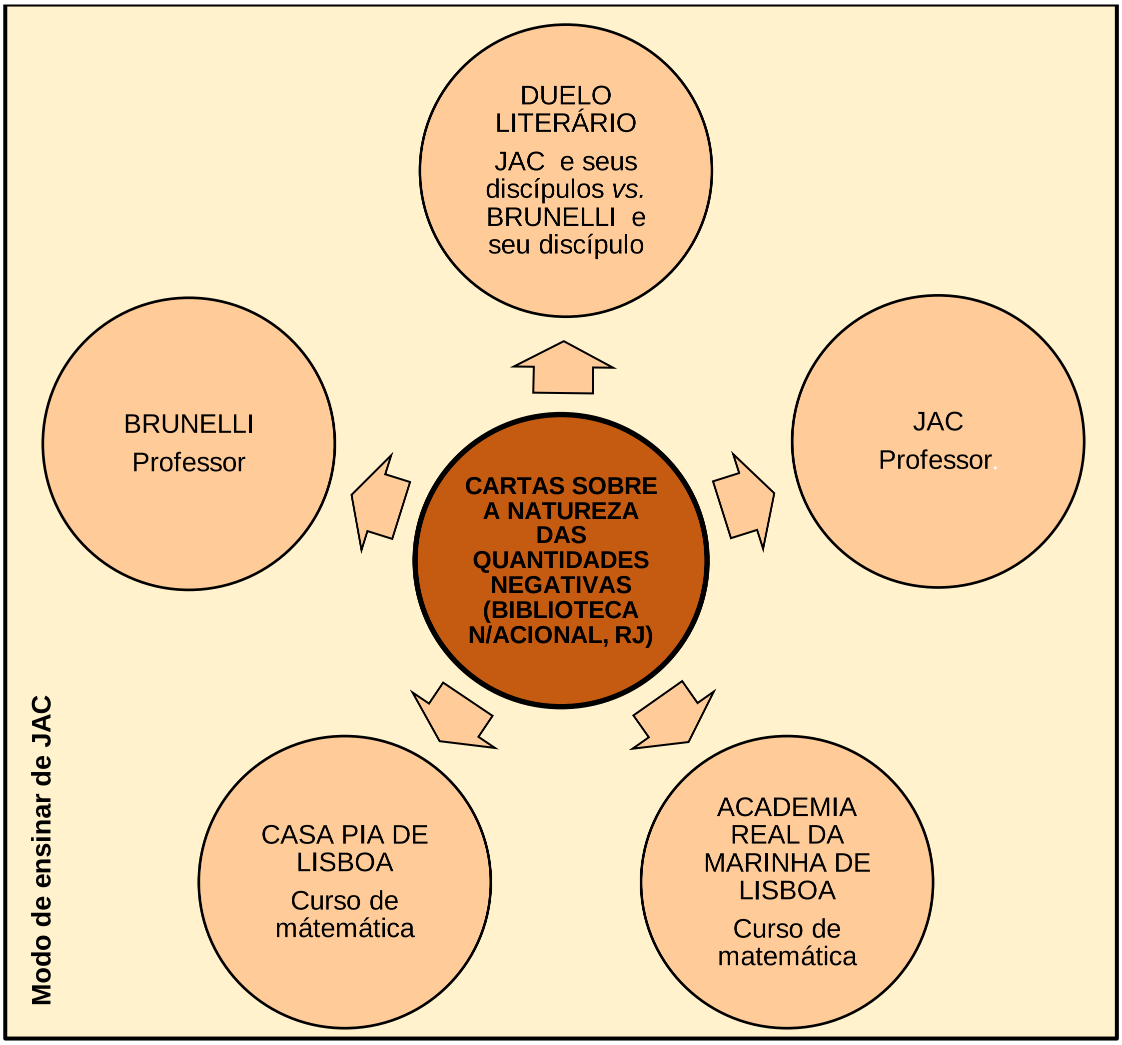
Acerca das ações docentes de JAC na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, destacadas por Santos (2013) como sendo consoantes aos *Estatutos* de 1772, não nos foi possível confirmar exaustivamente essa consonância, mas não temos dúvida de que atribui grande importância a esse novo regulamento de ensino. Recordamos, a este propósito, que na idealização do projeto casapiano do Colégio de São Lucas escreveu que se deviam seguir essas normativas e, ainda em Coimbra, tanto quanto se sabe, seguiu literalmente o conselho de “produzir os seus próprios apontamentos” para distribuir pelos alunos, e terá mesmo sido o único a fazê-lo dentre os quatro lentes responsáveis pelas disciplinas de matemática dos quatro anos da formatura em matemática na Universidade de Coimbra. Também aqui, nosso acesso a fontes primárias e, muito especialmente, documentação inédita até agora, provou ser fundamental no esclarecimento de dúvidas que, por terem sido muitas vezes repetidas ao longo de anos, começavam a ser tomadas como certezas.

CAPÍTULO 4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho abordamos os aspectos docentes de JAC. Apurar suas condutas e práticas de ensino levadas a efeito foi algo que nos inquietou desde que concluíramos nossa pesquisa de mestrado. Renomados autores prosseguiram competentemente estudando JAC em variados e minuciosos aspectos, mas não encontramos um estudo aprofundado que permitisse responder nossa pergunta: Seria JAC de fato um professor diferenciado, que em seu modo de ensinar estendia-se para além da prática habitual de outros professores que lhe eram contemporâneos? Esse questionamento está subordinado a outro, bastante desafiador: Seria possível efetivamente revelar sua prática de ensino, qualquer que tenha sido a natureza desta?

Após encontrarmos na Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro duas cartas manuscritas do século XVIII que envolviam JAC e seus discípulos num duelo literário sobre as quantidades negativas, percebemos que esses questionamentos poderiam ser respondidos. A essas duas foi acrescida uma terceira carta pertencente à Fundação Casa de Mateus, em Portugal. Tais documentos ocuparam posição de destaque em nossa trajetória investigativa, norteando-nos para os demais documentos que viriam a compor todo o cenário, bem como para que pudéssemos entender o contexto em que transcorria esse duelo. Assim, para cumprir nosso objetivo principal, procedemos a uma investigação (Figura 13) que permitisse identificar os personagens diretamente envolvidos neste quinau e as instituições de ensino a que estavam associados, assim como suas motivações.

Figura 13. Fluxograma do percurso da presente investigação.



Fonte: Dados da pesquisa.

Alargamos esse cenário buscando informações nas obras de matemáticos que trabalhavam com o mesmo tema – quantidades negativas – e, principalmente, procuramos apresentar as concepções dos matemáticos referenciados nas cartas em relação a esse tema.

Para a análise dos documentos e reconstrução contextual e matemática, articulamos reflexões da educação matemática – apoiando-nos em Glaeser (1981) e Schubring (2005) – e da história da matemática – baseando-nos em Veyne (1790), Le Goff (2013) e Grattan-Guinness (2004).

Entendemos haver cumprido nosso principal objetivo: o de analisar as atividades de JAC relacionadas ao ensino, no contexto dos números negativos.

Cabe-nos agora apresentar nossas considerações finais, que fazemos com a certeza de que muitos outros questionamentos emergiram ao evidenciarmos a prática de ensino de JAC.

Nas considerações dos Capítulos 2 e 3, confrontamos os autores presentes em nossa revisão de literatura com os documentos originais que acessamos, o que nos permitiu revelar JAC como matemático preocupado com o rigor e as demonstrações, já desde suas primeiras leituras de livros matemáticos, como os de Tacquet, Tosca, Clairaut, Newton e Simpson, e subsequentemente ecoando tal inclinação em suas obras já muito conhecidas (embora todas publicadas postumamente), como são o *Ensaio sobre as minas*, a *Carta fisico-mathematica mathematica sobre a theoria da polvora em geral e a determinação do comprimento das peças em particular*, o *Ensaio sobre os princípios de mechanica* e os *Principios mathematicos.* Mostramos que essa característica do matemático JAC também se revela em suas atividades docentes quando considera os *Estatutos novos* da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra como diretrizes eficazes para um ensino cientificamente rigoroso, e também quando elabora o plano de estudos para a Casa Pia, com cursos que foram qualificados como equiparáveis aos de universidades. Os documentos analisados nos permitiram constatar que, em sua prática professoral, JAC era receptivo a debates acerca dos mais variados tipos de conteúdo e respeitava o ser humano, independentemente de classe ou posição social. Tais práticas tornam-se patentes no âmbito do duelo acerca das quantidades negativas.

No contexto desse debate, constatamos o professor JAC como aquele que, para orientar nos estudos, recebe em sua casa não só fidalgos, mas também ex-alunos oriundos de baixa classe social, claramente sem visar vantagem financeira ou *status* na sociedade. Ao não cercear a redação de uma demonstração, que percebia falaciosa, de que as quantidades negativas seriam imaginárias, JAC atesta não abalar-se com questionamentos em assuntos para os quais ele mesmo não dispunha de resposta pronta. Pelo contrário, incentivou seus discípulos a irem além dele, inclusive corrigindo-o.

Glaeser (1981) e Schubring (2005) consideram que as preocupações pedagógicas referentes ao ensino dos números inteiros negativos constituem interesse relativamente novo, mas JAC evidencia que, em sua busca por uma matemática rigorosa em demonstrações, não excluía o de âmbito tais números. Como indício desta afirmação, citamos o livro de Simpson que JAC adotou na Casa Pia em detrimento do compêndio de Bézout: enquanto o primeiro autor assume não ter algumas respostas, o outro apresenta os conteúdos como autodemonstráveis e, por isso, não passíveis de ulterior exploração.

Notadamente, temos na demonstração de seu ex-aluno Anastácio Joaquim Rodrigues, que deu origem ao quinau, o que Glaeser (1981) chamou de inabilidade para manipular quantidades negativas isoladas e dificuldade em dar significação a estas. Apesar disso, em tal demonstração não encontramos o sintoma de ‘evitação’ – na acepção de Glaeser (1981); pelo contrário, evidenciamos o que denominaríamos ‘sintoma de provocação’: provocar respostas que fundamentassem matematicamente as lacunas existentes na compreensão da natureza das quantidades negativas.

Ressaltamos que o contexto em que a demonstração de Anastácio Joaquim Rodrigues foi redigida difere sobremaneira do contexto da redação de obras matemáticas como a então adotada na Academia da Marinha – a primeira certamente conduzida de modo desprendido, ao passo que a segunda seguia uma linha de raciocínio rigidamente pré-definida. Sobre as obras matemáticas adotadas em escolas militares e universidades, Schubring (2005) frisa a acentuada necessidade da aplicação dos números negativos a questões concernentes à profissão militar.

Nossa análise das atividades de JAC relacionadas ao ensino no contexto dos números inteiros negativos embasaram-nos a creditar-lhe relevantes atributos, alguns dos quais singulares para seu momento histórico: ser dotado de excepcional saber, preocupar-se com o futuro de seus alunos e ex-alunos, ser competente, buscar aprimoramento dos saberes, possuir talentos matemáticos e didáticos, ser paciente, autodidata, humilde – em suma, ser de fato um mestre educador. Ainda em vida, pôde presenciar e comemorar parte do sucesso que seus discípulos alcançaram como homens que foram valiosos a sua nação e desempenharam com honra cargos decisivos, como os de professor, matemático, militar, deputado, escritor, ministro de estado, astrônomo, tutor e médico, entre outros.

Como já apontado, nossa pesquisa delineou questões para pesquisas ulteriores, a saber: (*a*) Como é apresentado o conceito de números negativos inteiros em outras obras de JAC? (*b*) Há efetivamente influências de JAC nas obras sobre quantidades negativas de seus discípulos Rodrigues e Rivara? (*c*) D. Rodrigo de Sousa Coutinho foi influenciado pelo plano de estudos elaborado por JAC para a Casa Pia de Lisboa ao criar a Academia Militar do Rio de Janeiro? (*d*) Que influências as obras de Thomas Simpson teriam exercido na redação dos *Principios mathematicos*? (*e*) Teria JAC efetivamente influenciando a prática docente de seus discípulos?

Sendo assim, estamos certos de que este trabalho não está esgotado, apesar de havermos atingido nossa meta respondendo à questão condutora desta pesquisa. Sabemos que muitas possibilidades mais poderiam ter sido investigadas ou aprofundadas e entendemos que futuramente outros pontos de vista permitirão identificar aspectos que não pudemos discernir ao optarmos por nos ater aos óculos da educação matemática. Esperamos que tais aspectos não abordados sejam percebidos como fator inerente a nossa condição de observadores de apenas um momento histórico selecionado, e que conduzam a outras investigações que acrescentem e complementem esta narrativa de viés histórico.

REFERÊNCIAS

ABREU, João Manuel de. Prefácio. In: CUNHA, José Anastácio da. *Principes mathématiques*. Tradução de João Manual de Abreu. Paris: [s.n.], 1811.

ALMANACH DE LISBOA: para o anno de MDCCLXXXII. Lisboa: Officina da Academia Real das Sciencias, 1782.

ALMANACH DE LISBOA: para o anno de MDCCLXXXIII. Lisboa: Na Officina da Academia Real das Sciencias, 1783.

ALMANACH DE LISBOA: para o anno de MDCCLXXXIV. Lisboa: Na Officina da Academia Real das Sciencias, 1784.

ALMANACH DE LISBOA: para o anno de MDCCLXXXV. Lisboa: Na Officina da Academia Real das Sciencias, p. 1785.

ALMANACH DE LISBOA: para o anno de MDCCLXXXVI. Lisboa: Na Officina da Academia Real das Sciencias, p. 1786.

ALMANACH DE LISBOA: para o anno de MDCCLXXXVII. Lisboa: Na Officina da Academia Real das Sciencias, p. 1787.

ALMANACH DE LISBOA: para o anno de MDCCLXXXVIII. Lisboa: Na Officina da Academia Real das Sciencias, p. 1788.

ALMANACH DE LISBOA: para o anno de MDCCLXXXIX. Lisboa: Na Officina da Academia Real das Sciencias, 1789.

ALMANACH DE LISBOA: para o anno de MDCCXC. Lisboa: Na Officina da Academia Real das Sciencias, 1790.

BÉZOUT, Étienne. **Cours de mathématiques a l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine**: élements d’arithmétique. Paris: P.D. Pierres, 1781.

CAJORI, Florian. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CANTARINO, Nelson Mendes. **Ousando saber**: José Anastácio da Cunha e as luzes em Portugal (1747-1787). Dissertação (mestrado) – Universidade Federal Fluminense, 2006.

CARVALHO, Laerte Ramos de. **As reformas pombalinas da instrução pública**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1978.

CARVALHO, Romulo de. **História do ensino em Portugal**: desde a fundação da nacionalidade até ao fim do regime de Salazar-Caetano. 5. ed. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 2011.

CARVALHO, José Alberto Fernando de; OLIVEIRA, Maria Paula; QUEIRÓ, João Filipe. **Prefácio dos *Principios mathematicos*, de José Anastácio da Cunha**. Coimbra: Universidade de Coimbra, 1987.

CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. **Étienne Bézout**. Scotland: University of St. Andrews, 2001. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bézout.html>. Acesso em: 5 abr. 2017.

CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. **René Descartes**. Scotland: University of St. Andrews, 2014. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bézout.html>. Acesso em: 5 abr. 2017.

CUNHA, José Anastácio da. **Ensayo sobre os princípios de mecânica.** Londres: 1807.

CUNHA, José Anastácio da. **Carta físico-mathematica sobre a theorica da pólvora em geral** e a determinação do melhor comprimento das peças em particular. Porto: Typographia Commercial Portuense, 1838.

CUNHA, José Anastácio da. **Notícias literárias de Portugal**: 1780. Tr., pr. e notas de Joel Serrão. Lisboa: Seara Nova, 1966.

CUNHA, José Anastácio da. **Ensaio sobre as minas**. Arquivo Distrital de Braga, 1994.

CURADO, Silvino da Cruz. Algumas notas sobre José Anastácio da Cunha, enquanto militar. **Boletim da SPM**, v. 67, p. 227-242, 2012.

DA CUNHA, José Anastácio. **Matemático e poeta**. Catalogue of the exhibition. Biblioteca Nacional, Lisboa, 1987.

DA CUNHA, José Anastácio. **Principios mathematicos**: reprodução fac-símile da edição publicada em Lisboa em 1790. Coimbra: Universidade de Coimbra, 1987. Disponível em: <https://play.google.com>. Acesso em: 6 jun. 2014.

DA CUNHA, José Anastácio (1744/1787). O matemático e o poeta. In: COLÓQUIO INTERNACIONAL (Lisboa, 8-10 de outubro de 1987). **Actas.** Lisboa: Imprensa Nacional; Casa da Moeda, 1990.

DE LEMOS, Francisco. **Relação geral do estado da universidade (1777)**. UC Biblioteca Geral 1. Disponível em: <https://books.google.com.br>. Acesso em: 5 maio 2015.

DE MELLO PEREIRA, Magnus Roberto; RIBAS, André Akamine. (Eds.). **Francisco José de Lacerda e Almeida**: um astrônomo paulista no sertão africano. UFPR, 2012.

DIDEROT, Denis; D'ALEMBERT, Jean Le Rond. **Encyclopédie ou dictionnaire raisonne des sciences, des arts et des metiers**: V. XI. Paris: Sociétés Typographiques, 1765. Disponível em: <http://enccre.academie-sciences.fr/encyclopedie>. Acesso em: 23 nov. 2017.

DOMINGUES, João Caramalho. Uma polêmica sobre as quantidades negativas em 1785. **CMAT – Comunicações com arbitragem**. Castelo (Portugal): Editora Municipal de Castelo, 2011. p. 95-108

DUARTE, António Leal; FIGUEIREDO, Fernando Bandeira.; RALHA, Maria Elfrida. José Anastácio da Cunha e a criação da Casa Pia de Lisboa. In: CONGRESO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE HISTORIA DE LAS CIENCIAS E DE LAS TÉCNICAS, 2014. **Actas...** SEHCYT, 2015. p. 187-194.

ESTRADA, Maria Fernanda. Introdução e notas. In: CUNHA, José Anastácio da. **Ensaio sobre as minas**. Arquivo Distrital de Braga/Universidade do Minho, 1994.

ESTRADA, Maria Fernanda. José Anastácio da Cunha: vida e obra. In: RALHA, Maria Elfrida; ESTRADA, Maria Fernanda; SILVA, Maria do Céu; RODRIGUES, Abel. (Orgs.). **José Anastácio da Cunha**: o tempo, as ideias, a obra e... os inéditos. Braga (Portugal): Universidade do Minho; Arquivo Distrital de Braga, 2006. p. 99-29.

ESTRADA, Maria Fernanda; SILVA, Jaime Carvalho e; RALHA, Maria Elfrida. José Anastácio da Cunha: O militar – "acadêmico". In: RALHA, Maria Elfrida; ESTRADA, Maria Fernanda; SILVA, Maria do Céu; RODRIGUES, Abel. (Orgs.). **José Anastácio da Cunha**: o tempo, as ideias, a obra e... os inéditos. Braga (Portugal): Universidade do Minho; Arquivo Distrital de Braga, 2006. p. 297-318.

ESTRADA, Maria Fernanda; COSTA, Maria José; QUEIRÓ, João Filipe; SÁ, Carlos Correia de Sá; SILVA, Maria do Céu. **História da matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

EUCLIDES. **Elementos de Euclides dos seis primetros livros, do undecimo e duodecimo da versao latina de Federico Commandino addicionados e Illustrados por Roberto Simson...**: e traduzidos em portuguez para uso do real collegio de nobres. 1768. Disponível em: <http://objdigital.bn.br/objdigital2/acervo_digital/div_obrasraras>. Acesso em: 5 jul. 2017.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

FERREIRA, Nuno Martins. Professores luso-brasileiros: mathematicos de profissão no ensino náutico e ao serviço do estado na segunda metade do século XVIII e início do século XIX. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 16, n. 32, p. 69-100, 2016.

FERREIRA, Nuno Alexandre Martins. A institucionalização do ensino da náutica em Portugal (1779-1807). **Memórias 2016**: volume XLVI. Lisboa: Academia de Marinha, 2017.

FERRO, João Pedro. (Ed.). **O processo de José Anastácio da Cunha na Inquisição de Coimbra (1778)**. Lisboa: Palas, 1987.

FIGUEIREDO, Fernando José Bandeira de. **José Monteiro da Rocha e a actividade científica da "Faculdade de Mathematica" e do "Real Observatório da Universidade de Coimbra" (1772-1820)**. Tese – Universidade de Coimbra, Coimbra, 2011.

FREIRE, Francisco de Castro. **Memória histórica da Faculdade de Matemática**. Coimbra: Universidade de Coimbra, 1872. Disponível em: <https://books.google.com.br>. Acesso em: 6 maio 2015.

GLAESER, Georges. Epistémologie des nombres relatifs. **RDM**, v. 2, n. 3, p. 303-346, 1981.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. A matemática do passado: que distinguem a sua história de nossa herança. **Historia mathematica**, v. 31, n. 2, p. 163-185, 2004. Disponível em: <www.journals.elsevier.com/historia-mathematica>. Acesso em: 22 jun. 2016.

GUERREIRO, João Santos. Anastácio da Cunha e as matemáticas em Portugal. J. Anastácio da Cunha (1744-1787): o matemático e o poeta. Colóquio Internacional (Lisboa, 8-10 de outubro de 1987). **Actas...** Lisboa: Imprensa Nacional; Casa da Moeda, 1990. p. 27-30.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A noção de" obstáculo epistemológico" e a educação matemática. In: **Educação matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2015.

JORNAL DE COIMBRA, v. 4, n. XVII, 1813.

LE GOFF, Jacques. **História e memória**. 7. ed. Campinas: Unicamp, 2013.

LOPES, Ângela Azevedo Gonçalves Cerdeira; RALHA, Maria Elfrida; ESTRADA, Maria Fernanda; RODRIGUES, Abel. D. José Maria de Sousa, Morgado de Mateus, e o arquivo de José Anastácio da Cunha: L[P]istas para a compilação de uma obra matemática. **Suplemento do Boletim da SPM**, n. 67, p. 19-21, 2012.

MACHADO, Fernando. **Mentalidades em Portugal na segunda metade do século XVIII**: olhares e sentidos. In: RALHA, Maria Elfrida; ESTRADA, Maria Fernanda; SILVA, Maria do Céu; RODRIGUES, Abel. (Orgs.). **José Anastácio da Cunha**: o tempo, as ideias, a obra e... os inéditos. Braga (Portugal): Universidade do Minho; Arquivo Distrital de Braga, 2006. p 29-54.

MALATO, Maria Luisa. O que é o lluminismo segundo José Anastácio da Cunha. In: CONGRESO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE HISTORIA DE LAS CIENCIAS E DE LAS TÉCNICAS, 2014. **Actas...** SEHCYT, 2015. p. 147-154.

MARTINS, Décio Ruivo. A Faculdade de Filosofia Natural (1772-1911). **História da Ciência na Universidade de Coimbra: 1772-1933** In: FIOLHAIS, Carlos; SIMÕES, Carlota; MARTINS, Décio. (Eds.). Coimbra: Universidade de Coimbra, 2013. p. 57-108.

MAXWELL, Kenneth. **Marquês de Pombal**: paradoxo do Iluminismo. Tradução de Antonio de Pádua. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

MOURA, Andréa Maria Ferreira. **A rejeição inglesa aos números negativos**: uma análise das obras dos principais opositores de 1750-1830. Tese (doutorado). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.

NUNES, M. Castro, D. Frei Manuel do Cenáculo e José Anastácio da Cunha. In: COLÓQUIO BICENTENÁRIO DA MORTE DE ANASTÁCIO DA CUNHA, MATEMÁTICO E POETA (Évora, julho de 1987). **Actas...** Évora (Portugal), 1988. p. 257-269.

POMBO, Nívia. **Dom Rodrigo de Sousa Coutinho**: pensamento e ação política-administrativa no Império Português (1778-1812). Rio de Janeiro: Hucitec, 2015.

PORTUGAL. Torre do Tombo. Tribunal do Santo Ofício (F). Inquisição de Coimbra (SF). **Cópia da confissões de José Anastácio da Cunha tomadas pelo Inquisidor Manuel Antônio Ribeiro**: 1778. Código de referência: PT/TT/TSO-IL/028/CX1633/16911, f. 69[v] ao f. 78. Disponível em: <http://digitarq.arquivos.pt>. Acesso em: 15 jun. 2017.

RALHA, Maria Elfrida. **Projecto "Anastaciano"**: José Anastácio da Cunha: o tempo, as ideias, a obra e... os inéditos. In: RALHA, Maria Elfrida; ESTRADA, Maria Fernanda; SILVA, Maria do Céu; RODRIGUES, Abel. (Orgs.). Braga (Portugal): Universidade do Minho; Arquivo Distrital de Braga, 2006, p. XI-XX.

RALHA, Maria Elfrida. José Anastácio da Cunha e o projeto MAT²: no trilho de uma história extraordinária. In: CONGRESO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE HISTORIA DE LAS CIENCIAS E DE LAS TÉCNICAS, 2014. **Actas...** SEHCYT, 2015. p. 49-62.

RIBEIRO, José Silvestre. **História dos estabelecimentos científicos. literarios e artísticos de Portugal nos successivos reinados da monarchia (Lisboa, 1871-83)**. Lisboa: Typ. da Acad. das Sciencias, 1871-72. v. 1-2.

RIBEIRO, Susana Maria da Costa. **Um estudo sobre as "quantidades negativas" em José Joaquim Rivara**. 2009. Tese (mestrado). Universidade do Minho. Disponível em: <http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/10762>. Acesso em: 28 mar. 2017.

RODRIGUES, José Francisco. A obra matemática de José Anastácio da Cunha. 1988. **Colóquio/Ciências**, n. 1, p. 74-86, 1988.

RODRIGUES, Neuma Brilhante. Para a utilidade do estado e "glória à nação": a Real Casa Pia de Lisboa nos tempos de Pina Manique (1780-1805). **Territórios e Fronteiras**, v. 1, n. 2, p. 25-46, 2008.

RODRIGUES, Abel; DUARTE, Antônio Leal; SILVA, Jaime Carvalho e; QUEIRÓ, João Filipe; RALHA, Maria Elfrida; ESTRADA, Maria Fernanda e MALATO, Maria Luísa. **Anecdotas de J. A. d. C.** Portugal: Humus, 2013.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, Ângela Maria dos. **José Anastácio da Cunha, matemático português do século XVIII**: um relato de sua trajetória. Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SANTOS, Ângela Maria dos. **José Anastácio da Cunha, matemático português do século XVIII**. São Paulo: Fiuza, 2013. (Coletânea Acadêmica de Estudos em Letras e Educação (CAELE); 10).

SCHUBRING, Gert. Novas fontes e abordagens na história dos números negativos: uma análise de um manuscrito do Monteiro da Rocha. SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. SOCIEDADE BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 4. **Anais...** Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2001. p. 95-108.

SCHUBRING, Gert. **Conflicts between generalization. rigor, and intuition**: number concepts. California: Springer, 2005.

SILVA, Antônio Delgado da. **Coleção da legislação portuguesa desde a última compilação das ordenações, legislação de 1750 a 1762**. Lisboa: Typografia Maigrense, 1828. Disponível em: <www.governodosoutros.ics.ul.pt>. Acesso em: 20 ago. 2017.

SILVA, Inocêncio Francisco da. **Dicionário bibliográfico português**. Lisboa: Imprensa Nacional, 1876. v. 1, 2, 3 e 4. Disponível em: <https://play.google.com/books>. Acesso em: 27 jun. 2017.

SILVA, Jaime Carvalho e. José Anastácio da Cunha: uma tragédia eterna. **Educação e Matemática**, n. 60, p. 15-20, 2000.

SILVA, Jaime. Carvalho e. A Faculdade de Matemática (1772-1911). **História da ciência na Universidade de Coimbra**: 1772-1933. In: FIOLHAIS, Carlos; SIMÕES, Carlota; MARTINS, Décio. (Eds.). Coimbra: Universidade de Coimbra, 2013. p. 9-42.

SIMPSON, Thomas. **Um tratado de álgebra**: onde os princípios são demonstrados e aplicados em inúmeros inquéritos úteis e interessantes e na resolução de uma grande variedade de problemas de diferentes tipos. A que se adiciona, a construção geométrica de um grande número de problemas lineares e planos, com o método de resolução numérica. Londres: John Nourse, 1755. Disponível em: <https://books.google.com.br>. Acesso em: 6 set. 2017.

TAVARES, Adérito. **A Casa Pia de Lisboa**: breve síntese histórica. 2017. Disponível em: <www.casapia-ac.pt/ACasaPia>. Acesso em: 7 out. 2017

TEIXEIRA, Antônio José. Questão entre José Anastasio da Cunha e José Monteiro da Rocha. **O Instituto: Jornal Scientifico e Litterario**, v. XXXVIII, p. 653-662, 1890-92. Disponível em: >https://almamater.sib.uc.pt/bookreader>. Acesso em: 20 mar. 2017.

TORRES, João Romano. **Portugal**: dicionário histórico, corográfico, heráldico, biográfico, bibliográfico, numismático e artístico. Lisboa: [s.n.], 2000. p. 1048-1051. Disponível em: <www.arqnet.pt/dicionario>. Acesso em: 20 ago. 2017.

UNIVERSIDADE DE COIMBRA. **Estatutos da Universidade de Coimbra**: 1653. Coimbra: Universidade de Coimbra, 1987. Disponível em: <https://books.google.com.br>. Acesso em: 5 maio 2014.

UNIVERSIDADE DE COIMBRA. **Estatutos da Universidade de Coimbra (1772)**. Lisboa: Régia Oficina Tipográfica, 1772. Disponível em: <https://books.google.com.br>. Acesso em: 5 maio 2014.

VEYNE, Paul. **Como se escreve a história**. Lisboa: Edições 70, 1987.

VIEIRA, Guilherme de Souza Belchior. O ensino científico-militar em Portugal no século XVIII: Anastácio da Cunha, discípulo da Aula de Artilharia na Praça de Valença do Minho. In: **Record catalogue of the exhibition**. Lisboa: Biblioteca Nacional, 1987. p. 7-17.

VIEIRA, Guilherme de Souza Belchior. A visão de Anastácio da Cunha sobre o modo de ensino da matemática na Universidade: da sua actualidade**. História e Educação Matemática – Actas**, v. ll, p. 144-153, 1996.

VIEIRA, Raquel Sofia Antunes. **As secções cónicas na obra de José Anastácio da Cunha**: um estudo comparativo. Dissertação – Universidade de Aveiro, 2006.

MANUSCRITOS

Ato de bacharel de Francisco de B. Garção Stockler. Livro dos exames, atos e graus da Faculdade de Matemática, 1785. Arquivo da Universidade de Coimbra; livro 2, f. 64.

BRUNELLI, João Ângelo. Carta de Brunneli solicitando dispensa de seus serviços em Portugal. [s.d.]. Coleção Brunelli, Biblioteca Nacional, Rio de Janeiro. I – 04, 26, 098, n. 005.

BRUNELLI, João Ângelo. Cartas de João Ângelo Brunelli aos familiares e amigos. 1769-96. Coleção Brunelli, Biblioteca Nacional, Rio de Janeiro. I – 4, 13, 02, 21, 25 e 26; I – 15, 03, 27 e 29; I – 16, 02, 09, 18 e 22; I – 47.

Carta de João Ângelo Brunelli (1751-1803) a D. Rodrigo de Sousa Coutinho (1745-1812). Ddata posterior a 1796.

CARTA II – Carta de José Anastácio da Cunha a João Manuel de Abreu. 3 de junho de 1785. Coleção Fundação Casa de Mateus, Vila Real (Portugal).

CARTAS I e III – **Natureza das quantidades negativas – 1785**. Encadernação de duas cartas manuscritas, , sem destinatário e remetente, datadas de 28 de agosto de 1785 e 3 de março de 1785. Biblioteca Nacional, Rio de Janeiro. I – 13, 02, 21.

CUNHA, José Anastácio da. Carta de José Anastácio da Cunha a Diogo Inácio de Pina Manique. [s.d.]. 4 f. Coleção Fundação Casa de Mateus, Vila Real (Portugal).

CUNHA, José Anastácio da. Lista de alunos do curso matemático da Real Casa Pia de Lisboa, redigida. [s.d.]. Acervo da Fundação Casa de Mateus, Vila Real (Portugal).

CUNHA, José Anastácio da. Resoluções, regras e emendas referentes ao plano de estudos do Colégio de São Lucas Evangelista da Casa Pia de Lisboa, 1782. 4 f. Acervo da Fundação Casa de Mateus, Vila Real (Portugal).

CUNHA, José Anastácio da. Lista de livros para o Colégio de São Lucas Evangelista. [s.d.]. 1 f. Acervo da Fundação Casa de Mateus, Vila Real (Portugal).

Folha de pagamento referente ao regente e professores. 7 de fevereiro de 1783. Código de referência PT/TT/RGM/D/001/520.

Notas autobiográficas em italiano de João Ângelo Brunelli. [s.d.]. Coleção Brunelli, Biblioteca Nacional, Rio de Janeiro. I - 04, 26, 98, n. 06.

Plano dos Estudos da Casa Pia de Lisboa, redigido por JAC. [s.d.]. 1 f. Acervo da Fundação Casa de Mateus, Vila Real (Portugal).

PORTUGAL. Carta régia concedendo a solicitação de Brunelli. [s.d.] Coleção Brunelli, Biblioteca Nacional, Rio de Janeiro. I – 04, 26, 098, n. 005.

PROCESSO I – Processo de admissão do Dr. Manuel Pedro de Melo. [s.d.] Arquivo da Universidade de Coimbra. cx. 164.

PROCESSO II – Processo de admissão do Dr. João Manuel de Abreu. [s.d.] Arquivo da Universidade de Coimbra. cx. 164.

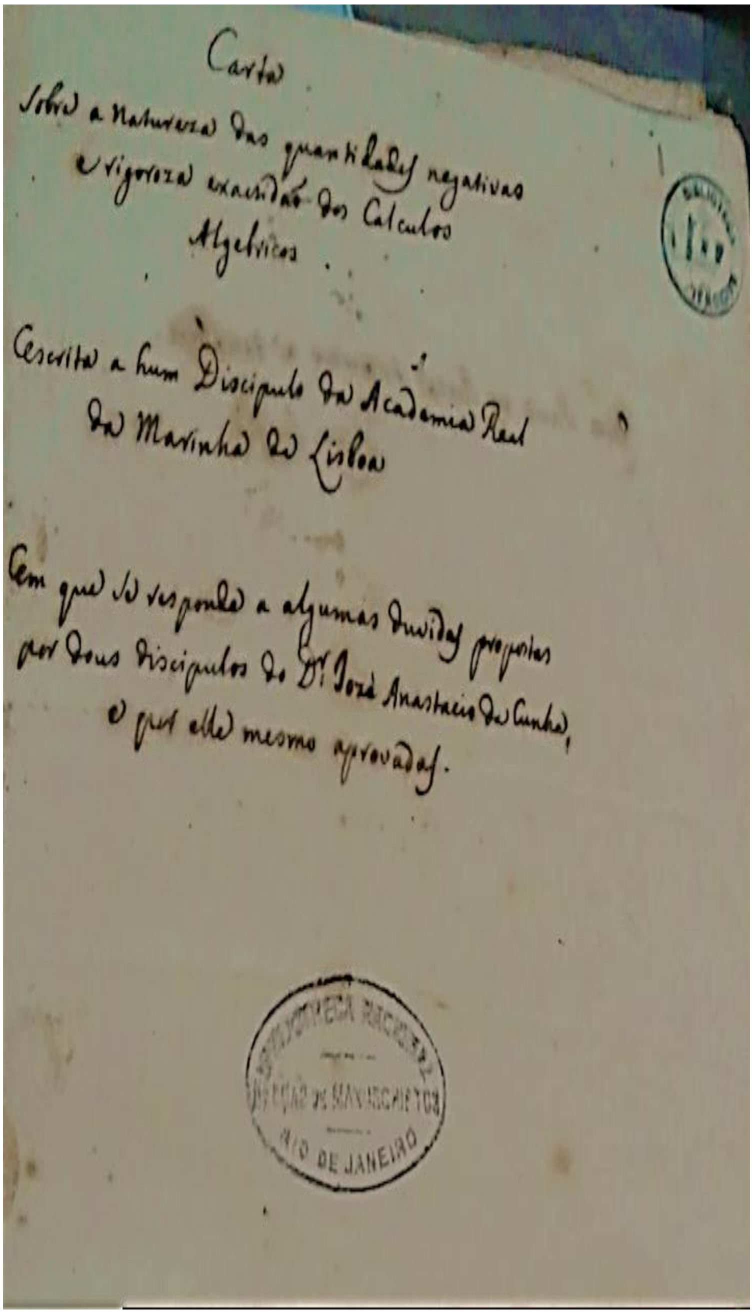
PROCESSO III – Processo de admissão do Dr. José Anastácio da Cunha. [s.d.] Arquivo da Universidade de Coimbra. cx. 164.

REGISTRO GERAL das mercês de D. José I, 1761. Torre do Tombo,Lisboa. Código de referência PT/TT/RGM/D/0019/85276, livro 19, f. 350.

REGISTRO PAROQUIAL de José Anastácio da Cunha. Arquivo de registros paroquiais, Lisboa – Santa Catarina (1739-1747), Torre do Tombo, Lisboa; livro 11, f. 186-186v.

Relação dos discípulos que completaram o curso matemático nas aulas de manhã, 16 de junho de 1783. Arquivo Geral da Marinha de Lisboa; sala 1, estante 9, 214, 37.

Anexo A – Lombada, folha de rosto, nota introdutória e carimbos da encadernação das Cartas.

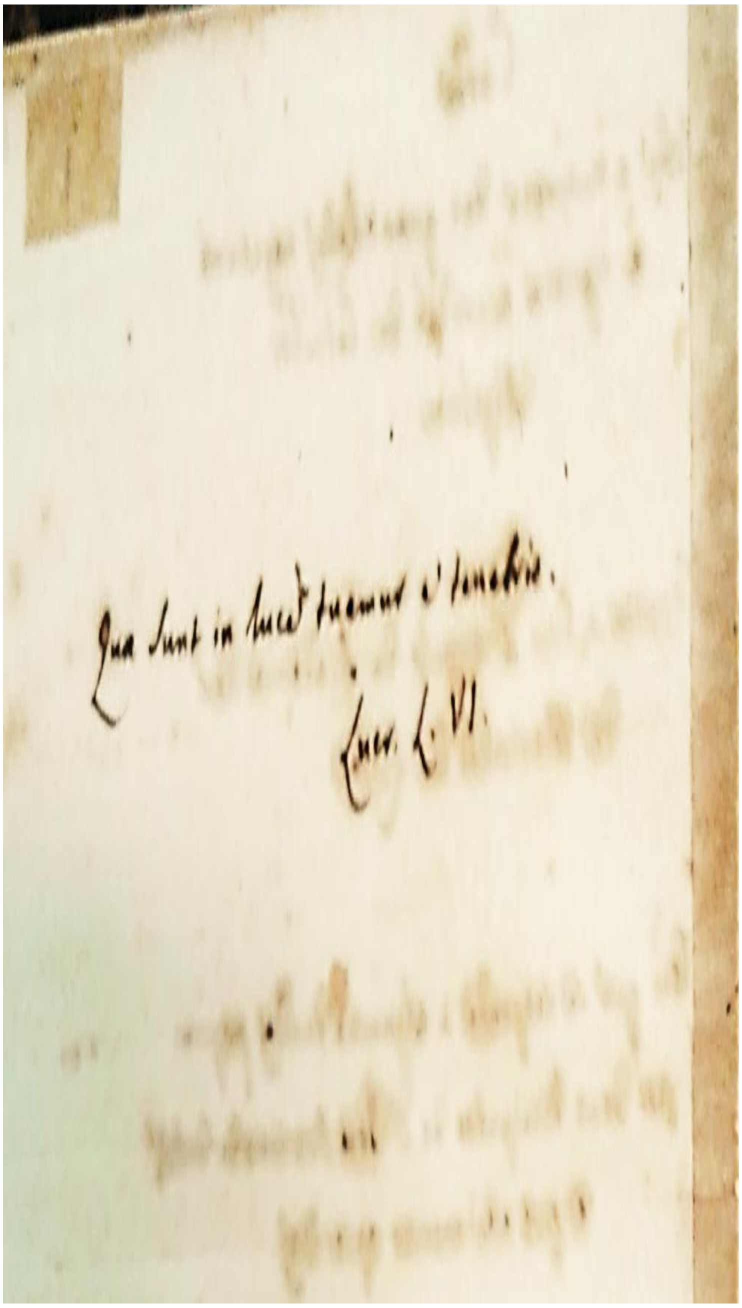


Carta

Sobre a Natureza das quantidades negativas
e rigoroza exacção dos Calculos
Algebricos.

Escrita a hum Discipulo da Academia Real
da Marinha de Lisboa

Em que se responde a algumas duvidas propostas
por dous discipulos do Dr. José Anastacio da Cunha,
e que elle mesmo approvadas.


Quæ sunt in luce tuemur e tenebris.
Lucr. L. VI


DA REAL BIBLIOTHECA


BIBLIOTHECA NACIONAL
SECÇÃO DE MANUSCRIPTOS
RIO DE JANEIRO

Critérios de transcrição

Transcrevemos as Cartas I e III respeitando a pontuação original, mantendo os termos que aparecem em maiúsculo, expandindo as abreviaturas e procedendo de acordo com as normas da língua portuguesa utilizada no Brasil, sem com isso alterar o teor do texto.

Adotamos para a transcrição das Cartas I e II, os seguintes procedimentos:

– mantivemos a mesma pontuação;

– mantivemos as palavras com maiúsculas ;

– atualizamos a acentuação e escrita das palavras (por exemplo: ‘pregunta’ para ‘pergunta’, ‘he’ para ‘é’, ‘hum’ para ‘um’).

No final das cartas, o autor acrescenta algumas observações, indicando com marcações a quais partes do texto cada uma se refere. Optamos por transcrevê-las como notas de rodapé ao longo do texto.

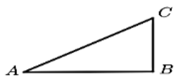
Anexo B – Carta I

As quantidades negativas são imaginárias.

Sejam a, e b quantidades positivas, e $\mathrm{a} > \mathrm{b}$. Se é $\mathrm{b} > -\mathrm{a}$, será $\sqrt{\mathrm{b}-\mathrm{a}} = \mathrm{b}^{\frac{1}{2}} - \frac{\mathrm{a}}{2\mathrm{b}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\mathrm{a}^2}{8\mathrm{b}^{\frac{3}{2}}} - \cdots$ valor que deve ser imaginário. Logo as quantidades negativas o são. Mas tomando $-\mathrm{a}$ por primeiro termo, sai $\sqrt{-\mathrm{a}+\mathrm{b}} = (-\mathrm{a})^{\frac{1}{2}} + \frac{\mathrm{b}}{2(-\mathrm{a})^{\frac{1}{2}}} - \frac{\mathrm{b}^2}{8(-\mathrm{a})^{\frac{3}{2}}} + \ldots$ valor sem dúvida imaginário, logo $-\mathrm{a} > \mathrm{b}$.

Logo ou as quantidades negativas são imaginárias, ou $-\mathrm{a} > \mathrm{b}$; mas não é $-\mathrm{a} > \mathrm{b}$; porque ajuntando de uma e outra parte a, sai $0 > \mathrm{a}+\mathrm{b}$, o que é absurdo. Logo as quantidades negativas são imaginárias, aliás $\sqrt{-\mathrm{c}}$ será real, sendo c um número positivo.

E na verdade a praxe dos sinais é verdadeiramente hipotética, e falsa em alguns casos, como na resolução, que um Matemático português deu do seguinte problema, se vê.

Dada a base AB de um triângulo retângulo 

em B, e a soma dos outros dois lados, achar o lado BC.

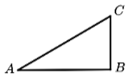
Seja $\mathrm{AB} = \mathrm{a}$; $\mathrm{AC} + \mathrm{BC} = \mathrm{b}$; $\mathrm{BC} = \mathrm{x}$. Será $\mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2 = (\mathrm{b}-\mathrm{x})^2$; equação que dá $\mathrm{x} = \frac{\mathrm{b}^2 - \mathrm{a}^2}{2\mathrm{b}}$. Solução sempre possível (continua ele) conforme o cálculo, sendo impossível na realidade, quando se propõem um valor de $A\mathrm{B}$ maior que o de $\mathrm{AC} + \mathrm{CB}$. O que confirma o que se acaba de dizer.

Senhor F.

Agora acabo de ler a sua carta, em que me pergunta o meu parecer sobre as dúvidas, que alguns dos seus condiscípulos propuseram aos Senhores Lentes dessa Academia; e posto que o Correio está a partir, como vejo o grande desejo que tem de saber o meu parecer, passo a expor-lho em breves palavras.

A evidência, que caracteriza as Ciências Matemáticas, depende toda de se terem ideias claras, e exatas das diversas quantidades, que são objeto das mesmas Ciências. Todas às vezes que estas faltam, aquela luz se apaga, e o entendimento para logo se confunde em os seus raciocínios, chegando algumas vezes a precipitar-se em absurdos capazes de lhe fazerem desconfiar da exatidão delas; principalmente não havendo a prudência de fazer um sério exame das próprias ideias, e de consultar aqueles, que tendo meditado por longo tempo sobre estas Ciências, poderão notar melhor quais das mesmas ideias são defeituosas. Esta virtude e quem provavelmente moveu os seus condiscípulos a escrever as dúvidas, que me envia, sobre a natureza das quantidades negativas. Todas elas nascem, de eles não terem ideias claras do que os Matemáticos chamam quantidades negativas; pois se bem advertissem, que estas só diferem das positivas quanto ao diverso modo por que se considerão, e não quanto a sua grandeza absoluta certamente não ajuntariam uma semelhante série de paralogismos qual é a de todos os raciocíonios, com que pretendem provar que as quantidades negativas são imaginárias.

Sejam como eles supõem a, c, b quantidades positivas, e seja $a > b$. Uma vez que estas suposições se tem feito, já se não deve perguntar se é $b > -a$, pois o sinal – só denota que a se considera por um modo contrário a aquele, por que se considera b, o que não altera de sorte alguma a sua grandeza absoluta: pelo que, quando se pretende determinar o valor de $\sqrt{b-a}$, o que se deve examinar para ver se esta quantidade é real, ou imaginária, é se é maior ou menor que $-a$; mas sendo a suposição que $a > b$, segue-se que $\sqrt{b-a}$ é uma quantidade imaginária a qual para se meter em série, exige que $-a$ se tome por primeiro termo o que dá a série $(-a)^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{2(-a)^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^2}{8(-a)^{\frac{3}{2}}} + \ldots$ a qual se reconhece ser imáginária, e donde só se pode tirar por conclusão o mesmo, que se supor, isto é que $a > b$.

Se se examinar o caso do triângulo retângulo ABC, 

cujo lado AB se supõem $= a$ e a soma dos outros dois lados $AC + BC = b$, para por meio destes dados se determinar o lado $BC = x$, achar-se há que o Matemático português, de quem é tirado, e cujo nome eu ignoro, talvez por ser o problema de pouca consideração, não refletiu bem no que queria dizer a fórmula da sua resolução $x = \frac{b^2 - a^2}{2b}$. Todas as vezes que em Matemática se faz uma hipótese, debaixo da qual se discorre, e o ultimo resultado dos cálculos contradiz à mesma hipótese, esta é absolutamente falsa, se ele absolutamente a contradiz, ou só em alguns casos a contradiz; e isto ou o mesmo resultado venha representado por quantidades positivas, ou por quantidades negativas, ou por quantidades imaginárias. Se o Matemático português se não tivesse esquecido desta verdade, não tiraria da sua resolução $x = \frac{b^2 - a^2}{2b}$ a conclusão de que o cálculo sempre supõem possível a resolução do triângulo proposto, ao mesmo tempo que esta é impossível quando $a > b$; pois ainda que no seu cálculo se não faz entrar a condição de que as três linhas a, x, e $b - x$ formam um triângulo; com tudo esta condição supõem-se, e esta suposição seria contraditória se não se suposesse ao mesmo tempo, que as linhas x, e $b - x$ são ambas juntamente positivas ou negativas; pois para elas se encontrarem é necessário que caiam ambas para a mesma parte a respeito de AB. Logo o cálculo mostrando, que as condições que algebricamente se expressaram, dão em alguns casos para x um valor de sinal contrário ao de $b - x$, faz ver que há casos, em que a suposição de formarem as três linhas propostas um triângulo é falsa, não porque o valor de x seja então imaginário, como parece se pretende concluir; mas porque não é compatível com a suposição feita. Quem não quer que o cálculo lhe de destas respostas, não limita a resolução de um problema geral a um só caso dos que nele se contem. A fórmula $x = \frac{b^2 - a^2}{2b}$ dá a resolução de um problema mais geral do que aquele, à que ela se aplica, e é este: Dadas três linhas, das quais se conhece uma, e a soma das outras duas, com a condição de ser a soma dos quadrados da primeira e de uma das duas cuja soma se conhece, igual ao quadrado da terceira; determinar estas duas linhas... Donde se vê que o cálculo acima referido responde à uma pergunta mais geral, por isso mesmo que a condição de formarem as três linhas um triângulo retângulo não se expressou algebricamente. A vista do que fica evidente, que do caso proposto se não pode tirar conclusão alguma contra a teórica dos sinais algébricos.

Suponho que estas considerações são assaz suficientes para fazer ver a futilidade das dúvidas sobreditas, que atendendo a serem propostas por sujeitos principiantes nesta qualidade de estudos, são dignas não só de indulgência, mas até de louvor, se eles tiverem a docilidade precisa para sinceramente confessarem o seu erro. E quanto ao Matemático português, nenhuma dúvida tenho em que ele reconheceria o seu descuido, se lhe ocorressem estas mesmas reflexões & sou

De Vossa Mercê.

Porto 13 de março de 1785.

Anexo C – Carta II

Trecho da Carta enviada por JAC a João Manuel de Abreu
(relativo ao duelo literário acerca das quantidades negativas).

Senhor João Manuel de Abreu

Quando recebi a sua carta (há tanto tempo!) havia dias que estava de ama e assim continuei quase um mês. (...)

(...) Os seus discípulos também se queixam de que na Academia de Marinha se fala muito e não não se demonstra nada.

Anastácio, Manuel Pedro e Luis Antônio têm vindo ver-me vária vezes e comunicar-me dúvidas que lhes ocorrem contra os princípios de cálculo que M. Bézout ensina como teoremas demonstrados. Veja sr. J. M. a subtileza desses paradoxos que Manuel Pedro propôs aos condiscípulos e aos Lentes.

(1) Seja a número positivo: será $2\mathrm{a} > \mathrm{a}$, e logo tirando $2\mathrm{a}$ de ambas as partes $0 > -\mathrm{a}$; e logo $\frac{1}{-a} > \frac{1}{0}$, isto é, $-\frac{1}{a} > \infty$, ajunte-se a um e outro membro $\frac{1}{a}$ será $0 > \infty + \frac{1}{a}$ ___________

(2) É $\mathrm{aa} = -\mathrm{a} \times -\mathrm{a}$, e logo $\mathrm{a} : -\mathrm{a} :: -\mathrm{a} : \mathrm{a}$ e logo $\mathrm{a} - \mathrm{a} : -\mathrm{a} :: \mathrm{a} - \mathrm{a} : \mathrm{a}$ e pois os antecedentes são iguais também serão $\mathrm{a} = -\mathrm{a}$ ______________

(3) Pois é $\mathrm{a} = -\mathrm{a}$, será $2\mathrm{a} = 0$ ______________

(4) $\mathrm{a} = \frac{\mathrm{a(a-a)}}{\mathrm{a-a}} = \frac{\mathrm{a^2-a^2}}{\mathrm{a-a}} = \frac{\mathrm{(a+a)(a-a)}}{\mathrm{a-a}} = 2\mathrm{a}$ ____________

(5) $\frac{\mathrm{a}}{0} = \frac{\mathrm{a}}{1-1} = \infty$, logo $\mathrm{a} = 1\infty - 1\infty = 0$ _______________

O Anastácio provou-lhes que toda a quantidade negativa era imaginária ou impossível. Sejam a e b números inteiros (diz ele) e $\mathrm{a} > \mathrm{b}$; será $2\mathrm{a} + \mathrm{b} > \mathrm{a}$ e logo $\mathrm{b} > -\mathrm{a}$ e logo $\sqrt{(\mathrm{b} - \mathrm{a})} = \sqrt{\mathrm{b}} - \frac{\mathrm{a}}{2\sqrt{\mathrm{b}}} - \frac{\mathrm{a^2}}{8\sqrt{\mathrm{b^3}}} - \&c$. Isto è quantidade impossível. $\sqrt{(\mathrm{b} - \mathrm{a})}$ igual à quantidade negativa $\sqrt{\mathrm{b}} - \frac{\mathrm{a}}{2\sqrt{\mathrm{b}}} - \frac{\mathrm{a^2}}{8\sqrt{\mathrm{b^3}}} - \&c$. ________ Não contente deste argumento vale-se da solução de um problema dos meus princípios; e é coisa bem singular e bem galante ter Mr. Thomas Simpson alegado na sua excelente Álgebra esta mesma solução para confirmar muito no seu sério esta opinião que o seu Anastácio apenas no princípio dos seus estudos expôs meramente (suponho eu) como um *argumento ad hominem.* O Problema é este *Dado um lado a do ângulo recto de um triângulo e a soma b dos outros lados achar o outro lado x do ângulo recto.* A solução é $\mathrm{x} = \frac{\mathrm{b^2-a^2}}{2\mathrm{b}}$ que o cálculo dá sempre possível, digo eu novamente, sendo somente enquanto $\mathrm{b} > \mathrm{a}$. Responderam-lhe, como costumam os Modernos, que o *cálculo dá a solução de outro problema; e que todas as vezes que em Matemática se faz uma hipótese debaixo da qual se discorre e o último resultado contradiz a hipótese, esta é absolutamente falsa se ele absolutamente a contradiz, ou só em alguns casos falsa se tão somente em alguns casos a contradiz, e isto ou o útimo resultado venha representado em quantidades positivas por quantidades negativas ou por quantidades imaginárias*. Isto em uma carta que pessoas bem informadas atribuem a um missionário de Matemática chamado Stockler que anda pelas ruas de Coimbra pregando uma espécie de cruzada contra mim e contra o meu livro.______________Mas insta o Anastácio: *Posso conhecer por qualquer resultado positivo, negativo ou imaginário, que o cálculo de, se o problema é impossível. Mas isto de dois modos: ou imediatamente pelo resultado, ou com alguma reflexão minha. Ora ao primeiro caso só pertence a quantidade imaginária, porque só esta mostra, sem ser necessária alguma reflexão, a impossibilidade de qualquer problema e, por consequência, só quando o cálculo der uma tal quantidade é que mostra esta impossibilidade. Mas se por qualquer outro resultado a conheço, sou em quem a acha e não é o cálculo que ma mostra. Antes, se o problema for muito complicado, como muitas vezes sucede, e eu não puder fazer esta indagação, o cálculo me pode enganar, dando-me por solução uma quantidade positiva ou negativa, o que sucederia se pelas suas "generalidades" me desse uma quantidade impossível. Pelo que de duas uma: ou o seu Amigo há-de confessar que, no caso proposto, a quantidade negativa é imaginária (e, por consequência, impossíveis todas as questões a que estas quantidades satisfazem) ou que não é o cálculo o que mostra mas sim o calculador que descobre, por algum meio, a impossibilidade do problema e, por consequência, que o cálculo falha.*

Eu ainda não acabo de me admirar. __________ Estes Rapazes quando V. M. principiou a ensiná-los apenas sabiam ler. ___________ Não estudaram lógica nem Metafísica!___________ E que tem produzido a Lógica e a Matafísica de Coimbra? __________ Logo lho direi. __________ (...)

Anexo D – Carta III

Carta

Sobre a natureza das quantidades negativas e
rigorosa exatidão dos cálculos algébricos.

Senhor F.

Recebendo há tempos uma carta sua, e incluso nela um papelinho que Vossa Mercê dizia ser obra de uns seus condiscípulos, no qual há presenças provas, que as quantidades negativas são imaginárias, respondo a Vossa Mercê fazendo-lhe ver que os argumentos, que nela se continham, eram uns puros paralogismos. Vossa Mercê pedia-me na sua carta o meu parecer sobre aquelas razões, e não me perguntava quais eram os meus sentimentos a respeito das dúvidas, que Mr. D'Alembert escreveu sobre a inteligência que se devia dar à certas soluções negativas de alguns problemas, de que faz menção nos seus opúsculos Matemáticos, nem a respeito dos paradoxos, que Euler, encontrou no cálculo das forças centrais, e dos diversos sentimentos do mesmo Euler e de D'Alembert nesta tão dificultosa matéria. Nem Vossa Mercê, se já estivesse em estado de entender estas questões, havia de pôr as dúvidas dos seus condiscípulos a par das destes dois grandes homens, nem eu sem méceres uma severa censura havia de fazer menção a Vossa Mercê de que eles disseram estas matérias, quando os seus recentes estudos lhe não consentem ainda poder entendê-las; e muito menos fazer dois dos mais celébres Matemáticos a injúria de tratar as suas questões juntamente com as de seus principiantes. Isso não é desprezar os seus discípulos, pois talvez poderão ainda ser para o futuro uns homens de muita consideração; mas é fazer justiça, ou verdadeiramente não fazer injustiça aos homens grandes. Esta resposta como digo foi somente a Vossa Mercê dirigida para que aquelas pequenas dúvidas a não retardassem no progresso das suas aplicações, e de nenhuma série se encaminhava a eles pois estava bem para que se por infelicidade minha lhe chegasse as mãos, haviam de blasfemar contra mim dizendo-me milhares de impropérios Vossa Mercê talvez por conhecer que se havia gente não pode dar nem tirar crédito, teve a condescendência ou facilidade de mostrar-lha. Verificaram-se os meus receios; e o pior é que não só eles me insultão, mas até o seu primeiro Mestre, como vejo das duas cartas, que com a sua remete. Em uma (além dos insultos, que a mim se referem, os quais são comuns em ambas) se propõem algumas novas dúvidas, ainda menos atendíveis que as primeiras, e em outra não se faz mais do que oferecer-me para eu responder todas as questões que Mr. D'Alembert propõem nos tomos 4.° e 8.° dos seus opúsculos Matemáticos com fim bem diverso do que o de mostrar que as quantidades negativas são imaginárias. Pensamento de que não há o mínimo vestígio nas obras deste grande homem. Na verdade não sei para que este seu condiscípulo quis ter o trabalho de copiar tanta coisa, que não tem relação alguma com a questão de serem as quantidades negativas reais ou imaginárias! Mas deixemo-lo com a satisfação de nos ter mostrado que já viu os opúsculos de D'Alembert. Eu passo a expor os meus sentimentos, e a responder às novas dúvidas e reflexões, de que faz menção a primeira das sobreditas cartas; e quanto à segunda, se as minhas ocupações atuais me permitirem mais algum tempo livre, darei por única resposta algumas breves, e suscintas reflexões sobre as questões referidas, insertas nos opúsculos de Mr. D'Alembert, donde Vossa Mercê poderá ver, que o Autor delas nem ao menos entrou no espírito da presente questão.

Se em Matemática se considerassem as quantidades atendendo tão somente à sua grandeza absolutas, não haveria necessidade alguma de as distinguir de baixo das diversas denominações de positivas, negativas, e imaginárias; as operações da aritmética, e da Geometria seriam assáz suficientes para calcular as relações das suas grandezas; mas a Matématica bem longe de fazer progressos, que hoje notamos, ficaria circunscrita em limites bem estreitos. Não há ninguém que tenha conhecimento desta Ciência que ignore que a aplicação, que Descartes fez da Álgebra à Geometria transcendente, foi quem abriu o passo a todos os grandes descobrimentos, com que a Matématica se tem tanto enriquecido. A invenção da Álgebra necessariamente devia levar os Geômetras a considerar as quantidades debaixo de dois pontos de vista diversos, independentemente da sua grandeza absoluta; pois como esta Ciência não faz mais do que indicar as operações, que se devem fazer sobre as quantidades atentando as que se devem tomar com o sinal $+$, e as que se devem diminuir com o sinal $-$, os Geômetras se viram precisados a considerar nos resultados dos seus cálculos, quando estes eram representados por expressões complexas, as quantidades e afetas do sinal como tendesses a aumentar o valor dos mesmos resultados e as afetas do sinal $-$ como tendesses somente a diminuido; e posto que esta consideração é uma consequência, que naturalissimamente se deriva da significação mesma dos sinais, para que Vossa Mercê melhor me possa entender, eu me explico com um exemplo bem simples. Seja AB $A\overset{C}{\text{\_\_|\_\_}}B$ uma linha reta, a que eu chamo a, AC uma parte qualquer dela, a que eu chamo x, e BC a outra parte, a que eu chamo z; será $z = a - x$. Ora desta expressão se vê que quanto a quantidade negativa x for maior, tanto menor será z. Suponhamos agora, que isto era o resultado de um cálculo, e não a expressão de uma hipótese simplicíssima. Não teríamos nós razão de dizer, que a quantidade negativa x tendia a diminuir este resultado em tanto que a tendia a aumentá-lo? Pois este é o novo ponto de vista, debaixo do qual os Geômetras se virão obrigados, depois da invenção da Álgebra, a considerar as quantidades; ou verdadeiramente esta é a consideração, a que foram naturalmente levados. Mas esta consideração é relativa somente aos efeitos que as quantidades são capazes de produzir, e de nenhuma sorte à grandeza absoluta delas; donde se vê que supondo $a > b$, já não devo inquirir se é $b > -a$, pois os sinais não afetam o tamanho das quantidades. Mas esquecia-me que o seu condiscípulo não pergunta: ele diz que demonstra. Ora tenha a Vossa Mercê a bondade de examinar comigo a sua demonstração. *Sejam* a, *e* b *quantidades positivas, e* $a > b$. *Será* $2a + b > a$. *Logo tirando* $2a$ *de uma outra parte, ficará* $b > -a$. Esta é a pretendida demonstração do seu condiscípulo. Mas pergunto eu quem lhe deu a ele a autoridade de tirar $2a$ de a? Porventura permite-lho assim o cálculo? Ou pensou ele que podia fazer a respeito das expressões de desigualdade como são as em que entrão os sinais $>$ ou $<$, o mesmo que a Álgebra consente que faça a respeito das equações? E não atendeu, que tendo nas equações os metros iguais, a quantidade que se pode tirar de um, sempre se pode tirar do outro, mas que não sucede assim nas expressões, que ainda que divididas em dois membros, denotam que um é maior do que o outro? Pois esta reflexão era bem fácil de fazer. Ora o seu condiscípulo tira $2a$ de a, e portanto ou considera $2a$ como uma quantidade, que se subtrai, e então cometendo um absurdo, a expressão $b > -a$ não pode deixar de ser também absurda; ou considera $2a$ e a um sentido contrário ao em que antes a considerava; isto é, considera $2a$ como quantidade que tende a diminuir quaisquer resultados, em que entrar, e por isso a denotam com o sinal $-$; e então a expressão $b > -a$ não envolve nada de absurdo, pois denota que b em quanto quantidade capaz de aumentar é maior que a em quanto quantidade só capaz de diminuir; isto é, que se a uma mesma quantidade A juntarmos sucessivamente b, e $-a$, ficará $A+b > A-a$. Eis aqui a diferença que há entre mim, e o seu condiscípulo, e o primeiro Mestre dele; é que segundo eles a expressão $b > -a$, denota que b é absolutamente maior que $-a$; e segundo eu que cai no indisculpável absurdo de dizer que a certeza das Matemáticas depende de se terem ideias claras e exatas das quantidades, que são objeto das mesmas Ciências e que demais estou persuadido que nas conclusões, que tiro de quaisquer proposições, não devo nunca prescindir das condições, que nelas entrarão, segundo eu, torno a dizer, a expressão $b > -a$ quer dizer que a quantidade b considerada como capaz de aumentar é maior que a quantidade a, quando esta se considera só como capaz de diminuir. Eu me explico de outra maneira; e talvez que Vossa Mercê assim me entenda melhor. Quando eu avalio as quantidades pelos seus efeitos, digo que de duas é maior aquela que junta com uma terceira dá um resultado maior; assim se $a+c > a+d$, será $c > d$; se $g+h > g-f$, $h > -f$; mas advirto Vossa Mercê que eu nestes exemplos não trato de buscar uma medida comum entre c, e d nem entre h, e $-f$, como aliás devo fazer para conhecer as relações da sua grandeza absoluta; trato só de medir a quantidade ou capacidade dos seus efeitos, e por isso é que digo ser $h > -f$; pois ainda que o sinal $-$ não influe sobre a grandeza absoluta da quantidade representada por f, com tudo por isso mesmo que só indica que f se deve diminuir em tanto que h se deve somar nos denota, que se com uma terceira quantidade x se somarem segundo as regras da Álgebra as quantidades h, e $-f$; ficará $x+h > x-f$. Logo as expressões tais como $b > -a$ não exprimem relação alguma de grandeza absoluta entre as quantidades; mas tão somente se referem aos efeitos, que elas devem produzir nos resultados, em que entrarem. E com efeito é bem visível que todas as vezes que uma quantidade se considera como devendo somar $2a$, ou diminuir de, já se refere à outra com a qual deve somar-se, ou da qual deve diminuir-se, pois para haver soma ou diminuição é preciso que haja pelo menos duas quantidades. Pelo que em Álgebra estas duas expressões $b > -a$; e $x+b > x-a$ significam absolutamente a mesma coisa, todas às vezes que x se considera representando uma quantidade susceptível de todos os valores maiores que a. Eis aqui o que Vossa Mercê deve entender das minhas palavras todas às vezes que eu digo, que as expressões tais como $b > -a$ só denotarão relações de efeitos, e não de grandeza absoluta; pois não sei considerar os sinais como influindo na grandeza das quantidades, nem prescindir do que eles querem dizer; porém se este meu modo de expressar não agradar a esses meus senhores, porque estes meus pensamentos não foram inteiramente bebidos na lição das obras dos grandes Matemáticos, que inconsideravamente citam, e que certamente nunca leram, mas são em grande parte frutos monstruosos das minhas curtas, e pouco atentas meditações, que se expliquem como quiserem; pois eu sempre serei fácil sobre palavras, com tanto que convenhão que quando no caso proposto dizem: tivesse $2a$ de uma e outra parte, eles passam a considerar $2a$ em um sentido diverso do que antes faziam, ou aliás cometem um absurdo dizendo tirai $2a$ de a, que é o mesmo que dizer tirai a de nada. E se assim o fazem, como é que pode ser verdadeira a expressão $b > -a$. Se para chegar a ela é preciso cometer um absurdo. Medite Vossa Mercê um pouco sobre isto, e verá se eu nego uma conclusão legitimamente tirada dos princípios fundamentais da álgebra, ou se nego uma conclusão tirada dos princípios da Álgebra mal entendidos, e por uma maneira alheia de todos os princípios da razão; e depois me dirá se eu corto pela raiz a árvore, cujos ramos pretendo defender.

Estes argumentos de razão são quanto a mim mais que suficientes para mostrar, quão falsas e repugnantes são as ideias que o seu condiscípulo tem das quantidades negativas. Mas como ele parece não contentar-se senão com demonstrações matemáticas, eu passo a mostrar-lhe que a sua pretendida demostração é um paralogismo tão pouco capaz de iludir, que (ainda admitido) pelas regras da Álgebra geralmente recebidas se torna dele a deduzir o contrário do que o seu condiscípulo pretende ter com ele demonstrado.

Suponhamos que é com efeito $b > -a$, no sentido que ele lhe dá. Multiplicando estas duas quantidades por uma terceira, ficará permanecendo a mesma razão de desigualdade. Logo $bx - c > -ax - c$; isto é $-bc > ac$; e dividindo por c, $-b > a$; ajuntando agora de uma e outra parte $b - a$, ficará $-a > b$; que é justamente o contrário do que o seu condiscípulo pretendia ter demonstrado. Demais supondo $a > b$, se fosse $b > -a$; multiplicando de ambas as partes por -1, teríamos $-b > a$, e por consequência $-b > -b$, e $-b > -a$, e tornando a dividir por -1, ficaria $b > a$, o que é um absurdo. Logo não pode ser absolutamente $b > -a$. Numa palavra de qualquer sorte que se considerem os sinais, como influindo na grandeza absoluta das quantidades, sempre pelas regras da Álgebra geralmente recebidas só seguem absurdos; o que é uma demonstração de que eles não afetam o tamanho das quantidades. Esta verdade é geralmente recebidas por todos os Matemáticos, ou ao menos pela maior parte deles; e se há algum que negue (como de Thomas Simpson, afirma o primeiro Mestre do seu condiscípulo) não será difícil achar nas suas mesmas obras passagens, em que se lhe mostre a inconsequência do seu pensar. Mas para que me não tornem a acusar de não dar demonstrações matématicas das proposições, que afirma, eu passo a dar outra de que a grandeza absoluta das quantidades se deve avaliar independentemente dos seus sinais.

A série resultante do desenvolvimento de $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ é $a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\, ba^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m(m-n)}{n.2n}\, b^2a^{\frac{m-2n}{n}} + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n.2n.3n} b^3a^{\frac{m-3n}{n}} + \ldots$ e a razão de um termo qualquer x para o seu imediato $x+1$ é $1{:}\left(\frac{(m-\overline{x-1}n)}{xn}\right)\frac{b}{a}$. Ora todas às vezes que for $\overline{x-1}.n > m$, a quantidade $\left(\frac{(m-\overline{x-1}n)}{xn}\right)\frac{b}{a}$ será negativa; e se as quantidades negativas são menores que nada, e por isso mesmo menores que qualquer quantidade positiva, como devem ser na suposição de o seu sinal influa na sua grandeza absoluta, segue-se que desde aquele termo, em que se verifica ser $\overline{x-1}.n > m$, a série deverá ser sempre convergente, isto é, os seus termos deveram ir continuamente decrescendo; pois cada um deles é gerado pelo seu antecedente multiplicado por uma quantidade menor do que a unidade. E como eles são alternativamente positivos e negativos, do dito termo em diante, segue-se que o termo positivo subsequente a qualquer negativo deve ser menor do que este, e que por consequência há quantidades positivas menores do que outras negativas, o que é contra a suposição. Logo esta é absurda, e portanto as quantidades negativas não são absolutamente menores do que as positivas. Demais pela condição $\overline{x-1}.n > m$ não é que se determina o termo, em que a série deve começar a ser convergente, mas sim pela condição $xna > (m - \overline{x-1}.n).b$, prescindindo do sinal da quantidade $(m - \overline{x-1}.n).b$. Logo para avaliar o valor absoluto das quantidades não se deve fazer caso algum do sinal, que as precede.

Acusa-me o seu condiscípulo de que eu dissesse sem o demonstrar, que para reduzir $\sqrt{b-a}$ em uma série, capaz de representar a raiz, que se busca se deve tomar por primeiro termo dela o termo maior do binômio. Assim é que eu supus esta verdade sabida, e que por isso não procurei demonstrá-la de algum modo. Os motivos que a isso me obrigaram, foram provavelmente os mesmos, que moveriam Mr. Clairaut e Bézout, e outros muitos Matemáticos de abalizado merecimento (entre os quais, posto que os cite, eu não tomo a confiança de contar-me) a afirmarem nos seus tratados de Álgebra a mesma proposição sem darem a demonstração dela; por esta ser segundo entendo, dependente da doutrina das séries infinitas, cuja téorica é uma das mais atrasadas de toda a Matématica, e por não entrarem em raciocínios mais complicados do que convém á atenção ainda pouco vigoroza dos principiantes. Não posso deixar de louvar este reparo do seu Condiscípulo; porém admiro-me, que nem o primeiro e famoso Mestre dele, nem o autor da segunda carta, tendo uma tão grande lição das obras de D'Alembert, se lembrassem de advertir-lhe, que *este grande Geômetra, e Filósofo* no tomo $5.°$ dos seus Opúsculos Matemáticos demonstra, que as séries resultantes da elevação de binômios tais como $(1 \pm x)$ a potências fracionárias, ou negativas, são defeituosas, isto é[1], incapazes de representar os verdadeiros valores das ditas expressões todas às vezes que é $x > 1$. Mas para satisfazer ao seu Condiscípulo, e não obrigar a Vossa Mercê nem a ele a ler a memória de D'Alembert, farei ver por um modo alguma coisa diverso, e talvez não menos simples, o mesmo que este célebre Matématico nele demonstra, ou ao menos o que pode ser aplicável ao caso, de que se trata, por não entrar em discussões muito longas, e alheias da presente questão.

As expressões tais como $\sqrt{b-a}$; $\sqrt[3]{(b \pm a)^2}$; $\sqrt[5]{(a \pm b)^3}$... se reduzem todas a $\sqrt[n]{(b \pm a)^m}$, sendo m, e n números inteiros, e $n > m$. Ora reduzindo em série esta expressão geral, teremos $b^{\frac{m}{n}} \pm \frac{m}{n} ab^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m(m-n)}{n.2n}\, a^{2b^{\frac{m-2n}{n}}} \pm \frac{m(m-n)(m-2n)}{n.2n.3n}\, a^{3b^{\frac{m-3n}{n}}} + \ldots$ ou dando a esta expressão outra forma mais conveniente ao fim, que nos propomos; $b^{\frac{m}{n}} \pm \frac{m}{n}\frac{a}{b}\, b^{\frac{m}{n}} - \frac{m(n-m)}{n.2n}\, \frac{a^2}{b^2} b^{\frac{m}{n}} \pm \frac{m(n-m)(2n-m)}{n.2n.3n}\, \frac{a^3}{b^3} b^{\frac{m}{n}} \pm \frac{m}{n}\frac{a}{b}\, b^{\frac{m}{n}} - \frac{m(n-m)(2n-m)(3n-m)}{n.2n.3n.4n}\, \frac{a^4}{b^4} b^{\frac{m}{n}} \pm \ldots$ ou finalmente

[1] Todas estas séries vem a ser finalmente divergentes, como adiante se verá, e por isso ainda que algumas guardem tal lei na sucessão dos seus termos, que tomando só um número determinado deles, se tenham os valores das raízes proximamente, com tudo como esta aproximação não pode ter um grau maior de exatidão, ainda que se some um maior número de termos da mesma série, nem até o presente momento se tem dado um teorema geral para se poder determinar *a priori* qual é o número de termos, que dá a aproximação mais exata, por isso digo com D'Alembert, que estas séries são defeituosas, isto é que não pode geralmente servir a soma dos seus termos para se conhecer o valor das quantidades, de que elas resultam; com tudo o seu defeito não procede de defeito dos princípios do cálculo, nasce de que por maior que seja o número dos seus termos, sempre se omite uma quantidade, que deveria compensar o excesso, que os termos somados tem sobre o verdadeiro valor da expressão radical, ou fracionária, de que a série resulta, e isto ainda quando o número dos seus termos se considera infinito.

chamando ao primeiro termo A, ao segundo B, ao terceiro C ... $b^{\frac{m}{n}} \pm \frac{m}{n}\frac{a}{b}A - \frac{m(n-m)}{n.2n}\frac{a}{b}B \pm \frac{(2n-m)}{3n}\frac{a}{b}C - \frac{(3n-m)}{4n}\frac{a}{b}D \pm$ ... série infinita, cuja soma ser igual a $\sqrt[n]{(b\pm a)^m}$, e cujos termos depois do primeiro devem ser alternativamente positivos e negativos, se a tiver o sinal $+$, ou todos negativos se a tiver o sinal $-$, donde se segue que tendo $(b+a)^{\frac{m}{n}}$ uma quantidade finita, será preciso que a soma de todos os termos positivos menos a soma de todos os termos negativos seja uma quantidade finita; sendo $(b-a)^{\frac{m}{n}}$ uma quantidade finita ou imaginária, segundo for $b \gtrless a$, e m número ímpar sendo n numero par, será necessário que a soma de todos os termos seja uma quantidade finita ou imaginária. Ora supondo $b > a$, e $n > m$, a série será continuamente convergente, pois sendo como já dissemos $1{:}\left(\frac{m-\overline{x-1}n}{xn}\right)\frac{a}{b}$ a razão de um termo qualquer x para o seu imediato $x+1$; neste caso é sempre $1 > \left(\frac{m-\overline{x-1}n}{xn}\right)\frac{a}{b}$. Para Vossa Mercê se convencer desta verdade, suponha $x = \infty$, que é o caso em que $\left(\frac{m-\overline{x-1}n}{xn}\right)\frac{a}{b}$ recebe o seu máximo valor absoluto e, achará $1 > \frac{a}{b}$, expressão conforme com a suposição de $b > a$; donde se segue que é $B > C$; $C > D$; $D > E$ ... Se além disso considerarmos os casos em que é $b > a$, e $b < a$, tendo a o sinal $+$, comparando entre si as diferenças de quaisquer dois termos consecutivos, como Verbi gracia $B - C$, e $D - E$, ou (chamando a quaisquer, quatro termos consecutivos Z, Z', Z'', Z'''); $Z - Z'$, e $Z'' - Z'''$, acharemos constantemente $Z - Z' > Z'' - Z'''$, enquanto for $b > a$. Para demonstrar esta verdade, suponhamos que Z na ordem numérica dos termos da série é o termo x; portanto será $Z' = \left(\frac{\overline{x-1}.n-m}{xn}\right)\frac{a}{b}Z$; $Z'' = \frac{(\overline{x-1}.n-m)(xn-m)}{xn.\overline{x+1}.n}\frac{a^2}{b^2}Z$; $Z''' = \frac{(\overline{x-1}.n-m)(xn-m)(\overline{x+1}.n-m)}{xn.\overline{x+1}.n.\overline{x+2}.n}\frac{a^3}{b^3}Z$. Logo deverá $1 - \frac{(\overline{x-1}.n-m)}{xn}\frac{a}{b} > \left(1 - \frac{(\overline{x-1}.n-m)}{\overline{x+2}.n}\frac{a}{b}\right)\left(\frac{(\overline{x-1}.n-m)}{xn}\frac{(xn-m)}{\overline{x+1}.n}\frac{a^2}{b^2}\right)$; e como é visivelmente $1 - \frac{(\overline{x-1}.n-m)}{xn}\frac{a}{b} > 1 - \frac{(\overline{x+1}.n-m)}{\overline{x+1}.n}\frac{a}{b}$; e $1 > \frac{(\overline{x-1}.n-m)}{xn}\frac{(xn-m)}{\overline{x+1}.n}.\frac{a^2}{b^2}$, segue-se que é sempre $Z - Z' > Z'' - Z'''$, e que portanto as diferenças entre os termos pares e ímpares vão continuamente decrescendo. Ora o grau a que $\frac{a}{b}$ se deve achar elevado no termo Z é $x - 1$; pelo que podemos supor $Z = Mb^{\frac{m}{n}}\frac{a^{x-1}}{b^{x-1}}$; o que nos faz ver que a diferença entre quaisquer dois termos Z e Z'' ou x, e $x+1$, se pode representar desta forma $Mb^{\frac{m}{n}}\frac{a^{x-1}}{b^{x-1}}.\left(1 - \frac{(\overline{x-1}.n-m)}{\bar{x}.n}\frac{a}{b}\right)$. Mas fazendo nesta expressão $x = \infty$, teremos $Mb^{\frac{m}{n}}\frac{a^{\infty}}{b^{\infty}}\left(1 - \frac{a}{b}\right) = \frac{1}{\infty}$. O que nos faz ver que a soma desta série ou a diferença entre a soma dos termos positivos, e a soma dos negativos é uma quantidade finita.

Se porém for $b > a$, a série poderá ser convergente ou divergente no seu princípio, segundo for $nb \gtrless ma$; mas sempre virá a acabar divergente, porquanto a razão $1{:}\ \frac{(m-\overline{x-1}.n)}{xn}\frac{a}{b}$, supondo $x = \infty$, se converte em $1{:}\ \frac{a}{b}$, e é segundo a hipótese $1 < \frac{a}{b}$. Logo devendo haver um termo qualquer Z, em que a dita série começa a divergir, será $Z < Z'$; $Z' < Z''$ ... e comparando como fizemos no caso antecedente as diferenças $Z' - Z$; $Z''' - Z''$; acharemos $Z' - Z < Z''' - Z''$; o que se demonstra substituindo por Z', Z'', Z''' os seus valores. Feitas pois estas substituições, e suprimindo o fator comum Z, será $\left(\frac{\overline{x-1}.n-m}{xn}\right)\frac{a}{b} - 1 < \left(\frac{(\overline{x-1}.n-m)}{\overline{x+2}.n}\frac{a}{b} - 1\right)\left(\frac{\overline{x-1}.n-m}{xn}\right)\left(\frac{xn-m}{\overline{x+1}.n}\right)\frac{a^2}{b^2}$. O que se prova fazendo as multiplicações e divisões indicadas. Mas para evitar a Vossa Mercê esse trabalho, eu demonstro de outra maneira a verdade desta mesma expressão. Visto que a série deve começar a divergir no termo Z, devemos ter $\left(\frac{\overline{x-1}.n-m}{xn}\right)\frac{a}{b} < 1$; e como $\left(\frac{xn-m}{\overline{x+1}.n}\right)\frac{a}{b} > \left(\frac{\overline{x-1}.n-m}{xn}\right)\frac{a}{b}$; será $\left(\frac{\overline{x-1}.n-m}{xn}\right)\left(\frac{xn-m}{\overline{x+1}.n}\right)\frac{2}{b^2} > 1$. Mas substituindo na expressão acima 1 em lugar de $\left(\frac{\overline{x-1}.n-m}{xn}\right)\left(\frac{xn-m}{\overline{x+1}.n}\right)\frac{a^2}{b^2}$; ainda teremos $\left(\frac{\overline{x-1}.n-m}{xn}\right)\frac{a}{b} - 1 < \left(\frac{(\overline{x-1}.n-m)}{\overline{x+2}.n}\right)\frac{a}{b} - 1$. Logo $Z' - Z < Z''' - Z''$, expressão que por isso mesmo que x é um número indeterminado, da uma demonstração geral de que as diferenças vão continuamente crescendo. Que elas cheguem a fazer-se infinitas se prova fazendo $x = \infty$ na expressão geral das mesmas diferenças $Mb^{\frac{m}{n}} \frac{a^{x-1}}{b^{x-1}}.\left(\frac{\overline{x-1}.n-m}{xn}\frac{a}{b} - 1\right)$, o que dá $Mb^{\frac{m}{n}} \frac{a^{\infty}}{b^{\infty}}\left(\frac{a}{b} - 1\right) = \infty$. Donde se segue que a soma de todas estas diferenças é uma quantidade infinita, e por consequência incapaz de representar o valor de $\sqrt[n]{(b+a)^m}$.

Demonstrar que a soma da série resultante da elevação de $(b - a)$ à potência fracionária $\frac{m}{n}$, sendo $b > a$, é uma quantidade finita, é coisa tão facil, que o seu Condiscípulo não levaria a mal que eu deixe de fazê-lo. Que ela é $= -\infty$ todas as vezes que é $b > a$, ele mesmo o concebe; mas concluir que por isso mesmo $-\infty$ é igual a qualquer radical imaginário, seria tão grande absurdo, como concluir que $+\infty$ é igual a qualquer radical possível, por isso que eu demonstrei que $\sqrt[n]{(b+a)^m}$, sendo $b < a$, dá uma série, cuja soma é $-\infty$[2]. Logo as séries, que resultam da elevação de quaisquer quantidades binomiais a potências fracionárias, ou negativas, só são capazes de representar os seus valores, quando por primeiro termo delas se toma o maior termo do mesmo binômio.

Se me disserem que esta minha demonstração não é diversa, responderei que as demonstrações indiretas não deixam por isso de ser demonstrações, e que além disso não é esta a única verdade matemática que até ao presente se não tem podido demonstrar diretamente. Creio que à vista desta prova o seu Condiscípulo, para sustentar a sua opinião, não terá mais remédio do que chamar ao cálculo defeituoso, por isso que pelos seus métodos se pode chegar as séries defeituosas: porém se ele tomar este novo expediente, pergunte-lhe Vossa Mercê porque não conclue antes que o método do binômio de Newton, é um método de natureza tal, que não permite que no desenvolvimento

---

[2] Deve-se advertir, que ainda que estas séries somadas não dêem o valor da quantidade proposta, com tudo não deixam de ser verdadeiras. O seu aparente defeito nasce da suposição gratuita que todos os seus termos seguem uma lei constante; o que não é assim, pois uma vez que qualquer quantidade reduzida em série não pode deixar de dar um número infinito de termos, é justamente porque é impossível que todos sigam a mesma lei. Pelo que enquanto se não tomarem se não termos formados por uma lei constante, sempre ficará faltando uma quantidade, que completaria o verdadeiro valor da expressão finita proposta; mas que introduzida na série, formará um termo, cuja lei é necessariamente diversa da de todos os outros. Por exemplo reduzindo em série pelo binômio de Newton $\frac{a+1}{a-1}$, ou $(a+1)(a - 1)^{-1}$, teremos a seguinte série $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} + \dots\right)$, a qual será defeituosa todas as vezes que for $a<1$ pois continuada ao infinito, dá uma quantidade infinita e negativa, devendo ela ser finita e positiva. Porém se nós dividirmos $a+1$ por $a - 1$ pelo modo ordinário, acharemos que continuada a divisão até que a tenha um expoente qualquer n, sempre na série sobredita faltará, para se obter o verdadeiro valor da quantidade proposta, a quantidade $\frac{1}{a^n(a-1)}$; de sorte que a série que verdadeiramente representaria o seu valor, seria $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n(a-1)}\right)$, cujo último termo está bem longe de ser formado pela mesma lei de todos os antecedentes, mas que visivelmente em todos os casos faz que a dita série seja igual a expressão finita proposta, e isto ainda supondo $n = \infty$. Daqui vem a necessidade de distinguir a soma dos termos de uma série, quando eles se julgam formados por uma lei constante, da expressão finita, de que ela resulta. Pelo que entendendo pela palavra soma, esta mesma expressão, as séries divergentes, de que falamos, são tão verdadeiras, como as convergentes; e tirar delas argumentos contra os princípios do cálculo, é não entender os mesmos princípios.

dos radicais binômios, se tome por primeiro termo das séries o termo menor dos mesmos binômios; mas que os princípios do cálculo são tão exatos e rigorozos, que demonstrativamente fazem ver esta verdade. E depois diga-lhe que a doutrina das séries infinitas é uma das mais atrasadas de toda a Matemática, principalmente quanto à sua parte téoretica; que D'Alembert, e com ele todos os outros Matemáticos assim o reconhecem, e que portanto se ele, ou o seu primeiro Mestre não tem ainda aperfeiçoado esta téorica, quero dizer, se a doutrinas das séries infinitas depois dos trabalhos de Stirling, Euler, D'Alembert, etc, permanece ainda no mesmo estado, seja mais comedido em tirar semelhantes conclusões em uma matéria, que os mais profundos gênios não puderam ainda trazer ao seu estado de perfeição e clareza.

Diga-lhe mais que considerar $b - a$ como diferença entre b, e a, ou como soma de b e $-a$, é absolutamente a mesma coisa; pois quando o cálculo considera $(b - a)$ como soma de uma quantidade positiva, e de outra negativa, já supõem a propriedade geral destas quantidades, que é destruírem-se com aquelas reciprocamente. Pelo que $(b - a)$ de qualquer modo que os Matemáticos se expliquem, sempre denota a diferença entre b, e a; que aquelas supostas séries diferentes não são duas, como ele supõem, mas sim a mesma debaixo de diversos aspectos; e diga-lhe finalmente, que tendo ele a prudência de consultar o seu primeiro Mestre sobre a sua resposta, não fez bem em dá-la sem que ele a tornasse a ver; pois é certamente impossível que ele lhe consentisse que escrevesse dúvidas tão fúteis, que são de descredito para ele, ainda que principiante; e que podem diminuir muito o conceito do seu Mestre, ao menos entre as pessoas, que não tiverem a equidade de supor, que ele não viu a resposta depois de escrita.

Passemos aos outros paradoxos[3] propostos por *um dos mais sábios dos seus Condiscípulos.* Todos eles deixariam de parecer tais aos olhos deste e dos outros, se eles refletissem que $\frac{0}{0}$ pode representar todas as razões imagináveis. Eu poderia dizer que o célebre Euler assim o afirma no seu tratado de cálculo diferencial no Capítulo 3.° do § 83 por diante, e que este grande Matemático olhava esta verdade como tão fácil, que diz falando de ser $0 : 0$ capaz de representar todas as razões possíveis: *Haec autem etiam in vulgari arithmetica sunt planissima.* E se o fizesse, não descreparia muito o meu modo de argumentar daquele, por que me argumenta o primeiro Mestre do seu Condiscípulo, quando com a autoridade de Simpson me pretende provar serem os monômios negativos quantidades imaginárias; porém as verdades matemáticas não se provam com autoridades; nem eu ostento de erudição, quero dizer, o fim que me proponho não é espantar a Vossa Mercê com o conceito da minha grande lição, é aplanar-lhe a estrada para continuar na carreira dos seus estudos, sem que

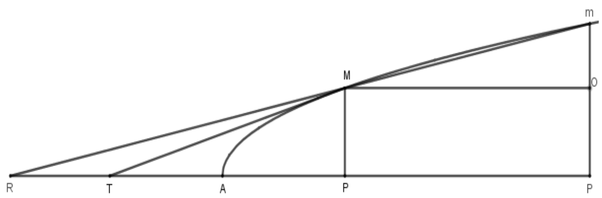
[3] Trata-se dos seis paradoxos propostos por Manuel Pedro de Melo, são eles: 1.° Sejam a e b quantidades positivas, $a > b$. Se é $-a \times b = -b \times a$, será $-a : a :: -b : b$. Logo $-a + a : -b + b :: a : b$. Mas é $-a + a = -b + b$. Logo $a = b$. 2.° Se é também $-a \times -b = ab$, será $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$, ou $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$. Mas como de qualquer destas equações se tira $a : -a :: -b : b$; e desta analogia se tira também $-a + a : -b + b :: -a : b$; segue-se que será $-a = b$. Valor absurdo, poque dá $a + b = 0$. 3.° Pois é $a = \frac{a(a-x)}{(a-x)}$, sendo $x = a$, será $a = \frac{a^2-a^2}{a-a} = \frac{(a+a)(a-a)}{a-a} = 2a$, o que é absurdo. 4.° Seja n um número qualquer. Será $na - na = a - a$; ou $n(a - a) = 1(a - a)$. Logo $n = 1$. 5.° Sejam a, e b, números positivos, e $a > b$. Será $a + b > a$; e $a > a - b$. Logo tirando a de ambas as partes, $0 > -b$. E se é $\frac{a}{0} = \infty$, será $\frac{a}{-b} > \infty$. Seja $\frac{a}{-b} = -c$. Será $-c > \infty$, e $0 > \infty + c$. O que é absurdo. 6.° Pois é $\frac{a}{0} = \infty = \frac{a}{1-1}$; será $a = \infty - \infty = 0$. O que também é absurdo.

estes pequenos obstáculos o retenham, e por isso demonstrarei com a brevidade possível a referida proposição.

Creio que ninguém pode negar que é $a : b :: a : b$. Logo se é verdadeira a Proposição 18 do livro 5.° de Euclides deve ser $a - a : b - b :: a : b$, isto é $0 : 0 :: a : b$. Porém a, e b podem ter todos os valores imagináveis, e por consequência $0 : 0$ pode representar todas as razões imagináveis. Se me disserem que a proposição de Euclides não pode estender-se a este caso, eu reponderei que para se me negar a universalidade dela, não basta dizer-se que Euclides tratava de quantidades, de que Euclides tratava, e portanto seria preciso provar-me que $a\,.\,0 = b\,.\,0$ é um absurdo, ou que é sempre $\frac{0}{0}$ igual a uma quantidade determinada. Porém $a\,.\,0 = b\,.\,0$ é uma verdade por si evidente, ou um axioma de cálculo; e que $\frac{0}{0}$ não pode ser sempre igual a uma quantidade determinada é coisa facílima de provar, ainda sem recorrer á demonstração, que acabamos de dar.

Se $\frac{0}{0}$ não é uma quantidade indeterminada, será ou uma quantidade finita e determinada, ou $= 0$, ou $= \infty$. Seja primeiramente m a quantidade finita determinada, que se supõem ser $= \frac{0}{0}$. Teremos a equação $m = \frac{0}{0}$, e multiplivando ambos os seus membros por uma quantidade indeterminada x, será $mx = \frac{0.x}{0} = \frac{0}{0}$; pois é $0\,.\,x = 0$. Mas x é uma quantidade finita e indeterminada, e por consequência também mx. Logo $\frac{0}{0}$ pode representar todas as quantidades finitas imagináveis. Suponhamos que é $\frac{0}{0} = 0$. Se esta suposição pudesse ser verdadeira, seria também $\frac{a}{\frac{0}{0}} = \frac{a}{0}$, isto é $\frac{0}{0} = \infty$; e portanto $\infty = 0$, o que é absurdo. Se supozessemos $\frac{0}{0} = \infty$, invertendo o mesmo raciocínio acharíamos outra vez $\infty = 0$. Logo $\frac{0}{0}$ não pode ter sempre um valor determinado, e portanto segue-se que é capaz de representar todas as razões possíveis.

Esta mesma verdade se pode demonstrar diretamente desta maneira. Seja AMm uma curva qualquer, e seja $MP : PT :: a : b$; Em razão dos triângulos semelhantes RPM, Mom, será $mo : oM :: MP : PR$.



Mas se considerarmos que a ordenada pm se avizinha continuamente para a ordenada PM, o ponto R se avizinhará continuamente para o ponto T; de sorte que quando coincidirem, será $mo = 0$; e $oM = 0$. A razão de $MP : PR$ terá chegado ao seu limite, e a proporção acima referida se converterá em $0 : 0 :: MP : PT :: a : b$. Ora MP, e PT podem ter todas as razões imagináveis, segundo o diverso lugar em que se tomar a ordenada PM. Logo $\frac{0}{0}$ pode igualmente representar todas as razões imagináveis[4]. A vista do que fica bem claro, que nos casos em que aparece a razão $0:0$, é um absurdo dizer que por isso que é, rigorosamente falando, $0=0$, são também iguais entre si os termos que determinam esta razão. Ora isto é o que se supõem nos primeiros dois paradoxo, em que sai, segundo o seu Condiscípulo, $a=b$, e $-a=b$.

O terceiro paradoxo em que dá a expressão $a=a\left(\frac{a-x}{a-x}\right)$ se tira $a=2a$, nasce de supor $\frac{0}{0}=1$, o que já mostramos não ser sempre verdade, e que o não é neste caso, como dele mesmo se deduz; pois sendo como fica demonstrado $\frac{0}{0}$ uma expressão indeterminada, só por meio das quantidades determinadas, que entram na equaçãi em que esta expressão se acha é que se deve determinar o seu valor[5]; e ainda admitida como verdadeira a transformação pela qual o seu condiscípulo converte o valor de $a\left(\frac{a-x}{a-x}\right)$ em $2a\left(\frac{a-x}{a-x}\right)$, ou $2a\frac{0}{0}$, o que dá $a=2a\frac{0}{0}$; dividindo ambos os membros desta equação por $2a$, teríamos $\frac{0}{0}=\frac{1}{2}$; valor que substituído na mesma equação, daria $a=2a\,.\,\frac{1}{2}=a$, equação idêntica, e portanto verdadeira. O mesmo digo a respeito do $4.°$ onde em vez de deduzir-se $n=1$, devia-se deduzir $n=1\frac{1}{0}=\frac{0}{0}$, valor que substituído daria outra equação idêntica $n=n$.

O quinto paradoxo peca no erro de supor, que é absolutamente $0>-b$, o que já mostramos ser falso. Donde Vossa Mercê poderá ver que todas asvezes que há ideias claras das quantidades, e do que querem dizer os sinais que as afetam, não se atribuem ao cálculo os erros do calculador.

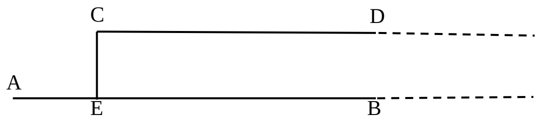
O sexto paradoxo nasce de se supor, que é sempre um infinito igual a outro qualquer, o que também é falso[6], nem para prova-lo são necessários longos raciocínios, ou cálculos complicados. Suponhamos duas linhas paralelas AB, e CD. Se do ponto C se abaixar a perpendicular CE,

---

[4] Esta demonstração poderá talvez parecer superabundante, depois das duas antecedentes, a quem se não lembrar que o sujeito, a quem esta Carta foi escrita, era dirigido no plano dos seus estudos pelo Autor dela, e que portanto em uma ocasião em que a Escola de José Anastácio pretendia abalar os princípios fundamentais do cálculo, representando-os como uns princípios precários, não só era conveniente fortificar o ânimo de um principiante, fazendo-lhe ver que por muito modos se podiam convencer de falsas as asserções daquela Escola, mas até era necessário prevenir os argumentos, que lhe podiam fazer contra os princípios do cálculo diferencial, na verdade muito mal enunciados pelo Autor, que as Escolas Matemáticas de Portugal tem abraçado para o ensino público; dando-lhe nesta ocasião as primeiras ideias da rigorosa demonstração do método da fluxões, ou primeira e últimas razões de Newton, a que vulgarmente se chama cálculo diferencial. Se apesar disto o Autor merece censura por deduzir esta demonstração do exame das variações das coordenadas de uma curva, a mesma deve cair sobre M.r D'Alembert, que no Dicionário universal das ciências, no artigo *Differenciel,* serve-se da mesma ideia para demonstrar os princípios fundamentais do sobredito método. Veja-se a Enciclopédia no artigo citado: Newton Tratado da quadratura das curvas: o mesmo Método das Fluxões e das séries infinitas e Princípio Matemático da Filosofia Natural Sect. 1.ª do Livro 1.º

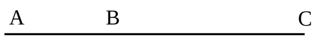
[5] Há muitas expressões, que em alguns casos se reduzem a $\frac{0}{0}$, e cujo valor contudo não se pode conhecer pelo método acima referido. Tais são por exemplo todas aquelas, cujo numerador e denominador, sendo funções algébricas de uma mesma variável, se não podem comodamente dividir pelo fator comum, que faz que eles se reduzam a cifra, como sucede em $\frac{\sqrt{3a^3x-2ax^3}-x\sqrt[5]{a^3x^2}}{a-\sqrt[3]{ax^3}}$, que se reduz a $\frac{0}{0}$, quando é $x=a$, e cujo valor neste caso é $\frac{21}{10}a$. Mas como o numerador, e o denominador não se podem comodamente dividir por $(x-a)$, é preciso recorrer ao cálculo diferencial para se achar este valor; e como o sujeito, a quem esta Carta foi escrita, ainda não tinha conhecimento deste cálculo, por isso nela se lhe não fez menção deste método de determinar o valor de $\frac{0}{0}$.

[6] Além de que um infinito não é sempre igual a outro, como aqui se demonstra, deve-se advertir que esta expressão $\infty-\infty$ é uma expressão indeterminada, o que se demonstra desta sorte. Segundo a Álgebra ∞, e $\frac{a}{0}$ são duas expressões idênticas, pois ambas servem para representar qualquer grandeza ilimitada. Logo $\infty=\frac{a}{0}$, e $\infty-\infty=\frac{a}{0}-\frac{a}{0}=\frac{a-a}{0}=\frac{0}{0}$; expressão, que, como já se fez ver em três diversas demonstrações, pode representar qualquer quantidade; e por isso lhe chama-se indeterminada. O reconhecer, e ter demonstrado a identidade destas duas expressões, é quem demoveu p Autor desta carta a afirmar que todos os paradoxos propostos deixariam de parecer tais a quem os propôs, se tivesse advertido que $\frac{0}{0}$ é uma quantidade indeterminada, e que todos eles nascem da ignorância desta verdade.



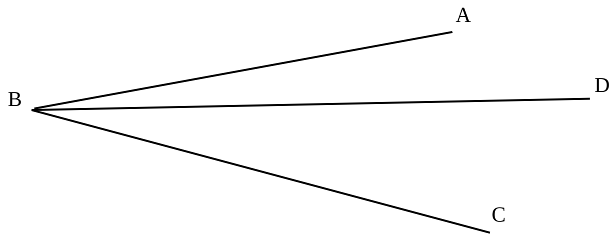
e se imaginar que depois de haver partido do ponto A um corpo qualquer com a velocidade V, tanto que chegou ao ponto E partiu de C outro corpo com a mesma velocidade V. Vossa Mercê facilmente verá que ainda supondo infinitos os espaços corridos por ambos, sempre entre eles haverá a diferença AE. Ou, por não envolver ideias de movimento, suponha Vossa Mercê as duas paralelas produzidas para a parte BD até ao infinito, sempre a sua diferença será AE. Logo dois infinitos não são sempre iguais, e a sua diferença pode muitas vezes ser finita.

Pretende o seu Condiscípulo, que eu lhe dê a razão porque uma área positiva A tem raiz quadrada, e uma área B, que cai para a parte oposta, não a pode ter, só porque dá-se-lhe o nome de negativa, julgando com esta só pergunta meter-me em um lance, de que nem um Bernoulli, ou um Newton poderia sair airoso. Se eu respondera ao seu Condiscípulo, lhe diria que esta pergunta só mostra, que ele ignora os primeiros princípios das Matemáticas, ou que o seu primeiro Mestre lhe não deu noções exatas deles, e que portanto eu, que não tenho a honra de ensiná-lo, me não acho com o vagar preciso para começar a arranjar-lhe as suas ideias; porém não respondo a ele, nem para ele escrevo; escrevo para Vossa Mercê e por isso lhe advirto, que uma área de sua natureza negativa é coisa, que não existe, nem pode existir, e que d'aqui é que nasce ser a sua raiz imaginária. Para Vossa Mercê entender claramente esta verdade é preciso contemplar as áreas á maneira dos antigos Geômetras, como geradas pelo movimento das linhas. Ora uma área, de sua natureza negativa, devia ser, segundo as verdadeiras noções da Álgebra, e da Geometria, gerada pelo movimento de uma linha negativa ao longo de outra positiva; porém uma linha só pode ser negativa a respeito de outra em três casos: ou quando o limite, que separa as quantidades positivas das negativas, é um ponto, então as linhas negativas devem ser diversamente opostas ás postivas; ou quando o limite é uma linha, e então basta que as linhas positivas, e negativas existam no mesmo plano, posto que não sejam diversamente opostas, com tanto que fiquem para partes diversas relativamente á dita linha; ou finalmente quando o limite for um plano, e então as linhas poderão ser negativas a respeito de outras, ainda existindo em diversos planos, com tanto que caiam para partes opostas relativamente ao plano, que lhes serve de limite. Porém em nenhum destes casos o movimento das linhas negativas sobre as positivas se pode realizar conservando eles entre si as relações, que fazem que umas sejam negativas a respeito de outras. No primeiro caso é isto evidente, por que sendo *verbi gracia* AB negativa a respeito de



BC, é visível que a linha AB não se pode mover sobre BC; pois para isso seria preciso, que uma parte sua, e ultimamente a linha toda passasse para a outra parte do ponto B, que é o seu limite, e que por consequência deixasse de ser negativa. Demais ainda que se admitisse este movimento, dele nunca poderia resultar uma superfície, mas sim uma continuação da linha BC.

No segundo caso também é visível, que sendo BD o limite dos positivos e negativos, a linha BA, que é negativa a respeito de BC, se não pode mover sobre ela, sem que uma parte sua, e ultimamente a linha toda venha



a transcender o limite BD, e por consequência a deixar de ser negativa. O mesmo modo se pode dizer a respeito do terceiro caso supondo que BD é um plano. Á vista desta demonstração creio que a Vossa Mercê não lhe pode restar a mínima dúbida de que uma área de sua natureza negativa é impossível, e que por isso se chama com razão a sua raiz imaginária. Porém se Vossa Mercê falar com o seu Condiscípulo, diga-lhe da minha parte que o de não poder estender a monômios negativos a demonstração, que dá M.[r] Bézout das multiplicações das quantidades algébricas, nem me causa admiração depois da pergunta sobre a raiz quadrada da área negativa, nem faz com que muita gente com M.[r] Clairaut não seja capaz de estendê-la até ali. Que este célebre Matemático, cuja Álgebra ele não faria mal em ler, se serviu antes de Bézout daquela mesma demonstração: que não achou dificuldade em estendê-la aos monômios negativos[7]; e que assim se algum dia proposer a sua dúvida a alguma pessoa inteligente de Matemática, seja mais indulgente com ela, se lhe der em reposta a mesma demonstração.

Até aqui tenho respondido às dúvidas, acusações, e insultos do seu Condiscípulo, não por lhe responder; pois a sua Carta não era digna de resposta; mas por satisfazer a Vossa Mercê que das minhas poucas luzes se fia para dirigi-lo na carreira dos seus estudos. Agora passo a defender-me do primeiro Mestre dele, que eu até ao presente não conhecia, e que pelo que Vossa Mercê me diz, entendo ser o Doutor José Anastácio da Cunha. Confesso-lhe que respeito, e sempre respeitei muito, os conhecimentos deste sábio Professor; porém não posso deixar de achar estranho que por eu atribuir a descuido seu as conclusões, que tira com ele o seu discípulo da solução $x = \frac{b^2 - a^2}{2b}$ do triângulo retângulo, sem saber se ele era o autor dela, ou se a tinha copiado da Álgebra de Simpson; não posso deixar de achar estranho, torno a dizer, que por semelhante motivo ele em vez de desprezar as minhas razões, ou de responder sisudamente, fazendo-me conhecer o meu erro; passe a insultar-me tão descomedidamente como o seu discípulo, de quem não era de admirar um tal procedimento, atendendo

[7] Admitida a demonstração de Bézout a respeito da multiplicação das quantidades complexas, não pode negar-se que tanto o quadrado de $(a - b)$ como o quadrado de $(b - a)$ é $a^2 - 2ab + b^2$, isto é que é $(a - b)^2 = (b - a)^2$. Porém sendo $a > b$ será $a - b = c$, e $b - a = -c$. Logo $(c)^2 = (-c)^2$, isto é $c^2 = -c\ x - c$. Seja $m - n = r$; será $n - m = -r$. Mas é $(a - b)^2\,(m - n)^2 = (b - a)^2\,(n - m)^2$, ou $(cr)^2 = (-c\ x - r)^2$, e extraindo raiz quadrada de ambas as partes, será $\pm(a - b)(m - n) = \pm(b - a)(n - m)$, isto é $cr = -c\ x - r$; e $-cr = +c\ x - r$. Logo a mesma demonstração se estende aos monômios negativos.

aos seus poucos anos, conhecimentos, etc. Pensei que um homem Professor público que é tido por muita gente na conta de um dos Sábios da Nação, que tem lido, e tratado com pessoas bem criadas, não era capaz de insultar ninguém por escrito; mas enganei-me: tanto pode o amor das opiniões próprias! Ele se queixa, sem razão nenhuma, de que eu o pretendi atacar na carta, que a Vossa Mercê escrevi em resposta ao primeiro papel, que me enviou; pois Vossa Mercê sabe muito bem, que eu ignorava que o Matemático Português, de que se tratava, era ele: além de que, se ele se não julga o único Matemático Português, não devia estranhar, que eu o não conhecesse por esse nome.

Eu não censurei ao Doutor José Anastácio, e ao seu discípulo por acharem dúvidas na inteligência, que se deve das às soluções negativas de alguns problemas; censurei-os por chamarem defeituoso ao cálculo da solução $x = \frac{b^2 - a^2}{2b}$, ou por não a entenderem, e por quererem não só com este, mas com outros paralogismos, provar que as quantidades negativas são imaginárias[8]. É verdade que eu não sabia, que nesta censura lhes dava por Companheiro a Thomas Simpson; pois nunca li as suas obras; mas sabia que lhes não dava por Companheiros nem Euler, nem D'Alembert, nem L'Abé Marie como eles pretendem; e como esta questão é de fato, e os seus Condíscipulos mostrão ter inteligência das línguas latina, e francesa, por não adulterar os pensamentos destes grandes homens, transcreverei as suas próprias palavras em algumas passagens decisivas quanto ao meu entender.

Na Introdução à Análise dos infinitos, falando dos logaritmos, diz Euler: "Numerorum unitate majorum logarithmi erunt affirmativi pendentes a valore basis a, *sic* erit $l.a = 1;\ l.a^2 = 2$ ... Numerorum autem unitate minorum; affirmativorum tamen, logarithmi erunt negativi; erunt enim $l.\frac{1}{a} = -1;\ l.\frac{1}{a^2} = -2 \ldots$ Numerorum autem negativorum logarithmi non erunt reales, sed imaginarii, uti jam notavimus." Veja Vossa Mercê agora se este célebre Matemático se via Companheiro do D.r José Anastácio, e dos seus discípulos sobre a opinião da natureza das quantidades negativas, quando na passagem que deixo transcrita abertamente chama reais aos logaritmos negativos, e só chama imaginários aos que nem afirmativamente, nem negativamente podem ser representados.

M.r D'Alembert ainda se explica mais claramente na Memória 6.ª do tomo 1.º dos seus Opúsculos Matemáticos, onde tratando a mesma questão sobre a natureza dos logaritmos das quantidades negativas, atacando ao grande Leibniz, por afirmar, que a razão entre as quantidades positivas e negativas é imaginária, diz assim "Mr. Leibniz qui pretend que le rapport de 1 a -1 est imaginaire, auroit du, ce me semble, observer au contraire, que suivant les notions les plus communes de l'Algebre le raport de 1 a -1 est exprimé par le quotient de 1 divisé par -1; et que par consequent ce raport est -1; c'est a dire, *est une quantité réelle."* e mais abaixo "Quoique il en soit, il est au moins certain que le raport de 1 a -1, est -1 suivant toutes les regles reçus *et n'est* pas imaginaire. " E para que a Vossa Mercê não fação dúvida as palavras *ce me semble,* copiarei outras passagens da mesma memória, em que os sentimentos de D'Alembert se não podem patentear mais claramente. Eis aqui

[8] José Anastácio em certa carta falando dos Professorese da Academia Real da Marinha, diz que um dos discípulos dele José Anastácio, lhes tinha provado serem as quantidades negativas imaginárias; donde se vê, que esta é também a sua opinião, ao menos depois da prova dada pelo seu discípulo.

como se explica este *grande Geômetra e Filósofo* falando diretamente da natureza das quantidades negativas. “Les quantités negatives sont tout aussi reelles que les positives ; elles n’en different que par le signe qui les precede. ” E mais abaixo atacando com mais vigor a Leibniz continua “M.r Leibniz auroit il pretendu que l’ordonnée negative d’une parabole n’est pas moienne proportionelle aussi bien que l’ordonnée positive entre le parametre e l’abscisse ? Non certaiment. C’est que le signe –, que porte l’expression algebrique de cette ordonnée, n’indique que sa position, et n’influe nullement sur sa quantité.” etc

Nas obras que tenho lido de M.r L’Abé Marie, nunca encontrei uma só passagem, por que pudesse, nem suspeitar, que ele reputa imaginárias as quantidades negativas. É verdade que ele à imitação de D’Alembert crimina os Autores elementares de Álgebra por não se esforçarem em dar noções bem exatas e claras destas quantidades, ou verdadeiramente da teórica das multiplicações, e divisões algébricas, e olha os esforços, que sobre isto fez Thomas Simpson, como inteiramente baldados; mas isto não é chamar imaginárias as quantidades negativas. Além do que para Vossa Mercê ver claramente, que ele estava bem longe de tão absurdo pensamento basta que tome o trabalho de ler na primeira parte da sua Geometria o que pertence à construção geométrica das equações determinadas do primeiro, e do segundo grau, e achará que falando das soluções negativas, ele conclue que “ quando o resultado de um cálculo dá à incógnita um valor negativo, isto significa que se deve tomar esta incógnita em sentido contrário a aquele em que se tinha tomado antecedentemente.” Além deste artigo da sua Obra, pode ler ao princípio do seu excelente tratado analítico das seções cônicas, na edição de 1778, o número 649, que eu não copio por ser longo, e por ser muito vulgar o livro da dita edição.

À vista destas passagens, que deixo transcritas, verá Vossa Mercê se aos célebres Euler e D’Alembert *faltaram as ideias claras das quantidades negativas, se eles viveram e morreram às escuras sobre esta tão importante matéria, e se eu posso ainda ter a glória de converter M.r L’abbé Marie.* Quando contemplo sobre estas palavras, que encontro na carta do seu Condiscípulo, e ainda sobre o resto da resposta que o D.r José Anastácio lhe consentiu, que escrevesse para seu uso, não posso crer que semelhante resposta seja de um Matemático tão geralmente reputado entre nós. Mas também eu não podia crer, que Thomas Simpson chamasse imaginários aos monômios negativos; e com tudo ele assim os reputa (segundo afirma José Anastácio) parece que para não cair em semelhante absurdo, bastava refletir que a equação da parábola ordinária $y^2 = px$, dá dois valores para y, um que é $\sqrt{px}$, e outro $-\sqrt{px}$, salvo se ele pretendia, que esta curva não tivesse dois ramos; o que seria pelo menos um igual absurdo. Com quanta razão conclue contra ele o argumento que D’Alembert faz a Leibniz com a ordenada negativa da parábola? Não lhe podia eu dizer com igual razão “acaso M.r Simpson pretende, que a ordenada negativa de uma parábola seja imaginária? Não certamente, pois ele deve saber que o sinal que precede a expressão da dita ordenada, não indica mais do que a sua diversa posição e não influe de nenhuma sorte a sua grandeza.” Talvez Vossa Mercê se admirará de eu acusar de um erro tão sensível a um Matemático a quem o D.r José Anastácio prodigaliza tão avulatdos elogios; mas isto é porque Vossa Mercê não sabe, que não é este o único erro, em que este Matemático mostrou ao mundo literário, que ele não devia ser contado no número dos Matemáticos da primeira ordem. M.r D’Alembert já o acusa de errar palpavelmente nas duas soluções que deu do problema dos Equinócios, que este grande Geômetra tem pelas piores, que apareceram até ao seu tempo. O que mais me admira é que Simpson quisesse tirar da fórmula $x = \frac{b^2 - a^2}{2b}$ argumento para provar, que os monômios negativos são imaginários, quando hé tão visível que a impossibilidade desta fórmula aplicada a um triângulo retângulo, nasce de não poder a linha x, sendo negativa, encontrar-se com a linha $b - x$, pois como já fiz ver a Vossa Mercê o cálculo que conduz a solução $x = \frac{b^2 - a^2}{2b}$ não envolve a condição de que as três linhas a, x, e $b - x$ formem um triângulo; e por isso satisfaz a ambos os casos, tanto a aquele em que as ditas linhas formam triângulo, como a aquele em que o não formam. E esta é a razão porque eu me animei a dizer, que o Matemático português não tinha refletido bem naquela solução; pois afirma que no caso do triângulo retângulo aquela fórmula ainda fica possível segundo o cálculo, o que não é assim, pois envolvendo ela dois casos, cada um dos quais exclue o outro, não é sempre possível se se considera aplicada a um deles. Porém se José Anastácio dizia absolutamente que aquela fórmula não envolvia absurdo algum segundo o cálculo, que é o mesmo que dizer que aquela fórmula envolvia dois casos possíveis, então estamos conformes; e eu declaro desde já que a minha censura foi injusta. Mas sendo assim, ele não devia explicar-se por um modo, que só parece tendente a mostrar a Geometria em oposição com o cálculo; o que Thomas Simpson pensava (segundo ele diz) pode acontecer algumas vezes mas que certamente ninguém pensará todas às vezes que entender bem os princípios do Cálculo.

Ser uma solução errada, não nasce de ser ou não incompatível com as hipóteses, como afirma José Anastácio; antes pelo contrário se o Calculador não comete erro no Cálculo, e o último resultado sai impossível, é uma prova de que as hipóteses são repugnantes, e não de que a solução é errada: pois uma solução que mostra a impossibilidade de um problema é tão verdadeira, como a que mostra a possibilidade de outro, nem pode haver solução erras segundo o cálculo, sem que o Calculador cometa erro no progresso das operações.

De dois modos se pode trabalhar na resolução de um problema por meio da álgebra; ou expressando algebricamente todas as condições dele, ou deixando de expressar algumas. No primeiro caso para ver se o problema é, ou não é possível, basta examinar a possibilidade do último resultado. No segundo não basta que o último resultado seja absolutamente possível; é necessário além disso examinar, se convém ou não convém com as condições, que deixaram de se expressar algebricamente; pois a possibilidade do resultado algébrico só mostra que as condições que se expressaram no cálculo, são entre si compatíveis. Porém como se deixaram outras de fora, pode muito bem suceder, que alguma, ou algumas das segundas sejam incompatíveis com as primeiras; e esta incompatibilidade não pode o cálculo mostrar imediatamente; pois não se fez nele menção destas segundas condições ou hipóteses.

No primeiro caso ainda que o cálculo imediatamente faz ver a possibilidade, ou impossibilidade do problema; com tudo muitas vezes se precisa para isto de reflexão. Vossa Mercê sabe muito bem que quando nos propomos resolver uma equação do terceiro grau, cujas raízes são todas reais, o cálculo as dá debaixo de uma forma imaginária e se nos não déssemos atenção ao que ele nos diz;

quero dizer, se nos não procurássemos por meio do mesmo cálculo fazer desvanecer essas quantidades imaginárias, cairíamos no erro de supor impossíveis três raízes reais; donde se vê que a necessidade que nós temos de uma maior ou menor reflexão sobre as expressões algébricas em vez de provar, que o cálculo não é quem nos diz, se os problemas são ou não possíveis, somente prova a fraqueza do nosso entendimento para o qual nem todas as verdades são igualmente fáceis de compreender. Diz o D.r José Anastácio, e com ele o seu discípulo, que quando nós precisamos de reflexão para ver no resultado algébrico de um problema, se ele é ou não possível não é o cálculo quem nos dá a conhecer esta possibilidade, ou impossibilidade; é o mesmo que dizer, que quando nos precisamos refletir um pouco sobre qualquer passagem de um Escritor para haver de entende-la, não é ele quem nos declara o seu pensamento, somo nos quem o achamos nas suas palavras. E não repara o D.r José Anastácio que esta proposição: *O cálculo é quem nos diz se um problema é possível ou impossível;* e estoura: *O calculador é quem por meio do cálculo conhece, se um problema é ou não possível:* são duas proposições idênticas? Ao menos a mim parecem-me tão idênticas como estas: *A história de Quinto Curcio é quem nos conta as ações do grande Alexandre*: E: *Somos nós quem lendo a história de Quinto Curcio, vimos no conhecimento das ações do grande Alexandre*. O pensamento é o mesmo, as palavras é que diversificam.

No segundo caso é verdade que o cálculo não faz ver imediatamente a possibilidade, ou impossibilidade dos problemas; somos nós quem combinando o resultado algébrico das condições, que se expressaram no cálculo, com as condições que não se expressaram, examinamos a compatibilidade, ou incompatibilidade das mesmas condições. Mas que razão há para chamar por isto ao Cálculo defeituoso? Por ventura podemos nós justamente queixarmos de alguém, porque fazendo-lhe uma pergunta, nos responde a ela sem atender a outras coisas, que nos também quereríamos saber sobre a mesma matéria, mas que não perguntamos? O cálculo faz nos ver se acaso são ou não compatíveis todas as condições que nele se expressam; e então onde está o seu defeito? Está por ventura em não nos declarar se elas são compatíveis com as que deixamos de fora? Eu não cuido que só por descuido é que se diz a verdade; cuidava que os homens, como o D.r José Anastácio só por descuido erravam. E não reflete este grande homem ou o seu discípulo, que quando se trabalha deste segundo modo em resolver um problema, o Analista emprega dois meios na sua resolução, a Álgebra e a indústria própria, e que a Álgebra satisfaz perfeitamente à parte que lhe toca? Não vê mesmo, que ela algumas vezes até corrige a nímia confiança, que o Matemático pode ter na própria indústria, como no caso do triângulo retângulo, que ele extraiu da Álgebra de Simpson? Se acusar por isto o Cálculo de defeituoso é acusá-lo com justiça, também o podemos acusar de não dar na resolução das equações de um determinado grau a solução das questões mais espinhosas de Física, ou de Medicina; pois uma vez que nos não devemos contentar com que ele nos dê a conhecer a possibilidade, ou impossibilidade das condições, que nele se expressam, não sei aonde havemos de pôr termo às nossas pretensões.

Tenho respondido à primeira das Cartas, que Vossa Mercê me enviou, por um modo, que me parece ser suficiente para Vossa Mercê poder conhecer os grosseiros paralogismos das pretendidas demonstrações de serem imaginárias as quantidades negativas; e os paradoxos algébricos, que se propunham como consequências naturais dos princípios do cálculo; não por lhe responder, torno a repetir, pois era indigna de resposta pelo atrevido e insultante estilo em que está concebida; mas por satisfazer ao desejo de Vossa Mercê e desempenhar de alguma sorte a confiança, que tem feito de mim para haver de dirigi-lo na carreira dos seus estudos. Tenho sido longo, é verdade, mas isto nasceu de eu começar já esta carta com a firme intenção de ser a última, que sobre esta matéria lhe escrevesse, pois não chega a tanto minha condescendência para com a Vossa Mercê, que queira sustentar por mais tempo uma questão com pessoas, que não sabem o que é modéstia, civilidade, nem prudência; pois não sabem mais do que insultar, julgando talvez que disputam. Certamente não me moveu a responder-lhe nem o desejo de contender com um homem tão acreditado, como o D.r José Anastácio, nem o de convencer os seus vaidosos, e atrevidos discípulos; pois de nenhuma desta coisas me podia resultar a mínima glória. A única, que eu julgo haver nas matéria científicas, é a de achar, ou demonstrar a verdade; e ainda a esta não sei se lhe dê este nome, quando das verdades achadas ou demonstradas se não segue alguma utilidade do gênero humano. Mas deixando-nos de Filosofias, bem sei que o comum dos homens, que lerem esta Carta, a hão de começar a ler prevenidos contra mim, pois o nome de José Anastácio não é uma pequena razão para se criminar de atrevido um homem desconhecido, que se anima a impugnar as suas opiniões em uma ciência, de que ele é Professor. Porém os meus Juizes não hão de ser os homens comuns, hão de ser os verdadeiramente inteligentes desta matéria; e da sua sentença não tenho eu temor algum. Quanto aos espíritos apaixonados, e aos pouco inteligentes, que me censurarem de ousado, respondo com o célebre *Corregio*, quando o criminaram de censurar as obras de um Pintor: *son Pittore anch'io.* E a Vossa Mercê acrescento, que se os seus Condiscípulos aparecerem com outras dúvidas sobre estas matérias, em Lisboa de viva voz poderei poderei responder-lhe; pois brevemente parto para essa terra, aonde julgo terei alguma demora &c.

Porto, 28 de Agosto de 1785.